

www.salampnu.com

سایت مرجع دانشجوی پیام نور

- ✓ نمونه سوالات پیام نور : بیش از ۱۱۰ هزار نمونه سوال همراه با پاسخنامه
- تستی و تشریحی
- ✓ کتاب ، جزوه و خلاصه دروس
- ✓ برنامه امتحانات
- ✓ منابع و لیست دروس هر ترم
- ✓ دانلود کاملاً رایگان بیش از ۱۴۰ هزار فایل مختص دانشجویان پیام نور

www.salampnu.com

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

لازم به تذکر است به جهت این که Font بکاربرده شده در اسلاید
ها B Nnazanin می باشد خواهشمندیم قبل از نمایش اسلایدها
به نصب Font مذکور که در CD موجود می باشد اقدام نمایید.

نام درس: آنالیز عددی 1

تعداد واحد: ۴ واحد

منبع درس: کتاب آنالیز عددی ۱

مؤلف: دکتر اسماعیل بابلیان

تهیه کننده: محسن ساعدی

نوع درس: پایانه

ناشر: دانشگاه پیام نور

فهرست

فصل اول : خطاها

شامل ۱۰۴ اسلاید می باشد

فصل دوم: حل معادلات غیر خطی

شامل ۹۰ اسلاید می باشد

فصل سوم: حل معادلات چند جمله ای

شامل ۳۳ اسلاید می باشد

فصل چهارم : درونیابی

شامل ۹۴ اسلاید می باشد

فصل پنجم: مشتق گیری و انتگرال گیری

شامل ۱۰۵ اسلاید می باشد

فصل ششم: حل عددی معادلات دیفرانسیل

شامل ۲۵ اسلاید می باشد

فصل اول

خطاها

مقدمه

برای تعیین جواب یا جوابهای یک مسئله واقعی باید مدل ریاضی آن را بسازیم و پس از تعیین راه حلی مناسب برای رسیدن به جواب، با انجام محاسبات لازم جواب را به دست آوریم. در این فرایند خطاهایی پیش می آید که انواع متفاوت دارند. آشنایی با منشاء این خطاها، نحوه بروز آنها و کنترل آنها موضوع این فصل است.

هدفهای کلی

- 1) شناخت منابع خطا و تشخیص آنها در هر مسئله
- 2) بررسی منابع خطا و راه های کمینه سازی آنها
- 3) شناخت انواع خطاها و رابطه آنها با دقت یک تقریب
- 4) جلوگیری از رشد خطاها در محاسبات عددی
- 5) شناخت روش های محاسبه پایدار و ناپایدار
- 6) محاسبه مقدار تقریبی توابع.

هدفهای رفتاری

دانشجو پس از مطالعه این فصل باید بتواند :

- (1) منشا خطاها را در یک مسئله واقعی تعیین کند
- (2) بسط اعداد را در مبناهای مختلف بنویسد و از بسط اعشاری یک عدد، تقریبی مناسب انتخاب کند.
- (3) انواع خطاها را بشناسد و ارتباط آنها را با دقت یک تقریب بداند
- (4) یک محاسبه عملی را چنان تر تیب و به انجام رساند که رشد خطاها حداقل باشد.
- (5) محاسبه توابع و سری ها را با حداقل خطا و عملیات انجام دهد.

الف) خطای مدل

این خطا شامل صرفنظر کردنها، چشم پوشیها و ساده نویسیها جهت تعیین مدل ریاضی مسئله است.

ب) خطای داده ها

این خطا به هنگام اندازه گیری و برآورد مفروضات مسئله پیش می آید.

پ) خطای نمایش اعداد

نمایش اعشاری یا دودویی اکثر اعداد با تعدادی متناهی رقم امکان پذیر نیست. از این رو، انتخاب تعدادی متناهی از ارقام بسط یک عدد سبب این خطا می شود.

ت) خطای اعمال حسابی

حاصل بعضی اعمال بر دو عامل عددی دارای تعداد نامتناهی رقم است و انتخاب تعدادی متناهی از این ارقام سبب این خطا می شود.

ث) خطای روش

روشهای عددی عموماً تکراری هستند و تقریبی از جواب دقیق را به دست می دهند. دقت این تقریب به نوع روش و مرحله توقف آن بستگی دارد.

1-1-1 تبصره

اگر ضمن انجام عملیات بر روی عدد ۲۳۳، آن را ۲۳۳۱ منظور کنیم یک اشتباه مرتکب شده ایم نه خطا. همچنین اشکالاتی که در اثر تغییر ناگهانی و شدیدولتاژ برق برای کامپیوتر پیش می آید. و بعضاً موجب نتایج عددی غلط می شود را خطا نمی نامیم. در این فصل تنها به بررسی خطاها می پردازیم.

از پنج منبع خطایی که ذکر شد خطای مدل و خطای داده ها به نوع مسئله بستگی دارند. وافرادی که در رشته های مختلف به تعیین مدل مسئله می پردازند مسئول آنها هستند. اما، سه خطای بعدی مربوط به آنالیز عددی است.

در این فصل خطای نمایش اعداد و خطای اعمال حسابی را مورد بررسی دقیق قرار می دهیم. معمولاً خطای هر روش هنگام بررسی آن روش مورد بحث قرار می گیرد و کران بالایی برای خطای جواب های تقریبی به دست می آید.

۱-۲ نمایش اعداد

در اکثر مسائل، که در آنها جواب عددی مورد نظر است، معمولاً تعداد عملیات و نوع آنها به گونه ای است که انجام آنها با دست و به کمک قلم و کاغذ بسیار مشکل و گاهی غیر ممکن است. برای تعیین جواب عددی مسائل از ماشین حساب یا کامپیوتر استفاده می شود، که از این به بعد به آنها وسایل محاسباتی می گوییم .

همانطور که می دانید کار با کسرهای متعارفی و اعداد گنگ (اصم) توسط ماشین حساب و کامپیوتر عملی نیست (البته کار با کسرها به طور محدود در ماشین حساب ها امکان دارد)، ولی براحتی می توان با اعداد اعشاری کار کرد.

۱-۲-۱ بسط اعشاری اعداد

منظور از بسط اعشاری یک عدد مثبت نمایش آن به شکل

$$a_m \times 10^m + a_{m-1} \times 10^{m-1} + \dots$$

است که در آن

$$a_m \neq 0, m \in \mathbb{Z}, 0 \leq a_i \leq 9$$

بسط فوق برای اعداد صحیح و اعشاری راحت است. مثلاً،

$$2347 = 2 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 7 \times 10^0$$

$$37 / 409 = 3 \times 10^1 + 7 \times 10^0 + 4 \times 10^{-1} + 9 \times 10^{-3}$$

اما برای اعداد کسری و کنگ باید وجود و نحوه به دست آوردن بسط اعشاری را توضیح دهیم. در مورد وجود و یکتایی بسط اعشاری برای هر عدد حقیقی مثبت قضیه زیر را داریم.

۱-۲-۲ قضیه

اگر A عددی حقیقی و مثبت باشد دارای بسط اعشاری منحصر به فرد زیر است:

$$A = a_m \times 10^m + a_{m-1} \times 10^{m-1} + \dots$$

که در آن $0 \leq a_i \leq 9, a_m \neq 0$ و شرط بی نهایت بار $a_i \neq 9$.

برای یکتائی بسط لازم است زیرا، طبق فرمول حد مجموع یک سری هندسی داریم:

$$0.999999\dots = 0.9 + 0.0 + 0.009 + \dots = \frac{0.9}{1-0.1} = 1$$

یعنی اگر شرط مذکور را بر داریم برای عدد دو بسط اعشاری خواهیم داشت. همچنین داریم.

$$0.45 = 0.449999 \dots \quad 0.27 = 0.269999 \dots$$

و بطور کلی ، هر عدد اعشاری مختوم (با تعدادی متناهی رقم) دارای دو بسط اعشاری خواهد بود.

۱-۲-۳ مثال

$$\frac{2}{3} = 0.6666... = 0.6 \quad , \quad \frac{22}{7} = 3.142857$$

منظور از ۱۴۲۸۵۷ آن است که دسته ارقام ۱۴۲۸۵۷ ، با همین ترتیب ، مرتبا تکرار می شوند، همچنین در مورد ۶.

$$\sqrt{2} = 1.4142..., \frac{3017}{198} = 15.237, \frac{23}{5} = 4.6$$

در مثالهای بالا بسط $\frac{23}{5}$ مختوم و بسط بقیه اعداد نامختوم است. بسط $\frac{22}{7}$ ، $\frac{2}{3}$ نامختوم و متناوب است اما بسط $\frac{3017}{198}$ نامختوم است ولی متناوب نیست (به قضیه زیر و نتیجه آن توجه کنید).

۱-۲-۴ قضیه

اگر بسط اعشاری عدد A مختوم یا نامختوم و متناوب باشد، A یک عدد گویاست.

برهان

ابتدا فرض می کنیم که بسط اعشاری A مختوم باشد. مثلاً،

$$A = a_1a_2...a_m / b_1b_2...b_n$$

که در آن $a_1, a_2, ..., a_m$ ارقام قسمت صحیح A و $b_1, b_2, ..., b_n$ ارقام بعد از ممیز هستند.

با این توضیحات داریم:

$$A = a_1a_2...a_m + 0 / b_1b_2...b_n$$

$$A - a_1a_2...a_m = 0 / b_1b_2...b_n = \frac{b_1b_2...b_n}{10^n}$$

$$A = \frac{10^n \times a_1a_2...a_m + b_1b_2...b_n}{10^n}$$

چون صورت و مخرج کسر اعداد صحیح هستند A گویاست.

حال فرض کنید بسط اعشاری A نامختوم و متناوب باشد. مثلاً

$$A = a_1 a_2 \dots a_m / b_1 b_2 \dots b_n c_1 c_2 \dots c_k$$

طبق قرارداد قبلی ارقام $c_2 \dots c_k$ مرتباً تکرار می شوند (توجه کنید که ممکن

است m یا n صفر باشد که در این صورت $a_1 \dots a_m$ و $b_1 \dots b_n$ نباید از

(۷.۱) نتیجه می شود:

$$A = a_1 a_2 \dots a_m / b_1 b_2 \dots b_n c_1 c_2 \dots c_k$$

ضمنا داریم:

$$c_1 c_2 \dots c_k = c_1 c_2 \dots c_k \left[\frac{1}{10^k} + \frac{1}{10^{2k}} + \dots \right]$$

حد مجموع سری داخل پرانتز برابر است با

$$\frac{\frac{1}{10^k}}{1 - \frac{1}{10^k}} = \frac{1}{10^k - 1}$$

بنابراین،

$$c_1 c_2 \dots c_k = \frac{c_1 c_2 \dots c_k}{10^k - 1}$$

در نتیجه ،

$$A = a_1 a_2 \dots a_m / b_1 b_2 \dots b_n + \frac{c_1 c_2 \dots c_k}{10^n (10^k - 1)} \quad (۸.۱)$$

که نشان می دهد A گویاست. (چرا؟)

عکس نقیض قضیه ۱-۲-۴ نتیجه مهم زیر را به دست می دهد.

1-2-5 نتیجه

اگر A عددی کنگ باشد بسط اعشاری آن نامختوم است ولی متناوب نیست.

یکی از مسائلی که در این قسمت مطرح می شود نوشتن کسر مساوی یک عدد اعشاری نامختوم و متناوب است . نحوه به دست آمدن این کسر در قضیه زیر آمده است.

1-2-6 قضیه

اگر $A = a_1 \dots a_m / b_1 \dots b_n c_1 \dots c_k$ آنگاه

$$A = a_1 \dots a_m + \frac{b_1 \dots b_n c_1 \dots c_k - b_1 \dots b_n}{\underbrace{999 \dots 900 \dots 0}_{\substack{\text{تا } K \quad \text{تا } n}}}$$

(۱.۹)

برهان

بنابر قضیه ۱-۲-۴:

$$0/b_1 \dots b_n c_1 \dots c_k = 0/b_1 \dots b_n + \frac{c_1 \dots c_k}{10^n(10^k - 1)}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{[10^{n+k} - 10^n] \times 0/b_1 \dots b_n + c_1 \dots c_k}{10^n(10^k - 1)} = \frac{10^k \times b_1 \dots b_n + c_1 \dots c_k - b_1 \dots b_n}{10^n(10^k - 1)} \\ &= \frac{b_1 \dots b_n c_1 \dots c_k - b_1 \dots b_n}{10^n(10^k - 1)} \end{aligned}$$

واضح است که ، $10^n(10^k - 1) = \underbrace{99 \dots 9}_{K \text{ تا}} \underbrace{00 \dots 0}_{n \text{ تا}}$ ~~حکم~~ ثابت شده است.

۱-۲-۷ مثال

۱- کسر مربوط به عدد اعشاری $3.\overline{07}$ به دست آورید.

بنابر رابطه (۸.۱) داریم:

$$3.\overline{07} = 3.\overline{0} + \frac{7}{10(10-1)} = 3 + \frac{7}{90} = \frac{277}{90}$$

و یا بنابر رابطه (۹.۱):

$$3.\overline{07} = 3 + \frac{07-0}{90} = \frac{277}{90}$$

۲- کسری را به دست آورید که بسط اعشاری آن $15.\overline{237}$ باشد.

با توجه به قضیه ۱-۲-۶ داریم:

$$m=2, a_1a_2=15, n=b_1=2, k=2, c_1c_2=37$$

$$15 \overline{) 237} = 15 + \frac{237 - 2}{990} = 15 + \frac{235}{990} = 15 + \frac{47}{198} \quad \text{بنابر (۹.۱):}$$

$$= \frac{3017}{198}$$

۱-۳ بسط اعداد در مبنای ۲

قضیه ۱-۲-۴ و نتیجه ۱-۲-۵ نشان می دهند که بسط اعشاری تمامی اعداد کنگ و بسیاری اعداد گویا نامختوم است. در این بخش خواهید دید که در مبنای ۲ وضع از این هم بدتر است! به این معنا که بسط اکثر اعداد اعشاری مختوم در مبنای ۲ نامختوم است.

۱-۳-۱ بسط اعداد صحیح در مبنای ۲

یک روش، تقسیمات متوالی و کنار هم گذاشتن باقیمانده هاست، که همه با آن آشنا

هستید. اما، این روش قابل تعمیم به اعداد غیر صحیح نیست. در اینجا

روشی را، طی چند مثال، ارائه می کنیم که قابل تعمیم به اعداد غیر صحیح نیز هست.

یعنی، با استفاده از آن می توان اعداد اعشاری را در مبنای ۲ نیز به دست آورد.

۱-۳-۲ مثال

۱- عدد ۳۹ را به مبنای ۲ ببرید:

بزرگترین عدد به صورت 2^k از ۳۹ بیشتر نیست می باشد. لذا می نویسیم

$$39 = 2^5 + 7$$

همچنین بزرگترین عدد بصورت 2^k از ۷ بیشتر نیست است 2^2 پس،

$$39 = 2^5 + 2^2 + 3$$

ضمنا واضح است که

$$3 = 2^1 + 2^0$$

$$39 = 2^5 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 100111_2$$

(برای هر توانی از ۲ که وجود نداشته باشد در بسط عدد رقم صفر منظور می شود.)

۲- عدد ۴۸ را در مبنای ۲ بنویسید.

طبق آنچه در مثال قبل عمل شد داریم:

$$48 = 2^5 + 16 = 2^5 + 2^4 = 110000_2$$

۳- عدد $0/75$ در مبنای ۲ بنویسید.

باز هم بزرگترین عدد به صورت 2^k که کمتر از $0/75$ باشد دست می آوریم با توجه به اینکه $0/5 = \frac{1}{2} = 2^{-1}$ می نویسیم،

$$0/75 = 2^{-1} + 0/25$$

در ضمن $2^{-2} = \frac{1}{4} = 0/25$ پس:

$$0/75 = 2^{-1} + 2^{-2} = 0/11_2$$

۴- عدد ۶۲۵/۹ را در مبنای ۲ بنویسید.

بنابر مثالهای قبل داریم:

$$9 = 2^3 + 1 = 2^3 + 2^0 = 1001_2$$

$$0/625 = 0/5 + 0/125 = 2^{-1} + 2^{-3} = 0/101_2$$

بنابراین

$$9/625 = 1001/101_2$$

بنابر آنچه در مثالهای بالا دیدید برای بردن یک عدد به مبنای ۲ کافی است که جدول ۱-۲ از اعداد را در نظر داشته باشیم و طبق آنچه گفته شد عمل کنیم.

0	0
0	0
0	0
2^4	16
2^3	8
2^2	4
2^1	2
2^0	1
2^{-1}	0.5
2^{-2}	0.25
2^{-3}	0.125
2^{-4}	0.0625
2^{-5}	0.03125
0	0
0	0
0	0

جدول ۱-۲

اما، بردن اعداد اعشاری به مبنای دو همیشه به سادگی مثالهای بالا نیست . به
مثال بعدی توجه کنید.

۵- عدد $0/34$ در مبنای دو بنویسید.

با توجه به جدول ۱-۲ داریم:

$$0/34 = 0/25 + 0/09 = 0/25 + 0/0625 + 0/0275$$

$$= 0/25 + 0/0625 + 0/015625 + 0/011875$$

$$= 2^{-2} + 2^{-4} + 2^{-6} + \dots (0/010101 \dots)_2$$

همانطور که از مثال بالا پیداست معلوم نیست که بسط $0.\overline{34}$ در مبنای دو مختوم است یا نامختوم ، و اگر نامختوم است متناوب است یا نه، در ضمن در هر مرحله پیدا کردن باقیمانده و یافتن رقم بعد ، با استفاده از جدول ۱-۲ ، کار راحتی نیست. در زیر روش آسانتری برای تعیین بسط اعداد در مبنای دو ارائه میکنیم.

۱-۳-۳ بسط اعداد در مبنای دو

در این قسمت روشی را شرح می دهیم که به سادگی بسط هر عدد بین ۰ و ۱ را در مبنای دو به دست می دهد و به راحتی قابل تعمیم به تعیین بسط یک عدد حقیقی در مبنای دلخواه R است که در آن . از همه مهمتر اینکه این روش تکراری است و با طبیعت کامپیوتر بعنوان وسیله ای سریع برای انجام کارهای تکراری سازگار است.

با توجه به مطالب بالا، کافی است بسط A را که

$$0 < A < 1$$

در مبنای دو به دست آوریم. فرض کنید بسط مورد نظر چنین باشد:

$$A = [0 / b_1 b_2 b_3 \dots]_2$$

بعبارت دیگر

$$A = b_1 \times 2^{-1} + b_2 \times 2^{-2} + b_3 \times 2^{-3} + \dots \quad (*)$$

با ضرب طرفین $(*)$ در ۲ به دست می آوریم:

$$2A = b_1 + b_2 \times 2^{-1} + b_3 \times 2^{-2} + \dots$$

قرار می دهیم:

$$x = b_2 \times 2^{-1} + b_3 \times 2^{-2} + \dots$$

و ادعا می کنیم که $0 \leq x < 1$. واضح است که چون همواره $b_i \geq 0$

باید $x \geq 0$ همچنین با توجه به اینکه باید بی نهایت بار (البته بطرط معادل بی نهایت بار دومبنای نه است)،

$$x < 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + \dots = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

بنابراین ،

$$2A = b_1 + x, \quad (0 \leq x < 1)$$

در نتیجه ، جزء صحیح دو طرف یکسان است، یعنی:

$$[2A] = [b_1 + x].$$

چون b_1 صحیح است و $x \leq 1$ داریم:

$$[b_1 + x] = b_1 + [x] = b_1$$

پس:

$$b_1 = [2A]$$

با بدست آمدن b_1 می توان (*) را چنین نوشت:

$$2A - b_1 = b_2 \times 2^{-1} + b_3 \times 2^{-2} + \dots$$

با مقایسه این تساوی و (*) نتیجه می گیریم که

$$b_2 = [2(2A - b_1)]$$

لذا اگر $2A - b_1$ مجدداً A بنامیم ، یعنی $A \leftarrow 2A - b_1$ آنگاه:

$$b_2 = [2A]$$

واضح است که اگر در مرحله ای $A=0$ ، کار تمام است و بسط A در مبنای دو مختوم است. اگر همواره می توان این عمل را تا آنجا که مایل باشیم ادامه دهیم. در عمل تعدادی متناهی از ارقام بسط A حساب می شود، مثلاً n رقم.

۱-۳-۴ تذکر

با تبدیل عدد ۲ به عدد طبیعی R می توان بسط A را در مبنای R به دست آورد. (به مثالهای ۲ و ۳ از ۱-۳-۵ توجه کنید)

۱-۳-۵ مثال

۱- بسط عدد $\frac{3}{7}$ را در مبنای ۲ بنویسید.

قرار می دهیم $A = \frac{3}{7}$ هر نتیجه

$$b_1 = [2A] = \left[\frac{6}{7} \right] = 0$$

که از آن نتیجه می شود، $2A - b_1 = \frac{6}{7}$ مقدار جدید A برابر $\frac{6}{7}$ است.

$$b_3 = [2A] = \left[\frac{10}{7} \right] = 1$$

بنابراین،

$$2A - b_2 = \frac{12}{7} - 1 = \frac{5}{7}$$

$$b_2 = [2A] = \left[\frac{10}{7} \right] = 1$$

و $2A - b_3 = \frac{3}{7}$ چون به مقدار اولیه A رسیدیم داریم:

$$\frac{3}{7} = [0/011011011 \dots]_2 = [0/\dot{0}1\dot{1}]_2$$

که، همانند آنچه در مبنای ۱۰ داشتیم، منظور از آن $11\dot{0}\dot{1}$ است که دسته ارقام


۰۱۱ مرتبا تکرار می شوند. عملیات بالا نشان می دهند که بسط $\frac{3}{7}$ در مبنای دو

نامختوم و متناوب است. عملیات مربوط به تعیین ارقام بسط A در یک مبنا را می توان

با یک جدول، نظیر جدول (۱-۳)، نمایش داد.

جدول (۳-۱)

A	i	2A	$b = [2A]$	$2A - b$
$\frac{3}{7}$	1	$\frac{6}{7}$	0	$\frac{6}{7}$
$\frac{6}{7}$	2	$\frac{12}{7}$	1	$\frac{5}{7}$
$\frac{5}{7}$	3	$\frac{10}{7}$	1	$\frac{3}{7}$
$\frac{3}{7}$				



۲- بسط عدد $0/3$ در مبنای ۵ بدست آورید. قرار می دهیم $A=0/3$

$R = 5$ داریم:

A	i	$5A$	$b=[5A]$	$5A-b$
$0/3$	1	$1/5$	1	$0/5$
$0/5$	2	$2/5$	2	$0/5$
$0/5$				




بنابراین،

$$0/3 = (0/1222\dots)_5 = (0/12)_5$$

۳- بسط کسر $\frac{1}{7}$ را در مبنای ۱۰ به دست آورید.
در این مثال $A = \frac{1}{7}$ و $R = 10$ جدول زیر را داریم:

<u>A</u>	<u>1</u>	<u>10A</u>	<u>b=[10A]</u>	<u>10A-b</u>
$\frac{1}{7}$	1	$\frac{10}{7}$	1	$\frac{3}{7}$
$\frac{3}{7}$	2	$\frac{30}{7}$	4	$\frac{2}{7}$
$\frac{3}{7}$	3	$\frac{20}{7}$	2	$\frac{2}{7}$
$\frac{6}{7}$	4	$\frac{60}{7}$	8	$\frac{4}{7}$
$\frac{4}{7}$	5	$\frac{40}{7}$	5	$\frac{5}{7}$
$\frac{5}{7}$	6	$\frac{50}{7}$	7	$\frac{1}{7}$
$\frac{1}{7}$				



بنابراین،


$$\frac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7}$$

البته بسط بالا را با تقسیم ۱ بر ۷ نیز می توان به دست آورد (امتحان کنید).

۴- بسط عدد اعشاری $0.\dot{1}$ در مبنای ۲ به دست آورید.

جدول زیر بسط مطلوب را به دست می دهد.

<u>A</u>	<u>i</u>	<u>2A</u>	<u>b=[2A]</u>	<u>5A-b</u>
0/1	1	0/2	0	0/2
0/2	2	0/4	0	0/4
0/4	3	0/8	0	0/8
0/8	4	1/6	1	0/6
0/6	5	1/2	1	0/2
0/2				



$$0/1 = (0/0001100110 \ 011 \dots)_2 = (0/00011)_2$$

توجه کنید که ساده ترین عدد اعشاری، یعنی $\frac{1}{10}$ بسطی نامختوم در مبنای دو است.
 ثابت می شود که بسط هر عدد گویا در هر مبنایی مختوم و متناوب است.

با توجه به اینکه تعدادی محدود از ارقام بسط هر عدد در مبنای دو قابل نگهداری در حافظه وسایل محاسباتی است، نتیجه می گیریم که تقریباً تمامی اعداد غیر صحیح به طور تقریبی در حافظه این وسایل ذخیره می شوند و این یکی از ضعفهای مهم این وسایل است که در عمل باعث مشکلات زیادی می شود .

بعداً خواهیم دید که خطای جزئی که در ذخیره اعداد پیش می آید گاهی سبب به دست آوردن جوابهای غیر قابل قبول برای بعضی مسائل می شود. یکی از مباحث بسیار مهم در آنالیز عددی نیز پیش بینی اثرات خطای نمایش اعداد در نتایج عددی است. در قسمتهای بعدی این فصل به برخی از این اثرات اشاره خواهیم کرد.

۱-۴ ارقام با معنا

در ریاضیات اعداد زیر با هم مساوی اند. $7/4$, $7/40$, $7/400$

اما در علمی که با اندازه گیری سر و کار دارند ، مانند فیزیک، شیمی و ...

چنین نیست. اگر گفته شود طولی را اندازه گرفتیم و نتیجه اندازه گیری

$7/40$ متر بوده است. این گفته بدان معناست که وسیله اندازه گیری دقتی تا

حد سانتیمتر داشته و حداکثر خطا $5/100$ سانتیمتر است. اگر نتیجه اندازه گیری

$7/400$ متر بود معلوم می شد که واحد اندازه گیری دقتی در حد میلیمتر داشته و

حداکثر خطا $5/1000$ میلیمتر بوده است. از این رو ، صفرهای جلوی این عدد را، که نشانه

دقت اندازه گیری هستند، صفرهای بامعنا میگویند

اکنون تعریفی نسبتاً دقیق از ارقام با معنا برای یک عدد ارائه می کنیم.

۱-۴-۱ نمایش علمی اعداد

فرض کنید A عددی مخالف صفر باشد. واضح است که A را همواره می توان به صورت:

$$A = a \times 10^b$$

نوشت که در آن b عددی صحیح است و

در این صورت می گوییم A بصورت علمی نمایش داده شده است. در این

$$1 \leq |a| < 10$$

نمایش a را مانتیس و b را نمای عدد A می نامند.

۱-۴-۲ تعریف

اگر عددی اعشاری باشد و $|a| < 10$ در این صورت ارقام با معنای a عبارت اند از ارقام

مخالف صفر a ، بین این ارقام و صفرهایی که جلوی عدد به منظـور نمایش دقت قرار دارند.

ارقام با معنای عدد مخالف صفر A ، همان ارقام با معنای مانتیس A تعریف می شود.

۱-۴-۳ مثال

(الف) اگر $A=213/76$ آنگاه $A=2/1376 \times 10^2$ و تعداد ارقام بامعنای A پنج است

(ب) اگر $A=0/00726$ آنگاه $A=7/26 \times 10^{-3}$ و دارای ۳ رقم با معناست.

(پ) اگر متر $2000 = A$ آنگاه متر $A=2/000 \times 10^3$ و دارای ۴ رقم با معناست.

(ت) اگر کیلو متر $d=78$ آنگاه متر $d=7/8 \times 10^4$ و دارای دورقم با معناست.

۱-۵ انتخاب تقریبی از یک عدد معلوم

در بخشهای ۱-۲ و ۱-۳ نشان داده شد که بسط اکثر اعداد دارای بی نهایت رقم است. ضمناً، می دانیم که وسایل محاسباتی از نظر نگهداری این ارقام محدودیت دارند. از این رو، باید تعدادی متناهی، که به نوع وسیله محاسباتی، قدرت آن و دقت لازم بستگی دارد، از ارقام بسط اعشاری یا دودویی عدد انتخاب کنیم. این کار به دو روش انجام می گیرد.

۱-۵-۱ روش قطع کردن

در این روش، با توجه به تعداد ارقامی که می توانیم یا می خواهیم نگهداری کنیم. بسط عدد را از رقم معینی قطع می کنیم. این رقم را اولین رقم ناخواسته می نامیم. بنابراین در روش قطع بسط عدد اعشاری، یا دودویی، عدد را از اولین رقم ناخواسته قطع می شود. مثلاً، اعداد زیر تا دو رقم اعشار (یا تا $2D$) قطع شده اند.

$$\pi = 3 / 14 (2D), e = 2 / 71 (2D), \frac{5}{3} = 1 / 66 (2D)$$

می توان گفت که اعداد سمت راست تساویها ی بالا، قطع شده اعداد سمت چپ تا 3 رقم با معنا هستند $(3S)$

۱-۵-۲ روش گرد کردن

در این روش با توجه به مقدار اولین رقم ناخواسته، تقریبی از عدد را بدست می آوریم. مثلاً در گرد کردن تا دو رقم اعشار :

$$2 / 3476 = 2 / 35 \text{ (2D)}, 3 / 7830 = 3 / 78 \text{ (2D)}$$

یعنی، اگر اولین رقم ناخواسته بزرگتر از ۵ باشد یک واحد به رقم قبل از آن اضافه و عدد را قطع می کنیم، و اگر اولین رقم ناخواسته کمتر از ۵ باشد عدد را بدون تغییر قطع می کنیم. اما، وقتی اولین رقم ناخواسته ۵ باشد به گونه دیگری عمل می کنیم. به مثالهای زیر توجه کنید:

$$3 / 685000106 = 2 / 69 \text{ (2D)}$$

(توجه کنید که در مثال بالا اولین رقم ناخواسته ۵ است و بعد از آن رقم مخالف

صفر وجود دارد)

(رقم قبل از ۵ فرد است) $17/835 = 17/84(2D)$

(رقم قبل از ۵ زوج است) $2/465 = 2/46(2D)$

علت اصلی در نحوه گرد کردن اعداد در دو حالت اخیر آن است که مقادیری که از اعداد کم یا به آنها اضافه می شود در عمل همدیگر را خنثی می کنند. بعبارت دیگر، در یک مسئله با محاسبات زیاد، احتمال وقوع اعداد اعشاری با رقم سوم اعشار ۵ و رقم دوم اعشار زوج یا فرد یکسان است، از این رو میانگین خطای گرد کردن متناظر با آنها صفر است.

۱-۵-۳ گرد کردن تا n رقم اعشار

به طور کلی اگر $A \neq 0$ دارای بسط اعشاری زیر باشد

$$A = a_1 a_2 \dots a_m / b_1 b_2 \dots b_n b_{n+1} \dots$$

و بخواهیم گرد شده A را تا n رقم اعشار به دست می آوریم چنین عمل می کنیم

I: اگر $b_{n+1} > 5$ یک واحد به اضافه و عدد را از قطع^b می کنیم

II: اگر $b_{n+1} < 5$ عدد را از قطعⁿ⁺¹ می کنیم.

III: اگر $b_{n+1} = 5$ و بعد از این رقم، رقم مخالف صفر وجود داشته باشد مانند (I)

عمل می کنیم.

IV. اگر $b_{n+1}=5$ و بعد از این رقم، رقم دیگری نباشد، یا فقط صفر باشد، در صورتی که فرد باشد و در تغییر این صورت مانند (II) عمل می کنیم.

۱-۵-۴ مثال

۱- در زیر گرده شده، چند عدد را ملاحظه کنید

$$\frac{2}{3} = 0/667 \text{ (3D)}, \sqrt{2} = 1/414 \text{ (3D)}, 3/99 = 4/00 \text{ (2D)}$$

$$\frac{22}{7} = 3/14 \text{ (3S)}, \pi = 3/142 \text{ (4S)}, \sqrt{3} = 2 \text{ (1S)}, 1/99 = 2/0 \text{ (2S)}$$

2- اگر a گرد شده $\frac{2}{3}$ قطع شده دو رقم اعشار باشند داریم:

$$a = 0.67, \left| \frac{2}{3} - a \right| = \frac{1}{300}$$

$$b = 0.66, \left| \frac{2}{3} - b \right| = \frac{2}{300}$$

یعنی، فاصله $\frac{2}{3}$ است. بعبارت دیگر خطای قطع کردن تا دو برابر خطای گرد کردن است. در عمل بیشتر از گرد کردن استفاده می شود. (هر چند قطع کردن ساده تر است و در اکثر ماشین حسابها از آن استفاده می شود).

۱-۵-۵ نتیجه

اگر a گرد شده A تا n رقم اعشار باشد، با توجه به نحوه گرد کردن داریم:

$$|A - a| \leq 5 \times 10^{-(n+1)}$$

نامساوی بالا نشان می دهد که هر چه n بزرگتر باشد a به A نزدیکتر خواهد بود، به همین دلیل است که هر وقت دقت زیاد مورد نظر باشد از دقت مضاعف استفاده می شود (که در این صورت دو کلمه از حافظه برای ذخیره یک عدد اعشاری به کار می رود).

با توجه به آنچه گفته شد برای انتخاب تقریبی از یک عدد معلوم، ابتدا بسط اعشاری آن را به دست می آوریم و سپس گرد شده آن را، تا هر تعداد رقم با معنا که می توانیم نگهداری با ذخیره کنیم، معین می کنیم. در کامپیوترهای متوسط معمولاً هفت تا هشت رقم با معنا از مانتیس اعداد نگهداری می شود (البته دقت معمولی). اگر دقت مضاعف به کار رود تا ۱۷ رقم با معنای بسط اعشاری اعداد قابل ذخیره است.

۱-۶ انواع خطا

در آنالیز عددی معمولاً تقریبهایی از یک مجهول در دست است و لازم است دقت این تقریبها و رفتار آنها مورد بررسی قرار گیرد.

۱-۶-۱ تعریف

اگر a تقریبی از A باشد و قرار دهیم

$$e(a) = |A - a|$$

آنگاه $e(a)$ را خطای مطلق a نامند.

۱-۶-۲ مثال

۱- فرض کنید $a_n = \frac{n+1}{n}$ بتوان تقریبی از عدد یک چقدر

است؟

$$e(a_n) \left| 1 - \frac{n+1}{n} \right| = \frac{1}{n}$$

مشاهده می شود که هر چه n بزرگتر اختیار شود کوچکتر خواهد و در نتیجه به

یک نزدیکتر خواهد شد. اگر بخواهیم خطای از، مثلا، $0/001$

کوچکتر باشد کافی است قرار دهیم:

$$\frac{1}{n} < 0/001$$

که از آن نتیجه می شود $1000 < n$ اولین n که در نامساوی اخیر صدق می کند 1001 است

که به ازای آن

$$a_n = \frac{1002}{1001} = 1/000999 \text{ (6D)}$$

اما همیشه وضع به گونه ای نیست که عدد A را داشته باشیم. معمولا A ، مجهول است و یا حتی در حالت معلوم بودن به راحتی قابل بیان نیست.

۲- می دانیم که $1/41$ تقریبی از $\sqrt{2}$ است. خطای مطلق $1/41$ چیست؟ اگر بسط اعشاری را، با استفاده از یک ماشین حساب، بنویسیم یعنی:

$$\sqrt{2} = 1 / 414213562 \quad (9D)$$

خواهیم داشت

$$e(1/41) = \left| \sqrt{2} - 1/41 \right| = \sqrt{2} - 1/41$$

$$e(1/41) = 0/004213562 \dots$$

مشاهده می شود که $e(1/41)$ سادگی قابل بیان نیست و همان $1/41 - \sqrt{2}$ ساده تر
و دقیقتری از آن است. حال فرض کنید که حدود را بدانیم، مثلاً $\sqrt{2}$ بدانیم که

$$1/414 < \sqrt{2} < 1/415$$

در این صورت:

$$0/004 < \sqrt{2} - 1/41 < 0/005$$

بنابراین،

$$e(1/41) < 0/005$$

بدیهی است که $0/005$ یک کران بالا برای خطای $41/1$ است و تا حد زیادی مقدار
نزدیکی (یا دقت) $41/1$ را به نشان $\sqrt{2}$ دهد.

در اکثر روشهای آنالیز عددی حدود جواب ، یعنی کران بالا و پایینی برای جواب، قابل محاسبه است که از آنجا کران بالایی ، طبق توضیحات بالا، برای $e(a)$ به دست می

۱-۶-۳ تعریف

هر عدد ناکمتر از $\phi(a)$ یک خطای مطلق حدی a نامیم و با نمایش e می دهیم.

بنابراین ، همواره $e(a) \leq e_a$ محصور به فرد نیست (بر خلاف $e(a)$)

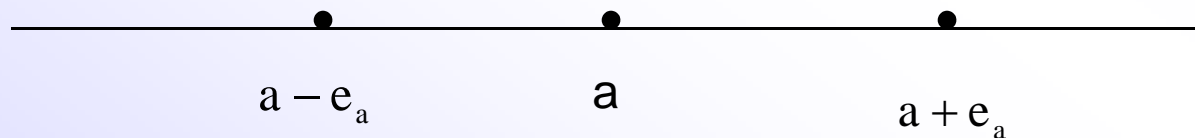
اکنون فرض کنید یک خطای مطلق حدی چون $e(a)$ یقینی به دست آمده باشد.
یعنی،

$$e(a) = |A - a| \leq e_a$$

با استفاده از نامساوی اخیر و خواص قدر مطلق داریم:

$$a - e_a \leq A \leq a + e_a$$

این نامساویها نشان می دهند که A در بازه $[a - e_a, a + e_a]$ قرار دارد.



A متعلق به بازه بالاست

طول این بازه e_a است و هر چه کوچکتر باشد حدود دقیقتری برای A حاصل می شود.

1-6-4 قرارداد

هر وقت $|A - a| \leq e_a$ می نویسیم:

$$A = a \pm e_a$$

۱-۶-۵ مثال

۱- اگر $1 = 2/7 \pm 0/04$ محدود ۱ را تعیین کنید

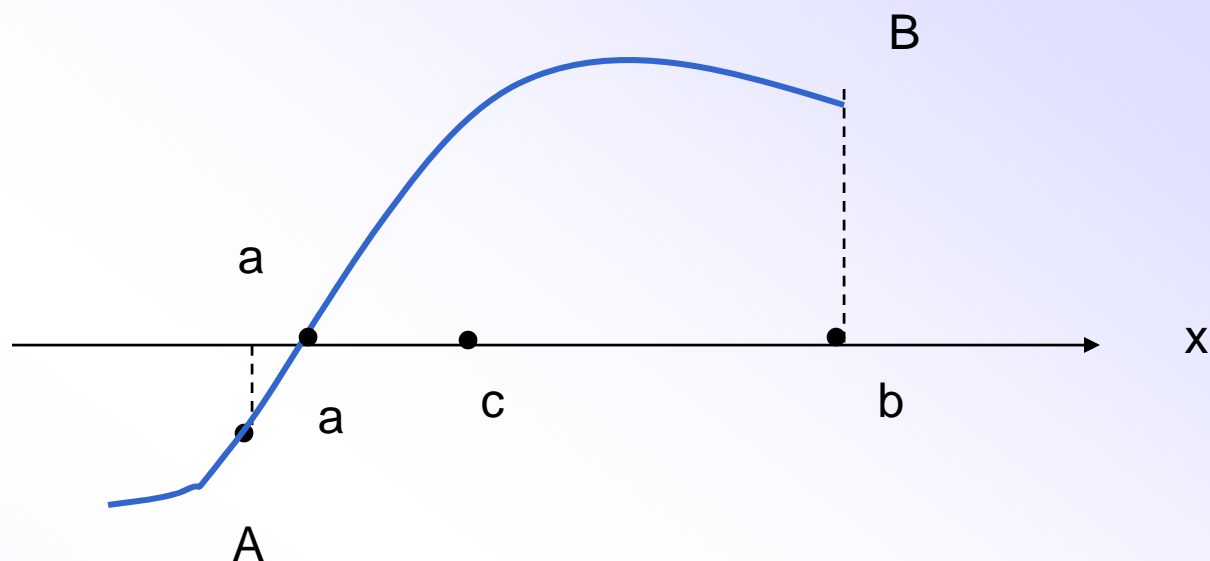
$$2/7 - 0/04 \leq 1 \leq 2/7 + 0/04$$

پس

$$2/66 \leq 1 \leq 2/74$$

در روشهای عددی عمدتاً A مجهول است و یک خطای مطلق حدی برای تقریب a از A قابل محاسبه است. در این مورد، به مثال زیر توجه کنید.

۲- فرض کنید $Y = F(x)$ در بازه (a,b) محور X ها را قطع می کند (شکل ۱-۴) تقریبی از طول نقطه برخورد منحنی با محور X را تعیین کنید و حداکثر خطای آن را به دست آورید.



محل تلاقی منحنی با محور a, x است و c را وسط بازه (a, b) می گیریم، در واقع

$c = \frac{a + b}{2}$ واضح است که c تقریبی از a است به وضوح فاصله a تا c کمتر از نصف

طول بازه (a, b) است.

یعنی،

$$|a - c| \leq \frac{b - a}{2}$$

مشاهده می شود که عدد $\frac{b-a}{2}$ یک کران بالا برای خطای c است که به محل a بستگی ندارد و به سادگی قابل محاسبه است.

حال این سوال مطرح است که

«آیا خطای مطلق یک تقریب، دقت آن تقریب را کاملاً مشخص می کند؟» مطالب زیر را مطالعه و به سوالات مربوط پاسخ دهید تا جواب سوال بالا مشخص شود.

الف) دو صندوقدار بانک را در نظر بگیرید که یکی با رد و بدل کردن، مثلاً، یک میلیون تومان، صد تومان کم، و دیگری با رد و بدل کردن پانصد هزار تومان، صد تومان زیاد آورده است! دقت کدام صندوقدار بیشتر بوده است؟

(ب) دو ماشین نویس را در نظر بگیرید که یکی در تایپ دو صفحه ده کلمه و دیگری در تایپ ۲۰ صفحه ده کلمه غلط تایپ کرده است. دقت کدام ماشین نویس بیشتر بوده است؟

(ج) دو دروازه بان را در نظر بگیرید که یکی از ۵ پنالتی ۴ گل و دیگری از ۱۰ پنالتی ۴ گل خورده است. کدام دروازه بان بهتر بوده است (دقیقتر عمل کرده است)؟

از مثالهای فوق چنین بر می آید که آنچه دقت یک تقریب را معین می کند خطا در واحد کمیت است که هر چه کوچکتر باشد تقریب بهتر (دقیقتر) است.

۱-۶-۶ تعریف

اگر a تقریبی از عدد مخالف صفر A باشد خطای نسبی a را با $\delta(a)$ نشان می دهیم و آن عبارت است از خطا در واحد کمیت، یعنی،

$$\delta(a) = \frac{|A - a|}{A}$$

همانطور که دیده می شود ، A که معمولاً مقدار آن معلوم نیست، هم در

صورت و هم در مخرج کسر موجود است، می توان یک کران بالا برای

$\delta(a)$ به دست آورد که A در آن نباشد.

۱-۶-۷ قضیه

اگر a و e_a یک خطای مطلق حدی a باشد داریم

$$\delta(a) \leq \frac{e_a}{|a| - e_a}$$

کسر اخیر را با δ_a نشان می دهیم و آن را خطای نسبی حدی می نامیم.

اگر e_a در مقایسه با $|a|$ کوچک باشد می توان از آن صرفنظر کرد و نوشت:

$$|a| - e_a \cong |a|$$

۱-۶-۹ نتیجه

اگر e_a در مقایسه با $|a|$ کوچک باشد

$$\delta(a) \cong \frac{e_a}{|a|}$$

(نماد δ که معنی «تقریبا کوچکتر از» است)

با توجه به اینکه در عمل a محاسبه و برآورد می شود کسر $\frac{e_a}{|a|}$ همیشه
 قابل محاسبه است و به همین دلیل بعضی کتابها $\frac{e_a}{|a|}$ را تقریبا مساوی $\delta(a)$ می
 گیرند. ما نیز از این به بعد چنین می کنیم. یعنی، فرض می کنیم
 مقایسه با $|a|$ اغماض باشد و قرار می دهیم .

$$\delta(a) \cong \frac{e_a}{|a|}$$

۱-۶-۹ مثال

فرض کنید $a = 41/1$ و $\sqrt{2}$ خطای نسبی a را حساب کنید.

$$\delta(a) = \frac{\sqrt{2} - 1/41}{\sqrt{2}} = \frac{0/004213562}{1/414213562} = 0/002979438$$

اما اگر ، با توجه به مثال ۱-۶-۳ قرار دهیم $0/005$ خواهیم داشت

$$\delta(a) \cong \frac{0/005}{1/41} = 0/0035460992 \quad 91 \dots$$

که تفاوت چندانی با $\delta(a)$ دارد (اختلاف حدود $0/0006$ است) اگر قرار می

دادیم $0/0043$ مقدار $\frac{e_a}{a}$ چقدر با $\delta(a)$ اختلاف داشت؟

۱-۷ ارقام با معنای درست یک تقریب

هر یک از اعداد زیر یک تقریب از عدد e هستند

$$۲/۷۱۸۱ \text{ و } ۲/۷۱۸ \text{ و } ۲/۷۲ \text{ و } ۲/۷ \text{ و } ۳$$

یکی از راههای تعیین دقت این تقریبها آن است که خطای نسبی آنها را حساب کنیم. اکنون این سوال مطرح است که آیا راه دیگری برای تعیین این اعداد وجود دارد؟ مثلاً، با استفاده از تعداد ارقام آن یا خصوصیات دیگر؟ بدیهی است که تعداد ارقام با معنای یک تقریب موید دقت آن تقریب نیست. مثلاً، عدد $۳/۷۱۸۲۳۸$ تقریبی از عدد e است که ۷ رقم با معنا دارد. آیا این عدد تقریب خوبی از e است؟ آیا ۳ تقریب بهتری نیست؟ پس چگونه می توان با توجه به ارقام یک تقریب به دقت آن پی برد؟ اینجا است که پای مفهوم ارقام با معنای درست به میان می آید. این مفهوم از گرد کردن یک عدد ناشی شده است.

قبل از ارائه تعریف دقیق ارقام با معنای درست هر تقریب ، مثالی می آوریم.

۱-۷-۱ مثال

فرض کنید $A=8/000$ و $a=7/997$ و $a'=8/08$ مشاهده می شود که درست a' و رقم ، مساوی با ارقام A دارد (با حفظ ارزش هر رقم) . اما هیچیک از ارقام a مساوی ارقام A نیست . آیا می توان گفت که ارقام درست بیشتر از ارقام درست a است؟ خواهیم دید که نه.

مفهوم ارقام با معنای درست هر تقریب رابطه تنگاتنگ با دقت آن تقریب دارد.

در اینجا

$$e(a) = 0/003 \quad , \quad e(a') = 0/08$$

و در واقع باید تعداد ارقام درست بیشتری داشته باشد! اما، تعداد ارقام بامعنای درست چگونه به دست می آید؟ به بیان نادقیق به صورت زیر

اگر a را تا سه رقم با معنا گرد کنید عدد A حاصل می شود. از این رو، a سه رقم با معنای درست دارد. اگر a را تا رقم i کان گرد کنید A حاصل می شود (توجه کنید که حتی گرد شده تا یک رقم اعشار a به $1/8$ منجر می شود که مساوی A نیست). یعنی، تنها یک رقم با معنای درست دارد (هر چند که دو رقم آن دقیقا در بسط A ملاحظه می شود)

۱-۷-۲ تعریف

فرض کنید

$$a = a_m \times 10^m + a_{m-1} \times 10^{m-1} + \dots \quad (a_m \neq 0)$$

بسط اعشاری a و d تعداد ارقام با معنای a باشد در این صورت بزرگترین عدد صحیح نامنفی n که $n \leq d$

$$|A - a| \leq 5 \times 10^{m-n}$$

تعداد ارقام با معنای درست a نامیده می شود

۱-۷-۳ مثال

(الف) اگر $a = ۱۴/۳$ آنگاه

$$a = 3 \times 10^0 + 1 \times 10^1 + 4 \times 10^2, m = 0$$

(ب) اگر $a = 0/0078$ آنگاه

$$a = 7 \times 10^{-3} + 8 \times 10^{-4}, m = -3$$

(پ) اگر $a = 123/7$ آنگاه

$$a = 1 \times 10^{-2} + 2 \times 10^1 + 3 \times 10^0 + 7 \times 10^1, m = 2$$

(ت) اگر $a = \frac{1}{3}$ آنگاه $a = 0/0\overset{0}{3}$ در نتیجه ، $m = -2$

بطور کلی اگر

$$a = a_m \times 10^m + a_{m-1} \times 10^{m-1} + \dots > 0 \quad (a_m \neq 0)$$

$$10^m \leq a < 10^{m+1}$$

و در نتیجه ، $m \leq \log_{10} a < m+1$ که با توجه به تعریف جزء صحیح معلوم

می شود که $m = [\log_{10} a]$ عبارت دیگر m مساوی مفسر لگاریتم a در مبنای ده است.

از این رو، اگر $a \geq 1$ نگاه

$$m = [a] \text{ (تعداد ارقام)} - 1$$

و اگر $0 < a < 1$ نگاه

$+1$ (تعداد صفرهای بلافاصله بعد از ممیز در بسط a) $\{ -m$ (یا m قرینه تعداد صفرهای

قبل و بلافاصله بعد از ممیز در بسط اعشاری a است.) به این ترتیب بدون نوشتن بسط

اعداد نیز می توان مقدار m مربوط به آنها را بدست آورد. کافی است معین کنیم a

کوچکتر از یک است یا بزرگتر یا مساوی ۱ و طبق آنچه در بالا گفته شد عمل کنیم.

۱-۷-۴ مثال:

1- در بسط اعشاری $e^{\frac{1}{3}}$ مقدار m را حساب کنید.

با توجه به اینکه $\frac{1}{3} < 1$ داریم $e^0 < e^{\frac{1}{3}} < e^1$

پس، $1 < e^{\frac{1}{3}} < e < 3$ از این رو، قسمت صحیح یک $e^{\frac{1}{3}}$ همی است (یا یک است یا دو).

بنابراین $m=0$

2- اگر $A=8/00$ ، $a=7/997$ ، $a'=8/08$ اعداد ارقام با معنای درست a و a' را حساب کنید.

با توجه به اینکه جزء صحیح a و اعداد یک رقمی هستند، m برای هر دو صفر است. و داریم:

$$e(a) = 0/003$$

حال باید بزرگترین n را به دست آوریم که در نامساوی زیر صدق کند

$$0/003 \leq 5 \times 10^{0-n}$$

بدیهی است که بزرگترین n برابر ۳ است. یعنی، a دارای ۳ رقم با معنای درست است. برای a' نیز داریم

$$e(a') = 0/008 < 0/5 = 5 \times 10^{0-1}$$

یعنی a' تنها یک رقم با معنای درست دارد.

3- اگر $A = 100$ ، $a = 99/98$ ، $b = 100/6$ تعداد ارقام با معنای درست a و b را حساب کنید.

در مورد a داریم $m=1$ و

حال باید بزرگترین n را چنان تعیین کنیم که $e(a) = 0/02$

بدیهی است که $n=3$ جواب است. یعنی $5 \times 10^{1-n} < 0/02$ رقم با معنای درست است.

در مورد b داریم $m=2$ و باید $e(b) = 0/6 < 5 \times 10^{2-n}$ — جواب است

یعنی، b تنها دو رقم با معنای درست دارد.

در زیر طی چند قضیه و مثال ارتباط بین ارقام با معنای درست یک تقریب و دقت آن را، که با خطای نسبی محک زده می شود، بررسی می کنیم.

۱-۷-۵ قضیه

اگر a تقریبی از A با n رقم با معنای درست باشد $B = 10^k \times A$ $b = 10^k \times a$

، که در آن k عددی صحیح است، آنگاه b نیز تقریبی از B با n رقم با معنای درست است و خطای نسبی a و b یکسان هستند.

۱-۷-۶ قضیه

اگر a گرد شده عدد مثبت A تا n رقم با معنا باشد a دارای n رقم با معنای درست است.

۱-۷-۷ قضیه

اگر $a > 0$ تقریبی از A و دارای n رقم درست باشد خطای نسبی a از 5×10^{-3} کمتر است ، به شرط آنکه رقمهای درست a شامل یک رقم یک و $n-1$ صفر درست راست آن نباشد.

۱-۷-۸ مثال

تقریبی از π ارائه دهید که خطای نسبی آن از 10^{-3} کمتر باشد.

یکی از راههای تعیین این تقریب آن است که عدد π را تا یک رقم، دو رقم، ... اعشار گرد و خطای نسبی هر یک را محاسبه کنیم، تا زمانی که از کمتر شود! 10^{-3} دیگر، مقدار کسرهای زیر را حساب کنیم تا به عددی کوچکتر از 10^{-3} برسیم.

$$\frac{\pi - 3/1}{\pi}, \frac{\pi - 3/14}{\pi}, \frac{\pi - 3/14}{\pi}, \dots$$

اما، با استفاده از قضیه ۱-۷-۷ به راحتی می توان جواب را به دست آورد. با توجه به

نامساوی

$$5 \times 10^4 < 10^3$$

اگر a چنان تقریبی از π باشد که ۴ رقم با معنای درست داشته باشد بنابر قضیه ۱-۷-

۷-۷

$$\delta(a) < 5 \times 10^{-4}$$

و بنابراین $\delta(a) < 10^{-3}$ از این رو، با توجه به قضیه ۱-۷-۶ کافی است a را گرد شده تا ۴ رقم با معنا اختیار کنیم. یعنی، $a^{-3/142}$ تقریب مورد نظر است.

۱-۷-۹ قضیه

اگر $a > 0$ تقریبی باشد بطوری که $\delta(a) \leq 0.5 \times 10^{-n}$ حداقل n رقم با معنای درست دارد.

با توجه به این که خطای نسبی یک تقریب دقت آن تقریب را نشان می دهد قضایای ۷-۷-۱ و ۹-۷-۱ به خوبی ارتباط بین دقت یک تقریب را با تعداد ارقام درست آن نشان می دهند. در بعضی مسائل خطای نسبی تقریب را می توان به دست آورد (مثلا، در حل دستگاه معادلات خطی به روشهای عددی) که در نتیجه با استفاده از قضیه ۹-۷-۱ می توان حداقل ارقام بامعناى درست تقریب به دست آمده را تعیین کرد.

در برخی دیگر از مسائل می توان تعداد ارقام با معنای درست یک تقریب را بدست آورد، مثلا، در روش نیوتن برای تعیین تقریبی از یک ریشه معادله $f(x)=0$ که با توجه به قضیه ۷-۷-۱ می توان خطای نسبی و در نتیجه دقت تقریب آن را معین کرد.

۸-۱ تولید و انتشار خطا

همانطور که می دانید صورت علمی نمایش هر عدد اعشاری مخالف صفر

$$a \times 10^b$$

است که در آن،

$$1 \leq |a| < 10$$

این نمایش را نمایش ممیز سیار نیز می نامند (با تغییر نما، ممیز در بین ارقام a تغییر محل می دهد). محاسبه با این اعداد را نیز حساب ممیز سیار می نامند. قبل از این که نحوه تولید و انتشار خطا را توضیح دهیم لازم است درمورد چگونگی انجام چهار عمل اصلی روی اعداد ممیز سیار مطالبی را بیان کنیم.

برای سادگی بحث فرض کنید فقط سه رقم با معنا از ارقام مانتیس هر عدد اعشاری ، یعنی a ، را می توانیم نگه داریم؛ این را حساب ممیز سیار سه رقمی نامند.

۱-۸-۱ حساب ممیز سیار

در اینجا اعمال اصلی بر اعداد ممیز سیار را بررسی می کنیم.

الف) جمع و تفریق

برای بدست آوردن حاصل جمع یا تفاضل دو عدد ابتدا نماها یکسان می شوند ، در صورت لزوم با افزایش نمای عدد کوچکتر، سپس حاصل عمل بدست می آید و سرانجام جواب حاصل بصورت علمی ، با مانتیسی که ۳ رقم با معنا دارد ، نوشته می شود.

مثلا

$$3/12 \times 10^1 + 8/34 \times 10^1 = 11/46 \times 10^1 = 1/146 \times 10^2 \rightarrow 1/15 \times 10^2$$

$$6/48 \times 10^1 + 1/45 \times 10^{-1} = 6/48 \times 10^{-1} + 0/0145 \times 10^1 = 6/4945 \times 10^1 \rightarrow 6/49 \times 10^1$$

$$3/56 \times 10^{-1} - 2/67 \times 10^{-1} = 0/89 \times 10^{-1} \rightarrow 8/9 \times 10^{-2}$$

$$1/49 \times 10^{+1} - 1/2 \times 10^{-1} = 1/49 \times 10^{-1} - 0/012 \times 10^1 = 1/478 \times 10^1 \rightarrow 1/48 \times 10^1$$

(ب) ضرب

در ضرب دو عدد ممیز سیار، نماها با هم جمع و مانتیسه‌ها در هم ضرب می شوند. سپس نتیجه نهایی، با گرد کردن، بصورت علمی نمایش داده می شود. مثلاً،

$$[3/25 \times 10^1] \times [2/46 \times 10^1] = 7/995 \times 10^2 \rightarrow 8/00 \times 10^2$$

$$[7/48 \times 10^3] \times [3/37 \times 10^{-2}] = 25/2076 \times 10^1 = 2/52076 \times 10^2 \rightarrow 2/52 \times 10^2$$

ج) تقسیم

برای تقسیم دو عدد ممیز سیار، ابتدا تفاضل به دست می آید، سپس مانتیسه‌ها بر هم تقسیم شده و حاصل بصورت علمی نمایش داده می شود. مثلاً،

$$\frac{5/43 \times 10^1}{4/55 \times 10^2} = 1/1934... \times 10^{-1} \rightarrow 1/19 \times 10^1$$

$$\frac{2/75 \times 10^1}{9/87 \times 10^3} = 0/278622... \times 10^{-2} = 2/78622... \times 10^{-3} \rightarrow 2/79 \times 10^{-3}$$

مشاهده می شود که حتی اگر عوامل یک عمل دقیق باشند، نتیجه، معمولاً، گرد شده حاصل دقیق است، خطایی که به این ترتیب وارد می شود خطای تولید شده نام دارد.

د) محاسبه عبارات

ممکن است در یک عبارت محاسباتی چهار عمل اصلی شرکت داشته باشند. در این صورت، عملیات همانند آنچه توضیح داده شد انجام می شود تا حاصل نهایی بدست آید .

$$\frac{6/18 \times 10^1 + 1/84 \times 10^{-1}}{(4/72 \times 10^1)(6/38 \times 10^1)} \rightarrow \frac{6/20 \times 10^1}{3/01 \times 10^3} = 2/0598... \times 10^{-2} \rightarrow 2/06 \times 10^{-2}$$

در مثال بالا، مقادیر صورت و مخرج کسر دوم شامل خطاهای تولید شده هستند. این اعداد تقریبی نیز بر هم تقسیم می شوند و نتیجه نهایی باز هم شامل خطای تولید شده دیگری است. بدیهی است که خطاهای تولید شده در صورت و مخرج کسر دوم انتشار پیدا می کنند و روی مقدار جواب نهایی اثر می گذارند.

۱-۲-۸ تفاوت‌های حساب ممیز سیار با حساب معمولی

در حساب ممیز سیار، با هر تعداد رقم که بتوان نگهداشت ، قوانین حساب

معمولی نظیر وجود عضو بی اثر برای جمع ، شرکت پذیری ضرب یا جمع و

... عموماً برقرار نیستند. این موارد در مثالهای زیر بررسی می شود.

الف) در حساب ممیز سیار، مثلاً، سه رقمی، هر عدد کوچکتر از 10^{-3} به عدد $۷۵/۲$ خواهد بود، بعنوان مثال،

$$2/75 + 4 \times 10^{-3} = 2/75 \times 10^0 + 0/004 \times 10^0 = 2/754 \times 10^0 \rightarrow 2/75$$

بنابراین، در جمع اعداد ممیز سیار عضو بی اثر منحصر به فرد نیست.

$$2/75 + 4 \times 10^{-3} + 3 \times 10^{-3}$$

ب) شرکت پذیری عمل جمع در اعداد ممیز سیار برقرار نیست. مثلاً در محاسبه

داریم:

$$2/75 + 4 \times 10^{-3} = 2/754 \rightarrow 2/75$$

$$2/75 + 4 \times 10^{-3} = 2/754 \rightarrow 2/75$$

$$2/75 + 4 \times 10^{-3} = 2/753 \rightarrow 2/75$$

بنابراین:

$$(2/75 + 4 \times 10^{-3}) + 4 \times 10^{-3} \rightarrow 2/750$$

اما،

$$4 \times 10^{-3} + 4 \times 10^{-3} = 7 \times 10^{-3}$$

و

$$2/75 + 7 \times 10^{-3} = 2/75 \rightarrow 2/76$$

یعنی ، در حساب ممیز سیار سه رقمی، حاصل عبارات یکسان نیست.

$$(2/75 + 4 \times 10^{-3}) + 3 \times 10^{-3}, 2/75 + (4 \times 10^{-3} + 3 \times 10^{-3})$$

۱-۸-۳ انتشار خطا

به ترتیب، تقریبهایی از آنها باشند و نماد a و b دو عدد و A و B در حالت کلی اگر \otimes عمل باشد،

در وسایل محاسباتی این عمل با نماد \otimes^* تقریب می شود و در واقع آنچه این وسایل به ما می دهند $a \otimes^* b$ است و داریم:

$$\begin{aligned} |A \otimes B - a \otimes^* b| &= |(A \otimes B - a \otimes b) + (a \otimes b - a \otimes^* b)| \\ &\leq \underbrace{|(A \otimes B - a \otimes b)|}_{\text{خطای منتشر شده}} + \underbrace{|a \otimes b - a \otimes^* b|}_{\text{خطای تولید شده}} \end{aligned}$$

بنابراین، خطای کل از مجموع خطای منتشر شده و خطای تولید شده بیشتر نیست.
در آنچه خواهد آمد حداکثر خطای منتشر شده را برای چهار عمل اصلی به جای
محاسبه می کنیم. معمولاً در عمل به خطای تولید شده توجه زیادی نمی شود هر
چند گاهی اوقات باعث بدست آمدن جوابهای غیر قابل قبول می شود.

در ادامه جمع، تفریق، ضرب و تقسیم اعداد تقریبی را بررسی می کنیم.

الف) جمع اعداد تقریبی

در حساب ممیز سیار ۳ رقمی داریم

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} \cong 1/41 + 1/73 = 3/14$$

مشاهده می شود که تقریبی از $\sqrt{2}$ تقریبی از $\sqrt{3}$ جمع شده است. اکنون می خواهیم معین کنیم که خطای $14/3$ حداکثر چقدر است و چه ارتباطی با خطاهای $41/1$ و $73/1$ دارد. در حالت کلی داریم

۱-۸-۴ قضیه

و این اعداد جملگی مثبت باشند آنگاه A و B تقریبهایی از a و b اگر

$$e(a + b) < e(a) + e(b)$$

$$\delta(a + b) \leq \max \{ \delta(a), \delta(b) \}$$

۱-۸-۵ نتیجه

حداکثر خطای $a+b$ مجموع خطاهای a و b است و دقت $a+b$ می تواند همانند نادقیقتین a و b باشد. از این رو، در اندازه گیری کمیت هایی که می خواهیم جمع کنیم ، بهتر است آنها را با یک واحد اندازه گیری کنیم.

ب) تفریق اعداد تقریبی

در مورد تفریق اعداد تقریبی به راحتی می توان نشان داد که

$$e(a-b) \leq e(a) + e(b)$$

$$\text{اما، بنا بر تعریف} \quad \frac{e(a-b)}{|a-b|} \cong \frac{e(a-b)}{|a-b|}$$

کوچک باشد خطای نسبی $a-b$ می تواند بزرگ باشد ، که نتیجه $a-b$ نادقیق خواهد بود.

۱-۸-۶ مثال:

اگر A و B نزدیک به هم باشند و هدف محاسبه $\frac{1}{A-B}$ استفاده از حساب ممیز سیار، باشد خطا می تواند فاحش باشد. مثلاً، با حساب ممیز سیار چهار رقمی:

$$C = \frac{1}{(\sqrt{2} + \sqrt{3}) - \pi} \cong \frac{1}{(1/414 + 1/732) - 3/142} \\ = \frac{1}{0/004} = 250$$

در صورتی که ، اگر به جای اعداد موجود در کسر C تقریبهایی تا ۹ رقم اعشار قراردهیم و جواب را تا چهار رقم گرد کنیم خواهیم داشت

$$C = 214/1 \quad (4s)$$

۱-۹ خطای محاسبه توابع

مشاهده کرده اید که اکثر ماشین حسابهای مورد استفاده دارای کلیدهای تابعی هستند .
با زدن یک عدد و بعد فشار یک یا دو کلید ، می توانید مقدار تابعی چون ،

$$\cos x , \sin x , e^x , \operatorname{arctg} x , \arccos x , \arcsin x , \ln x , \log_{10} x , \operatorname{tg} x$$

و بعضا توابع هیپربولیک را حساب قبل از اینکه ماشین حساب و کامپیوتر رایج شود
معمولا مقادیر این توابع، آن هم در نقاط، از روی جدول تعیین می شد . (هنوز هم در
آخر بعضی از کتابهای دبیرستان جداول و خطوط مثلثاتی وجود دارد). در این بخش می
خواهیم نحوه محاسباتی تقریبی از یک تابع را شرح دهیم و خطای آن را حساب کنیم .
قبلا به یک مثال توجه کنید.

۱-۹-۱ مثال

تقریبی از $e^{\frac{2}{3}}$ را با خطای کمتر از 10^{-3} حساب کنید

حل:

ابتدا توضیح می دهیم که منظور از $\frac{2}{3}$ چیست. می دانیم که بسط ماکلورن تابع e^x چنین است:

$$e^x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

منظور از e^x مقدار سری زیر است

$$1 + \frac{2}{3} + \frac{\left[\frac{2}{3}\right]^2}{2!} + \frac{\left[\frac{2}{3}\right]^3}{3!} + \dots + \frac{\left[\frac{2}{3}\right]^n}{n!} + \dots$$

اما محاسبه تمام جملات سری بالا و بعد جمع کردن آنها عملاً ممکن نیست. ضمناً در ماشین حساب یا کامپیوتر نمی توان عدد را دقیقاً ذخیره² کرد .

از این رو، در عمل تقریبی اعشاری از اختیار³ می کنیم و تعدادی از جملات ابتدای سری (۲۱.۱) را محاسبه و با هم جمع می کنیم. مثلاً، برای دقت قرار می دهیم $\varepsilon = 10^{-2}$

$$\bar{x} = 0.667$$

و جملات سری (۲۱.۱) را تا جایی حساب می کنیم که مقدار آنها از نصف یعنی ε کمتر نباشد (البته مقادیر حساب شده را نیز تا سه رقم اعشار گرد می کنیم).

$$e^{\frac{2}{3}} \cong 1 + 0/667 + 0/222 + 0/049 + 0/008 + 0/001$$

بنابراین،

$$e^{\frac{2}{3}} \cong 1 / 947$$

اگر $e^{\frac{2}{3}}$ را از ماشین حساب بگیرید خواهید داشت:

$$e^{\frac{2}{3}} = 1/94773404.$$

که از آن نتیجه می شود

$$\left| e^{\frac{2}{3}} - 1/947 \right| = 0/00073404... < 0/01$$

وجیه عملیات بالا را در زیر مشاهده می کنید.

۱-۹-۲ بسط ماکلورن یک تابع

اگر تابع F در مجاورت صفر تعریف شده باشد و مشتقات آن ، از هر مرتبه ، موجود باشد داریم:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \dots$$

برای بدست آوردن بسط ماکلورن یک تابع باید مشتقات آن را در صفر حساب کنیم و درحیطه (۲۲.۱) قرار دهیم. بسط ماکلورن چند تابع ، جهت اطلاع و بکار بردن آنها در تمرینهای آخر این بخش ، در زیر آمده است.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\log_e(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

را اختیار f مشاهده می شود که هر تعداد متناهی از جملات ابتدای بسط ماکلورن تابع کنیم چند جمله ای بدست می آید. پس می توان نوشت

$$f(x) = p_n(x) + R_n(x)$$

که در آن،

$$p_n(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)$$

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0) + \dots$$

$R_n(x)$ را باقیمانده سری مساوی $f(x)$ می نامند. در صورتی که به ازای هر x از دامنه f

داشته باشیم $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ روشی عملی برای محاسبه تقریبی از $f(x)$ به ازای هر

نقطه از دامنه اش ارائه کرد.

برای محاسبه تقریبی از $F(X)$ با خطای مطلق کمتر از داده شده، ابتدا تقریبی از X چون \bar{x} انتخاب می کنیم که \bar{x} کوچک باشد و بعد به جای محاسبه $P_n(\bar{x})$ مقدار $P_n(x)$ حساب می کنیم. این خطای تولید می کند که به طریق زیر قابل محاسبه است (البته بطور تقریبی).

با استفاده از بسط تیلر تابع $P_n(x)$ حول نقطه \bar{x} تا مشتق مرتبه دوم، داریم:

$$P_n(x) = P_n(\bar{x}) + (x - \bar{x})P_n'(\bar{x}) + \frac{(x - \bar{x})^2}{2!}P_n''(\eta), \quad (\eta \text{ بین } \bar{x} \text{ و } x)$$

در عمل ε کوچک است و \bar{x} را گرد شده X به گونه ای می گیریم که

$$|x - \bar{x}| < \frac{\varepsilon}{20}$$

خیلی از کوچکتر باشد. مثلاً

بنابراین با توجه به اینکه $(\bar{x} - x)^2$ بسیار کوچک است، می توان نوشت:

$$P_n(x) \cong P_n(\bar{x}) + (x - \bar{x}) P'_n(\bar{x})$$

که از آن نتیجه می شود

$$f(x) \cong P_n(\bar{x}) + (x - \bar{x}) P'_n(\bar{x}) + R_n(x). \quad (24.1)$$

آنچه ماشین حساب یا کامپیوتر به ما می دهد $P_n(\bar{x})$ بنابراین n و \bar{x}

$$|f(x) - P_n(\bar{x})| < \varepsilon \quad \text{چنان انتخاب می شوند که}$$

برای این منظور می گوییم از (۲۴.۱) به دست می آید.

$$\begin{aligned} |f(x) - P_n(\bar{x})| &\leq |(x - \bar{x}) P'_n(\bar{x}) + R_n(x)| \\ &\leq |x - \bar{x}| |P'_n(\bar{x})| + |R_n(x)| \end{aligned}$$

از این رو کافی است نامساویهای زیر برقرار باشند

$$(25.1) \quad \begin{cases} |R_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |(x - \bar{x}) - P'_n(\bar{x})| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

نامساوی اول ، با فرض (۲۳.۱) ، از مرتبه ای به بعد برقرار است ولی نامساوی دوم

بستگی به مقدار نامشخص $P'_n(\bar{x})$ دارد. در عمل با اعمال محدودیتهایی روی \bar{x}

و x می توان نامساوی دوم را نیز برقرار کرد. بنابراین، فرض می شود

$$|x| \leq 1$$

برای توابع مثلثاتی

$$|x| \leq \frac{\pi}{2}$$

محدودیتها بزرگ نبودن $P'_n(\bar{x})$ ، با توجه به چند جمله ای بودن آن و این که

ضرایب این چند جمله ای اعداد کوچک هستند، تضمین می کند. در وسایل

محاسباتی \bar{x} گرد شده تا آخرین رقمی است که ماشین قادر به ذخیره است.

ولی برای محاسبه دستی اگر 10^{-k} کفیف است گرد شده \bar{x} تا $(k+1)$ رقم اعشار

اختیار کنید. در این صورت بنابر (۱۳.۱) :

$$|x - \bar{x}| \leq 5 \times 10^{-(k+2)} = \frac{\varepsilon}{20}$$

برای اکثر توابع، با این انتخاب نامساوی دوم (۲۵.۱) نیز برقرار خواهد بود. البته لازم به ذکر است

که در حالت کلی نباید ابتدا n را چنان بدست آورد که نامساوی اول (۲۵.۱) برقرار شد بلکه ،

همانطور که در مثال (۱-۹-۱) گفته شد، جملات را تا جایی حساب می کنیم که در مطلق آخرین

$$\varepsilon/2$$

جمله از کمتر باشد.

۱-۹-۳ مثال

تقریبی از $\sin x$ را به ازای $\frac{\pi}{11} = 0.2856$ با خطای کمتر از 10^{-4} حساب کنید.

حل:

قرار می دهیم: $\bar{x} = 0.2856$ (گردد شده x تا پنج رقم اعشار است). و جملات

سری مربوط به $\sin x$ را تا جایی حساب می کنیم که قدر مطلق جمله آخر از

$$\frac{10^{-4}}{2} = 0.00005 \text{ کمتر باشد.}$$

$$\sin \frac{\pi}{11} \cong 0.28560 - 0.00388 + 0.00002$$

مشاهده کنید که جملات نیز تا پنج رقم اعشار ، یعنی تعداد ارقام اعشار ، گرد شده اند بنابراین،
 را از ماشین حساب بگیرید دارید:

$$\sin \frac{\pi}{11} = 0.28174 \quad (5 \text{ s})$$

قدر مطلق خطای مقدار محاسبه شده حدود 0.000007 که از 10^{-4} کمتر است.

$$\sin \frac{\pi}{11} = 0.28173255 \dots$$

فصل دوم

حل معادلات غیر خطی

مقدمه

حل بسیاری از مسائل اجتماعی ، اقتصادی و علمی منجر به حل معادله ای به شکل (۱ . ۲)
($f(x)=0$ می شود .

منظور از حل معادله (۱ . ۲) تعیین عدد یا اعدادی است که مقدار تابع به ازای آنها صفر شود . اگر $f(a)=0$ آنگاه a را یک ریشه معادله (۱ . ۲) می نامند یا می گویند a یک صفر تابع f است . معادله (۱ . ۲) بر حسب نوع تابع f به چند دسته تقسیم می شود .

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

(الف) تابع f یک چند جمله ای مانند

هدفهای کلی

- (1) شناخت منابع خطا و تشخیص آنها در هر مسئله
- (2) بررسی منابع خطا و راه های کمینه سازی آنها
- (3) شناخت انواع خطاها و رابطه آنها با دقت یک تقریب
- (4) جلوگیری از رشد خطاها در محاسبات عددی
- (5) شناخت روش های محاسبه پایدار و ناپایدار
- (6) محاسبه مقدار تقریبی توابع.

هدف های کلی

- ۱- ارائه نمونه هایی از مسائل کاربردی - اجتماعی که حل آنها منجر به حل یک معادله متعالی می شود .
 - ۲- بررسی روشهای تعیین تعداد و محل تقریبی ریشه های حقیقی یک معادله .
 - ۳- بررسی روش های زیر برای تعیین تعداد و محل تقریبی ریشه های حقیقی یک معادله .
- الف) روش دوبخشی (یا تنصیف)

ب) روش نابه جایی

ج) روش نیوتن

ه) روش وترى (خط قاطع)

۴- بحث در واگرایی ، همگرایی و سرعت همگرایی روشها و بالاخره مقایسه روشها .

۵- حل عددی دستگاه معادلات غیر خطی دو مجهولی به دو روش تعمیم یافته نیوتن .

هدف های رفتاری

دانشجو پس از مطالعه این فصل باید بتواند :

۱- تعداد و محل تقریبی ریشه های حقیقی یک معادله را با روش مناسب تعیین کند .

۲- تقریبی از مقدار یک ریشه را با دقت و طلب و به روش خواسته شده حساب کند .

۳- تقریبی از تمام ریشه های حقیقی یک معادله را با روش(های) مناسب محاسبه کند .

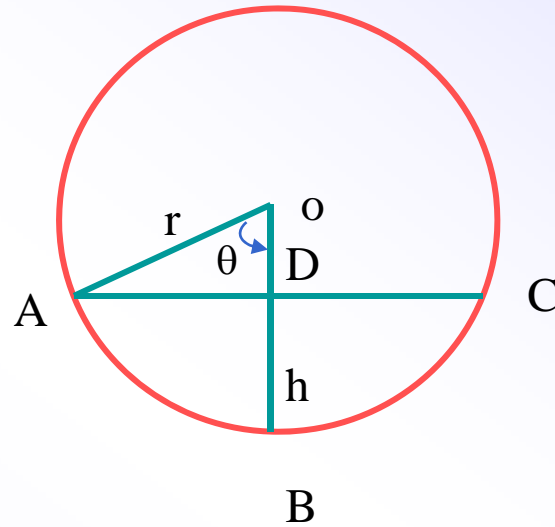
۴- اختلاف روشها را از نظر مطمئن بودن یا نبودن همگرایی و تعداد عملیات برای رسیدن به یک تقریب مناسب را بیان کند .

۵- تعداد و حدود ریشه های یک دستگاه ساده از معادلات دو مجهولی غیر خطی را تعیین و تقریبی از آنها را با دقت مطلوب حساب کند .

۲- حل معادلات متعالی

۱-۲ یک مسئله کاربردی

در این قسمت مسئله ای را بررسی می کنیم که حل آن منجر به تعیین ریشه ای از یک معادله متعالی می شود . فرض کنید یک مخزن استوانه ای به شعاع قاعده r داریم که $\frac{1}{4}$ پر از مایع است . (مثلا ، مخزن گازوئیل که در اکثر منازل شوفاژدار موجود است .) و این مخزن طوری قرار دارد که محور آن افقی است . می خواهیم ارتفاع مایع را در این مخزن بیابیم (شکل 1-2) . فرض کنید ارتفاع مایع h باشد یعنی ، $DB=h$. طبق فرض مسئله ، باید مساحت قطعه ABC مساوی مساحت دایره باشد اما ، مساحت قطعه ABC دو برابر مساحت قطعه ADB است .



مقطع عرضی مخزن استوانه ای

از این رو ، به تعیین مساحت قطعه ABD می پردازیم . مساحت قطعه ABD مساوی مساحت قطاع OAB منهای مساحت مثلث OAD است .

در مثلث OAD داریم:

$$AD = r \sin \theta \quad , \quad OD = r \cos \theta$$

بنابراین

$$\text{مساحت مثلث OAD} = \frac{1}{2} (r \sin \theta \times r \cos \theta) = \frac{1}{2} r^2 \sin \theta \cos \theta$$

همچنین مساحت قطاع OAB برابر است با $\frac{1}{2} r^2 \theta$ در آن زاویه مرکزی رو به روی کمان AB (بر حسب رادیان) است. پس باید داشته باشیم:

$$2 \left[\frac{1}{2} r^2 \theta - \frac{1}{2} r^2 \sin \theta \cos \theta \right] = \frac{1}{4} \pi r^2$$

با ضرب طرفین رابطه بالا در $\frac{2}{r^2}$ نتیجه می شود

$$2\theta - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{\pi}{2}$$

و یا با توجه به اینکه

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) + \sin 2\theta = 0 \quad (۱)$$

با فرض

$$x = \frac{\pi}{2} - 2\theta \quad (۲)$$

داریم

$$2\theta = \frac{\pi}{2} - x$$

و از آنجا

$$\sin 2\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

در نتیجه معادله (۱) با توجه به (۲)، به شکل زیر در می آید که یک معادله متعالی است

.

$$x + \cos x = 0 \quad (۱)$$

پس از حل مساله متعالی (۱) می توان h ، را با توجه به شکل مقطع عرضی مخزن استوانه ، از روابط زیر به دست آورد .

$$h = OB - OD = r - r \cos \theta$$

$$= r \left(1 - \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

با استفاده از مساله بالا می توان یک مخزن را درجه بندی کرد و بر حسب ارتفاع مایع داخل آن به مقدار مایع پی برد . معادله (۱) در طول این فصل به روشهای گوناگون حل خواهد شد.

۲-۲ تعیین تعداد و محل تقریبی ریشه ها

معمولا برای تعیین ریشه ای از یک معادله ، با دقت مطلوب ، لازم است که تقریبی از آن ریشه یا بازه کوچکی که حاوی آن ریشه باشد را معلوم کرد . در این بخش روشهای موجود برای تعیین تعداد و حدود تقریبی ریشه های حقیقی یک معادله را مورد بررسی قرار می دهیم . دو روش برای این کار موجود است :

(الف) رسم منحنی (ب) جدول بندی مقادیر تابع

در بخش بعد دو روش را شرح می دهیم و نقاط قوت و ضعف هر یک را بیان می کنیم .

۱-۲-۲ رسم منحنی

در این روش منحنی

$$y=f(x)$$

را رسم می کنیم . اگر ریشه معادله $f(x)=0$ باشد داریم $f(\alpha)=0$ نقطه

$A(\alpha,0)$ روی منحنی $y=f(x)$ قرار دارد . اما ، نقطه A روی محور x است . پس ، باید

نقاط تلاقی منحنی بالا را با محور x تعیین کنیم . طول این نقاط ریشه های

معادله $f(x)=0$ هستند . در حالت کلی رسم منحنی $y=f(x)$ ، بدون استفاده از

ماشین حساب و به کمک نقطه یابی ، به سادگی امکان پذیر نیست و باید از کامپیوتر و

بسته های نرم افزاری مناسب نظیر DERIVE ، MATLAB یا MATHEMATICAL

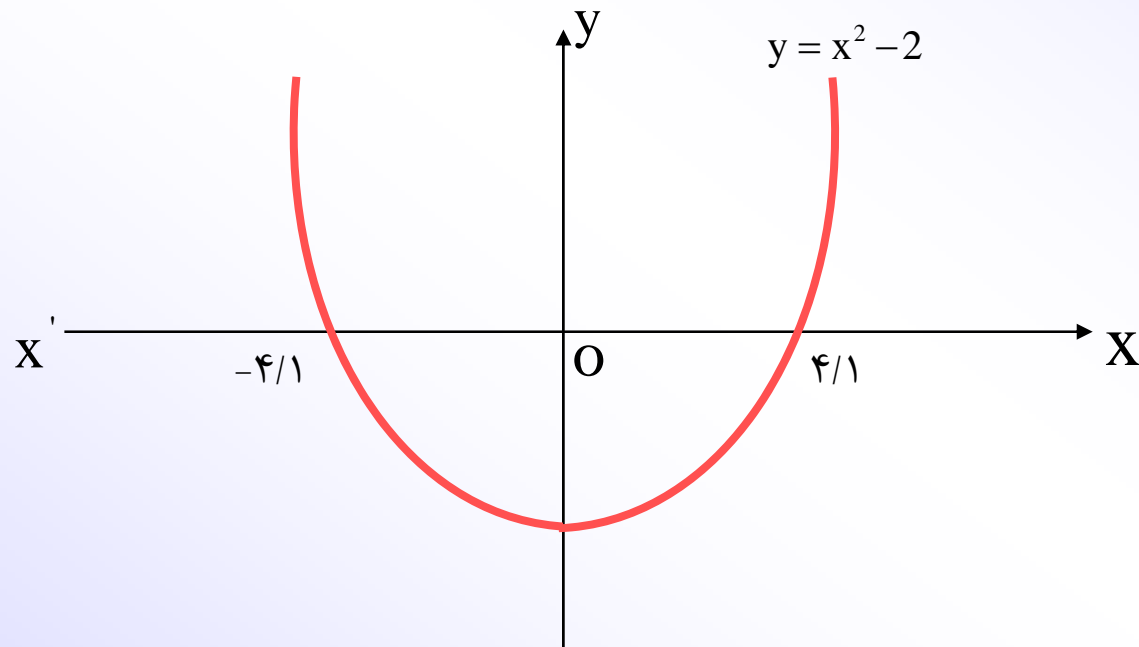
، استفاده کرد . با وجود این ، دانستن روشهای دستی نیز خالی از فایده نیست و اکثر

اوقات رفع نیاز می کنند .

۲-۲-۲ مثال

تعداد و محل تقریبی ریشه های معادله $f(x) = x^2 - 2 = 0$ تعیین کنید .

منحنی $y = x^2 - 2$ را رسم می کنیم . مشاهده می شود که معادله دو ریشه دارد که تقریباً $4/1$ و $-4/1$ هستند (شکل ۲-۲) .



شکل 2-2

آیا رسم منحنی $y=f(x)$ همیشه به این سادگی است ؟ واضح است که نه .
مثلا ، منحنی

$$y= x + \cos x$$

را به این سادگی نمی توان رسم کرد .

بعضی اوقات می توان $f(x)$ را به صورت تفاضل دو تابع ، که رسم آنها ساده
است ، نوشت . فرض کنید داریم

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x) \quad (5.2)$$

منحنی های زیر را رسم می کنیم

$$y_1 = f_1(x)$$

$$y_2 = f_2(x)$$

حال می‌گوییم اگر $f_1(\alpha) - f_2(\alpha) = 0$ گاه

$$f_1(\alpha) - f_2(\alpha) = 0$$

که از آن نتیجه می‌شود

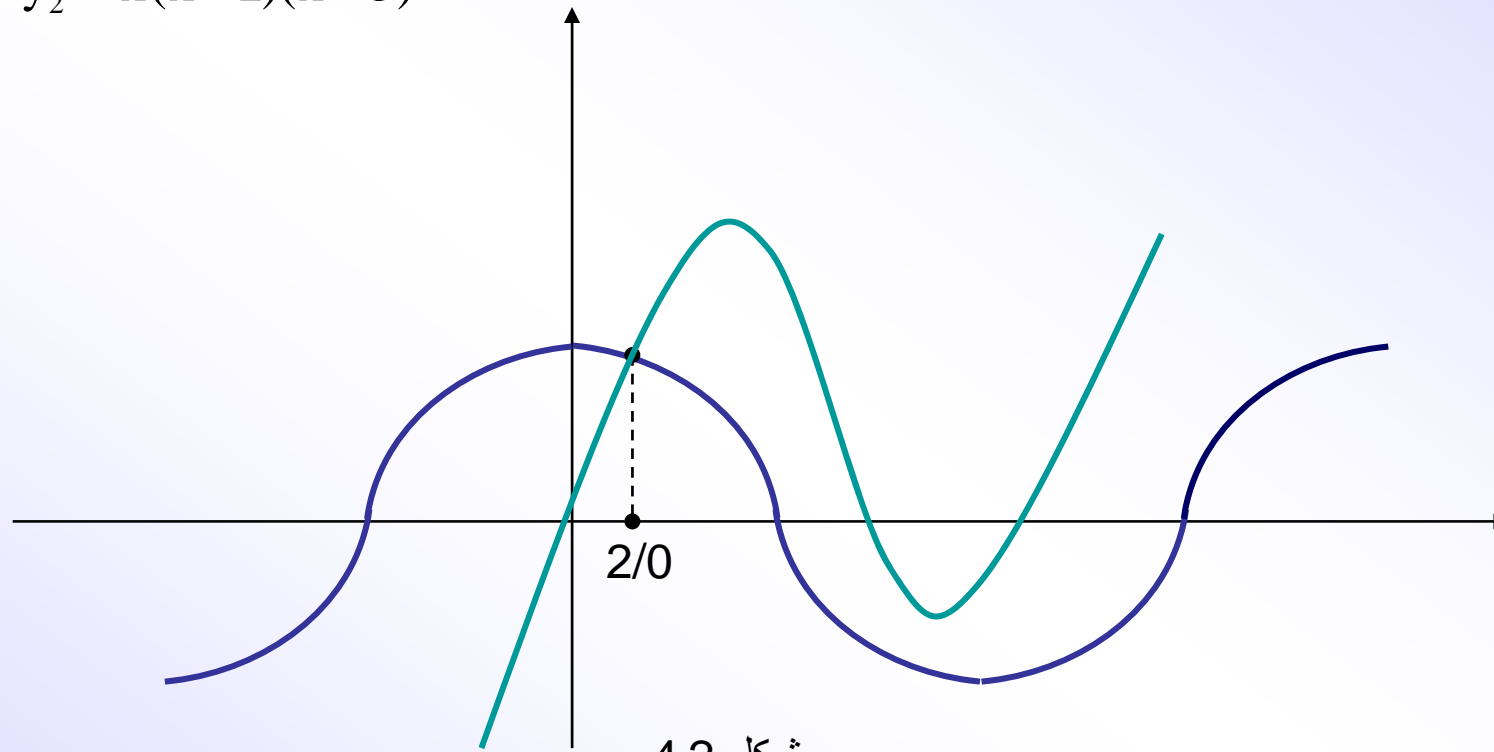
$$f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = \beta$$

یعنی نقطه $A(\alpha, \beta)$ روی هر دو منحنی و y_1 قرار دارد. به عبارت دیگر، α

طول نقطه تقاطع منحنی‌های y_1 است. از این رو، منحنی‌ها را رسم

می‌کنیم و طول نقاط برخورد آنها را به دست می‌آوریم.

$$y_2 = x(x-2)(x-3)$$



شکل 4-2

شکل (۴-۲) نشان می دهد که معادله یک ریشه دارد که مقدار تقریبی آن ۲/۰ است. اما، این تدبیر همیشه کارگر نیست. به مثال زیر توجه کنید.

۵-۲-۲ مثال

تعداد و محل تقریبی ریشه های معادله زیر را تعیین کنید .

$$x \sin x - 1 = 0 \quad (6.2)$$

در اینجا تابع $f(x)$ به شکل تفاضل دو تابع $f_1(x) = x \sin x$ و $f_2(x) = 1$ است.

رسم تابع $y = x \sin x$ (منظور این است که به راحتی با تعیین دو

سه نقطه قابل رسم نیست .) در این حالت می توان گفت که چون $x=0$ ریشه

معادله (۶.۲) نیست می توان طرفین آن را بر x تقسیم کرد و به دست آورد .

$$\sin x - \frac{1}{x} = 0 \quad (7.2)$$

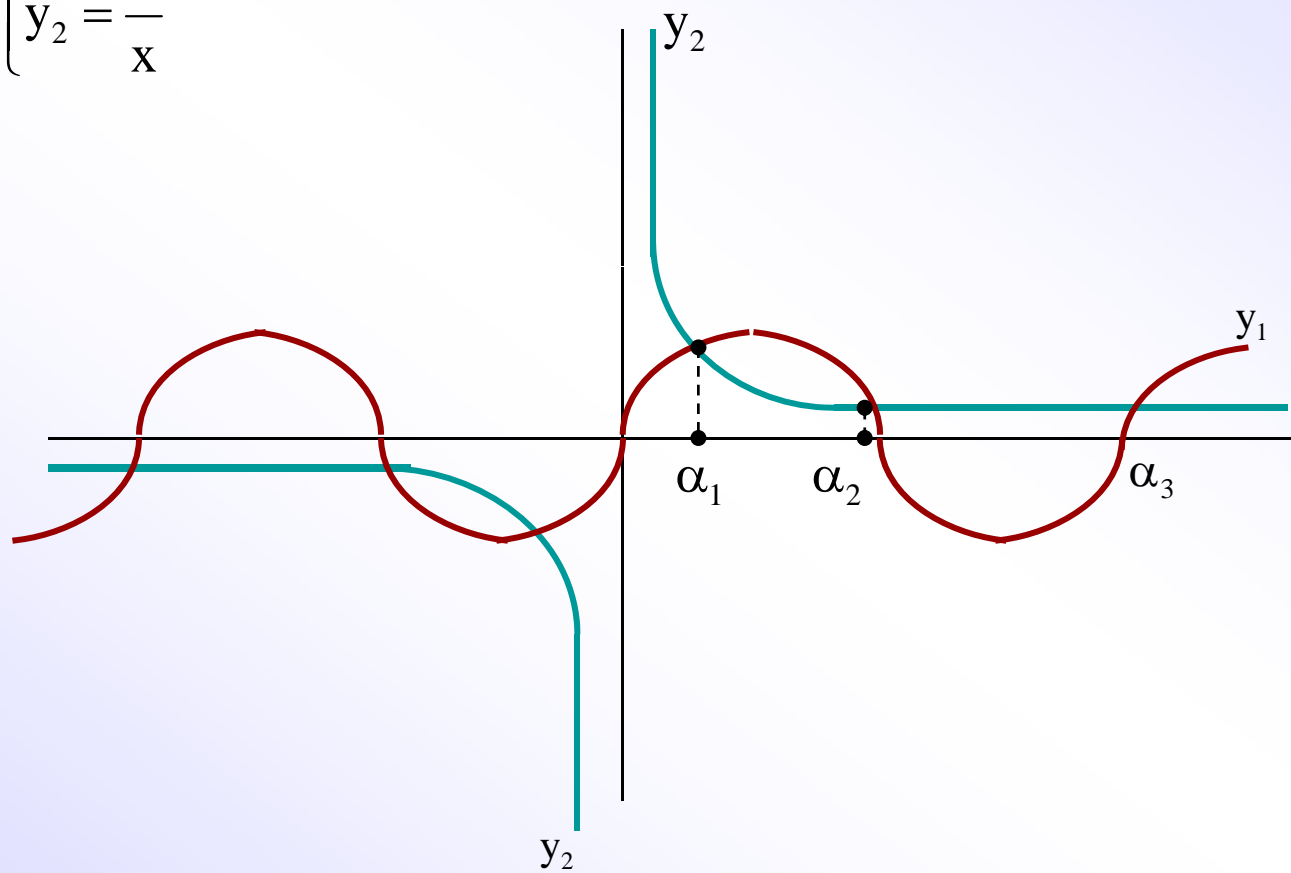
واضح است که مجموعه جوابهای (۶.۲) و (۷.۲) یکسان است (البته ، منحنی

نمایش آنها یکسان نیست) . از این رو ، کافی است معادله (۷.۲) را بررسی کنیم

. برای این منظور منحنی های زیر را رسم می کنیم و طول نقاط تلاقی آنها را به

دست می آوریم . (شکل ۵-۲) .

$$\begin{cases} y_1 = \sin x \\ y_2 = \frac{1}{x} \end{cases}$$



شکل ۵-۲

اولا با توجه به تابع
آن گاه

$$f(x) = \sin x - \frac{1}{x}$$

$$f(\alpha) = 0$$

$$f(-\alpha) = -f(\alpha) = 0 \quad (4-2)$$

یعنی ریشه ها نسبت به مبدا قرینه اند . شکل (۴-۲) نشان می دهد که معادله

دارای بی نهایت ریشه مثبت است . α نزدیکی ۱ و بقیه در مجاورت

$$k = 1, 2, \dots, k\pi$$

قرار دارند (نزدیک نقاطی که $\sin x$ صفر می شود) .

۶-۲-۲ جدول بندی مقادیر تابع

در این روش می توان ریشه هایی را که تابع f در دو طرف آن تغییر علامت می دهد پیدا کرد . قبل از توضیح این روش تعریف زیر و قضیه ۸-۲-۲ را بیان می کنیم .

۷-۲-۲ تعریف

فرض کنید

$$f(x) = (x - \alpha)^m g(x), (g(\alpha) \neq 0, m \in \mathbb{N})$$

اگر $m > 1$ می گوئیم ریشه تکراری معادله $f(x)=0$ است و مرتبه تکرار آن m است .

این تعریف نشان می دهد که اگر m زوج باشد تابع f در نزدیکی α تغییر علامت

نمی دهد یعنی $f(x)$ در نزدیکی α و دو طرف آن دارای یک علامت است .

$$x = \alpha$$

۲-۲-۸ قضیه

(بولتزانو - وایشراس) : اگر تابع f بر $[a,b]$ پیوسته باشد و $f(a)f(b)<0$ آنگاه حداقل یک نقطه مانند c هست که $a<c<b$ و $f(c)=0$. به عبارت دیگر معادله $f(x)=0$ حداقل یک ریشه در (a,b) دارد. به علاوه، اگر f بر $[a,b]$ اکیدا یکنوا (صعودی یا نزولی باشد) c منحصر به فرد است.

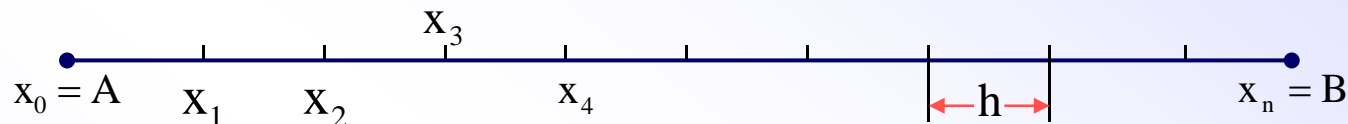
در عمل وقتی بخواهیم ریشه هایی از $f(x)=0$ را، که f در دو طرف آنها تغییر علامت می دهد، و در بازه $[A, B]$ قرار دارند، تعیین کنیم این بازه را به n قسمت متساوی تقسیم می کنیم و n آن قدر بزرگ اختیار می کنیم که نقاط تقسیم به اندازه کافی به هم نزدیک باشند. در این صورت، فاصله نقاط متوالی

عبارت است از

$$h = \frac{B - A}{n}$$

و نقاط عبارتند از (شکل ۲-۶)

$$x_0 = A, x_i = x_0 + ih, i = 1, 2, \dots, n$$



بعد قرار می دهیم :

$$\gamma_i = f(x_i)f(x_{i+1})$$

و سه حالت زیر را در نظر می گیریم :

۱- اگر $\langle 0 \rangle \gamma_i$ آن گاه حداقل یک ریشه در (x_i, x_{i+1}) وجود است . برای توابع هموار

و h کوچک ، معمولا یک ریشه موجود است .

۲- اگر $\lambda_i > 0$ ممکن است معادله در (x_i, x_{i+1}) تکراری با مرتبه تکرار زوج

داشته باشد. (مثلا، برای $f(x) = \cos x - 1 = 0$ صفر ریشه تکراری مرتبه دوم

است و f در مجاورت $= 0$ تغییر علامت نمی دهد.) این ظن وقتی قوی

می شود که خیلی کوچک باشد (و وقتی رد می شود که کوچک نباشد).

به هر جهت تعیین این گونه ریشه ها آسان نیست و به تمهیدات بیشتری نیاز

دارد.

۳- اگر $\lambda_i = 0$ آن گاه $f(x_i) = 0$ $f(x_{i+1}) = 0$

۹-۲-۲ مثال

تعداد و محل تقریبی ریشه های معادله $f(x)=\sin x-x+0/5=0$ را تعیین کنید .

با توجه به اینکه همواره $\sin x \leq 1$ داریم

$$-x - 0/5 \leq f(x) \leq 1/5 - x$$

از این رو ، اگر $-x < 0$ آن گاه $f(x) < 0$ یعنی ریشه ای در $(-\infty, 0)$ وجود نیست

و اگر $0 < -x - 0/5$ آن گاه $0 < f(x)$ و معادله در $(-0/5, \infty)$ ریشه ندارد .

پس باید بازه $[1/5, -0/5]$ را مورد بررسی قرار می دهیم . جدول (2-6) نشان

می دهد که معادله در $(-0/5, 1/5)$ یک ریشه دارد (اعداد تا چهار رقم اعشار

گرد شده اند) .

جدول ۶-۲

x	-0/5	1	1/5
sin x	-0/4794	0/8415	0/9975
f(x)	0/5206	0/3415	-0/0025

از جدول (۶-۲) و با توجه به مقادیر $f(1)$ و $f(1/5)$ ، ریشه باید نزدیک $1/5$ باشد.
با توجه به اینکه

$$f(1/4)=0/047 \text{ (3D)}$$

نتیجه می گیریم که $x \in (1/4, 1/5)$ مثلاً $1/45$ چون $f'(x) = \cos x - 1 \leq 0$

تابع f اکیدا نزولی است و لذا، تنها یک ریشه موجود است. البته تعیین

ریشه های معادله $\sin x - x + 0/5 = 0$ به روش رسم منحنی ساده تر است.

۲-۲-۱۰ مثال

بدون رسم منحنی ثابت کنید معادله زیر تنها یک ریشه دارد .

$$f(x) = x^2 - (1-x)^5 = 0 \quad (۲.۸)$$

اولاً ، $f(0)=-1$ و $f(1)=1$ پس حداقل یک ریشه در $(0,1)$ موجود است . اما چون

$f'(x) = 2x + 5(1-x)^4$ در صورتی که $x \in [0,1]$ داریم $f'(x) > 0$ ، تابع f در $[0,1]$ اکیداً

صعودی است . بنابر این ، معادله (۲.۸) تنها یک ریشه مثبت دارد . اکنون ثابت

می کنیم که این معادله ریشه منفی ندارد . برای این منظور نشان می دهیم که

اگر $x < 0$ آن گاه $f(x) < 0$ زیرا ،

$$f(x) = x^2 - (1-5x+10x^2-10x^3+5x^4-x^5)$$

$$= x^2 - 1 + 5x - 10x^2 + 10x^3 - 5x^4 + x^5$$

$$= x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 9x^2 + 5x - 1$$

حال چون ضریب توان های فرد x مثبت و ضریب توان های زوج x منفی است

نتیجه می گیریم که اگر $x < 0$ آن گاه $f(x) < 0$.

3-2 تعیین ریشه ها با دقت مطلوب

پس از تعیین حدود یک ریشه لازم است تقریبی از آن را با دقت

خواسته شده حساب کنیم . برای این منظور دنباله ای از اعداد مانند

$\{x_n\}$ می سازیم به طوری که حد این دنباله ریشه مورد نظر باشد .

۴-۲ روش دو بخشی (یا روش تنصیف)

در این روش فرض می کنیم که دو عدد a و b موجودند به قسمی که

(الف) تابع f در $[a,b]$ پیوسته است

(ب) $f(a) f(b) < 0$

(ج) معادله $f(x)=0$ تنها یک ریشه در (a,b) دارد (این ریشه را می ناهیم) .

با مفروضات بالا دنباله $\{x_n\}$ چنان می سازیم که $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$

برای این منظور ، مطابق شکل (2-7) ، بازه $[a,b]$ را به دو بخش متساوی تقسیم

$$x_1 = \frac{a+b}{2}$$

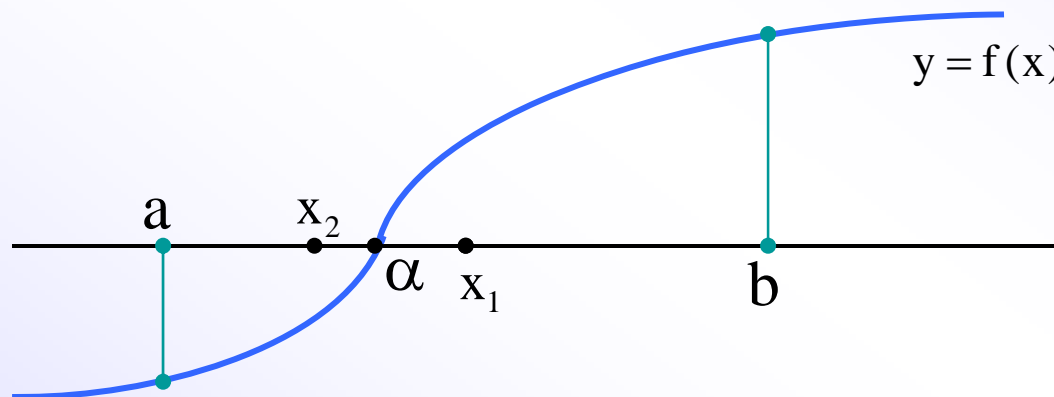
می کنیم . یعنی ، قرار می دهیم

به عبارت دیگر ، x_1 وسط بازه $[a,b]$ می گیریم تا $[a,b]$ به دو بخش $[a, x_1]$ و

$[x_1, b]$ تقسیم شود .

با توجه به شرط (ج) ، دو یکی از این دو بخش قرار دارد . بخشی که در آن α قرار دارد ، اختیار و مجدداً آن را به دو بخش متساوی تقسیم و نیمه حاوی α اختیار می کنیم

(در شکل (۷-۲) ، بازه $[a, x_1]$ اختیار می کنیم و قرار می دهیم $x_2 = \frac{a + x_1}{2}$ و این عمل را همین طور ادامه می دهیم .



شکل ۷-۲

اما ، در حالت کلی رسم منحنی میسر نیست و می توان برای ادامه کار به طریق جبری زیر عمل کرد :

۱- اگر $f(a)f(x_1) < 0$ آن گاه ریشه در $[a, x_1]$ از این رو ، می توان قرار داد $b = x_1$ مجددا عمل را در $[a, b]$ تکرار کرد .

۲- اگر $f(a)f(x_1) > 0$ آن گاه ریشه در $[x_1, b]$ ، لذا ، می توان قرارداد $a = x_1$ و مجددا عمل را در $[a, b]$ تکرار کرد .

۳- اگر $f(a)f(x_1) = 0$ آن گاه ریشه است و عمل خاتمه پیدا می کند .

به این ترتیب دنباله ای چون $\{x_n\}$ پدیدار می شود . البته عملاً نمی توان بینهایت جمله از این دنباله را حساب کرد بلکه باید معیارهایی برای توقف عملیات وجود داشته باشد . اینکه جملات دنباله بالا تا کجا باید حساب شوند و آیا این دنباله همگرا است یا نه را بعداً بررسی می کنیم .

۲-۴-۱ مثال

می دانیم که معادله $x + \cos x = 0$ فقط یک ریشه در $(-1, 0)$ دارد . تقریبی از این ریشه را به روش دو بخشی حساب کنید .

حل :

جدول زیر محاسبات مربوط را نشان می دهد . (به نحوه درج اعداد در جدول توجه کنید ، نمودار جریان این روش در ۲-۴-۶ آمده است) .

د راین مثال ، $a = -1$ ، $b = 0$ ، $f(a) = -0.46$ (2D) و $f(b) = 1$

توجه کنید که a و b در هر سطر با توجه به سطر قبل و علامت $f(a)f(x_n)$ تعیین می شود و همواره $a < b$.

n	a	b	$x_n = \frac{a+b}{2}$	علامت $f(a)f(x_n)$
1	-1	0	-0/5	-
2	-1	-0/5	-0/75	+
3	-0/75	-0/5	-0/625	-
4	-0/75	-0/625	0/6875	-
5	-0/75	-0/6875	-0/71875	-
6	-0/75	-0/71875	-0/734375	+
7	-0/734375	-0/71875	-0/7265625	

۲-۴-۲ مثال

تقریبی از یک ریشه معادله $3xe^x = 1$ تا سه رقم اعشار درست حساب کنید .

حل :

معادله فوق را به صورت $f(x) = 3x - e^{-x} = 0$ می نویسیم . واضح است که ریشه های دو معادله

یکسان هستند . پس از جدول بند ب مقادیر f در میابیم که f در بازه $(0/25, 0/27)$ تغییر

علامت می دهد و با توجه به اکیدا صعودی بودن f معادله تنها یک ریشه دارد . جدول زیر

تقریبی از ریشه را تا سه رقم اعشار درست به دست می دهد . در ایم جدول ،

$$a = 0/25 \quad , \quad f(a) = -0/0288 \quad (4D)$$

$$b = 0/27 \quad , \quad f(b) = 0/4662$$

n	a	b	$x_n = \frac{a+b}{2}$	علامت $f(a)f(x_n)$
1	0/25	0/27	0/26	-
2	0/25	0/26	0/255	+
3	0/255	0/26	0/2575	+
4	0/2575	0/26	0/2588	-
5	0/2575	0/2588	0/2582	-
6	0/2575	0/2582	0/25785	

از این رو ، ریشه تا سه رقم اعشار برابر 0/258 است .

۲-۴-۳ همگرایی روش دوبخشی

با توجه به نحوه به دست آمدن x_n روش دو بخشی داریم (شکل (۷-۲) ملاحظه می

شود) :

$$|x_1 - \alpha| < \frac{b-a}{2}$$

همچنین با توجه به اینکه طول بازه $[a, x_1]$ است داریم :

$$|x_2 - \alpha| < \frac{\frac{b-a}{2}}{2} = \frac{b-a}{2^2}$$

بنابراین ، پس از n تکرار ، نتیجه می شود

$$0 \leq |x_n - \alpha| < \frac{b-a}{2^n} \quad (۲-۹)$$

چون $0 < \frac{1}{2} < 1$ بنابر قضیه ۲ . ۳ . ۲ ، $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$ نتیجه می شود $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - \alpha| = 0$$

بنابر قضیه ۲-۳-۴ ،

که نتیجه می دهد

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$$

بنابراین ، روش دو بخشی همیشه همگراست . یعنی ، دنباله $\{x_n\}$ که به این روش ساخته می شود حتما به همگراست . ضمنا مساوی (۲ . ۹) یک کران بالا برای خطای به دست می دهد ، توجه کنید که این کران بالا ، یعنی x_n را یک کران پیشین برای این ، $\frac{b-a}{2^n}$ قبل از محاسبه قابل محاسبه است . بنابر این ، x_n می نامند . از (۲ . ۹) سرعت همگرایی $\{x_n\}$ را نیز می توان پیش بینی کرد، این سرعت متناسب با سرعت همگرایی دنباله $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ به صفر است توجه به اینکه

$$2^{10} \approx 1000 \text{ داریم :}$$

$$\frac{1}{2^{10}} \approx 0.001 = 10^{-3}$$

بنابر این ، بعد از هر ۱۰ تکرار سه رقم به ارقام درست جواب تقریبی اضافه می شود، و این نشان می دهد که روش دو بخشی کند است و برای تعیین صفرهای توابعی توصیه می شود که محاسبه آنها ساده و کم خطا باشد .

نا مساوی (۲ . ۹) در تعیین تقریبی که خطای آن از عدد کوچک معلومی کوچکتر باشد نیز به کار می رود ، به مثال زیر توجه کنید .

۲-۴-۴ مثال

تقریبی از ریشه مثبت معادله $f(x) = x^2 - 2$ یعنی $\alpha = \sqrt{2}$ به روش دو بخشی حساب کنید که برای آن داشته باشیم

$$|x_n - \alpha| < 10^{-2}$$

با توجه به اینکه ریشهٔ معادله در $(1,2)$ است داریم $b-a=1$ و

$$|x_n - \alpha| < \frac{b-a}{2^n} = \frac{1}{2^n}$$

پس ، کافی است n را چنان پیدا کنیم که

$$\frac{1}{2^n} \leq 10^{-2}$$

اولین n که در نا مساوی بالا صدق می کند ۷ است . پس باید تا حساب^x کنیم ، جدول (۸-۲) به همین منظور تنظیم شده است .

$$(a=1 , f(a)=-1 , b=2 , f(b)=2)$$

جدول (٨-٢)

n	a	b	$x_n = \frac{a+b}{2}$	علامت $f(a)f(x_n)$
1	1	2	1/5	-
2	1	1/5	1/25	+
3	1/25	1/5	1/375	+
4	1/375	1/5	1/4375	-
5	1/375	1/4375	1/40625	+
6	1/40625	1/4375	1/421875	-
7	1/40625	1/421875	1/4140625	

۲-۴-۵ معیارهای توقف

برای توقف محاسبه x_n ها ، نه فقط در روش دو بخشی بلکه در روشهایی که بعداً هم معرفی خواهند شد ، معیارهایی وجود دارد که در این قسمت بررسی می کنیم.

الف) اگر ϵ عدد مفروض و کوچکی باشد ، x_n تا جایی حساب می کنیم که

$|f(x_n)| < \epsilon$ یعنی ، به محض اینکه $|f(x_n)| < \epsilon$ عملیات را متوقف می کنیم . دلیل این است که

حال اگر $f(\alpha) = 0$ خیلی کوچک باشد مثلاً ، کوچکتر از 10^{-7} ، اکثراً

می توان نتیجه گرفت که x_n خیلی به α نزدیک است .

ب) اگر $|x_n - x_{n-1}| < \epsilon$ عملیات را متوقف و x_n را به عنوان تقریبی از α می پذیریم . به عبارت

دیگر ، وقتی اختلاف دو تقریب متوالی بسیار کوچک باشد ادامه روش معقول به نظر نمی آید .

اگر بسیار بزرگ یا بسیار کوچک α باشد عملیات را وقتی متوقف می کنند که ، در

واقع تا حدودی خطای نسبی $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1}} \right|$ از کوچکتر قرار می گیرد . ϵ x_{n-1}

(ج) گاهی خواسته می شود عملیات را وقتی متوقف کنیم که خطای مطلق از ε کوچکتر باشد یعنی ، وقتی که $|\alpha - x_n| < \varepsilon$ چون مقدار معلوم نیست از نامساوی (۲ . ۹) استفاده می کنیم و قرار می دهیم (مثال ۲-۴-۴ را نیز ملاحظه کنید) :

$$\frac{b-a}{2^n} \leq \varepsilon \quad (۲ . ۱۰)$$

که از آن نتیجه می شود

$$2^n \leq \frac{b-a}{\varepsilon}$$

سپس n را کوچکترین عدد طبیعی اختیار می کنیم که در نامساوی زیر صدق کند (از طرفین نامساوی بالا در مبنای ۲ لگاریتم بگیرید) .

$$n \geq \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon}$$

در این صورت ، اگر k_n حساب کنیم خطای مطلق آن از کوچکتر خواهد بود زیرا از (۲).
(۹) و (۲۰) داریم :

$$|x_n - \alpha| < \frac{b-a}{2^n} \leq \varepsilon$$

که نتیجه می دهد ،

$$|x_n - \alpha| < \varepsilon$$

گاهی خواسته می شود که پس از m تکرار (m معلوم است) ، عملیات متوقف و
به عنوان تقریبی از پذیرفته شود .

۲-۴-۵ تبصره

توجه کنید که ϵ نباید خیلی کوچک اختیار کرد. مثلاً در دقت معمولی،

اگر ϵ را کوچکتر از 10^{-7} اختیار کنیم ممکن است نا مساوی های $|f(x_n)| < \epsilon$

$|x_n - x_{n-1}| < \epsilon$ هرگز برقرار نشوند. از این رو، بهتر است تلفیقی از معیار (الف) یا (ب) را با

معیار (د) در نظر گرفت. مثلاً، عملیات را وقتی متوقف می کنیم که

$$|f(x_n)| < \epsilon$$

و یا

$$n = m$$

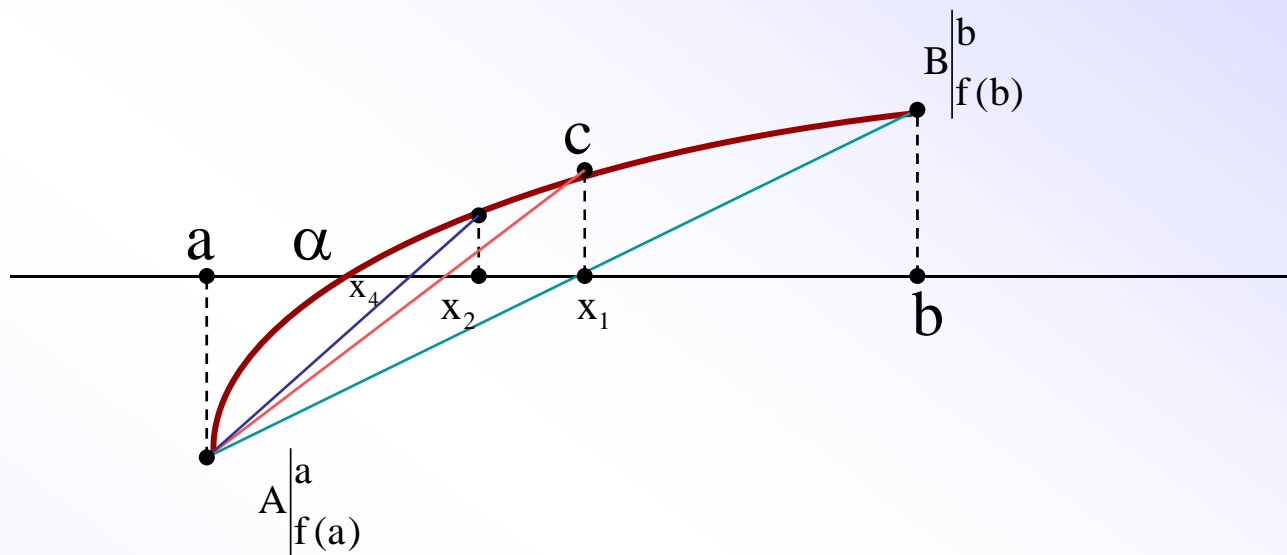
که در آن ϵ و m دو عدد مفروض هستند.

۵-۲ روش نابجایی

روش نابجایی بسیار قدیمی است و مصریان قدیم آن را مورد استفاده قرار داده اند. اگر f در $[a, b]$ پیوسته باشد و $f(a)f(b) < 0$ و معادله $f(x)=0$ تنها یک ریشه در (a, b) داشته باشد برای تعیین تقریبی از این ریشه، که آن را می نامیم، چنین استدلال می شود:

گرچه منحنی نمایش $y=f(x)$ بین دو نقطه A و B یک خط مستقیم نیست اما اگر A و B را با یک خط مستقیم به هم وصل کنیم محل تلاقی آن با محور x ، نقطه ای به طول x' را می دهد که تقریبی از x است (شکل ۵-۲). بعد x' را به طول x_2 و... را به همین ترتیب، مطابق شکل، به دست می آوریم.

x_3 x_2



شکل ۹-۲

برای تعیین مقدار x_1 حسب مختصات A و B خط AB را می نویسیم و آن را با محور قطع می کنیم.

$$\frac{y - f(a)}{x - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

معادله خط AB :

نقطه تلاقی این خط را با محور x' ای به مختصات $x_1^{(0)}$ می‌گیریم در نتیجه باید داشته باشیم

$$\frac{0-f(a)}{x_1-a} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

که پس از ساده کردن ، فرمول روش نابه جایی به دست می آید

$$x_1 = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)} \quad (۱۱.۲)$$

برای تعیین x_2 تقریباً مشابه روش دو بخشی ، سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم :

۱- اگر $f(a)f(x_1) < 0$ آنگاه ریشه در (a, x_1) است . لذا ، در فرمول (۱۱.۲) به جای b قرار می

دهیم (به عبارتی از سه نقطه a و b و ، نقطه b نابجا است) و را حساب می‌کنیم x_2 به

عبارت دیگر

$$x_2 = \frac{af(x_1)-x_1f(a)}{f(x_1)-f(a)}$$

۲- اگر $f(x_1)f(a) > 0$ ریشه در (a, b) است و از فرمول زیر حساب می شود

$$x_2 = \frac{x_1 f(b) - b f(x_1)}{f(b) - f(x_1)}$$

۳- اگر $f(x_1)f(a) = 0$ ریشه a است و مسئله حل شده است .

به این ترتیب باز هم دنباله ای از اعداد حاصل می شود که چون در بازه هایی قرار دارند که طول آنها مرتبا کوچک می شود همیشه همگراست . نمودار جریان این روش ، با معیار توقف ، دقیقا مانند نمودار جریان روش $|f(x_n)| < \epsilon$ دو بخشی است

(۲-۴-۶ را ملاحظه می کنید) تنها تفاوت فرمول مربوط به محاسبه x است که چنین است

$$x \leftarrow \frac{a f(b) - b f(a)}{f(b) - f(a)}$$

۲-۵-۱ مثال

تقریبی از ریشه معادله $3x - e^x = 1$ که در $(0/25, 0/27)$ قرار دارد، به روش نابجایی، تا سه رقم اعشار درست حساب کنید.

پس از نوشتن معادله بالا به شکل $f(x) = 3x - e^x = 0$ (عملیات تا چهار رقم اعشار

گرد شده اند) :

$$x_1 = \frac{0/25 \times 0/0466 - 0/27 \times (-0/0288)}{0/0466 - (-0/0288)} = 0/2577$$

چون $f(x_1) = 0/0003$ در $(0/25, 0/2577)$ است و

$$x_2 = \frac{0/25 \times 0/0003 - 0/2577 \times (0/0288)}{0/0003 - (-0/0288)}$$

بنابر این، ریشه تا سه رقم اعشار درست برابر 0/258 است.

۲-۵-۲ مثال

برای تعیین تقریبی از ریشه مثبت معادله $2x^2 - 4x + 2 = 0$ دو تکرار (روش جابجایی) را انجام دهید .

با انتخاب $a = 1$ و $b = 2$ داریم :

$$x_1 = \frac{1 \times 2 - 2 \times (-1)}{2 - (-1)} = \frac{4}{3}$$

چون ، ریشه در است . بنابر این ،

$$x_2 = \frac{\frac{4}{3} \times 2 - 2 \times \left(-\frac{2}{9}\right)}{2 - \left(-\frac{2}{9}\right)} = \frac{\frac{8}{3} + \frac{4}{9}}{2 + \frac{2}{9}} = 1/4$$

مقدار x_2 با مقدار نظیر آن که در مثال ۲-۴-۲ به دست آوردیم مقایسه کنید . کدام تقریب بهتر

است ؟ (حتما می دانید که $\alpha = \sqrt{2} = 1.4142\dots$)

۲-۵-۳ خصوصیات روش نا به جایی

روش نا به جایی، همانند روش دو بخشی، همگرایی تضمین شده دارد و عموماً سریعتر از

روش دو بخشی است و جایگزین خوبی برای آن است. البته، عملیات این روش بیش از

روش دو بخشی است (دو برابر و نیم). اما، اگر X_i ها جملگی در یک طرف X_i باشد

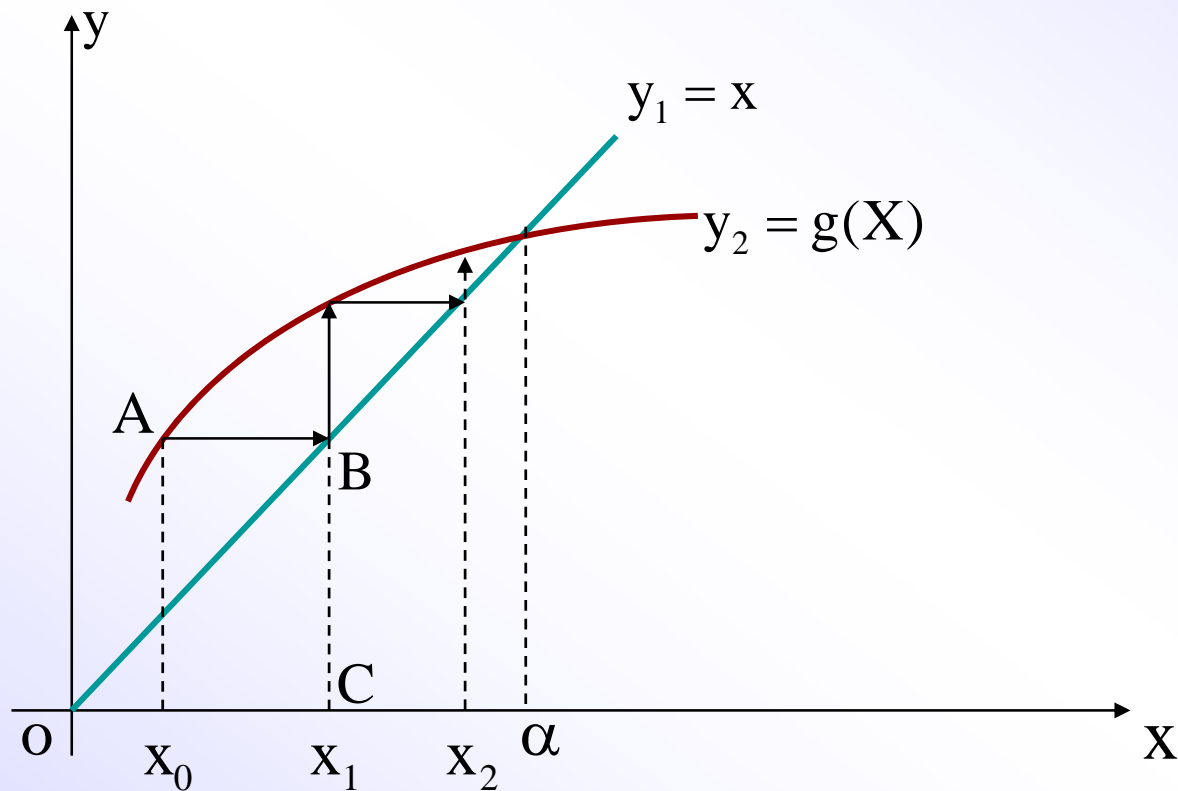
همگرایی می تواند حتی کند تر از روش دو بخشی باشد

(شکل (۲-۱۰) را ببینید).

۲-۶-۲ تعیین جملات $\{X_n\}$ به روش هندسی

اولاً ریشه $x=g(x)$ طول محل تلاقی منحنی های زیر است :

$$\begin{cases} y_1 = x \\ y_2 = g(X) \end{cases}$$



شکل ۲-۱۳

اگر x_0 معلوم باشد فاصله A تا محور OX همان $g(x_0)$ است. بنابراین، اگر از A خطی

موازی با محور OX بکشیم تا منحنی (یعنی نیمساز ربع اول و سوم) را در B قطع

کند، فاصله B تا محور OX نیز است. از طرف دیگر $BC = OG(x_0)$ ، زیرا زاویه COB

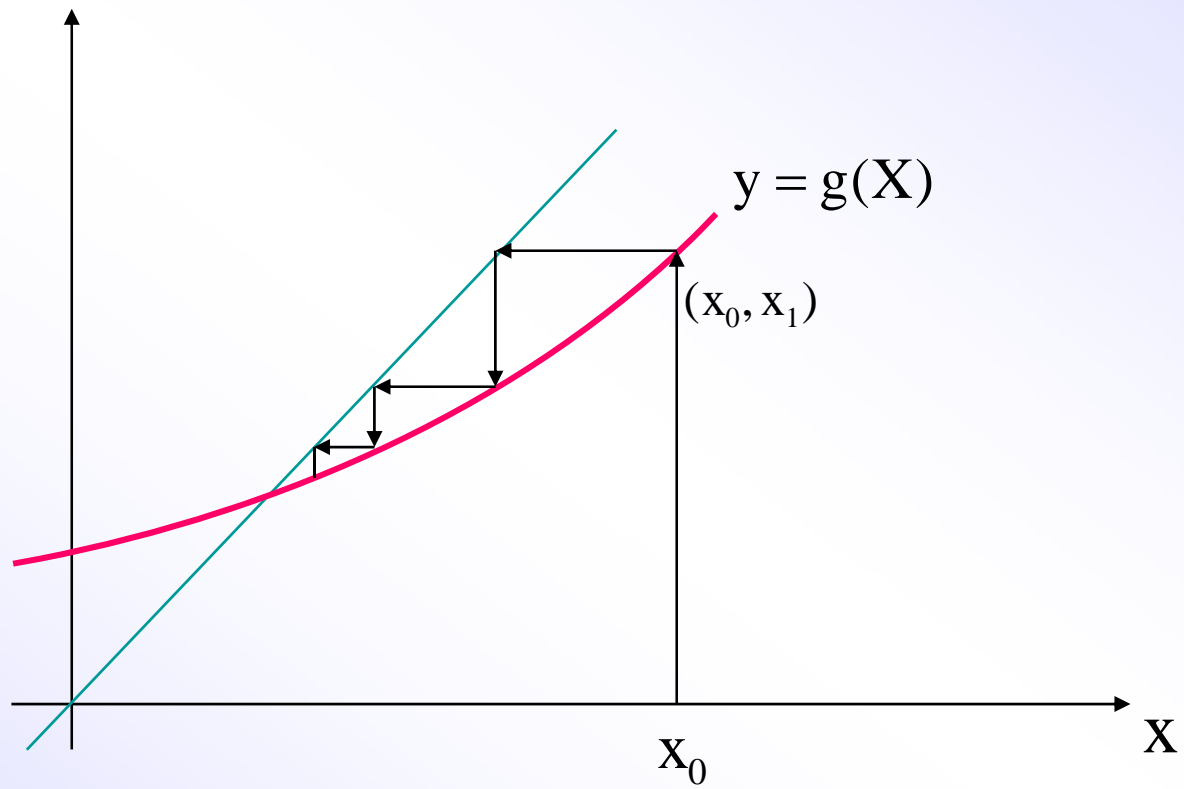
مساوی است. پس، 45°

$$OC = BC = g(x_0) = x_1$$

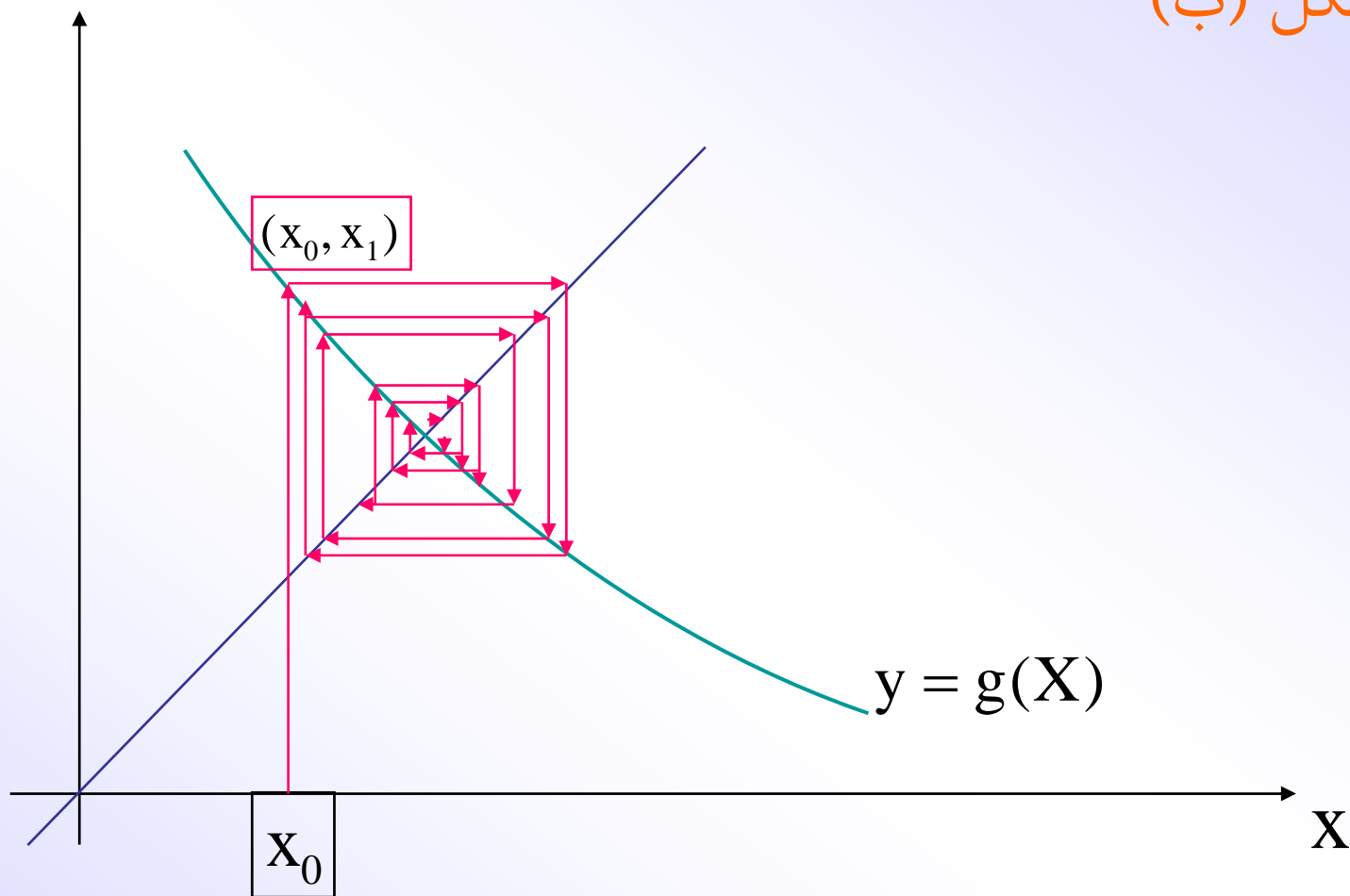
به همین ترتیب به دست می آید (به شکل توجه کنید).

شکل های ارائه شده حالات مختلف $g(x)$ و همگرایی یا واگرایی را نشان می دهند.

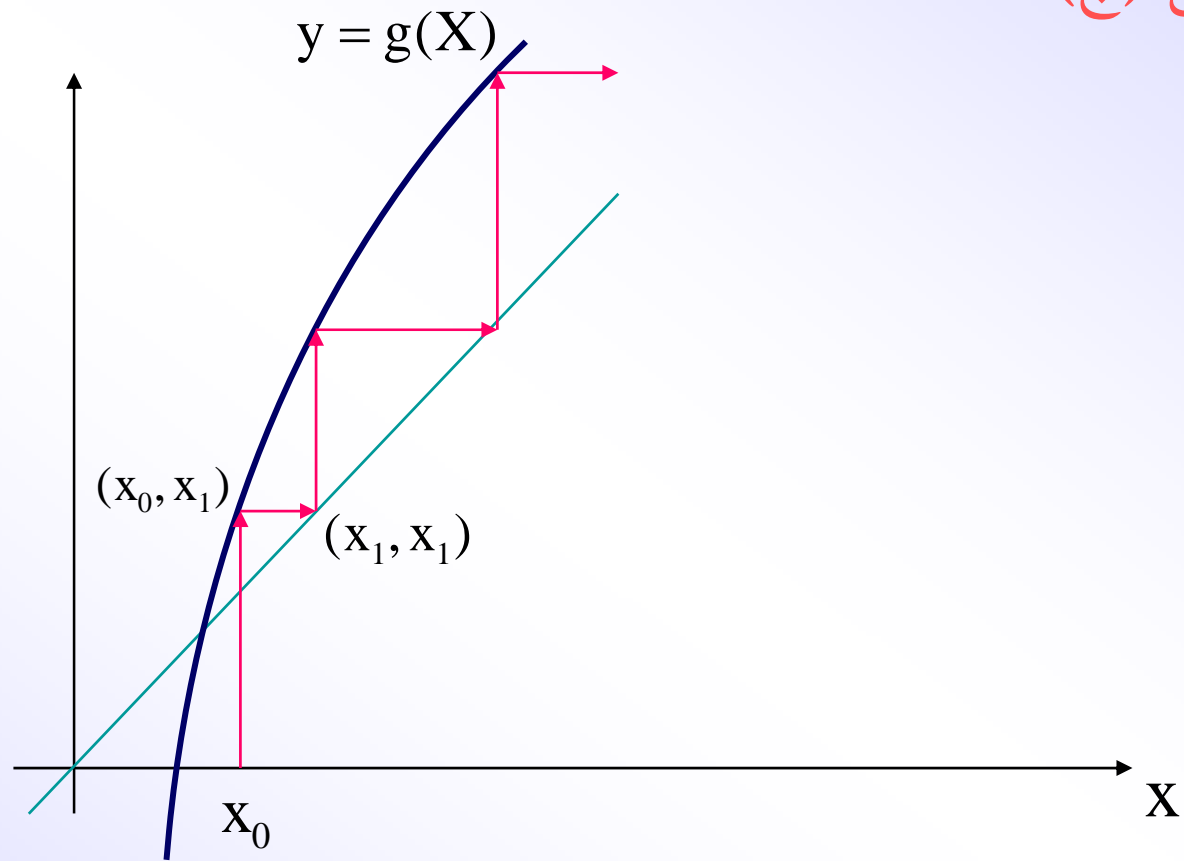
شكل (الف)



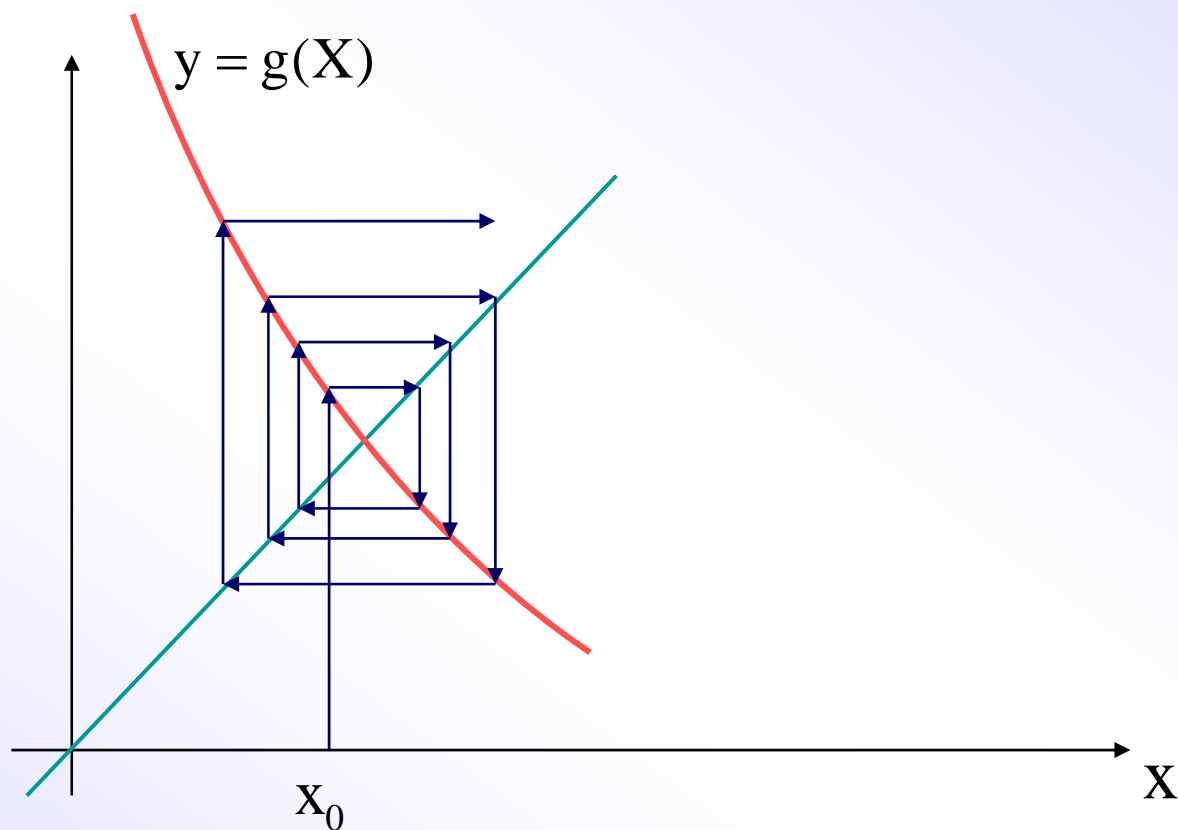
شکل (ب)



شكل (ج)



شکل (د)



شکل های (الف) و (ب) همگرایی و شکل های (ج) و (د) واگرایی دنباله را نشان می دهند .

۳-۶-۲ همگرایی روش تکرار ساده

تعیین خصوصیات تابع $g(x)$ و مقدار اولیه x_0 که ازای آن ها همگرایی باشد مستلزم قضیه زیر است .

۴-۶-۲ قضیه

اگر f تابعی بر $[a,b]$ و در هر نقطه (a,b) مشتق داشته باشد ی $\eta \in (a,b)$ هست که

$$f(b) - f(a) = f'(\eta)(b - a).$$

با استفاده از قضیه بالا ، ابتدا به ذکر این مطلب می پردازیم که چون

$$x_{n+1} = g(x_n), \alpha = g(\alpha)$$

بنابر قضیه ۴-۶-۲ ،

$$x_{n+1} - \alpha = g(x_n) - g(\alpha) = g'(\eta_n)(x_n - \alpha)$$

که در آن η_n اولین x_n است . بنابر این ،

$$|x_{n+1} - \alpha| = |g'(\eta_n)| |x_n - \alpha|$$

شرط کافی برای اینکه $|x_n - \alpha| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ است که جملات دنباله $\{|x_n - \alpha|\}$

مرتبا کوچک شوند . یعنی ، وقتی که همواره

$$|g'(\eta_n)| \leq L < 1$$

اما چون جای η_n مشخص نیست عملی تر است که شرط بالا را با شرط

$$|g'(x)| \leq L < 1, \alpha$$

در یک همسایگی جایگزین کنیم .

دو قضیه بعد همه چیز را با استدلال روشن می کنند .

۵-۶-۲ قضیه

اگر g تابعی بر $[a,b]$ به توی $[a,b]$ باشد و در این بازه

(۱۴.۲)

آن گاه معادله $g(x) = x$ تنها یک ریشه دارد ، که متعلق به $[a,b]$ است .

$$|g'(x)| \leq L < 1$$

۶-۶-۲ قضیه

با شرایط قضیه ۵-۶-۲ ، به ازای هر $x_0 \in [a,b]$ دنباله $\{x_n\}$ با شرط $x_{n+1} = g(x_n)$

به تنها جواب $g(x) = x$ همگراست .

مثال های زیر نحوه تشخیص مناسب بودن g و تعیین L را روشن می کنند و نشان می دهند که چگونه می توان قبل از محاسبه جملات سرعت همگرایی $\{\bar{x}_n\}$ را پیش بینی کرد .

۷-۶-۲ مثال

برای تعیین ریشه مثبت معادله که در بازه $I=[0/5, 1]$ قرار دارد ، به روش

تکرار ساده ، $g(x)$ های زیر را انتخاب می کنیم (مثال ۷-۶-۲ ملاحظه شود) . مناسب بودن یا

نبودن هریک و بازه ای که می تواند از آن انتخاب شود را تعیین کنید .

$$x_0$$

$$g_1(x) = 1 - x^2 \quad (\text{الف})$$

واضح است که $|g_1'(x)| = -2x$ هر $x \in I$ آنگاه

$$|g_1'(x)| = 2x \geq 1$$

بنابراین ، بهتر است از $g_1(x)$ استفاده نکنیم ، در واقع هر $x \in I$ باشد و اگر است.

(ب)

$$\text{چون } g_2(x) = \sqrt{1-x} \text{ داریم}$$

و اگر x نزدیک 1 باشد $|g_2'(x)| = \frac{1}{2\sqrt{1-x}}$ می تواند بسیار بزرگ باشد . آیا مناسب $|g_2'(x)| = \frac{1}{2\sqrt{1-x}}$ ؟

جدول (12.2) نشان می دهد $|g_2'(x)|$ و مناسب هستند. پس باید بهای کمی

تنگ تراختیار شود .

$$x_0 = 0/5 \quad g_2(x)$$

به تحقیق معلوم می شود که (تحقیق کنید)

$$\alpha \in [0/51, 0/7]$$

حال سعی می کنیم ثابت کنیم اگر $0/51 \leq x \leq 0/7$

$$|g'_2(x)| = \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \leq L < 1$$

برای این منظور نا مساوی های زیر را می نویسیم (این روش را برای همیشه الگو قرار دهید

$$0/51 \leq x \leq 0/7 \quad ($$

$$-0/7 \leq -x \leq -0/51$$

$$0/3 \leq 1-x \leq 0/49$$

$$0/55 \approx \sqrt{0/3} \leq \sqrt{1-x} \leq \sqrt{0/49} = 0/7$$

از نا مساوی های اخیر معلوم می شود که تابع g بر $[0/51, 0/7]$ به توی همین بازه است

. و نیز

$$|g'_2(x)| = \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \leq \frac{1}{2\sqrt{0/3}} \approx 0/91 < 1$$

بنابراین ، $L = 0/91$. پس $g_2(x)$ مناسب است . اما ، چون L نزدیک عدد یک است همگرایی کند است . (جدول (۲ . ۱۲) مؤید این پیشگویی است) .

ضمناً ، علت اینکه $g_2(x)$ برای $x_0 = 0$ انتخابی ای واگرا تولید می کند آن است که این دو مقدار اولیه در $(0/51, 0/7)$ نیستند .

$$g_3(x) = \frac{1}{x+1} \quad (ج)$$

$$g'_3(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} \quad \text{در این حالت ،}$$

$$x \in [0/51, 0/7]$$

$$|g'_3(x)| = \frac{1}{(x+1)^2} \leq \frac{1}{(0/5+1)^2} = \frac{1}{2/25} < 1$$

مشاهده می شود که نه فقط $g_3(x)$ منسوب است بلکه L هم ، یعنی به صفر نزدیکتر $\frac{1}{2/25}$

است تا به یک ، در نتیجه انتظار می رود که همگرایی نسبتاً تندی باشد . ضمناً اگر

نتیجه می شود $x \in [0/51, 0/7]$

$$\frac{1}{1/7} = \frac{1}{1+0/7} \leq \frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+0/5} = \frac{2}{3}$$

بنابر این با توجه به اینکه $\frac{2}{3} < 0/7$ و $\frac{1}{1/7} < 0/51$ داریم : $g_3(x) = \frac{1}{1+x} \in [0/51, 0/7]$

یعنی ، g_3 تابعی بر $[0/51, 0/7]$ بتوی همین بازه است .

۲-۶-۸ مثال

۱- برای تعیین تقریبی از ریشه معادله $e^x = 1$ روش تکرار ساده استفاده کنید.

حل : معادله را به شکل $\frac{e^{-x}}{3}$ می نویسیم و قرار می دهیم $g(x) = \frac{e^{-x}}{3}$

به سادگی معلوم است که ریشه معادله بالا در $(0,1)$ قرار دارد و g تابعی بر $(0,1)$ بتوی $(0,1)$ است . در ضمن

$$g'(x) = \frac{-e^{-x}}{3}$$

و اگر $x \in [0,1]$ داریم

$$|g'(x)| = \frac{e^{-x}}{3} < \frac{e^0}{3} = \frac{1}{3}$$

در اینجا $L = \frac{1}{3}$ که کوچکتر از یک است و $g(x)$ مناسب است . در نتیجه ، دنباله $\{x_n\}$

به ازای هر x_0 از $(0,1)$ همگراست .

با استفاده از $x_0 = 0/5$ رابطه

$$x_{n+1} = \frac{e^{-x_n}}{3}$$

جملات دنباله $\{x_n\}$ قرار زیر هستند

$$x_1 = 0/2022 \quad (4 D)$$

$$x_2 = 0/2723 \quad (4 D)$$

$$x_3 = 0/2539 \quad (4 D)$$

$$x_4 = 0/2586 \quad (4 D)$$

$$x_5 = 0/2574 \quad (4 D)$$

$$x_6 = 0/2577 \quad (4 D)$$

$$x_7 = 0/2576 \quad (4 D)$$

$$x_8 = 0/2576 \quad (4 D)$$

لذا ، جواب تا چهار رقم اعشار درست 0/2576 است . اگر $f(x) = xe^x - 1$

x_8 حساب کنید . نتیجه 3499×10^{-4} خواهد شد که عددی کوچک است .

۲- تقریبی از ریشه معادله $x + \cos x = 0$ ، به روش تکرار ساده ، چنان حسب کنید که

$$|f(x_n)| < 10^{-2} .$$

قرار می دهیم

$$x = -\cos x = g(x)$$

می دانیم که ریشه معادله $x + \cos x$ در $[-1, 0]$ قرار دارد . با توجه به این که تابع کسینوس بر

این بازه صعودی است داریم

$$-1 \leq x \leq 0$$

$$0/541 \approx \cos(-1) \leq \cos x \leq 1$$

بنابراین ، $-1 \leq -\cos x \leq -0/541 < 0$

یعنی ، $g(x) \in [-1, 0]$ همچنین داریم $g'(x) = \sin x$

$$|g'(x)| = -\sin x = \sin(-x)$$

پس اگر $x \in [-1, 0]$ با توجه به این که $-x \leq 1$ و کجای سینوس بر بازه $[0, 1]$ صعودی است داریم

$$0 \leq \sin(-x) \leq \sin 1 \approx 0/8415$$

پس ، $g(x)$ مناسب است ، ولی همگرایی کند است . با فرض $x_0 = -10/7$

$$x_1 = -0/7648$$

$$x_4 = -0/7311$$

$$x_2 = -0/7215$$

$$x_5 = -0/7444$$

$$x_3 = -0/7508$$

$$|f(x_5)| \approx 0/00891 \cdot 10^{-2}.$$

۷-۲ مرتبه همگرایی یک دنباله

تا کنون برای آهنگ همگرایی یک دنباله از کلمات کند و تند یا سریع استفاده کرده ایم . اما ، به راستی معیاری برای سرعت میل کردن جملات یک دنباله وجود دارد ؟ در اینجا معیاری موسوم به مرتبه همگرایی تعریف می کنیم . که توسط آن نه فقط اندازه ای برای سرعت همگرایی به دست می آید بلکه توسط آن می توان سرعت همگرایی دنباله های متفاوت را باهم مقایسه کرد و در نتیجه دو روش را از این نظر مورد مقایسه قرار داد .

۲-۷-۱ تعریف

فرض کنید دنباله $\{x_n\}$ عدد همگرا باشد و اعداد ثابت ، حقیقی و مثبت p و C چنان باشند

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^p} \right| = C$$

که

در این صورت ، p را مرتبه همگرایی دنباله $\{x_n\}$ نامند. گاهی گفته می شود که روشی که ها از آن به دست $\{x_n\}$ آیند از مرتبه p است .

به راحتی می توان مشاهده کرد که هرچه p بزرگتر باشد سرعت همگرایی بیشتر است .

۲-۷-۲ قضیه

اگر از روش تکرار ساده به دست آمده باشد ، و به عدد که ریشه $x=g(x)$ است همگرا

باشد $\{x_n\}$ آن گاه مرتبه همگرایی یک است . α

$$g'(a) \neq 0 \quad \{x_n\}$$

۲-۷-۳ قضیه

در صورتی که $\alpha = 0$ همگرایی حداقل دو است .

۲-۷-۴ تعبیر عددی مرتبه همگرایی

اگر مرتبه همگرایی $\{x_n\}$ دو باشد ، داریم ، برای n های نسبتا بزرگ ،

$$|x_{n+1} - \alpha| \approx c |x_n - \alpha|^2$$

که در آن c عددی ثابت و مخالف صفر است . فرض کنید c حدود عدد یک باشد . در این

صورت ، اگر $|x_1 - \alpha| < 0.1$ باشد $|x_2 - \alpha| < 0.01$ خواهد بود و بعد

$|x_3 - \alpha| < 0.0001$ و بالاخره $|x_4 - \alpha| < 10^{-8}$ خواهد بود . به عبارت دیگر ، ارقام اعشار

درست در هر مرحله تقریبا دو برابر مرحله قبل می شود .

۸-۲ روش نیوتن - رَفسُن

این روش یکی از سریعترین روش‌هایی است که تا کنون بررسی کرده ایم. برای به کار بردن این روش باید تخمین نسبتاً نزدیکی از ریشهٔ مورد نظر در دست باشد. از این رو، این روش بیشتر برای تصحیح تقریب‌های نا دقیق که از روش‌های دیگر به دست آمده است به کار می‌رود. این روش، همان‌طور که در ۸-۲-۴ نشان داده خواهد شد، حالت خاصی از روش تکرار ساده است و تعمیم آن برای تعیین تقریبی از جواب‌های یک دستگاه معادلات غیر خطی ساده است. از این به بعد روش نیوتن - رفسن را به طور خلاصه روش نیوتن می‌نامیم.

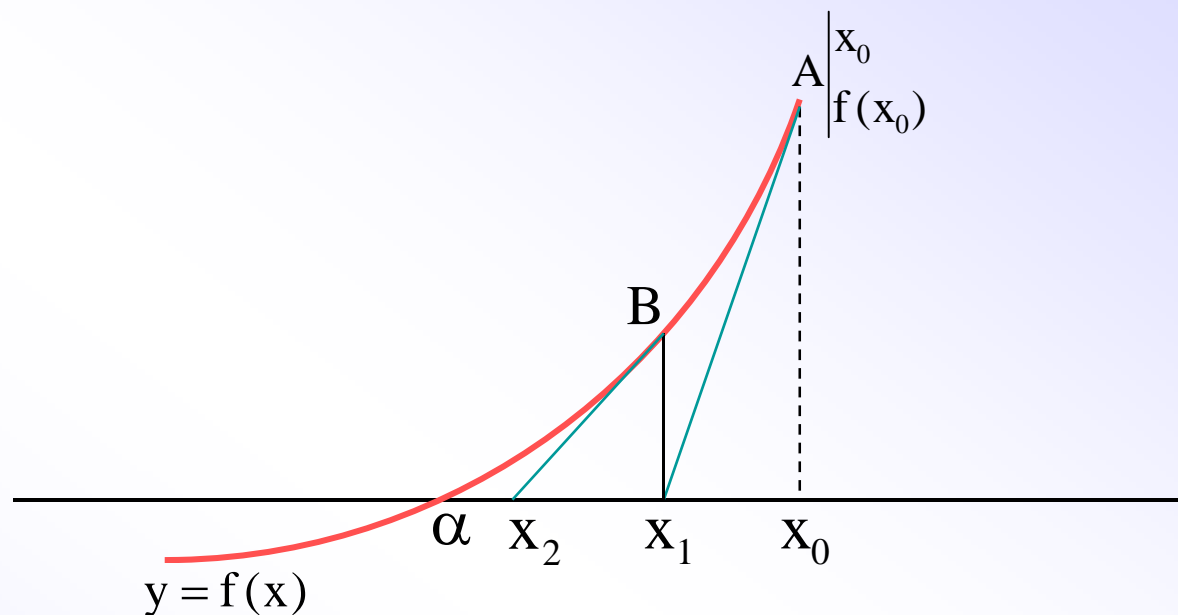
۲-۸-۱ فرمول تکرار روش نیوتن

فرمول روش نیوتن را می توان به دو طریق به دست آورد که در زیر به شرح آن ها می پردازیم .

طریقه اول

در این روش از روش هندسی بدست آمدن جملات روش نیوتن استفاده می شود . در این روش اگر تقریبی x_p باشد ، از نقطه A واقع بر منحنی $y=g(x)$ به طول مماس به این منحنی رسم می کنیم و محل تلاقی آن را با محور طول ها می نامیم ، شکل x_1 (۲-۱۴) .

بعد این عمل را تکرار می کنیم تا به تقریب مطلوب برسیم .



شکل ۱۴-۲

اگر x_0 معلوم باشد ، برای به دست آوردن باید معادله خط مماس بر منحنی $y=f(x)$ را در نقطه بنویسیم و محل تلاقی آن را با محور x تعیین کنیم . ضریب زاویه این خط است . بنابراین ،

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{معادله خط مماس}$$

محل تلاقی این خط با محور طول ها را (x_1) بگیریم . پس ،

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

که اگر $f'(x_0) \neq 0$ ، نتیجه می دهد

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$



پس به طور کلی می توان نوشت:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

فرمول بالا فرمول تکرار روش نیوتن است .

طریقه دوم

در این طریقه فرض می کنیم تقریبی نزدیک به x_0 و h اختلاف آنها باشد،

یعنی

$$\alpha = x_0 + h$$

اگر بتوانیم h را به دست آوریم آن را به اضافه می کنیم و به می رسیم . با استفاده از بسط تیلور ، داریم:

$$0 = f(\alpha) = f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(\eta)$$

که در آن η بین α و x_0 است . با توجه به فرض ، h کوچک است . از این رو ، می توان از آخرین جمله بسط فوق صرفنظر کرد ، یعنی

$$0 \approx f(x_0) + hf'(x_0)$$

پس،

$$h \approx -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

لذا اگر $x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ را به x_0 اضافه کنیم تقریبی از x_1 به دست می آید که آن را

می نامیم. یعنی، $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ که همان فرمول (*) است.

۲-۸-۲ مثال

۱- a عددی مثبت است و مطلوب است محاسبه تقریبی از \sqrt{a} به روش نیوتن واضح

است که \sqrt{a} ریشه مثبت معادله زیر است

$$f(x) = x^2 - a = 0$$

بنابر این ، $f'(x) = 2x$ فرمول نیوتن چنین است :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n}$$

$$= \frac{x_n^2 + a}{2x_n}$$

این فرمول را می توان به صورت زیر نیز نوشت (که از نظر محاسبه راحت تر به کار می رود)

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left[x_n + \frac{a}{x_n} \right]$$

این فرمول را یونانیان قدیم نیز می شناخته و از آن استفاده می کرده اند .

به عنوان مثال اگر $a = 2$ و $x_0 = 1$ ، که تقریب هایی از $\sqrt{2}$ هستند ، به دست می آیند .

$$x_1 = 1/5$$

$$x_2 = 1/416$$

$$x_3 = 1/414215686 \quad (9D)$$

$$x_4 = 1/414213562 \quad (9D)$$

۲- تقریبی از ریشه معادله $x + \cos x = 0$ را با تقریب اولیه $x_0 = 0/7$ حساب کنید .

با توجه به این که

$$f(x) = x + \cos x$$

$$f'(x) = 1 - \sin x$$

داریم

و فرمول نیوتن چنین خواهد بود

$$X_{n+1} = X_n - \frac{X_n + \cos X_n}{1 - \sin X_n}$$

جملات دنباله $\{x_n\}$ قرار گیرند (توجه کنید که ماشین حساب در وضعیت (MODE) رادیان باشد).

$$x_1 = -0.73943649 \quad (8D)$$

$$x_2 = -0.73908515 \quad (8D)$$

$$x_3 = -0.73908513 \quad (8D)$$

لازم به ذکر است که

$$f(x_3) = 5.383 \times 10^{-9}$$

که عدد بسیار کوچکی است و مؤید این که بسیار دقیق است .

۲-۸-۳ همگرایی روش نیوتن

روش نیوتن حالت خاصی از روش تکرار ساده است ، زیرا اگر معادله $f(x) = 0$ را به صورت

بنویسیم و آن گاه در معادله قبلی $x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ بالا هم صدق می کند . یعنی ،

$$f(\alpha) = 0 \quad (۲۳.۲) \quad \alpha$$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

و فرمول نیوتن عبارت است از ، (امتحان کنید) .

بنابر این ، برای بحث در همگرایی روش نیوتن باید شرایط برقراری روش تکرار ساده را با $g(x)$ تعریف شده در (۲۳.۲) بررسی کنیم . برای این منظور را حساب می کنیم (فرض می کنیم تابع f مشتق دوم پیوسته دارد) .

$$g'(x)$$

$$g'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f''(x)f(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f''(x)f(x)}{(f'(x))^2}$$

حال فرض می کنیم که (یعنی ، را همیشه ساده فرض می کنیم)

$$f'(\alpha) \neq 0 \quad (۲۴.۲)$$

در این صورت ،

$$g'(\alpha) = 0$$

چون $g'(x)$ پیوسته است پس به ازای هر ، یک همسایگی از هست به قسمی که به ازای

هر x از این همسایگی

$$|g'(x) - g'(\alpha)| = |g'(x)| < \varepsilon$$

بنابر این ، اگر α عددی کوچکتر از یک فرض کنیم شرط قضیه ۲-۶-۴ برقرار است و اگر از این همسایگی اختیار شود دنباله $\{x_n\}$ که از روش نیوتن حاصل می شود همگراست . به علاوه ، چون ، بنابر قضیه ۲-۷-۳ ، $g'(\alpha) \neq 0$ همگرایی $\{x_n\}$ حداقل دو است .

ضمناً با توجه به قضیه ۲-۷-۳ ، اگر $g''(\alpha) \neq 0$ همگرایی دقیقاً دو است . در اینجا

$$g''(\alpha) = \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} \quad (\text{تحقیق کنید})$$

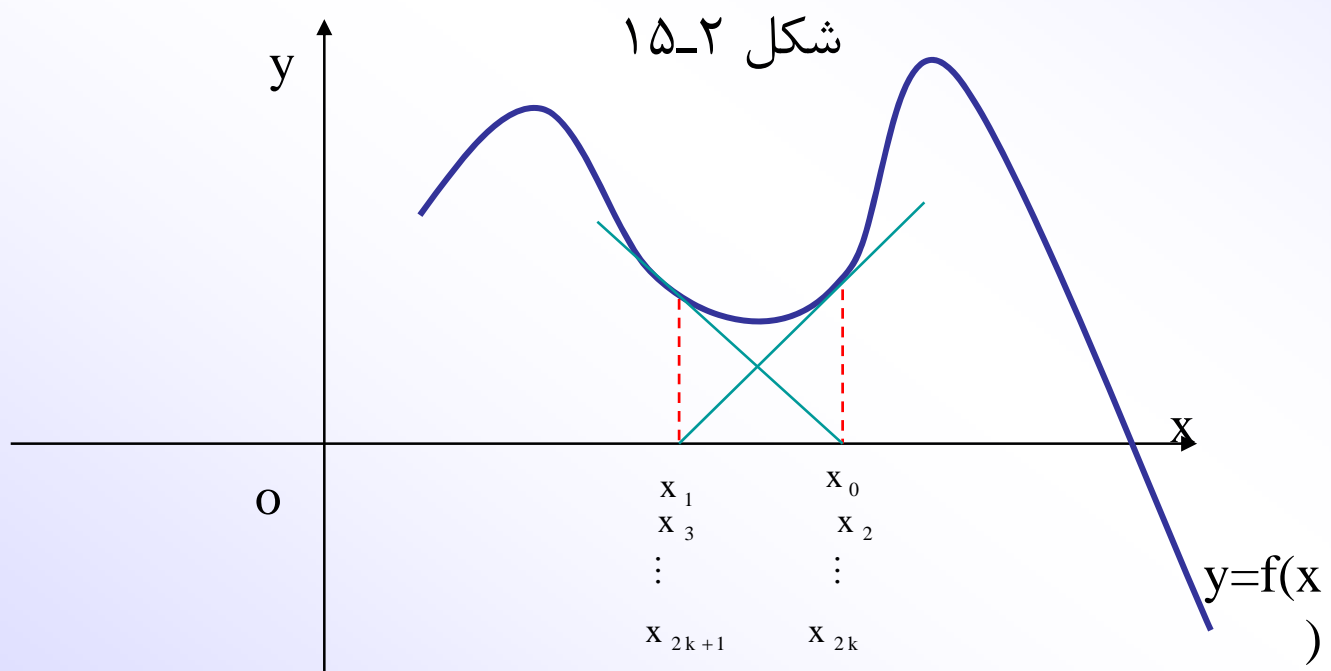
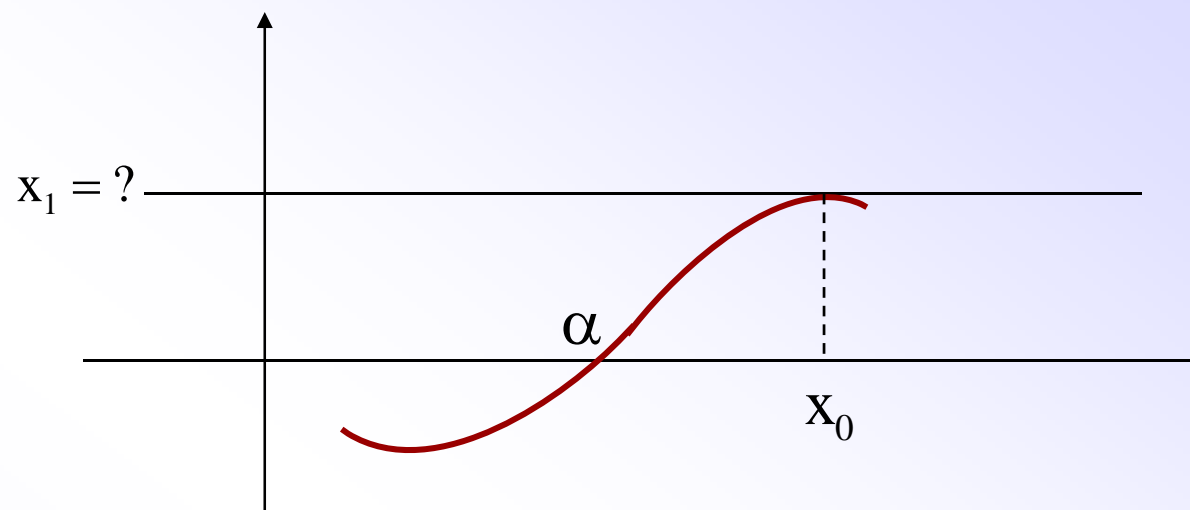
بنابر این ، با توجه به (۲ . ۲۴) ، اگر آن گاه مرتبه همگرایی روش نیوتن دو است .

$$f'(\alpha)f''(\alpha) \neq 0$$

۲-۸-۴ خصوصیات روش نیوتن

الف) اشکال اساسی روش نیوتن آن است که ، آن همسایگی که در آن $|g'(x)| < 1$

ممکن است بسیار کوچک باشد ، به عبارت دیگر باید به‌خاطر نزدیک به باشد تا جملات دنباله حاصل از روش نیوتن به همگرا باشند! شکل های زیر واگرایی روش نیوتن و نوسان بین دو نقطه را نشان می دهند . برای رفع این مشکل ابتدا ، به وسیله یکی از روش های همیشه همگرا ، تقریبی نزدیک به به دست می آورند و بعد این تقریب را می گیرند و از روش نیوتن استفاده می کنند .



ب) اشکال دوم روش نیوتن لزوم موجود بودن (x_0) محاسبه آن در نقاط

x_n است و این که همواره $(x_n) \neq 0$ گاهی تابع f مشتق ندارد ، که در نتیجه

امکان استفاده از فرمول نیوتن نخواهد بود ، و یا شکل (x_0) محاسبه آن

پیچیده است رفع این مشکل را در ۲-۱۰ بررسی می کنیم.

ج) مزیت عمده روش نیوتن ، در صورت همگرایی ، سرعت سریع آن است که

جذابیت و کاربرد آن را فزونی بخشیده است.

۲-۱۰ روش وتری (یا خط قاطع)

۲-۱۰-۱ فرمول روش وتری

می دانیم که

$$\lim_{x \rightarrow x_n} \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} = f'(x_n)$$

بنابر این ، اگر x مقداری نزدیک به x_n باشد ، مثلا ، x_{n+1} ،

$$\frac{f(x_n) - f(x_{n+1})}{x_n - x_{n+1}} \approx f'(x_n) \quad (۲ . ۳۱)$$

از این رو ، در فرمول نیوتن به جای $f'(x_n)$ رابطه (۲ . ۳۱) استفاده می کنیم و به دست می

آوریم :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n) - f(x_{n+1})}{x_n - x_{n+1}}}$$

و یا

$$X_{n+1} = X_n - \frac{f(X_n)(X_n - X_{n-1})}{f(X_n) - f(X_{n-1})} \quad (۳۲.۲)$$

اگر فرمول (۳۲.۲) را ساده کنیم حاصل می شود :

$$X_{n+1} = \frac{X_{n-1}f(X_n) - X_nf(X_{n-1})}{f(X_n) - f(X_{n-1})} \quad (۳۳.۲)$$

فرمول (۳۲.۲) یا (۳۳.۲) فرمول روش وتری است . برای محاسبه جملات دنباله

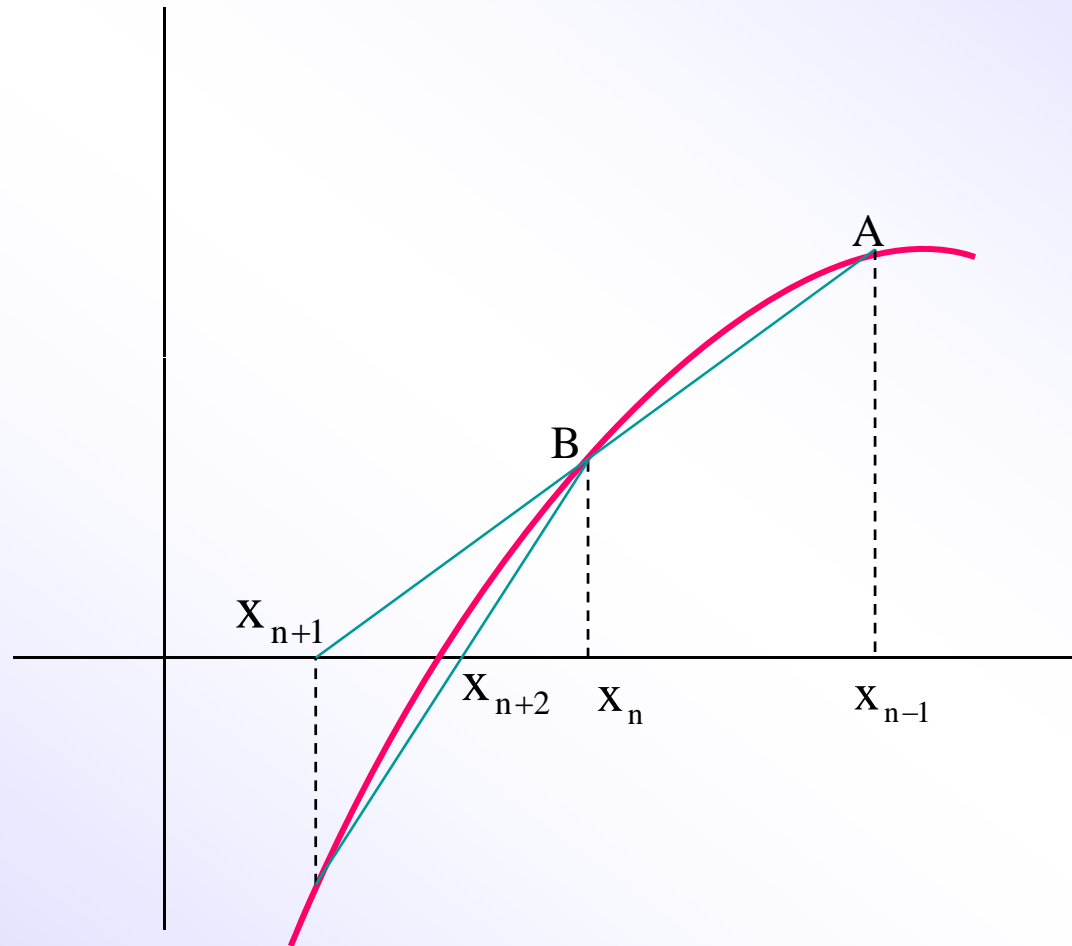
$\{X_n\}$ به روش وتری نیاز به دو مقدار اولیه X_0 و X_1 داریم و باید از فرمول (۳۲.۲) بقیه ها را حساب کنیم ، زیرا فرمول (۳۳.۲) از نظر محاسباتی ناپایدار است .

علت این که این روش را روش وتری نامیده ایم آن است که از محال برخورد خطی که

نقاط

$$A \begin{vmatrix} X_{n-1} \\ f(X_{n-1}) \end{vmatrix}, \quad B \begin{vmatrix} X_n \\ f(X_n) \end{vmatrix}$$

را به هم وصل می کند ، با محور x حاصل می شود ، شکل (۱۷-۲) .



شکل ۱۷-۲

شکل ۱۷-۲ نشان می دهد که روش وتری ممکن اسن همگرا نباشد . مثلا اگر خط AB موازی محور x باشد و یا آن را در دور دست قطع کند ، جایی که احتمالا جزء حوزه تعریف f نیست ، یا قابل محاسبه نیست و یا مفید نیست . ثابت می شود که اگر دنباله $\{x_n\}$ به دست می آید ، همگرا باشد ، همگرایی آن از مرتبه است . بنابر این ، این روش سرعتی کمتر از ۱.۶۱۸ و بیش از $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ به مراتب سریع تر از دو بخشی و نابه جایی دارد .

فصل سوم

حل معادلات چند جمله ای

مقدمه

تعیین ریشه های یک معادله چند جمله ای به صورت

*
$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$
 که در آن

$$a_n \neq 0, \quad n \geq 2$$

از دیر باز مورد توجه بوده است . حل مسائل زیادی منجر به پیدا کردن ریشه های یک معادله چند جمله ای می شود . مثلاً تعیین مقادیر ویژه یک ماتریس مربع ، بیان جمله عمومی دنباله هایی که به طور بازگشتی تعریف می شوند...

در این فصل مقدمات اجرای روش نیوتن را فراهم می کنیم . برای این منظور محاسبه یک چند جمله ای و مشتق آن را به ازای x دلخواه توضیح خواهیم داد و روش های خواص چند جمله ای ها را برای تعیین حدود و تعداد ریشه های حقیقی آن شرح می دهیم.

هدفهای کلی

1. ارائه نمونه ای از مسائل کاربردی که حل آن منجر به حل یک معادله چند جمله ای می شود.

2. ارائه روابط بین ریشه ها و ضرایب معادله *

3. تعیین حدود و تعداد ریشه های حقیقی *

4. محاسبه $P(x)$ و $P'(x)$ به ازای $x = a$

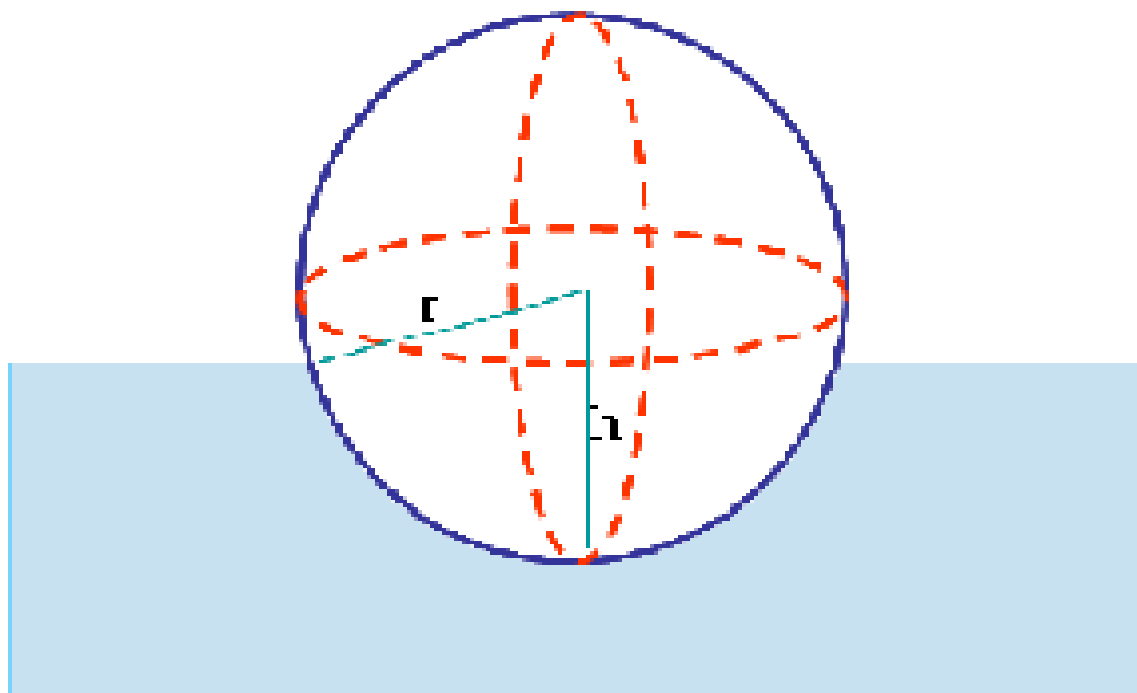
5. تعیین ریشه های حقیقی معادله * با دقت مطلوب

دانشجو پس از مطالعه این فصل باید بتواند :

1. در صورت لزوم از روابط بین ضرایب و ریشه ها استفاده کند.
2. حدود و تعداد ریشه های حقیقی یک معادله چند جمله ای را تعیین کند.
3. مقدار یک چند جمله ای و مشتق آن را به ازای X دلخواه حساب کند.
4. ریشه های حقیقی یک معادله چند جمله ای را با دقت مطلوب حساب کند.

۱-۳ یک مسئله کاربردی

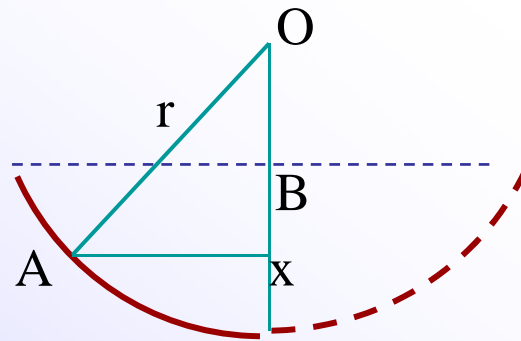
فرض کنید جسمی کروی به شعاع r و وزن مخصوص $0/6$ در آب قرار دارد.



می خواهیم ارتفاع قسمتی از کره که در آب قرار دارد، یعنی h ، را بر حسب r به دست آوریم. طبق قانون ارشمیدس باید داشته باشیم

وزن آب جابجا شده = وزن کره

اما، وزن آب جابجا شده برابر حجم قسمتی از جسم است که در آب قرار دارد .
برای محاسبه این حجم اگر قطعه نشات داده شده را در شکل زیر حول محور y دوران دهیم، خواهیم داشت :



$$AB^2 = AO^2 - OB^2 = r^2 - (r - x)^2$$

که در نتیجه، $\int_0^h \pi (r^2 - (r - x)^2) dx$ = حجم قسمت قرار گرفته در آب

$$= \pi \int_0^h (2rx - x^2) dx$$

$$= \pi \left[rx^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^h = \frac{\pi}{3} (3rh^2 - h^3)$$

و ضمناً وزن کره برابر است با

$$\frac{4}{3} \pi r^3 \times \frac{0}{6}$$

پس باید داشته باشیم

$$\frac{\pi}{3} (3rh^2 - h^3) = 2.4 \frac{\pi}{3} r^3$$

که پس از ساده کردن و با فرض $R = \frac{h}{2}$ صورت زیر در می آید

$$R^3 - 3R^2 + 2.4 = 0$$

بنابراین ، تعیین نسبت h به r مستلزم تعیین ریشه ای از معادله بالاست که بین

۰ و ۲ قرار دارد. (زیرا $h \leq 2r$ که در نتیجه $0 < R \leq 2$)

۲-۳ روابط بین ریشه ها و ضرایب یک معادله چند جمله ای

به طور کلی یک معادله چند جمله ای درجه n عبارت است از

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0 \quad *$$

که در آن $n \geq 2$ ، $a_n \neq 0$ چون در عمل بیشتر با معادلاتی که ضرایب آنها حقیقی است مواجه می شویم فرض می کنیم که همواره حقیقی است.

اگر $n = 1$ جواب $*$ عبارت است از

$$z = -\frac{a_0}{a_1}$$

از این رو ، فرض می کنیم $n \geq 2$ همناً اگر $a_0 = 0$ داریم

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z = z(a_n z^{n-1} + \dots + a_1) = 0$$

که در نتیجه $z = 0$ به علاوه ، اگر $a_0 \neq 0$

$$a_0 = a_1 = \dots = a_{k-1} = 0, \quad (k < n)$$

داریم

$$\begin{aligned} P(z) &= a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_k z^k \\ &= z^k (a_n z^{n-k} + \dots + a_k) = 0 \end{aligned}$$

یعنی $z = 0$ ریشه تکراری مرتبه K خواهد بود و کافی است بقیه ریشه ها را از معادله

$$a_n z^{n-k} + \dots + a_k = 0$$

به دست آوریم که در آن $a_k \neq 0$ پس به طور کلی فرض می کنیم که در معادله * داریم

$$a_0 \times a_n \neq 0$$

۳-۲-۱ قضیه

معادله * دارای n ریشه (حقیقی یا موهومی) است و اگر ریشه های آن را

z_1, z_2, \dots, z_n بنامیم داریم

$$P(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n) \quad **$$

این قضیه در جبر ثابت می شود.

ریشه ها را می توان به ترتیب زیر مرتب کرد، که با توجه به $a_0 \times a_n \neq 0$

$$0 < |z_1| \leq |z_2| \leq \dots \leq |z_n|$$

به علاوه ، روابط زیر بین ضرایب و ریشه ها بر قرارند (این روابط از برابری

ضرایب z^0, z^{n-1}, \dots, z^n در دو طرف ** به دست می آیند):

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} ,$$

$$z_1 z_2 \dots z_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} z_i z_j = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

۳-۲-۲ مثال

اگر $\tilde{P}(z) = 2z^2 + 3z - 2$ نگاه ریشه های $P(z)=0$ عبارت اند از $z_1 = -2$, $z_2 = \frac{1}{2}$

واز اینجا ، بنا بر تعریف

$$P(z) = 2(z + 2)(z - \frac{1}{2})$$

۳-۲-۳ قضیه

اگر z ریشه معادله چند جمله ای درجه n باشد ریشه $\frac{1}{z}$ معادله زیر است.

$$Q(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

۳-۲-۴ مثال

ریشه های دسته معادلات زیر را حساب کنید.

$$\begin{cases} Q(z) = 10z^2 + 2z + 1 = 0 \\ P(z) = z^2 + 2z + 10 = 0 \end{cases}$$

حل:

معادله $P(z) = 0$ یک معادله درجه دوم است. بنابراین،

$$z = -1 \pm \sqrt{1-10}$$

$$\text{بنابراین، } z_1 = -1 + 3i \quad z_2 = -1 - 3i \quad \text{در آن} \quad i^2 = -1$$

با توجه به ارتباط بین ضرایب $P(z)$ و $Q(z)$ ریشه های $Q(z)$ عبارت اند از:

$$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{-1+3i} = \frac{1+3i}{-10}, \quad \frac{1}{z_2} = \frac{1}{-1-3i} = \frac{3i-1}{10}$$

۳-۲-۵ قضیه

اگر z یک ریشه مختلط معادله چند جمله ای درجه n باشد، یعنی،

مزدوج \bar{z} ، نیز ریشه معادله چند جمله ای درجه n است.

۳-۲-۶ قضیه

اگر درجه $P(z)$ فرد باشد معادله $P(z) = 0$ حداقل یک ریشه حقیقی دارد.

۳-۲-۷ قضیه

اگر z ریشه $P(z) = 0$ باشد $-z$ ریشه $P(-z) = 0$ است.

۳-۲-۸ قضیه

اگر در چند جمله ای $P(z)$ تنها توانهای زوج z موجود باشند یعنی

$$P(z) = a_{2k}z^{2k} + a_{2k-2}z^{2k-2} + \dots + a_2z^2 + a_0$$

عداد ریشه های حقیقی معادله چند جمله ای عددی زوج است (توجه کنید که ریشه حقیقی وجود نداشته باشد).

۳-۲-۹ قضیه

اگر $a = \frac{r}{s}$ ، که در آن r و s صحیح و نسبت به هم اول اند، ریشه معادله

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

باشد و $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ جملگی اعداد صحیح باشند آنگاه $r | a_0$ و $s | a_n$

به ویژه اگر $|a_n| = 1$ آنگاه ریشه های حقیقی $P(x)=0$ ، در صورت وجود،

صحیح هستند.

۳-۲-۱۰ قاعده علامات دکارت

اگر m تغییر علامات در جملات متوالی $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ و k تعداد ریشه های معادله $P(z)=0$ باشد آنگاه $m \geq k$ عددی زوج است.

۳-۲-۱۱ نتیجه

اگر l تعداد تغییر علامت در جملات ضرایب $P(-z)$ و s تعداد ریشه های منفی $P(z)=0$ باشد ، در این صورت $l \leq s$ عددی زوج است.

۳-۲-۱۲ مثال

تعداد ریشه های حقیقی معادله

$$P(z) = z^3 - z^2 - 10z = 0$$

را، در صورت امکان ، به قاعده علامات دکارت تعیین کنید.

حل:

تعداد تغییر علامت در ضرایب $P(z)$ برابر ۲ است ازاین رو ، این معادله دارای

$$P(-z) = -z^3 - z^2 + 10z + 4$$

۲ یا ۰ ریشه مثبت است . همچنین

که تعداد تغییر علامت ضرایب آن یک است . یعنی معادله حتماً دارای یک

ریشه منفی است ولی در مورد ریشه های مثبت آن ، قاعده علامات دکارت

نتیجه ای به دست نمی دهد!

۳-۳ تعیین حدود ریشه های $P(z) = 0$

در فصل دوم مشاهده شد که برای تعیین ریشه های یک معادله لازم است حدود ریشه ها و گاهی تقریب خوبی از آنها به گونه ای معین شود. در این قسمت مشاهده خواهید کرد که ریشه های معادله چند جمله ای محدود هستند و به سادگی کران بالا و پایین برای آنها به دست می آید .

۳-۳-۱ قضیه

اگر z ریشه معادله

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0 = 0$$

باشد (a_i ها حقیقی هستند) آنگاه

$$|z| \leq |a_0| + |a_1| + \dots + |a_{n-1}| + 1 = M$$

۳-۳-۲ نتیجه

اگر z ریشه دلخواهی از معادله چند جمله ای درجه n باشد

$$|z| \leq \frac{M'}{|a_n|}$$

که در آن

$$M' = |a_n| + |a_{n-1}| + \dots + |a_0|$$

۳-۳-۳ قضیه

z_n, \dots, z_1

اگر تمام ریشه های معادله چند جمله ای درجه n حقیقی و ریشه ها باشند به طوری که

$$0 < |z_1| \leq \dots \leq |z_n|$$

آنگاه

$$z_n^2 < \left(\frac{a_{n-1}}{a_n} \right)^2 - 2 \frac{a_{n-2}}{a_n} = R$$

$$z_1^2 > \frac{1}{\left(\frac{a_1}{a_0} \right)^2 - 2 \frac{a_2}{a_0}} = r$$

و

۳-۳-۴ نتیجه

اگر تمام ریشه های معادله چند جمله ای درجه n حقیقی باشند

$$r < z_i^2 < R, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

یعنی ، مربع ریشه های چند جمله ای درجه n به R و r محدودند.

۳-۳-۵ نتیجه

اگر $P(z)$ چنان بیاشد که R و r منفی باشد معادله $P(z)=0$ حتماً ریشه مختلط دارد. به عبارت دیگر ، شرط لازم برای آنکه معادله $P(z) = 0$ ریشه مختلط نداشته باشد آن است که R و r هر دو مثبت باشند، ولی این شرط کافی نیست. همچنین اگر $r > 0$ و $R \geq 0$ معادله حتماً ریشه مختلط دارد .

۳-۳-۶ مثال

الف) می دانیم که معادله $5x^2 + 8x - 4 = 0$ فقط ریشه های حقیقی دارد
حدود ریشه ها را تعیین کنید.

حل:

بنابر قضیه ۳-۳-۳

$$R = 5^2 - 2 \times 8 = 9, \quad r > \frac{1}{\left(\frac{-8}{4}\right)^2 - 2 \times \frac{5}{4}} = \frac{2}{3}$$

بنابراین،

$$\frac{2}{3} < z_i^2 < 9$$

ب) نشان دهید که شرط $R > 0$ و r برای عدم وجود ریشه مختلط برای معادله چند جمله ای درجه n کافی نیست.

حل:

معادله $z^3 + 3z + 4 = 0$ در نظر می گیریم ، مقادیر R و r عبارت اند از

$$R = (-3)^2 - 2 \times 4 = 1 > 0, \quad r > \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 2 \times \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{9}{16} - \frac{1}{2}} = 16 > 0$$

همان گونه که مشاهده می شود $r > 0$ و R اما ریشه های مذکور عبارت اند از

$$z_1 = \frac{-3 + i\sqrt{7}}{2}, \quad z_2 = \frac{-3 - i\sqrt{7}}{2}$$

یعنی ، با وجود اینکه r و R هر دو مثبت هستند معادله ریشه مختلط دارد.

۳-۴ محاسبه $P(z)$ و $P'(z)$ ازای $z = a$

اگر منظور محاسبه $P(z)$ به ازای $z = a$ باشد از طریق معمولی ، یعنی محاسبه

تک تک جملات موجود در $P(z)$ و بعد جمع کردن آنها ، باید $\frac{n(n+1)}{2}$ ضرب

و n جمع انجام دهیم . (مثلاً برای محاسبه a^n باید n ضرب انجام داد. چگونه؟)

در ادامه روشی ارائه می کنیم که فقط به n ضرب و n جمع نیازمند و با طبیعت

کامپیوتر به عنوان وسیله ای سریع برای انجام کارهای تکراری سازگار است.

قبلاً متذکر می شویم که اگر

$$P(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

آنگاه

$$P(a) = ((a_3 \times a + a_2) \times a + a_1) \times a + a_0$$

اگر عملیات را از داخلترین پرانتز شروع کنید مشاهده می شود که به 3 جمع و به 3 ضرب نیاز داریم . در صورتی که برای محاسبه مستقیم

$$a_3 a^3 + a_2 a^2 + a_1 a + a_0$$

6 ضرب و 3 جمع باید انجام داد .

۳-۴-۱ قضیه

اگر

$$P(z) = (z - a)(b_n z^{n-1} + b_{n-1} z^{n-2} + \dots + b_2 z + b_1) + b_0$$

آنگاه

$$\begin{cases} b_n = a_n \\ b_i = a b_{i+1} + a_i \end{cases}, i = n-1, n-2, \dots, 0$$

و

$$P(a) = b_0$$

۳-۴-۲ مثال

اگر $P(x) = 2x^3 - x^2 - 6$ مطابق است محاسبه $P(1.2)$.

حل:

جدول زیر نحوه به دست آوردن $P(1.2)$ را به خوبی نشان می دهد: (توجه داشته باشید که ضریب هر توانی از x که در $P(x)$ نیست صفر منظور می شود).

1.2		2	-1	0	-6
	+	0	2.4	1.68	2.016
		2	1.4	1.68	-3.984

بنابراین ، $P(1.2) = -3.984$. ضمناً می توان نوشت

$$2x^3 - x^2 - 6 = (x - 1.2)(2x + 1.4x + 1.68) - 3.984$$

قضیه زیر را با استفاده از ۳-۴-۱ به دست می آید.

قضیه ۳-۴-۳

اگر $P(z) = (z - a)q(z) + b_0$ نگاه $P'(a) = q(a)$.

۳-۴-۴ مثال

اگر $P(z) = 3z^3 - 4z + 8$ مطلوب است محاسبه $P(2)$ و $P'(2)$

حل:

جدول زیر مراحل محاسبه را نشان می دهد:

2		3	0	-4	8	
	+	0	6	12	16	
			3	6	8	24=P(2)
2		+	0	6	24	
		3	12			32= P'(2)

۳-۵ تعیین ریشه های حقیقی $P(z)=0$ با دقت مطلوب

برای تعیین ریشه های حقیقی معادله

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

از کلیه مطالب گفته شده می توان استفاده کرد. اگر ابتدا ریشه های صفر را بیرون می کشیم و ک معادله چند جمله ای با جمله ثابت به دست می آوریم . سپس بنابر قضیه ۳-۲-۹ ریشه های گویا را ، در صورت وجود، به دست می آوریم و با استفاده از روش هورنر به یک چند جمله ای میرسیم که ریشه های آن اصم یا مختلط هستند.

برای محاسبه ریشه های حقیقی و اصم از روش نیوتن ، که همگرایی سریع دارد، استفاده می کنیم . اما این روش نیاز به مقدار اولیه ای از ریشه ها دارد.

با توجه به قضایای ۳-۳-۱ ، ۳-۳-۳ و نتایج آنها حدود این ریشه ها معین و ریشه ها را با شروع از بزرگترین ، یکی یکی به دست می آوریم تا اینکه به یک چند جمله ای برسیم که تمام ریشه های آن مختلط باشد . ریشه های مختلط به **روش برستو** قابل محاسبه اند.

وقتی x_0 به دست آمد محاسبه جملات $\{x_n\}$ را بطه زیر انجام می شود

$$x_{n+1} = x_n - \frac{P(x_n)}{P'(x_n)} \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad *$$

توجه داشته باشید که $P(x_n)$ و $P'(x_n)$ روش هورنر به سادگی محاسبه می شوند. البته برای n های بزرگ باید از ماشین حساب یا کامپیوتر استفاده کرد.

۳-۵-۱ مثال

ریشه های معادله $x^3 + 2x - 1 = 0$ را بیابست آورید.

حل:

چون درجه چند جمله ای فرد است پس حداقل یک ریشه حقیقی موجود است

با توجه به اینکه

$$P(0) = -1 < 0, \quad P(1) = 3 > 0$$

یک ریشه حقیقی بین ۰ و ۱ است. قرار می دهیم 0.5 به استفاده از روش

هورنر چند جمله را از فرمول * حساب می کنیم.

0.5		1	1	2	-1
	+	0	0.5	0.75	1.375
<hr/>					
		1	1.5	2.75	0.375=P(0.5)
0.5	+	0	0.5	1	
<hr/>					
		1	2	3.75 = P'(0.5)	

$$x_1 = 0.5 - \frac{0.375}{3.75} = 0.4$$

0.4		1	1	2	-1
	+	0	0.4	0.56	1.024
<hr/>					
		1	1.4	2.56	0.024=P(0.4)
0.4	+	0	0.4	0.72	
<hr/>					
		1	1.8	3.28 = P'(0.4)	

$$x_2 = 0.4 - \frac{0.024}{3.28} = 0.3927 \quad (4D)$$

این جواب تا سه رقم اعشار دقیق است و استفاده مجدد از روش هورنر دقت آن را نشان می دهد .

از جدول اخیر معلوم می شود که دو ریشه دیگر مختلط هستند (چرا؟).

	1	1	2	-1
0.3927	+ 0	0.3927	0.5469	1.0001676
	1	1.3927	2.5469	0.0001676

زیرا داریم

$$(x^3 + x^2 + 2x - 1) \approx (x - 0.3927)(x^2 + 1.3927x + 2.5469)$$

فصل چهارم

درونیابی

مقدمه

در ریاضیات محض ، بخصوص در آنالیز ریاضی ، معمولا با توابعی سرو کار داریم که با یک یا چند ضابطه تعریف شده اند. یعنی ، به ازای هر مقدار متغیر ، دستوری برای تعیین مقدار تابع داده شده است . اما ، در عمل به ندرت با چنین وضعی روبه رو می شویم و اکثر توابعی که باید مورد بررسی قرار گیرند مقدارشان به ازای بعضی از مقادیر متغیر و آن هم از طریق آزمایش و یا اندازه گیری به زحمت قابل تعیین است.

به بیان دقیق مقادیر تابع f ازای نقاط دو به دو متمایز

به ترتیب عبارتند از:

$$X_0, X_1, X_2, \dots, X_n \quad f_0, f_1, f_2, \dots, f_n$$

یک چنین تابعی را **تابع جدولی** نامیم. نمونه هایی از این توابع را می شناسید، توابع مثلثاتی و تابع لگاریتم که مقدار آنها به ازای بعضی از مقادیر متغیر در جدولهایی درج شده است.

درونیابی یعنی برآورد مقدار $f(x)$ $x_0 < x < x_n$ $i = 1, 2, \dots, n-1$

$$x \neq x_i$$

وبرونیابی یعنی برآورد مقدار $f(x)$ $x \notin [x_0, x_n]$

در این فصل ضمن آشنایی بیشتر با مفاهیم فوق کاربردهای عملی آنها را در تخمین جمعیت در سال های آینده و یا برآورد توابع مختلف دیگر خواهیم دید .

هدفهای کلی

- ۱- آشنایی با مفاهیم درونیابی و برونیابی
- ۲- معرفی چند جمله ای درونیاب
- ۳- تعیین چند جمله ای درونیاب به روش لاگرانژ و بیان معایب این روش

۴- تعیین چند جمله ای درونیاب به روش تفاضلات تقسیم شده و مزایای آن

۵- تعیین خطای چند جمله ای درونیاب و روش مینیمم کردن آن

۶- معرفی تفاضلات متناهی و کاربرد آنها در تعیین درجه چندجمله ای درونیاب و سرعت
بخشیدن به همگرایی دنباله های همگرا

۷- ارائه فرمولهای نیوتن، برای چند جمله ای درونیاب بر حسب تفاضلات متناهی

۸- معرفی درونیابی معکوس و کاربرد آن

دانشجو پس از مطالعه این فصل باید بتواند :

- ۱- مفاهیم درونیابی و برونیابی را بیان و کاربردهایی از آنها را ارائه کند .
- ۲- چند جمله ای درونیاب مربوط به یک تابع جدولی را به روشهای گوناگون حساب کنید.
- ۳- کران بالایی برای خطای چند جمله ای درونیاب حساب کند .
- ۴- جدول تفاضلات یک تابع جدولی را تشکیل و اطلاعات لازم را از آن کسب و چند جمله ای درونیاب را از آن به دست آورد .

۴-۱ مفهوم درونیابی

در ریاضیات از دیرباز توابع جدولی، یعنی توابعی که مقادیر آنها در نقاطی از حوزه تعریف آنها در یک جدول ثبت شده است، مورد استفاده قرار می گرفته اند.

همه با جدول مقادیر توابع \sin ، \cos و \tan در $0^\circ, 1^\circ, 2^\circ, \dots, 45^\circ$ درجه

آشنا هستید، همچنین با جدول مانیتیس لگاریتم اعداد. آنچه در دبیرستان برای

تعیین، مثلاً سینوس 37° درجه و 40 دقیقه انجام می دهید درونیابی خطی است

که در اینجا آنرا بررسی می کنیم. با پیدایش ماشین حساب و کامپیوتر جدولهای

مذکور دیگر به کار نمی روند و درونیابی بیشتر

هنر شناخت معانی و مفاهیم مستتر در یک جدول

است . یکی از این معانی ، تخمین مقدار یک تابع به ازای مقداری از x است که در جدول نیست ، ولی بین نقاط جدولی است . این همان مفهوم درونیابی است .

برای تخمین $f(x)$ وقتی f با جدول زیر داده شده است

x	x_0	x_1	x_2	\dots	x_n
$f(x)$	f_0	f_1	f_2	\dots	f_n

راههای متفاوتی وجود دارد . یکی از راههای نسبتا ساده این است که یک چند جمله ای

مانند پیدا کنیم $P(x)$ که مقدار آن در همان باشد x_i البته به f_i ازای

$$P(x_i) = f_i \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad *$$

و بعد به جای $f(x)$ در بازه $[x_0, x_n]$ $P(x)$ کار کنیم . اکنون سوالاتی به صورت زیر مطرح می شود :

الف) چرا یک چند جمله ای پیدا می کنیم ؟ مگر چند جمله ای چه خصوصییتی دارد که دیگر توابع ندارند؟

ب) آیا یک چند جمله ای که در $*$ صدق کند همیشه وجود دارد؟ و در صورت وجود منحصر به فرد است؟

(ج) آیاتعین این چندجمله ای برای n های بزرگ عملی است ؟

درپاسخ به سوال (الف) ، همه می دانیم که محاسبه یک چندجمله ای به ازای مقداری از X_i بسیار ساده است (روش هورنر از فصل سوم) . همچنین محاسبه مشتق و انتگرال توابع چندجمله ای و حتی تعیین ریشه های یک معادله چندجمله ای مشکل نیست . جالب این که ، درصورت متمایز بودن نقاط ، جواب سوال (ب) مثبت است و همیشه یک چندجمله ای منحصر به فرد وجود دارد و راههای ساده ای برای تعیین آن می شناسیم . این مطالب را در دیگر بخشهای این فصل مورد بررسی قرار خواهیم داد .

۲-۴ چند جمله ای لاگرانژ

یکی از روشهای تعیین یک چندجمله ای حداکثر از درجه n که در n صدق کند ، روش

لاگرانژ است . در این روش فرض می کنیم $L_0(x), L_1(x), \dots, L_n(x)$ یک

چندجمله ای درجه n باشند و داشته باشیم

$$P(x) = L_0(x)f_0 + L_1(x)f_1 + \dots + L_j(x)f_j + \dots + L_n(x)f_n$$

و سعی می کنیم $L_j(x)$ را چنان تعیین کنیم که

$$P(x_i) = f_i \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

برای این منظوری گوییم به ازای $0, 1, 2, \dots, n$ باید داشته باشیم

$$P(x_i) = L_0(x_i)f_0 + \dots + L_j(x_i)f_j + \dots + L_n(x_i)f_n \quad **$$

لذا کافی است (و در صورت مستقل بودن L_j ها) یکدیگر لازم است) داشته باشیم

$$\begin{cases} L_j(x_i) = 0 \\ L_j(x_j) = 1 \end{cases} \quad i \neq j \quad \text{و} \quad ***$$

اما، تابع زیر

(۴.۴)

$$(x - x_0) \dots (x - x_{j-1}) (x - x_{j+1}) \dots (x - x_n)$$

صفر است، یعنی به ازای

x_i

$x_n, \dots, x_{j+1}, x_{j-1}, \dots, x_1, x_0$

به ازای

$i \neq j$ ، کافی است کاری کنیم که مقدار این تابع به ازای یک x_j شود و این کار با تقسیم تابع مندرج در (۴.۴) بر عدد

$$(x_j - x_0)(x_j - x_1) \dots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_n)$$

امکان پذیر است. به عبارت دیگر

$$L_j(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \dots (x - x_n)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \dots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_n)} \quad (۵.۴)$$

به سادگی می توانید آزمایش کنید که شرایط $\star \star$ قرارند. چند جمله ایهای درجه n که به وسیله (۵.۴) بیان می شوند به چند جمله ایهای لاگرانژ معروف اند.

۴-۲-۱ مثال

چند جمله ای $P_j(x)$ که مربوط به تابع جدولی زیر است حساب کنید.

x_i	-۱	۰	۱
f_i	۱	۱	۳

حل:

در این مثال $n=2$ و در نتیجه چند جمله ایهای لاگرانژ از درجه دو هستند .

چند جمله ایهای لاگرانژ به قرار زیرند:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 0)(x - 1)}{(-1 - 0)(-1 - 1)} = \frac{x^2 - x}{2}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{(0 + 1)(0 - 1)} = \frac{x^2 - 1}{-1}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x + 1)(x - 0)}{(1 + 1)(1 - 0)} = \frac{x^2 + x}{2}$$

از این رو، بنابر فرمول داریم

$$P(x) = 1 \times L_0(x) + 1 \times L_1(x) + 3 \times L_2(x) = \frac{x^2 - x}{2} - (x^2 - 1) + \frac{3(x^2 + x)}{2}$$

$$P(x) = x^2 + x + 1$$

تحقیق کنید که $L_0(x) + L_1(x) + L_2(x) = 1$

تذکر: چند جمله ای $P(x)$ می توان به روش ضرایب مجهول نیز به دست آورد.

به این معنا که فرض می کنیم

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

و قرار می دهیم

و

$$P(-1)=1 \quad P(0)=1 \quad P(1)=3$$

که در نتیجه یک دستگاه سه معادله ، سه مجهول حاصل می شود که جواب آن

خواهد بود (امتحان کنید) . اما در عمل n می تواند بزرگ باشد و نقاط نزدیک به هم

، که در نتیجه حل a یک دستگاه شامل معادله و مجهول را با اشکالاتی

مواجه می کند: x_i

$(n+1)$

۴-۲-۲ مثال

با اضافه کردن نقطه (۲.۷) به تابع جدولی مثال (۴-۲-۱) مجدداً چندجمله‌ای را حل کنید. به عبارت دیگر، چندجمله‌ای مربوط به جدول زیر را حساب کنید.

	-۱	۰	۱	۲
x_i	۱	۱	۳	۷
f_i				

حل:

در این مثال $n = 3$ و چند جمله‌ایهای لاگرانژ همه از درجه ۳ هستند. این چند جمله‌ایها عبارت‌اند از:

$$L_0(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{-6}$$

$$L_1(x) = \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(0+1)(0-1)(0-2)} = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{2}$$

$$L_2(x) = \frac{(x+1)(x-0)(x-2)}{(1+1)(1-0)(1-2)} = \frac{x^3 - x^2 - 2x}{-2}$$

$$L_3(x) = \frac{(x+1)(x-0)(x-1)}{(2+1)(2-0)(2-1)} = \frac{x^3 - x}{6}$$

در نتیجه چند جمله ای $P(x)$ عبارت است از:

$$P(x) = 1 \times L_0(x) + 1 \times L_1(x) + 3 \times L_2(x) + 7 \times L_3(x)$$

$$= \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{-6} + \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{2} + \frac{3(x^3 - x^2 - 2x)}{-2} + \frac{7(x^3 - x)}{6}$$

که پس از ساده کردن نتیجه می شود

$$P(x) = x^2 + x + 1$$

ضمناً از طریق محاسبه معلوم می شود که

$$L_0(x) + L_1(x) + L_2(x) + L_3(x) = 1$$

مشاهده می شود که $P(x)$ درجه ۲ است ولی $L_3(x)$ درجه ۳ هستند. ضمناً از

محاسبات مربوط به مثال (۴-۲-۱) کمتر استفاده شد.

یعنی، با اضافه کردن یک نقطه به جدول باید تقریباً تمام عملیات را از سر گرفت. حجم عملیات نیز با افزایش n به سرعت بالا می‌رود. در ضمن درجه چند جمله‌ای درونیاب قبل از تعیین کامل آن معلوم نمی‌شود. قضیه زیر نشان می‌دهد که چند جمله‌ای که در صدق می‌کند $P(x)$ مختصر به فرد \ast است.

۴-۲-۳ قضیه

فقط یک چند جمله‌ای $P(x)$ حداکثر از درجه n وجود دارد که در شرط زیر صدق می‌کند:

$$P(x_i) = f_i \quad \text{و} \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (۶.۴)$$

۴-۲-۴ تعریف

چند جمله ای منحصر به فرد $P_d(x)$ در (۶.۴) صدق می کند **چند جمله ای درونیاب یا چند**

جمله ای هم محل تابع در نقاط f نامیده می شود x ، x_n ، ...

روش لاگرانژ برای تعیین چند جمله ای درونیاب تنها از لحاظ نظری مورد توجه است ولی همان گونه که در مثال ۴-۲-۲ نشان داده شد از لحاظ عددی معایب زیادی است .

۴-۲-۵ معایب روش لاگرانژ

۱- محاسبات این روش ، وقتی خیلی هم بزرگ نباشد ، زیاد است و خود کار کردن عملیات نیز ساده نیست . (به این مطلب فکر کنید که چگونه می توان ضرایب توان های مختلف را در هر یک از چند جمله ای های لاگرانژ با کامپیوتر حساب کرد) .

۲- درجه چند جمله ای درونیاب بعد از انجام تمام محاسبات تعیین می شود و با اضافه کردن یک یا چند نقطه به نقاط جدولی باید تقریباً تمام عملیات را از سرگرفت.

۳- چون چند جمله ای درونیاب به تدریج حساب نمی شود این روش را باید با احتیاط کامل به کار برد (مثال زیر را مطالعه کنید).

۴-۲-۶ مثال

جدول مربوط به تابع $p(x) = \sqrt[3]{x}$ داده شده است مطلوب است تخمین با استفاده از درونیابی لاگرانژ.

x_i	۰	۱	۸	۲۷	۶۴
f_i	۰	۱	۲	۳	۴

حل :

باتوجه به تعریف چندجمله ایهای لاگرانژ داریم (توجه کنید که $f_0=0$ و

$$L_0(x) \times f_0 = 0$$

$$P(x) = \frac{x(x-8)(x-27)(x-64)}{1(-7)(-26)(-63)} \times 1 + \frac{x(x-1)(x-27)(x-64)}{8(7)(-19)(-56)} \times 2$$

$$+ \frac{x(x-1)(x-8)(x-64)}{27(26)(19)(-37)} \times 3 + \frac{x(x-1)(x-8)(x-27)}{64(63)(56)(37)} \times 4$$

برای تخمین $\sqrt[3]{20}$ به جای قرار می دهیم ۲۰ خواهیم داشت

$$\sqrt[3]{20} \cong P(20) = -1 / 3139 \quad (4D)$$

با رسم منحنی مشاهده می شود برآورد $\sqrt[3]{20}$ می است! علت چیست ؟

$$y = \sqrt[3]{x}$$

در فاصله [۸.۲۷] معلوم می شود که شکل منحنی نزدیک به یک خط راست است .

لذا ، اگر در این فاصله چند جمله ای درونیاب درجه اول را به دست آوریم حاصل می شود

$$P_1(x) = \frac{x-27}{8-27} \times 2 + \frac{x-8}{27-8} \times 3$$

وبه دست می آید

$$\sqrt[3]{20} \cong P_1(20) = \frac{14}{19} + \frac{36}{19} = \frac{50}{19} = 2 / 6316$$

که از (4 D) $\sqrt[3]{20} = 2 / 7144$ خیلی دور نیست .

۳-۴ روش تفاضلات نیوتن

می دانیم که یک چندجمله ای را به طرق مختلف می توان نوشت . در فرمول (۲.۴)، برای چند جمله ای درونیاب ، این چند جمله ای بر حسب ترکیب خطی خاصی از چند جمله ایهای لاگرانژ نوشته شده است . ولی می توان چند جمله ای مستقل n خطی دلخواه در نظر گرفت و را بر حسب ترکیبی خطی $\mathbb{P}(x)$ آنها نوشت . اگر چند جمله ایهای زیر را در نظر بگیرید .

$$1, (x - x_0), (x - x_0)(x - x_1), \dots, (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

می توان نشان داد که این چند جمله ایها مستقل خطی هستند . اکنون فرض کنید چند

جمله $P(x)$ درونیاب تابع در نقاط f باشد x_0, x_1, \dots, x_n

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0) \dots (x - x_{n-1})$$

با توجه به اینکه باید داشته باشیم $P(x_i) = f_i$ می توان ها را به دست آورد.

مثلا با قرار دادن $x = x_0$ داریم $P(x_0) = a_0$

و چون باید $P(x_0) = f_0$ پس ،

$$a_0 = f_0 \quad (7.4)$$

با قرار دادن $x = x_1$ به دست می آوریم

$$P(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0)$$

که با توجه به (۷.۴) و اینکه $P(x_1) = f_1$ نتیجه می شود

$$a_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$$

و به همین ترتیب بقیه a_i بر حسب نقاط و f_i ها بدست می آیند. نیوتن با توجه به مقادیری که برای ضرایب به دست می آیند تفاضلات تقسیم شده را معرفی و یک فرمول بازگشتی برای محاسبه آنها ارائه کرد.

۴-۳-۱ تفاضلات تقسیم شده

فرض کنید x_0, x_1, \dots, x_n نقاط دو به دو متمایز و f_0, f_1, \dots, f_n مقادیر تابع f در این نقاط باشد.

تفاضلات تقسیم شده اول بین x_i و x_{i+1} چنین تعریف می شود

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_i) - f(x_{i+1})}{x_i - x_{i+1}} = \frac{f_i - f_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}$$

بنابراین

$$f[x_0, x_1] = \frac{f_0 - f_1}{x_0 - x_1},$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{f_1 - f_2}{x_1 - x_2}$$

تفاضلات تقسیم شده دوم بین x_i و x_{i+1} چنین تعریف می شود

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_i, x_{i+1}] - f[x_{i+1}, x_{i+2}]}{x_i - x_{i+2}}$$

به عنوان مثال

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_0, x_1] - f[x_1, x_2]}{x_0 - x_2}$$

تفاضلات تقسیم شده n ام بین نقاط x_0, x_1, \dots, x_n عبارت است از:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}] - f[x_1, x_2, \dots, x_n]}{x_0 - x_n}$$

همچنین اگر x نقطه دلخواهی از (x_0, x_n) باشد و

$$x \neq x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

تفاضلات تقسیم شده بین x_n, \dots, x_1, x_0, x عبارت است از:

$$f[x, x_0, x, \dots, x_n] = \frac{f[x, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}] - f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n]}{x - x_n}$$

۲-۳-۴ مثال

با استفاده از جدول ذیل تفاضلات تقسیم شده مربوط به تابع f را حساب کنید.

x_i	-1	0	1	2	3
f_i	-1	1	1	5	19

x_i	f_i	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	تفاضلات سوم	تفاضلات چهارم
-1	-1	$\frac{-1-1}{-1-0}=2$	$\frac{2-0}{-1-1}=-1$	$\frac{-1-2}{-1-2}=1$	$\frac{-1-1}{-1-3}=0$
0	1	$\frac{1-1}{0-1}=0$	$\frac{0-4}{0-2}=2$	$\frac{2-5}{0-3}=1$	
1	1	$\frac{1-5}{1-2}=4$	$\frac{4-14}{1-3}=5$		
2	5	$\frac{5-19}{2-3}=14$			
3	19				

جدول ۱

خلاصه جدول بالا چنین است: (پس از حل چند تمرین نیازی به نوشتن کسر ها نیست.)

x_i	f_i	اول	دوم	سوم	چهارم
-1	-1				
0	1	2	-1	1	
1	1	0	2		0
2	5	4		1	
3	19	14	5		

جدول ۲

۴-۳-۳ مثال

جدول تفاضلات مربوط به تابع جدولی زیر را به دست آورید . سپس با اضافه کردن نقطه (2, 7) مجدداً جدول تفاضلات را تشکیل دهید.

x_i	-1	0	1
f_i	1	1	3

حل:

با توجه به مثال قبل داریم:

(ضمناً زیر اعدادی که پس از اضافه کردن نقطه $(2, 7)$ حاصل می شوند خط کشیده شده است.)

x_i	f_i	اول	دوم	سوم
-1	1			
0	1	0	1	
1	3	2		<u>0</u>
2	7	<u>4</u>	<u>1</u>	

جدول ۳

قضیه زیر نشان می دهد که از جدول تفاضلات می توان درجه چند جمله ای درونیاب را ، قبل از به دست آوردن آن ، معین کرد. مثلاً جدول (۲) نشان می دهد که چند جمله ای درونیاب f از درجه ۳ است . ضمناً جدول (۳) نشان می دهد که با اضافه کردن نقطه $(2, 7)$ درجه چند جمله ای درونیاب تغییر نمی کند و برابر ۲ است.

۴-۳-۴ قضیه (فرمول چند جمله ای درونیاب بر حسب تفاضلات تقسیم شده نیوتن)

چند جمله ای درونیاب f در نقاط x_0, x_1, \dots, x_n عبارت از

$$P(x) = f_0 + (x - x_0)f[x_0, x_1] + \dots + (x - x_0)\dots(x - x_{n-1})f[x_0, x_1, \dots, x_n]$$

۴-۳-۵ مثال

چند جمله ای درونیاب تابع جدولی زیر را با استفاده از تفاضلات تقسیم شده به دست آورید و $f(\frac{1}{2})$ را بر آورد کنید.

x_i	-1	1	2	3
f_i	-2	0	7	26

حل:

باتوجه به جدول بالا جدول تفاضلات تقسیم شده زیر را تشکیل می دهیم.

x_i	f_i	اول	دوم	سوم
-1	-2			
1	0	1	2	
2	7	7		1
3	26	19	6	

از این رو ، بنابر تعاریف برای چند جمله ای درونیاب ، داریم

$$\begin{aligned}
 P(x) &= -2 + (x+1) \times 1 + (x+1)(x-1) \times 2 + (x+1)(x-1)(x-2) \times 1 \\
 &= -2 + x + 1 + 2x^2 - 2 + x^3 - 2x^2 - x + 2
 \end{aligned}$$

که در نتیجه،

$$P(x) = x^3 - 1$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \approx P\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{7}{8}$$

4-4 خطای چند جمله ای درونیاب

تا کنون دو روش برای تعیین چند جمله ای درونیاب یک تابع در تعدادی نقطه

ارایه کرده ایم . در این قسمت می خواهیم خطای و یا به عبارتی دیگر

را حساب کنیم - واضح است که خطای مطلق نشان خواهد داد که $P_n(x)$

ازای هر x از حوزه تعریف f ، تقریب خوبی برای این تابع هست یا نیست ،

ضمناً راههای مینیم سازی خطای مطلق را نیز تحقیق خواهیم کرد . $P(x)$

۴-۴-۲ قضیه

اگر $P(x)$ چند جمله ای درونیاب f در نقاط دو به دو متمایز x_0, x_1, \dots, x_n و f_0, \dots, f_n داشته باشد مشتق مرتبه n باشد (آنگاه)

$$f(x) = P(x) + \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\eta_x)$$

که در آن η_x نقطه ای در $[x_0, x_n]$ است که در حالت کلی به x بستگی دارد.

۳-۴-۴ نتیجه

با شرایط قضیه ۲-۴-۴ داریم

$$|f(x) - P(x)| \leq |(x - x_0) \dots (x - x_n)| \times \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}$$

که در آن M_{n+1} یک کران بالا برای $|f^{(n+1)}(x)|$ در $[x_0, x_n]$ است. یعنی،

برای هر x از $[x_0, x_n]$ ، $|f^{(n+1)}(x)| \leq M_{n+1}$ ، به دلیل مشخص

نبودن محل، از (۳-۴-۴) استفاده می شود.

در اینجا با چند مثال کاربرد قضیه ۲-۴-۴ و نتیجه آن را توضیح می دهیم

۴-۴-۴ مثال

چند جمله ای درونیاب $f(x) = \cos \frac{\pi x}{2}$ در نقاط $x_0 = 0$ به دست

آورید و کران بالایی برای $|P(x)|$ است x کنید . مقدار

$|P(\frac{1}{2})|$ کران بالا $f(\frac{1}{2})$ در مقایسه کنید $x = \frac{1}{2}$

حل:

جدول مربوط به تابع عبارت است از :

	f_i	تفاضل اول
0	1	
		-1
1	0	

برای این منظور مشتقات مرتبه اول و دوم تابع f را حساب می کنیم .

$$f'(x) = -\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi x}{2}$$

$$f''(x) = -\frac{\pi^2}{4} \cos \frac{\pi x}{2}$$

در نتیجه

$$|f''(x)| \leq \frac{\pi^2}{4} = M_2$$

پس ، بنابر ۴-۴-۳ ،

$$|f(x) - P(x)| \leq |(x-0)(x-1)| \times \frac{\frac{\pi^2}{4}}{2!} = \frac{\pi^2}{8} |x^2 - x|$$

مقدار کران بالا به ازای $x = \frac{1}{2}$ برابر است با

$$\frac{\pi^2}{8} \times \left| \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right| = \frac{\pi^2}{32} = 0.31 \quad (2D)$$

که با مقدار واقعی خطا ، یعنی 0.21 ، 0.1 اختلاف دارد و بیانگر خوب نبودن

تقریب یا نامناسب بودن چند جمله ای درجه اول به عنوان یک تقریب برای

است. ضمناً ، به توجه $\cos \frac{\pi x}{2}$ این که مقدار در ماکسیمم مقدار x^2

خود $\frac{1}{2}$ خواهد داشت (چرا؟) خطای در نقاط

$$\frac{\pi^2}{32}$$

دیگر کمتر از $f(x)$ خواهد بود .

4-6 تفاضلات متناهی

روشهای لاگرانژ و تفاضلات تقسیم شده نیوتن در حالت کلی برای نقاط x_0, x_1, \dots, x_n چه متساوی الفاصله باشند چه نباشند، چند جمله ای درونیاب را به دست می دهند. اما، وقتی که x_0, x_1, \dots, x_n متساوی الفاصله باشند فرمولهای ساده تری موجودند که در این قسمت سعی می کنیم آنها را به دست آوریم. برای این منظور فرض می کنیم که

$$x_{i+1} - x_i = h, \quad i=0, \dots, n-1$$

که از آن نتیجه می شود

$$x_i = x_0 + ih, \quad i=0, 1, \dots, n$$

اکنون به تعریف چند عملگر می پردازیم که در بیان فرمولها به کار می روند.

۴-۶-۱ تعریف عملگر انتقال E

عملگر E چنین تعریف می شود :

$$E f_i = f_{i+1}$$

در نتیجه،

$$E^2 f_i = E(E f_i) = f_{i+2}$$

و اگر k عددی طبیعی باشد،

$$E^k f_i = f_{i+k}$$

به این قرار داد که

$$x_{i+\alpha} = x_0 + (i + \alpha)h$$

$$f_{i+\alpha} = f(x_0 + (i + \alpha)h)$$

می توان تعریف بالا را به هر α حقیقی تعمیم داد :

$$E^\alpha f_i = f_{i+\alpha}$$

مثلاً

$$E^{-1} f_i = f_{i-1}$$

۴-۶-۲ تعریف عملگر تفاضل پیشرو Δ

عملگر Δ چنین تعریف می شود

$$\Delta = E - 1$$

که در نتیجه

$$\Delta f_i = (E - 1)f_i = Ef_i - f_i = f_{i+1} - f_i$$

یعنی ،

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$$

وجه تسمیه پیشرو به توجه به تعریف بالا ست .

به همین ترتیب ،

$$\begin{aligned}\Delta^2 f_i &= \Delta(\Delta f_i) = \Delta(f_{i+1} - f_i) \\ &= f_{i+2} - f_{i+1} - (f_{i+1} - f_i)\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\Delta^2 f_i = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i .$$

در صورتی که k عددی طبیعی باشد داریم

$$\Delta^{k+1} f_i = \Delta^k (\Delta f_i) = \Delta^k (f_{i+1} - f_i)$$

در نتیجه

$$\Delta^{k+1} f_i = \Delta^k f_{i+1} - \Delta^k f_i$$

که یک فرمول بازگشتی برای محاسبه تفاضلات پیشرو مراتب بالای f_i است.

۳-۴-۶ تعریف عملگر تفاضل پسرو ∇

عملگر ∇ چنین تعریف می شود

$$\nabla = 1 - E^{-1}$$

در نتیجه،

$$\nabla f_i = (1 - E^{-1})f_i = f_i - E^{-1}f_i = f_i - f_{i-1}$$

پس،

$$\nabla f_i = f_i - f_{i-1}$$

چون در تعیین ∇f_i از مقادیر f در x و استفاده می شود لفظ پسرو برای این تفاضلات به کار می رود .

در ضمن

$$\begin{aligned}\nabla^2 f_i &= \nabla(\nabla f_i) = \nabla(f_i - f_{i-1}) \\ &= \nabla f_i - \nabla f_{i-1} = f_i - f_{i-1} - (f_{i-1} - f_{i-2}) \\ &= f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}\end{aligned}$$

پس،

$$\nabla^2 f_i = f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}$$

و به طور کلی، اگر k عدد طبیعی باشد

$$\nabla^{k+1} f_i = \nabla^k f_i - \nabla^k f_{i-1}$$

فرمولهای بالا را طی چند مثال به کار می بریم .

۴-۶-۴ مثال

تفاضلات مربوط به تابع جدولی زیر را حساب کنید

x_i	-1	0	1	2
f_i	0	-1	2	9

حل:

با توجه به فرمول (۲۷. ۴) داریم

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
-1	0			
0	-1	$(-1-0) = -1$		
1	2	$2-(-1) = 3$	$3-(-1) = 4$	
2	9	$9-2 = 7$	$7-3 = 4$	$4-4 = 0$

مشاهده می شود که اعداد به سادگی حساب می شوند و مشکل تفاضلات تقسیم شده را ندارند که باید اعداد تفاضل ها نیز تقسیم شوند

مثال ۴-۶-۵

جدول تفاضلات تابع جدولی زیر را تشکیل دهید

x_i	1	1/1	1/2	1/3
f_i	2	2/331	2/728	3/197

حل:

مانند مثال قبل داریم :

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
۱	.			
۱/۱	2/3331	0/331	0/066	
1/2	2/728	0/397	0/072	0/006
1/3	3/197	0/469		

جدول زیر با توجه به (۲۷ . ۴) و (۲۸ . ۴) تنظیم شده است و نشان

می دهد که تفاضلات پیشرو در ابتدای جدول و تفاضلات پسرو در انتهای

جدول کاربرد دارند.

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
x_0	f_0			
x_1	f_1	$f_1 - f_0 = \Delta f_0$	$\Delta f_1 - \Delta f_0 = \Delta^2 f_0$	
x_2	f_2	$f_2 - f_1 = \Delta f_1$	$\Delta f_2 - \Delta f_1 = \Delta^2 f_1$	$\Delta^2 f_1 - \Delta^2 f_0 = \Delta^3 f_0$
x_3	f_3	$f_3 - f_2 = \Delta f_2$		
x_{n-3}	f_{n-3}			
x_{n-2}	f_{n-2}	$f_{n-2} - f_{n-3} = \nabla f_{n-2}$		
x_{n-1}	f_{n-1}	$f_{n-1} - f_{n-2} = \nabla f_{n-1}$	$\nabla f_{n-1} - \nabla f_{n-2} = \nabla^2 f_{n-1}$	
x_n	f_n	$f_n - f_{n-1} = \nabla f_n$	$\nabla f_n - \nabla f_{n-1} = \nabla^2 f_n$	$\nabla^2 f_n - \nabla^2 f_{n-1} = \nabla^3 f_n$

4-7 کاربرد تفاضلات متناهی

یکی از کاربردهای تفاضلات متناهی تعیین درجه یک چند جمله ای مناسب برای تقریب یک تابع جدولی است. در زیر نشان می دهیم که اگر تابع f یک چند جمله ای درجه n باشد تفاضلات مرتبه n ام آن ثابت و تفاضلات مراتب بالاتر آن صفرند. از عکس این مطلب می توان برای تعیین یک چند جمله ای مناسب برای تقریب زدن با تابع جدولی f استفاده کرد.

۴-۷-۱ مثال

$$x_i = 0/1 \times i, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4$$

جدول تفاضلات تابع $f(x) = x^3$ برای نقاط

تشکیل دهید و نتیجه را توجیه کنید .

حل :

جدول مطلوب چنین است :

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
0	0			
0/1	0/001	0/001	0/006	
0/2	0/008	0/007	0/012	0/006
0/3	0/027	0/019	0/018	0/006
0/4	0/064	0/037		

مشاهده می شود که تفاضلات مرتبه سوم مقدار ثابتی دارند که برابر است با

$$3! \times (0/1)^3 = 0/006$$

و بالطبع تفاضلات مراتب بالاتر صفرند .

اکنون در حالت کلی قضیه زیر را ثابت می کنیم .

۴-۷-۲ قضیه

اگر $f(x) = x^n$ n گاه $\Delta^n f_i = n! h^n$ $n < m$ گاه $\Delta^m f_i = 0$

بنابراین، اگر بخواهیم یک چند جمله ای جایگزین یک تابع جدولی کنیم، جدول تفاضلات آن را تشکیل می دهیم . اگر تفاضلات از مرتبه خاصی مقدار ثابت شدند می توان یک چند جمله ای به جای تابع قرارداد. البته خطای گرد کردن در جداولی که اعداد آن تقریبی هستند، مشکل است و گاهی باید تساوی در حد خطای گرد کردن را مد نظر داشت .

۴-۷-۳ مثال

جدول تفاضلات مربوط به تابع $f(x) = e^x$ برای

$$x_i = 0/1 + i \times 0/01 \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3, 4$$

تشکیل دهید و درجه چند جمله ای مناسب برای تقریب زدن این تابع را به دست آورید .

حل: جدول تفاضلات، با منظور کردن اعداد تا ۵ رقم اعشار، چنین است .

x_i	$f(x_i) = e^{x_i}$	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
0/1	1/10517			
		0/01111		
0/11	1/11628		0/00011	
		0/01122		0
0/12	1/12750		0/00011	
		0/01133		0
0/13	1/13883		0/00011	
		0/01144		
0/14	1/15027			

نتایج مندرج در جدول نشان می دهد یک چند جمله ای درجه دوم برای این تابع، درباره مناسب است $[0/14, 0/1]$

۴-۷-۴ مثال

جدول تفاضلات مربوط به تابع $f(x) = e^x$ برای نقاط

$$x = 0/1 + 0/05 \times i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, 8$$

تشکیل دهید و درجه چند جمله ای مناسب برای تقریب زدن با f را به دست آورید.

x_i	$f(x_i) = e^{x_i}$	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
0/1	1/10517			
		0/05666		
0/15	1/16183		0/00291	
		0/05957		0/00015
0/20	1/22140		0/00306	
		0/06263		0/00014
0/25	1/28403		0/00320	
		0/06583		0/00018
0/30	1/34986		0/00338	
		0/06921		0/00016
0/35	1/41907		0/00354	
		0/07275		0/00020
0/40	1/49182		0/00374	
		0/07649		0/00018
0/45	1/56831		0/00391	
		0/08041		
0/5	1/64872			

خطای موجود در مقادیر x_i رقم پنجم اعشار است ولی این خطا در طول جدول افزایش پیدا می کنند. در اینجا گفته می شود که تفاضلات مرتبه سوم در حد خطای گرد کردن با هم برابرند. از این رو، درجه چند جمله ای مناسب ۳ است. این که حدخطای گرد کردن برای مراتب مختلف تفاضلات چیست دقیقاً نامعین است ولی یک معیار عملی نادقیق برای نوسانات ناشی از خطای گرد کردن در جدول زیر آمده است.

مرتبه تفاضلات	1	2	3	4	5	6
حدود خطای مورد انتظار	± 1	± 2	± 3	± 6	± 12	± 22

۴-۸ فرمول چند جمله ای درونیاب بر حسب تفاضلات پیشرو

در ۴-۳-۴ فرمول چند جمله ای درونیاب را بر حسب تفاضلات تقسیم شده به دست آوریم . وقتی نقاط متساوی الفاصله باشند می توان چند جمله ای درونیاب را ساده تر به دست آورد. ضمناً چون هدف اصلی تعیین تقریبی از $f(x)$ به ازای x است که در جدول نیست می توان از تفاضلات پسرو یا پیشرو ، هر کدام مناسبتر است، استفاده کرد. برای این منظور ابتدا یک مثال ذکر می کنیم تا آمادگی لازم برای بدست آوردن فرمول مورد نظر ایجاد شود.

۴-۸-۱ مثال

نشان دهید که

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{\Delta^2 f}{2!h^2}$$

حل:

می دانیم که ، $x_1 - x_0 = h$ و $x_2 - x_1 = h$ و $x_0 = 2h$ ، بنابراین، با توجه تعریف Δf_0 ،

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta f_0}{h}$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta f_1}{h}$$

اما، با توجه به روابط بالا، داریم

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_0, x_1] - f[x_1, x_2]}{x_0 - x_2} = \frac{\frac{\Delta f_0}{h} - \frac{\Delta f_1}{h}}{-2h} \\ &= \frac{\Delta f_1 - \Delta f_0}{2h^2} \end{aligned}$$

بنابراین داریم

$$\Delta f_1 - \Delta f_0 = \Delta^2 f_0$$

پس ،

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{\Delta^2 f_0}{2h^2}$$

اکنون به طور کلی لم زیر را ثابت کنید.

۴-۸-۲ لم

اگر k عددی طبیعی باشد آنگاه به ازای هر $0 \leq i$ ،

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \frac{\Delta^k f_i}{k! h^k}$$

۴-۸-۳ نتیجه

اگر k عددی طبیعی باشد آنگاه

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{\Delta^k f_0}{k! h^k}$$

۴-۸-۴ لم

اگر $x = x_i + \theta h$ و k عددی طبیعی باشد آنگاه

$$(x - x_i) \dots (x - x_{k+i}) = h^{k+1} \theta(\theta - 1) \dots (\theta - k)$$

۴-۸-۵ قضیه (فرمول تفاضلات پیشرو نیوتن برای چند جمله ای درونیاب)

اگر نقاط x_i متساوی الفاصله باشند و $x_0 + \theta h$ این صورت

$$P(x) = f_0 + \theta \Delta f_0 + \frac{\theta(\theta-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \dots + \frac{\theta(\theta-1)\dots(\theta-n+1)}{n!} \Delta^n f_0 \quad ***$$

۴-۸-۶ مثال

فرمول چند جمله ای درونیاب مربوط به تابع جدولی زیر را با استفاده از قضیه ۴-۸-۵ به دست آورید.

x_i	۱	۲	۳	۴
f_i	۲	۵	۱۰	۱۷

حل :

ابتدا جدول تفاضلات پیشرو را تشکیل می دهیم . جدول زیر نشان می دهد ،
گر چه چهار نقطه داریم ، چون $\Delta^3 f_0$ برابر صفر است چند جمله ای درونیاب از
درجه دو است .

جدول ۱

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
۱	۲			
		۳		
۲	۵		۲	
		۵		
۳	۱۰		۲	
		۷		
۴	۱۷			

با استفاده از فرمول *** چند جمله ای درونیاب ، بر حسب θ عبارت است از :

$$P(x) = f_0 + \theta \Delta f_0 + \frac{\theta(\theta-1)}{2!} \Delta^2 f_0$$

مقادیر f_0 ، Δf_0 و $\Delta^2 f_0$ را بالای خط موربی که در جدول کشیده شده قرار دارند. و

که با توجه به $x = 1 + \theta$

$$h = 1 , \quad x_0 = 1$$

$$x = 1 + \theta$$

داریم

بنابراین ،

اگر به جای θ ، از $x-1$ قرار دهیم *** چند جمله ای درونیاب بر حسب x به دست می آید.

$$P(x) = (x-1)^2 + 2(x-1) + 2 = x^2 + 1$$

فرمول *** چند جمله ای درونیاب f در نقاط x_0, x_1, \dots, x_n حسب تفاضلات پیشرو مبتنی بر نقطه x_i ارائه می دهد. در حالت کلی میتوان فرمول چند جمله ای درونیاب f در نقاط $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}$ به طریقی مشابه به دست آورد.

۴-۸-۷ قضیه

چند جمله ای درونیاب f در نقاط متساوی الفاصله x_i, \dots, x_{i+k} عبارت از :

$$P(x) = f_i + \theta \Delta f_i + \frac{\theta(\theta-1)}{2!} \Delta^2 f_i + \dots + \frac{\theta(\theta-1)\dots(\theta-k+1)}{k!} \Delta^k f_i \quad ***$$

که در آن $x = x_i + \theta h$

۴-۸-۹ مثال

چند جمله ای درونیاب f در نقاط x_i, x_{i+1}, x_{i+2} بشویشید.

حل :

بنابر *** داریم :

$$P(x) = f_i + \theta \Delta f_i + \frac{\theta(\theta-1)}{2} \Delta^2 f_i$$

به سادگی می توان مستقیماً نشان داد که

$$P(x_i) = f_i, \quad P(x_{i+1}) = f_{i+1}, \quad P(x_{i+2}) = f_{i+2}$$

در صورتی که تفاضلات از مرتبه خاصی برابر باشد چند جمله ای درونیاب را

می توان با i های متفاوت به دست آورد. به مثال زیر توجه کنید.

۴-۸-۱۰ مثال

چند جمله ای درونیاب تابع جدولی مثال ۴-۸-۶ را براساس نقطه به دست آورید.

حل :

چون $x_1 = 2$ داریم :

$$P(x) = f_1 + \theta \Delta f_1 + \frac{\theta(\theta-1)}{2} \Delta^2 f_1$$

مقادیر f_1 ، Δf_1 و $\Delta^2 f_1$ زیر خط موربی که در جدول کشیده شده است قرار دارند و از آنجا

$$P(x) = 5 + 5\theta + \frac{\theta(\theta-1)}{2} \times 2 = \theta^2 + 4\theta + 5$$

که در آن $x_1 + \theta h = 2 + \theta$ ، لذا ، اگر قرار دهیم $\theta = x - 2$

خواهیم داشت :

$$P(x) = (x-2)^2 + 4(x-2) + 5 = x^2 + 1$$

که همان $P(x)$ قبلی است .

سوالی که در اینجا مطرح است این است که وقتی $P(x)$ به چند طریق قابل بیان است کدام صورت عملاً مفیدتر است ؟ جواب این است که با توجه به این که

$$x = x_i + \theta h$$

داریم

$$\theta = \frac{x - x_i}{h}$$

لذا x_i را چنان اختیار می کنیم که ، از θ قدر مطلق کمترین مقدار را داشته باشد ، به عبارت دیگر \hat{x}_i آن نقطه جدولی اختیار می کنیم که کمترین فاصله را تا x داده شده داشته باشد . مثال زیر مطلب را روشن می کند .

مثال ۴-۸-۱۱

جدول زیر مربوط به $f(x) = \sin x$ برای $0^\circ, 10^\circ, \dots, 50^\circ$ است. بر آورد $\sin 5^\circ$ با استفاده از چند جمله ای درونیاب .

x_i	0°	10°	20°	30°	40°	50°
$\sin x_i$		۰ ۱۷۳۶/۰	۳۴۲۰/۰	۵/۰	۶۴۲۸/۰	۷۶۶۰/۰

حل :

جدول تفاضلات مربوط به تابع جدولی f چنین است :

x_i	$\sin x_i$	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$	$\Delta^4 f_i$	$\Delta^5 f_i$
0°	.					
10°	1736/.	1736/.	-..52/.			
20°	3420/.	1684/.	-..104/.	-..52/.	...4/.	
30°	5/.	1580/.	-..152/.	-..48/.	...4/.	.
40°	6428/.	1428/.	-..196/.	-..44/.		
50°	7660/.	1232/.				

چون $x = 5^\circ$ می توان از $x = 0^\circ$ یا 10° استفاده کرد .
ما قرار می دهیم

$$x_0 = 0^\circ$$

$$\theta = \frac{x - x_0}{h} = \frac{5 - 0}{10} = \frac{1}{2}$$

در نتیجه

و داریم

$$\begin{aligned} \sin 5^\circ \cong & 0 + \frac{1}{2} \times 0/1736 + \frac{\frac{1}{2} \times (-\frac{1}{2})}{2} \times (-0/0052) \\ & + \frac{\frac{1}{2} \times (-\frac{1}{2}) \times (-\frac{3}{2})}{6} \times (-0/0052) \\ & + \frac{\frac{1}{2} \times (-\frac{1}{2}) \times (-\frac{3}{2}) \times (-\frac{5}{2})}{24} \times (0/0004) = 0/0871 \end{aligned}$$

مقدار واقعی $\sin 5^\circ$ برابر $0/0872$ است (تا چهار رقم اعشار) .

۴-۹ فرمول چند جمله ای درونیاب بر حسب تفاضلات پسرو

برای تخمین مقدار $f(x)$ وقتی x نزدیک به انتهای جدول تفاضلات است، لازم است که از تفاضلات پسرو، که بر حسب مقادیر تابع در نقاط انتهایی جدول بیان می شوند، استفاده کنیم.

۴-۹-۱ قضیه

چند جمله ای درونیاب f در نقاط $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$ عبارت است از:

$$P(x) = f_n + \theta \Delta f_n + \frac{\theta(\theta+1)}{2!} \Delta^2 f_n + \dots + \frac{\theta(\theta+1)\dots(\theta+n-1)}{n!} \Delta^n f_n$$

$$x_{i-k+1}, \dots, x_i$$

و فرمول چند جمله ای درونیاب f بر حسب تفاضلات پسرو ، در عبارت است از :

$$P(x) = f_i + \theta \Delta f_i + \frac{\theta(\theta+1)}{2!} \Delta^2 f_i + \dots$$

$$+ \frac{\theta(\theta+1)\dots(\theta+k-1)}{k!} \Delta^k f_i$$



مثال ۴-۹-۲

$$\sin 45^\circ$$

با استفاده از جدول تفاضلات مربوط به تابع جدولی ۴-۸-۱۱ تخمینی از حساب کنید.

حل :

قرار می دهیم $x_1 = 40^\circ = x_4$ بر نتیجه

$$\theta = \frac{x - x_i}{h} = \frac{45 - 40}{10} = \frac{1}{2}$$

و با قرار دادن $i=4$ در فرمول * کمک گرفتن از اعدادی که در بالای خط مورب

کشیده شده در جدول مثال ۴-۸-۱۱ قرار دارند، داریم :

$$\begin{aligned}\sin 45^\circ &\cong 0/6428 + \frac{1}{2} \times (0/1428) + \frac{\frac{1}{2} \times \frac{3}{2}}{2} \times (-0/0152) \\ &+ \frac{\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{5}{2}}{6} \times (-0/0048) + \frac{\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{5}{2} \times \frac{7}{2}}{24} \times (0/0004) \\ &= 0/7071\end{aligned}$$

که این عدد همان $\frac{\sqrt{2}}{2}$ یعنی $\sin 45^\circ$ رقم اعشار است .

۴-۱۰ درونیابی معکوس

تا کنون با معلوم بودن x مقدار $f(x)$ را برآورد کردیم. اگر منظور تخمین مقداری از x باشد به طوری که $f(x)$ مقدار معلومی داشته باشد این کار درونیابی معکوس نامیده میشود. درونیابی معکوس کاربردهایی نیز دارد. به عنوان مثال، می توان ریشه های $f(x)=0$ را به وسیله درونیابی معکوس تخمین زد، به این ترتیب که x ی را به دست می آوریم که $f(x)$ برابر صفر باشد. همچنین اگر جمعیت را در فاصله زمانهای معینی داشته باشیم و بخواهیم حدود سالی را تعیین کنیم که جمعیت تعداد مشخصی باشد از درونیابی معکوس استفاده می شود. برای جلوگیری از اطاله کلام تنها یک روش برای تخمین x ، به کمک داشتن $f(x)$ ، را که همانا روش تفاضلات تقسیم شده است ارائه می کنیم.

۴-۱۰-۱ تبدیل درونیابی معکوس به درونیابی مستقیم

اگر

$$y = f(x)$$

و f تابع معکوس داشته باشد داریم

$$x = f^{-1}(y)$$

لذا، به جای جدول

x_i	x_0	x_1	\dots	x_n
f_i	f_0	f_1	\dots	f_n

می توان جدول زیر را در نظر گرفت

f_i	f_0	f_1	\dots	f_n
x_i	x_0	x_1	\dots	x_n

با توجه به اینکه معمولاً فاصله x های یکسان نیست و انتخاب آنها نیز در اختیار ما نیست نمی توان از فرمول های پیشرو و پسرو نیوتن استفاده کرد. از این رو تنها روش موثر که همواره قابل استفاده است جدول تفاضلات تقسیم شده است که در آن نقش x_i ها و f_i ها عوض شده است.

۴-۱۰-۲ مثال

جدول زیر در مورد تابع $f(x) = \sin x$ در دست است x ی را تعیین کنید که به ازای آن $f(x) = 0.2$.

x_i	0°	10°	20°	30°	40°	50°
f_i	0	0.1736	0.3420	0.5	0.6428	0.7660

حل:

جدول تفاضلات تقسیم شده زیر را تشکیل می دهیم ، توجه کنید که $f(x)$ ها

طوری قرار گرفته اند که $|f(x) - 0.2|$ صعودی باشد ، این عمل برای کم کردن

خطای گرد کردن لازم است و باید همیشه صورت گیرد.

f_i	x_i	اول	دوم	سوم	چهارم	پنجم
0.1736	10					
		59.38				
0.3420	20		5.18			
		58.48		13.60		
0	0		9.62		13.38	
		60.00		19.88		34.86
0.5	30		15.60		34.03	
		70.03		34.31		
0.6428	40		41.88			
		81.17				
0.766	50					

با استفاده از قضیه ۴-۳-۴ داریم:

$$\begin{aligned}x &\approx 10 + (0.2 - 0.1736) \times 59.38 + (0.2 - 0.1736)(0.2 - 0.3420) \times 5.18 \\&\quad + (0.2 - 0.1736)(0.2 - 0.3420)(0.2 - 0) \times 13.60 \\&\quad + (0.2 - 0.1736)(0.2 - 0.3420)(0.2 - 0)(0.2 - 0.5) \times 13.38 \\&\quad + (0.2 - 0.1736)(0.2 - 0.3420)(0.2 - 0)(0.2 - 0.5)(0.2 - 0.6428) \times 34.86 \\&= 10 + 1.5676 - 0.0194 - 0.0102 + 0.0030 - 0.0035 \\&= 11.5375\end{aligned}$$

بنابراین ، جواب تقریباً 11. 53 75 در جه است.

★ یکی از راههای امتحان جواب فوق این است که به وسیله درونیابی مستقیم

مقدار $f(11.5375)$ را بر آورد کنیم و ببینیم 0.2 می شود یا نه .

۴-۱۰-۳ مثال

جدول زیر مفروض است . تخمینی از صفر این تابع را به دست آورید .

x_i	0	1	2	3
f_i	1.5	-1	2.5	15

حل:

جدول تفاضلات زیر را با توجه به فاصله ها t_i صفر تشکیل می دهیم.

f_i	x_i	اول	دوم	سوم
0-1	1			
		2		
-1.5	0		-0.4286	
		0.5		0.0252
2.5	2		-0.0255	
		0.08		
15	3			

بنابراین

$$x \approx 1 + (0+1) \times 2 + (0+1)(0+1.5) \times (-0.4286)$$

$$+ (0+1)(0+1.5)(0-2.5) \times 0.0252$$

$$= 1 + 2 - 0.6429 - 0.0945$$

$$= 2.2626$$

مشاهده می شود که جواب به دست آمده بسیار نادقیق است ، زیرا $f(1) = -1$

و $f(2) = 2.5$ که قاعدتاً ریشه باید بین ۱ و ۲ باشد ! نه بیش از ۲.

🌟 علت این امر آن است که فاصله بین x های جدول زیاد است. در صورتی که

فاصله بین x ها را کمتر بگیریم دقت جواب زیاد خواهد شد .

۴-۱۱ برازش منحنی

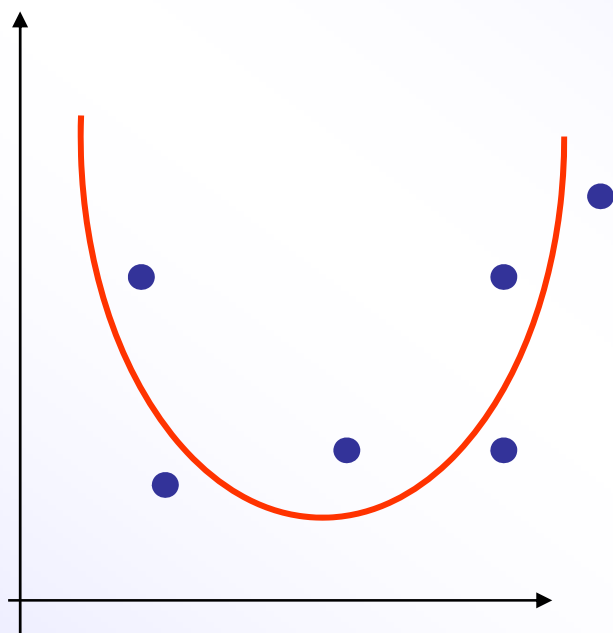
واقعیت این است که مقادیر f_z یک تابع جدولی تقریبی هستند زیرا از طریق اندازه گیری یا آزمایش به دست می آیند. بنابراین، اصرار در این که چند جمله ای درونیاب در نقاط x مقدار را داشته باشد بیهوده است. در عمل اکثراً نقاط جدولی را به وسیله یک منحنی چنان برازش می کنند که خطا به نوعی حداقل باشد.

۴-۱۱-۱ تعریف

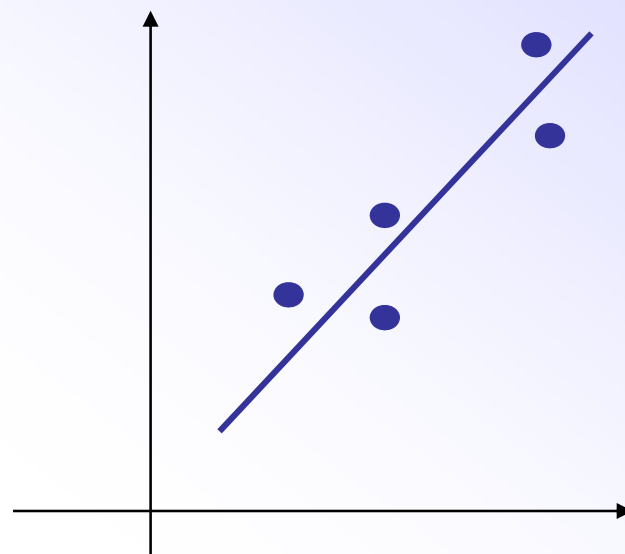
فرض کنید نقاط (x_i, y_i) , $i=1,2,\dots,n$ مفروض باشند. و چند جمله ای $P(x)$ چنان باشد که

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - P(x_i))^2$$

کمترین مقدار را داشته باشد. در این صورت $P(x)$ را چند جمله ای **تقریب** **کمترین مربعات** برای داده های (x_i, y_i) , $i=1,2,\dots,n$ نامند.



(ب) سهمی کمترین مربعات



(الف) خط کمترین مربعات

در حالت کلی برای به دست آوردن $P(x)$ فرض کنید که

$$P(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_0, \quad (a_m \neq 0)$$

چند جمله ای کمترین مربعات درجه m باشد. برای به دست آوردن ضرایب $P(x)$ باتوجه به * قرار می دهیم:

$$\frac{\partial S}{\partial a_j} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m.$$

معادلات بالا تشکیل یک دستگاه شامل $m+1$ معادله برای $m+1$ مجهول a_m, \dots, a_0 می دهد.

۴-۱۱-۲ خط کمترین مربعات

یکی از متداولترین روشهای برازش منحنی انتخاب خط کمترین مربعات برای برازش n نقطه مفروض $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ در این روش

$$P(x) = ax + b$$

و باید a و b را چنان تعیین کرد که

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b))^2$$

مینیمم باشد. از این رو، قرار می دهیم:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0$$

اما داریم:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a} = \sum_{i=1}^n -2x_i (y_i - (ax_i + b)) = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial b} = \sum_{i=1}^n -2(y_i - (ax_i + b)) = 0 \end{cases}$$

پس از ساده کردن ، معادلات بالا دستگاه زیر را نتیجه می دهند

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) a + \left(n \sum_{i=1}^n x_i \right) b = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) a + nb = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases}$$

از دستگاه بالا مقادیر a و b به دست می آیند که توسط آنها خط کمترین مربعات $y = ax + b$ مشخص می شود.

مثال ۴-۱۱-۳

خط کمترین مربعات مربوط به تابع جدول زیر را تعیین کنید.

x_i	-2	-1	0	1	2
f_i	0	1	2	2	3

حل:

در این مثال داریم: $n = 5$, $\sum_{i=1}^5 x_i = 0$, $\sum_{i=1}^5 x_i^2 = 10$

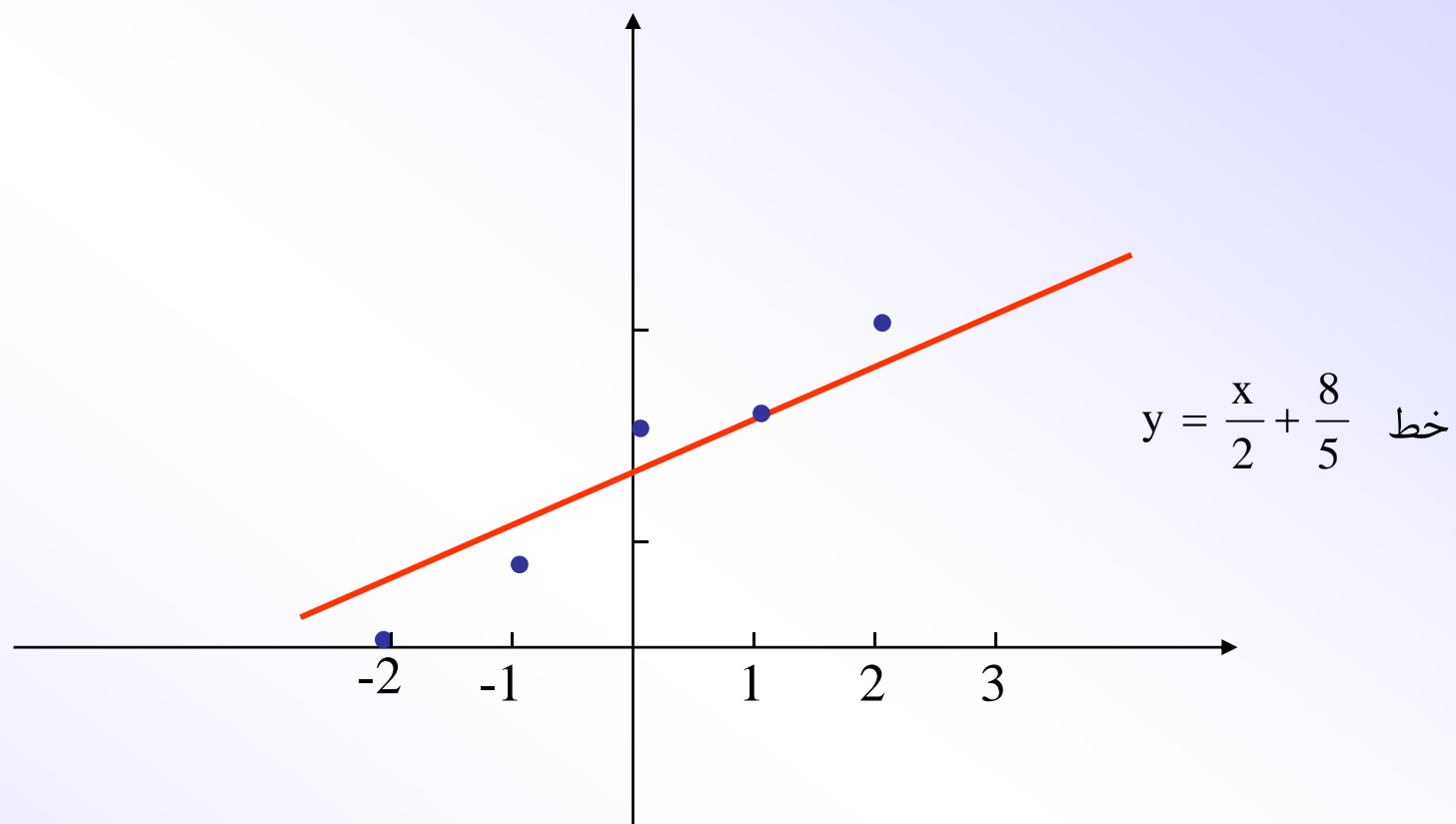
$$\sum_{i=1}^5 x_i y_i = 7 \quad , \quad \sum_{i=1}^5 y_i = 8$$

بنابراین

$$\begin{cases} 10a = 7 \\ 5b = 8 \end{cases}$$

که از آن نتیجه می شود

$$b = \frac{8}{5} \quad , \quad a = \frac{7}{10}$$



فصل پنجم

مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری عددی

مقدمه

در ابتدای این فصل روش‌های پیدا کردن تقریب‌هایی برای $f'(x)$ ازای مقادیر

مختلف x را ارائه می‌کنیم. سپس به تعیین تقریب برای

$$\int_a^b f(x) dx$$

می‌پردازیم. همان‌گونه که می‌دانید توابع فراوانی موجودند که تابع اولیه ندارند، یعنی

تابعی چون $F(x)$ نیست که به ازای $a \leq x \leq b$

$$F'(x) = f(x).$$

از این رو، محاسبهٔ این انتگرالها با روش عادی امکان پذیر نیست. از این جمله اند انتگرالهای زیر که اغلب کاربردهای عملی دارند.

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}$$

$$\int_{-2}^2 e^{-x^2} dx$$

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{1 - (\sin k)^2 \sin^2 x}}$$

(انتگرال بیضوی)

در این فصل روشهایی ارائه می کنیم که به وسیلهٔ آنها می توان تقریبی از یک انتگرال معین را تا هر درجهٔ دقت حساب کرد (البته در حد دقتی که وسایل محاسباتی دارند).

هدفهای کلی

۱. روشهای برآورد (x) به ازای x های مختلف و تعیین خطای آن

۲. بیان اشکالات مشتقگیری

۳. شرح قاعده دوزنقه ای برای برآورد یک انتگرال معین و تعیین خطای آن

۴. شرح قاعده سیمسون و تعیین خطای آن

۵. شرح قاعده رامبرگ و کاربرد آن

۶. شرح منشأ قواعد انتگرالگیری و ارائه فرمولهای نیوتن - کاتس و گاوس

۷. تخمین بعضی انتگرالهای ناسره

هدفهای رفتاری

دانشجو پس از مطالعه این فصل باید بتواند :

۱. تخمینی از $f'(x)$ وقتی x و تابع جدولی f معلوم است، را حساب کند . ۲.
- روشهای انتگرالگیری مناسب را برای برآورد یک انتگرال معین به کار برد و تقریبی از یک انتگرال را حساب کند که خطایی کمتر از ϵ مفروض داشته باشد
۳. تقریبی از انتگرالهای ناسره را به کمک روشهای خوانده شده حساب کند

۵. مشتگیری و انتگرالگیری عددی

کاربرد مشتق و انتگرال در ریاضیات مهندسی و دیگر علوم فراوان است ، و در حل اکثر مسائل از آنها استفاده می شود . در آنالیز ، که معمولاً ضابطه یا ضابطه هایی برای تعریف تابع ارائه می شود ، فرمولهایی نیز برای محاسبه مشتق و انتگرال ، به شرط وجود ، به دست می آید . اما ، اگر تابع مورد نظر بسیار پیچیده باشد یا با تابعی جدولی سرو کار داشته باشیم (که فرض می شود جدول مذکور از یک تابع مشتق پذیر یا انتگرال پذیر ، ناشی شده است) باید به روشهای عددی روی آورد .

۵-۱ مشتگیری عددی

برای مشتگیری عددی ، همان طور که قبلاً اشاره شده ، از چند جمله ای درونیاب استفاده می کنیم . در (۴ . ۳۶) چند جمله ای درونیاب f در x_i ، x_{i+1} ، ... ، x_{i+k} چنین به دست می آوریم :

$$p(x) = f_i + \theta \Delta f_i + \frac{\theta(\theta-1)}{2!} \Delta^2 f_i + \frac{\theta(\theta-1)(\theta-2)}{3!} \Delta^3 f_i \quad (۱)$$

$$+ \frac{\theta(\theta-1)(\theta-2)(\theta-3)}{4!} \Delta^4 f_i + \dots + \frac{\theta(\theta-1)\dots(\theta-k+1)}{k!} \Delta^k f_i$$

که در آن ، $x = x_i + \theta h$ ، $x_{i+1} - x_i = h$ برای $i = 0, 1, \dots, n-1$ چون $P(x)$ بر حسب θ ارائه شده است می نویسیم

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \simeq \frac{dP(x)}{dx} = \frac{dP(x)}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dx} \quad (2)$$

اما داریم ، $dx = h d\theta$ که در نتیجه

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{h} \quad (3)$$

بنابراین ، با مشتقگیری از (۱) و در نظر گرفتن (۲) و (۳)

$$f'(x) \simeq \frac{1}{h} \left[\Delta f_i + \left(\theta - \frac{1}{2} \right) \Delta^2 f_i + \left(\frac{\theta^2}{2} - \theta + \frac{1}{3} \right) \Delta^3 f_i + \left(\frac{\theta^3}{6} - \frac{\theta^2}{2} + \frac{5\theta}{12} - \frac{1}{2} \right) \Delta^4 f_i \dots \right] \quad (4)$$

اگر قرار دهیم $\theta=0$ با توجه به $x_i + \theta h$ ، داریم $x_i = x_i$ و نتیجه می شود

$$f'(x_i) = f'_i \approx \frac{1}{h} \left(\Delta f_i - \frac{1}{2} \Delta^2 f_i + \frac{1}{3} \Delta^3 f_i - \frac{1}{2} \Delta^4 f_i + \dots \right)$$

معمولاً برای محاسبه تقریبی از f'_i چند جمله ای از سمت راست انتخاب می شود .

مثلاً

$$f'_i \approx \frac{1}{h} \Delta f_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} \quad (5)$$

و یا

$$f'_i \approx \frac{1}{h} \left(\Delta f_i - \frac{1}{2} \Delta^2 f_i \right) = \frac{1}{h} \left[f_{i+1} - f_i - \frac{1}{2} (f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i) \right]$$

که در نتیجه

$$f'_i \simeq \frac{2f_{i+1} - \frac{1}{2}f_{i+2} - \frac{3}{2}f_i}{h} \quad (۶)$$

ضمناً اگر قرار دهیم $\theta = \frac{1}{2}$ ، به توجه به $x_i + \theta h$ به دست می آوریم
و از (۴) نتیجه می شود :

$$f' \left(x_i + \frac{h}{2} \right) \simeq \frac{1}{h} \left(\Delta f_i - \frac{1}{24} \Delta^3 f_i + \frac{1}{48} \Delta^4 f_i + \dots \right)$$

از این رو ، اگر تنها جمله اول داخل پرانتز سمت راست را انتخاب
می کنیم

$$f' \left(x_i + \frac{h}{2} \right) \simeq \frac{\Delta f_i}{h} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h}$$

و اگر دو جمله اول را منظور کنیم

$$f' \left(x_i + \frac{h}{2} \right) \approx \frac{1}{h} \left(\Delta f_i - \frac{1}{24} \Delta^3 f_i \right)$$

۵-۱-۱ مثال

با توجه به جدول زیر تقریبی از f'_i ، $i=0, 1, 2, 3$ ، یک بار با استفاده از فرمول (۵) و بار دیگر با استفاده از (۶) حساب کنید.

x_i	0/1	0/15	0/2	0/25	0/3
f_i	1/10517	1/16183	1/22140	1/28403	1/34986

حل :

جدول تفاضلات f را با توجه به جدول بالا تشکیل دهیم .

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
0/1	1/10517			
		0/05666		
0/15	1/16183		0/00291	
		0/05957		0/00015
0/2	1/22140		0/00306	
		0/06263		0/00014
0/25	1/28403		0/00320	
		0/06583		
0/3	1/34986			

از این رو ، با توجه به فرمولهای (۵ . ۵) و (۶ . ۵) داریم ($h = 0/05$)

f_i	$f'_i \approx \frac{\Delta f_i}{h}$	$f'_i \approx \frac{\Delta f_i - \frac{1}{2} \Delta^2 f_i}{h}$
۱۰۵۱۷/۱	۱۳۳۲/۱	۱۰۴/۱
۱۶۱۸۳/۱	۱۹۱۴/۱	۱۶۰۸/۱
۲۲۱۴۰/۱	۲۵۲۶/۱	۲۲۰۶/۱
۲۸۴۰۳/۱	۳۱۶۶/۱	—————

اعداد f_i که در این مثال داده شده اند مربوط به تابع $f(x) = e^x$ هستند که مشتق آن با خودش برابر است. بنابراین، در جدول اخیر، باید اعداد موجود در هر سه ستون یکسان باشند! که نیستند. البته مشاهده می شود اعدادی که از فرمول (۶) به دست آمده اند، دقیقتر از اعدادی هستند که از (۵) به دست می آیند.

۵-۱-۲ مثال

با توجه به تابع جدولی مثال (۵-۱-۱) تقریب‌هایی $f(x_i, \frac{h}{2})$ به کار بردن (۷) و (۸) حساب کنید.

حل :

با توجه به جدول تفاضلاتی که در مثال (۵- ۱- ۱) به دست آوردیم ، داریم :

$x_i + \frac{h}{2}$	$f\left(x_i + \frac{h}{2}\right)$	$f'\left(x_i + \frac{h}{2}\right) \approx \frac{\Delta f_i}{h}$	$f'\left(x_i + \frac{h}{2}\right) \approx \frac{\Delta f_i - \frac{1}{24} \Delta^3 f_i}{h}$
۱۲۵/۰	۱۳۳۱۵/۱	۱۳۳۲/۱	۳۳۸۰/۱
۱۷۵/۰	۱۹۱۲/۱ ۵	۱۹۱۴/۱	۱۹۱۲۸/۱
۲۲۵/۰	۲۵۲۳۲/۱	۲۵۲۶/۱	_____
۲۷۵/۰	۳۱۶۵۳/۱	۳۱۶۶/۱	_____

در جدول بالا دو ستون از سمت چپ فقط برای مقایسهٔ مقادیر به دست

آمده، درج شده اند، ضمناً در ستون آخر به دلیل عدم وجود $\Delta^3 f_2$ و

$\Delta^3 f_3$ بقیهٔ فقره ها حساب نشده اند. نتایج این جدول، با توجه به این

که $f(x) = f'(x)$ نشان می دهند که $\frac{\Delta f_i}{h}$ بسیار نزدیک به $f'(x_i + \frac{h}{2})$

هستند. به عبارت دیگر، $\frac{\Delta f_i}{h}$ که هم تقریبی از $f'(x_i)$ و هم تقریبی از

$f'(x_i + \frac{h}{2})$ است به $f'(x_i + \frac{h}{2})$ نزدیکتر است تا به $f'(x_i)$

۵-۱-۳ خطای مشتگیری عددی

برای پیدا کردن خطای فرمولهای مختلفی که از (۵ . ۴) برای حاصل $f'(x)$ می شود از بسط تیلر استفاده می کنیم . مثلاً ،

$$f_{i+1} = f(x_{i+1}) = f(x_i + h)$$

در نتیجه

$$f_{i+1} = f_i + hf'_i + \frac{h^2}{2}f''_i + \frac{h}{6}f'''_i + \dots \quad (9)$$

با توجه به (۵) و با در نظر گرفتن (۹) ، داریم

$$\frac{f_{i+1} - f_i}{h} = f'_i + \frac{h}{2}f''_i + \dots \quad (10)$$

از این رو ، $\frac{f_{i+1} - f_i}{h}$ به عنوان تقریبی از ، عبارت است از

$$\frac{f_{i+1} - f_i}{h} - f'_i = \frac{h}{2} f''_i + \frac{h^2}{6} f'''_i + \dots$$

با توجه به این که کوچک گرفته می شود جمله غالب در سمت راست $\frac{h}{2} f''_i$

است که اصطلاحاً گفته می شود خطا متناسب با h است و یا نوشته می شود :

$$\frac{f_{i+1} - f_i}{h} - f'_i = O(h) \quad (11)$$

۵-۱-۴ تعریف (اوی بزرگ) O

اگر $f(h)$, $g(h)$ و تابع از h باشند، همواره $g(h) \neq 0$ داشته باشیم

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{g(h)} = c \neq 0$$

در این صورت می گوئیم $f(h) = o(g(h))$.

در حالت خاصی که $g(h) = h^p$ در آن p عدد حقیقی مثبتی است، داریم

$$f(h) = o(h^p)$$

هر چه p بزرگتر باشد $f(h)$ سریعتر به صفر میل می کند .

۵-۱-۵ تعریف (اوی کوچک) O

اگر $f(h)$, $g(h)$ و تابع از h باشند، همواره $g(h) \neq 0$ داشته باشیم

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{g(h)} = 0$$

در این صورت می گوییم $f(x)=o(g(h))$ و اگر $g(h) = h^p$

$$f(h) = o(h^p)$$

به عبارت دیگر، $f(h)$ سریعتر از h^p صفر میل می کند .

۵-۱-۶ قضیه

$$f'(x_i + \frac{h}{2}) - \frac{f_{i+1} - f_i}{h} = O(h^2)$$

مثالهای (۵-۱-۱) و (۵-۱-۲) نتایج (۱۱) و (۱۲) را تأیید می کنند. به این معنا که هر چه توان h در عبارت خطا بیشتر باشد تقریب بهتر، یا خطا کمتر است. اما، به طور کلی نباید به نتایج تقریبی که از فرمولهای فوق حاصل می شود اعتماد کرد. در حالت کلی خطای فرمولهایی که از (۴) حاصل می شوند به صورت

است که در آن p بستگی به تعداد $Q(h^p)$ جملاتی که از (۴) انتخاب می شود. ظاهراً هر چه p بزرگتر باشد خطا نیز کمتر خواهد بود، ولی عملاً خطای گرد کردن، به هنگام کوچک بودن مقدار h ، سبب مشکلاتی در سازگاری نظری با نتایج عددی می شود.

۷-۱-۵ مشتقات مراتب بالا

با توجه به آنچه گفته شد می تون مشتق مرتبه دوم ، سوم و... را نیز برآورد کرد .

با توجه به مطالب که در مورد خطای مشتگیری عددی گفته شد تنها

بررسی می کنیم $f''(x)$

می دانیم که

$$f''(x) = \frac{df'(x)}{dx} \simeq \frac{dp'(x)}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dx}$$

با استفاده از (۳) و (۴) داریم :

$$f''(x) \simeq \frac{1}{h^2} \left[\Delta^2 f_i + (\theta - 1) \Delta^3 f_i + \left(\frac{\theta^2}{2} - \theta + \frac{5}{12} \right) \Delta^4 f_i + \dots \right]$$

در اینجا هم می توان یک یا چند جمله از عبارت سمت راست را به عنوان تقریبی از

اختیار کرد (مثلاً، اگر آن گاه $\theta=0$ و $x = x_i$)

$$f''_i = f''(x_i) \simeq \frac{1}{h^2} \left(\Delta^2 f_i - \Delta^3 f_i + \frac{5}{12} \Delta^4 f_i + \dots \right)$$

که از آن تقریبهای زیر حاصل می شود :

$$f''_i \simeq \frac{\Delta^2 f_i}{h^2}$$

و یا

$$f''_i \simeq \frac{\Delta^2 f_i - \Delta^3 f_i}{h^2}$$

همچنین ، اگر $\theta = 1$ داریم $x_{i+1} = x_i + h$ ، یعنی x_{i+1} و x_i در نتیجه

که از آن تقریبهای زیر حاصل می شود

$$f''_{i+1} \simeq \frac{1}{h^2} \left(\Delta^2 f_i - \frac{1}{12} \Delta^4 f_i + \dots \right)$$

$$f''_{i+1} \simeq \frac{\Delta^2 f_i}{h^2}$$

۵-۱-۸ مثال

با استفاده از جدول تفاضلات مثال (۵-۱-۱) و فرمولهای (۵.۱۵) و (۵.۱۶) تقریبهایی از f''_i "حساب کنید".

حل :

با توجه به فرمولهای مذکور داریم :

x_i	f_i	f''_i از (۱۵)	f''_i از (۱۶)
۱/۰	۱۰۵۱۷/۱	۱۶۴/۱	۱۰۴/۱
۱۵/۰	۱۶۱۸۳/۱	۲۲۴/۱	۱۶۸/۱
۲/۰	۲۲۱۴۰/۱	۲۸/۱	—

همان طور که قبلاً ذکر شد مساوی است. بنابراین، باید اعداد به

دست آمده تقریباً با $\frac{\Delta^2 f_i - \Delta^3 f_i}{h^2}$ مساوی باشند. ملاحظه می شود که

تقریب بهتری برای f'_i است تا $\frac{\Delta^2 f_i}{h^2}$ ضمناً فرمول (۱۷) و نتایج مندرج

در ستون سوم جدول بالا نشان می دهند که f''_{i+1} تقریب $\frac{\Delta^2 f_i}{h^2}$ بهتری برای

است تا f''_i .

۵-۱ انتگرالگیری عددی

محاسبه انتگرالهای معین به شکل

$$\int_a^b f(x) dx$$

که در آن a و b متناهی و $f(x)$ معین باشد، به روشهای تحلیلی، یعنی با استفاده از تابع اولیه، غالباً یا (مشکل است یا غیر ممکن). بنابراین، حتی در صورت موجود بودن تابع اولیه برای نیز از انتگرال گیری عددی استفاده می شود. واضح است که انتگرال معین را می توان به عنوان مساحت سطح زیر منحنی که محصور به محور x و خطوط $x=a$ و $x=b$ است، تعبیر کرد و با تقسیم بازه به زیر بازه ها و جمع کردن مساحت های مربوط به این زیر بازه ها آن را محاسبه کرد.

با استفاده از این خاصیت و چند جمله ای درونیاب می توان تقریبهای مناسبی برای

$$\int_a^b f(x) dx$$

ابتدا روشی را به کار می بریم که در آن $[a, b]$ قسمت متساوی تقسیم می شود
یعنی ، به زیر بازه های

$$[x_i, x_{i+1}] = h, \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

تقسیم می شود که در آن

$$x_{i+1} - x_i = h, \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

و در نتیجه

$$h = \frac{b-a}{n},$$

و بعد چند جمله ای درونیاب $P_m(x)$ نقاط x_{i+1} ، x_i ، با استفاده از
(۴ . ۳۶) ، حساب می شود و بعد

$$\int_{x_i}^{x_{i+m}} P_m(x) dx$$

به دست می آید . با جمع کردن این مقادیر ، تقریبی برای

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx$$

به دست می آید. در زیر، حالت هایی را که $m=1$ و $m=2$ بررسی می کنیم .

۵-۲-۱ قاعده دوزنقه ای

در این قاعده چند جمله ای درونیاب تابع f را در نقاط x_i و x_{i+1} به دست می آوریم ،
که یک خط است. معادله این خط عبارت است از (با توجه به ۴ . ۳۷)

$$p_1(x) = f_i + \theta \Delta f_i$$

در نتیجه ، با تغییر متغیر $x = x_i + \theta h$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} P(x) dx = \int_0^1 (f_i + \theta \Delta f_i) h d\theta$$

$$= h \left[\theta f_i + \frac{\theta^2}{2} \Delta f_i \right]_0^1$$

$$= h \left(f_i + \frac{1}{2} \Delta f_i \right)$$

اگر به جای Δf_i قرار دهیم $f_{i+1} - f_i$ به دست می آوریم :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} P(x) dx = \frac{h}{2} (f_i + f_{i+1})$$

بنابراین ، قرار می دهیم

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \simeq \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1})$$

با توجه به شکل ، در واقع مقدار تقریبی مساحت ذوزنقه ای است که با خطوط قائم هاشور زده شده است. از این رو (۲۱ . ۵) را **فرمول قاعده ذوزنقه ای** می نامند

برای پیدا کردن فرمول تقریبی برای $\int_a^b f(x) dx$ نویسیم

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx$$

$$+ \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx \simeq \frac{h}{2} (f_0 + f_1) + \frac{h}{2} (f_1 + f_2) + \dots$$

$$+ \frac{h}{2} (f_i + f_{i+1}) + \dots + \frac{h}{2} (f_{n-1} + f_n) = \frac{h}{2} (f_0 + 2f_1 + \dots + 2f_{n-1} + f_n)$$

عبارت اخیر را ، با توجه به حرف اول کلمه لاتین معادل دوزنقه ای می (نام) می . بنابراین ،

$$\int_a^b f(x) dx \simeq T(h) = \frac{h}{2} (f_0 + 2f_1 + \dots + 2f_{n-1} + f_n)$$

شکل (۵ - ۲) نشان می دهد که هرچه h کوچکتر اختیار شود خطا کمتر است ،

البته به بهای محاسبه مقدار تابع در نقاط بیشتری فرمول (۵ . ۲۲) را **فرمول قاعده**

دوزنقه ای مرکب می نامند .

۵-۲-۲ مثال

تقریبهایی از $\int_0^1 x^2 dx$ ، به روش دوزنقه ای ، و به ازای $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ ، احساب و خطای این مقادیر را نیز تعیین کنید .

حل :

بنابر (۵ . ۲۲) داریم ، با توجه به این که $b=1, a=0$ ،
 $f(x) = x^2$ ،

$$T(1) = \frac{1}{2} (f(0) + f(1)) = \frac{1}{2} (0 + 1) = \frac{1}{2}$$

$$T\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(f(0) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) \right) = \frac{1}{4} \left(0 + 2 \times \frac{1}{4} + 1 \right) = \frac{3}{8}$$

$$T\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} \left(f(0) + 2f\left(\frac{1}{4}\right) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) + 2f\left(\frac{3}{4}\right) + f(1) \right)$$

$$= \frac{1}{8} \left(0 + 2 \times \frac{1}{16} + 2 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{9}{16} + 1 \right) = \frac{11}{32}$$

مقدار واقعی چنین حساب می شود !

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

ملاحظه می شود که هر چه h کوچکتر می شود $T(h)$ نزدیکتر می شود

خطای مطلق مقادیر حساب شده عبارت است از

$$T(1) - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$T\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3} = \frac{3}{8} - \frac{1}{3} = \frac{1}{24}$$

$$T\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{3} = \frac{11}{32} - \frac{1}{3} = \frac{1}{96}$$

ملاحظه می شود که وقتی h نصف می شود ، یعنی به جای 1 می شود $\frac{1}{2}$ ، خطای $\frac{1}{4}$ می شود (یعنی $\frac{1}{4}$ می شود $\frac{1}{6}$ ، که $\frac{1}{24}$ است) . بنابراین $\frac{1}{6}$ چنین حدس زده می شود که خطا متناسب با h^2 است . درستی این حدس را بعداً ثابت می کنیم .

۵-۲-۳ مثال

۱- تقریبی از $\int_0^1 f(x) dx$ با استفاده از جدول مقادیر زیر حساب کنید.

x_i	۰	۲/۰	۴/۰	۶/۰	۸/۰	۱
f_i	۱	۲۲۱۴/۱	۴۹۱۸/۱	۸۲۲۱/۱	۲۲۵۵/۲	۷۱۸۳/۲

حل :

مشاهده می شود که در این مثال خبری از ضابطه تابع f نیست . با توجه به نقاط جدولی می توانیم قاعده ذوزنقه ای را با فرض $h=0/2$ به کار ببریم .

$$T(0/2) = \frac{0/2}{2} (f(0) + 2(f(0/2) + f(0/4) + f(0/6) + f(0/8)) + f(1))$$

که با توجه به جدول مقادیر ، چنین نوشته می شود :

$$T(0/2) = 0/1(1 + 2 \times 6/7608 + 2/713) = 1/72399$$

اعداد جدول بالا مربوط به مقادیر تابع $f(x) = e^x$ هستند ، برای این تابع داریم

$$\int_0^1 e^x dx = e^x \Big|_0^1 = e - 1 = 1/71828 \quad (5D)$$

ملاحظه می شود که خطا برابر است با $1/72399 - 1/71828 = 0/00571$

۲- تقریبی از $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ با استفاده $\frac{\pi}{8}$ حساب کنید و با مقدار واقعی انتگرال مقایسه کنید .

حل :

$$\begin{aligned} T\left(\frac{\pi}{8}\right) &= \frac{\pi}{16} \left(\sin 0 + 2 \sin \frac{\pi}{8} + 2 \sin \frac{\pi}{4} + 2 \sin \frac{3\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \frac{\pi}{16} (0 + 2(0.38268 + 0.70711 + 0.92388) + 1) \\ &= \frac{\pi}{16} \times 5.02734 . \end{aligned}$$

بنابراین ،

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \simeq T\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0.98712$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

مقدار واقعی انتگرال عبارت است از

$$\text{مقدار واقعی} - T\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 - 0.98712 = 0.01288$$

۵-۲-۶ قضیه

اگر تابع h بر $[c, d]$ پیوسته و تابع g در این بازه انتگرالپذیر باشد و تغییر علامت ندهد (یعنی، همواره نا منفی یا همواره مثبت باشد) در این صورت،

$$\int_c^d g(x) h(x) dx = h(\eta) \int_c^d g(x) dx$$

که $\eta \in [c, d]$

۵-۲-۷ قضیه

اگر تابع h بر $[c, d]$ پیوسته باشد و

$$\min_{c \leq x \leq d} h(x) \leq \zeta \leq \max_{c \leq x \leq d} h(x)$$

آن گاه η هست که

$$c \leq \eta \leq d, \quad h(\eta) = \zeta$$

به عبارت دیگر، هر تابع پیوسته بر یک بازه بسته و محدود، هر مقدار بین ماکسیمم و مینیمم خود را در نقطه ای از حوزه تعریفش اختیار می کند.

۵-۲-۸ قضیه

خطای قاعده ذوزنقه ای از فرمول زیر به دست می آید

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx - \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1}) = -\frac{h^3}{12} f''(\eta_i)$$

که در آن η_i بین x_i و x_{i+1} است ، به شرط آن که f'' پیوسته باشد.

۵-۲-۹ قضیه

با توجه به علامات به کار برده شده در این فصل و پیوسته بودن $f''(x)$ بر

$$ET(h) = \int_a^b f(x) dx - T(h) = -\frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\eta) ,$$

که $a \leq \eta \leq b$.

۵-۲-۱۰ نتیجه

خطای قاعده دوزنقه ای مرکب متناسب با h^2 است و این قاعده برای توابع چند جمله ای حد اکثر از درجه اول دقیق است .

۵-۲-۱۱ نتیجه

اگر M_2 یک کران بالا برای $|f''(x)|$ باشد ، یعنی

$$\max_{a \leq x \leq b} |f''(x)| \leq M_2$$

آن گاه

$$|ET(h)| \leq \frac{(b-a)}{12} h^2 M_2$$

۵-۲-۱۲ مثال

تقریبی از $\int_0^1 x \sin x \, dx$ به قاعده دوزنقه ای ، حسب کنید که خطای آن از کمتر 10^{-2} باشد .

حل : ابتدا M_2 به دست می آوریم . برای این منظور مشتق مرتبه دوم را حساب

$$f(x) = x \sin x \quad \text{می کنیم .}$$

$$f'(x) = \sin x + x \cos x , \quad f''(x) = 2 \cos x - x \sin x$$

بنابراین ، با توجه به این که $0 \leq x \leq 1$

$$|f''(x)| = |2 \cos x - x \sin x| \leq 2|\cos x| + |x||\sin x| \leq 2 + x1 = 3$$

پس ، $M_2 = 3$ و h را از نامساوی زیر به دست می آوریم .

$$\frac{b-a}{12} h^2 M_2 = \frac{h^2}{12} \times 3 = \frac{h^2}{4} \leq 10^{-2}$$

که از آن نتیجه می شود

$$h \leq 0/2$$

از این رو ، قرار می دهیم $h = 0/2$ و $T(h)$ حساب می کنیم (اعداد میانی را تا چهار رقم اعشار گرد می کنیم) .

$$T(0/2) = \frac{0/2}{2} (0 + 2(0/2 \sin 0/2 + 0/4 \sin 0/4 + 0/6 \sin 0/6 + 0/8 \sin 0/8) + \sin 1)$$

$$= 0/1(0 + 2(0/03973 + 0/15577 + 0/33879 + 0/57388) + 0/84147)$$

$$= 0/30578$$

با محاسبه جواب واقعی به طریق زیر خطای (بزرگ) حساب می شود .

$$\int_0^1 x \sin x \, dx = (\sin x - x \cos x) \Big|_0^1 = \sin 1 - \cos 1 = 0/84147 - 0/54030$$

$$= 0/30117(5D)$$

بنابراین ،

$$|ET(h)| = |0/30117 - 0/30578| = 0/00461$$

ملاحظه می شود که $|ET(h)| < 10^{-2}$

۵-۳ قاعده سیمسون

همانگونه که از (11-2-5) , (12-2-5) مشهود است قاعده دوزنقه ای بسیار کند است .
به عبارت دیگر ، برای بدست آوردن تقریبی نه چندان دقیق باید تابع را در نقاط بسیاری محاسبه کرد . روش سیمسون برای محاسبات دستی بسیار ساده و نسبتا دقیق است .
این روش بر اساس جایگزین کردن یک چند جمله ای درجه دوم ، به جای تابع f ، در
به دست می آید. $[x_i, x_{i+2}]$

۵-۳-۱ فرمول قاعده سیمسون

ابتدا چند جمله ای درونیاب f را در نقاط x_{i+2}, x_{i+1}, x_i می نویسیم. این چند جمله ای بنابر (4-38) عبارت است از

$$P(x) = f_i + \theta \Delta f_i + \frac{\theta(\theta-1)}{2} \Delta^2 f_i$$

بنابراین قرار می دهیم:

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x) dx \cong \int_{x_i}^{x_{i+2}} P(x) dx$$

و انتگرال سمت راست را محاسبه می کنیم.

با تغییر متغیر $x = x_i + \theta h$ داریم:

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+2}} P(x) dx &= \int_0^2 \left(f_i + \theta \Delta f_i + \frac{\theta(\theta-1)}{2} \Delta^2 f_i \right) h d\theta \\ &= h \left[\theta f_i + \frac{\theta^2}{2} \Delta f_i + \left(\frac{\theta^3}{6} - \frac{\theta^2}{4} \right) \Delta^2 f_i \right]_0^2 \end{aligned}$$

بنابراین

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} P(x) dx = h \left[2f_i + 2\Delta f_i + \frac{1}{3} \Delta^2 f_i \right]$$

که با توجه به روابط

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i, \quad \Delta^2 f_i = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i$$

چنین ساده می شود

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} P(x) dx = \frac{h}{3} (f_i + 4f_{i+1} + f_{i+2})$$

بنابراین فرمول قاعده سیمسون عبارت است از

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x) dx \cong \frac{h}{3} (f_i + 4f_{i+1} + f_{i+2}) \quad (*)$$

برای به دست آوردن فرمول قاعده سیمسون در سراسر بازه $[x_0, x_n]$ $(*)$

تقریبی برای بازه $[x_{i-2}, x_{i+2}]$ باید n زوج باشد تا بتوان $(*)$ را به کار برد.

با فرض زوج بودن n داریم:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx$$

با به کار بردن (*) به ازای $i=0, 2, \dots, n-2$ به دست می آوریم:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) + \frac{h}{3}(f_2 + 4f_3 + f_4) + \dots + \frac{h}{3}(f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n)$$

عبارت اخیر را با توجه به حرف اول کلمه سیمسون ، $S(h)$ می نامیم . بنابراین ،

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \cong S(h) = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \dots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n)$$

این فرمول **قاعده سیمسون مرکب** است .

۵-۳-۲ مثال :

تقریبی از $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ قاعده سیمسون با $\frac{\pi}{4}$ تقریبی دیگری به ازای $h = \frac{\pi}{8}$ محاسبه کنید.

حل:

$$\begin{aligned} S\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\frac{\pi}{4}}{3} \left(\sin 0 + 4 \sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \frac{\pi}{12} (0 + 2\sqrt{2} + 1) = \frac{\pi(2\sqrt{2} + 1)}{12} = 1/00228 \end{aligned}$$

به ازای $h = \frac{\pi}{8}$ داریم

$$\begin{aligned} S\left(\frac{\pi}{8}\right) &= \frac{\frac{\pi}{8}}{3} \left(\sin 0 + 4 \sin \frac{\pi}{8} + 2 \sin \frac{\pi}{4} + 4 \sin \frac{3\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \frac{\pi}{24} (0 + 1/53073 + 1/41421 + 3/69552 + 1) \\ &= \frac{\pi \times 7/64046}{24} = 1/00013 \end{aligned}$$

ملاحظه می شود که چون

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$S(\frac{\pi}{4})$ و بخصوص $S(\frac{\pi}{8})$ نسبتاً دقیق هستند. جالب این که در $S(\frac{\pi}{8})$ به $S(\frac{\pi}{4})$ با $\sin 0$ و این که $\sin 0$ را می دانیم $\frac{\pi}{\sin 2}$ ، نیاز به محاسبه سه تابع $\sin x$ داریم.

ضمناً، خیلی دقیقتر از است که در مثال (۵-۲-۴) به دست آوردیم.

$$S(\frac{\pi}{4}) \quad T(\frac{\pi}{8})$$

۵-۳-۳ مثال :

تقریبی از $\int_0^1 x^3 dx$ را به ازای قاعده سیمسون محاسبه کنید.

حل:

بزرگترین مقداری که برای h می توان اختیار کرد $\frac{1}{2}$ است زیرا ، تعداد زیر فاصله ها باید زوج باشد) . بنابراین ، داریم

$$\begin{aligned} S\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{3} \left(f(0) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) \right) \\ &= \frac{1}{6} \left(0 + 4 \times \frac{1}{8} + 1 \right) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

اما

$$\int_0^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$

یعنی،

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

البته این اتفاقی نیست و در ادامه ثابت خواهیم کرد که قاعده سیمسون برای چند جمله ای های تا درجه سه دقیق است .

۵-۳-۴ خطای $S(h)$

برای تعیین خطای $S(h)$ ابتدا خطای (*) را حساب می کنیم . برای این منظور ، و سادگی عملیات ، تفاضل زیر را محاسبه می کنیم .

$$E_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) dx - \frac{h}{3} (f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1})$$

که برابر $-\frac{h^5}{90} f_i^{(4)}$ است .

و با توجه به علامات به کار برده شده در این فصل و پیوسته بودن $f(x)$ بر بازه $[a, b]$

$$ES(h) \cong -\frac{(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(\eta) \quad (۱) \quad \text{داریم:}$$

این رابطه نشان می دهد که خطای $S(h)$ متناسب با h^4 است و این خطا برای چند جمله ای های تا درجه سوم صفر است (زیرا ، مشتق چهارم یک چند جمله ای که درجه آن نابیشتر از ۳ باشد صفر است). به عبارت دیگر روش سیمسون برای چند جمله ایهای تا درجه ۳ دقیق است . با توجه به اینکه نقطه مشخصی نیست در عمل فرض می کنند

$$\max_{x_0 \leq x \leq x_n} |f^{(4)}(x)| \leq M_4$$

که از آن نتیجه می شود

$$|ES(h)| \leq \frac{(b-a)}{180} h^4 M_4$$

با استفاده از رابطه بالا می توان $S(h)$ را با دقتی که از قبل تعیین می شود محاسبه کرد .

یعنی ، اگر بخواهیم $S(h)$ را چنان پیدا کنیم که

$$|ES(h)| < \varepsilon$$

که در آنگاه ε عدد کوچک معلومی است ، کافی است h را چنان تعیین کنیم که

$$\frac{(b-a)}{180} h^4 M_4 \leq \varepsilon$$

البته با داشتن تابع f مشکلی در محاسبه
نیست.
 M_4

۵-۳-۵ مثال :

تقریبی از $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$ به روش سیمسون محاسبه کنید که خطای آن کمتر از 10^{-5} باشد.

حل:

با توجه به اینکه $f(x) = x \cos x$ داریم:

$$f'(x) = \cos x - x \sin x, \quad f''(x) = -2 \sin x - x \cos x$$

$$f'''(x) = -3 \cos x + x \sin x, \quad f^{(4)}(x) = 4 \sin x + x \cos x$$

بنابراین با توجه به این که $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ، M_4 به دست می آوریم:

$$|f^{(4)}(x)| = |4 \sin x + x \cos x| \leq 4|\sin x| + |x||\cos x| \leq 4 + \frac{\pi}{2} < 6$$

پس، $M_4 = 6$ و قرار می دهیم.

$$\frac{(b-a)}{180} h^4 M_4 = \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{180} h^4 \times 6 = \frac{\pi h^4}{60} \leq 10^{-5}$$

که از آن نتیجه می شود

$$h \leq 0/1 \times \sqrt{\frac{6}{\pi}} \cong 0/1176$$

چون $nh = b - a = \frac{\pi}{2}$ پس

$$n = \frac{\pi}{2h} \geq 13/357$$

چون در روش سیمسون n باید زوج باشد قرار می دهیم n=14 که در نتیجه h مربوط به

آن ، که حتما از 0/1176 کمتر است ، چنین به دست می آید .

$$h = \frac{\frac{\pi}{2}}{n} = \frac{\pi}{28} \cong 0/1122$$

به این ترتیب باید S(h) را به ازای h=0/1122 حساب کنیم.

۴-۵ قاعده نقطه میانی

روشهای انتگرال گیری دوزنقه ای و سیمسون که تا کنون شرح داده ایم از نقاط ابتدایی و انتهایی بازه انتگرال گیری استفاده می کنند . بنابراین، محاسبه تقریب هایی از انتگرال های نظیر

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

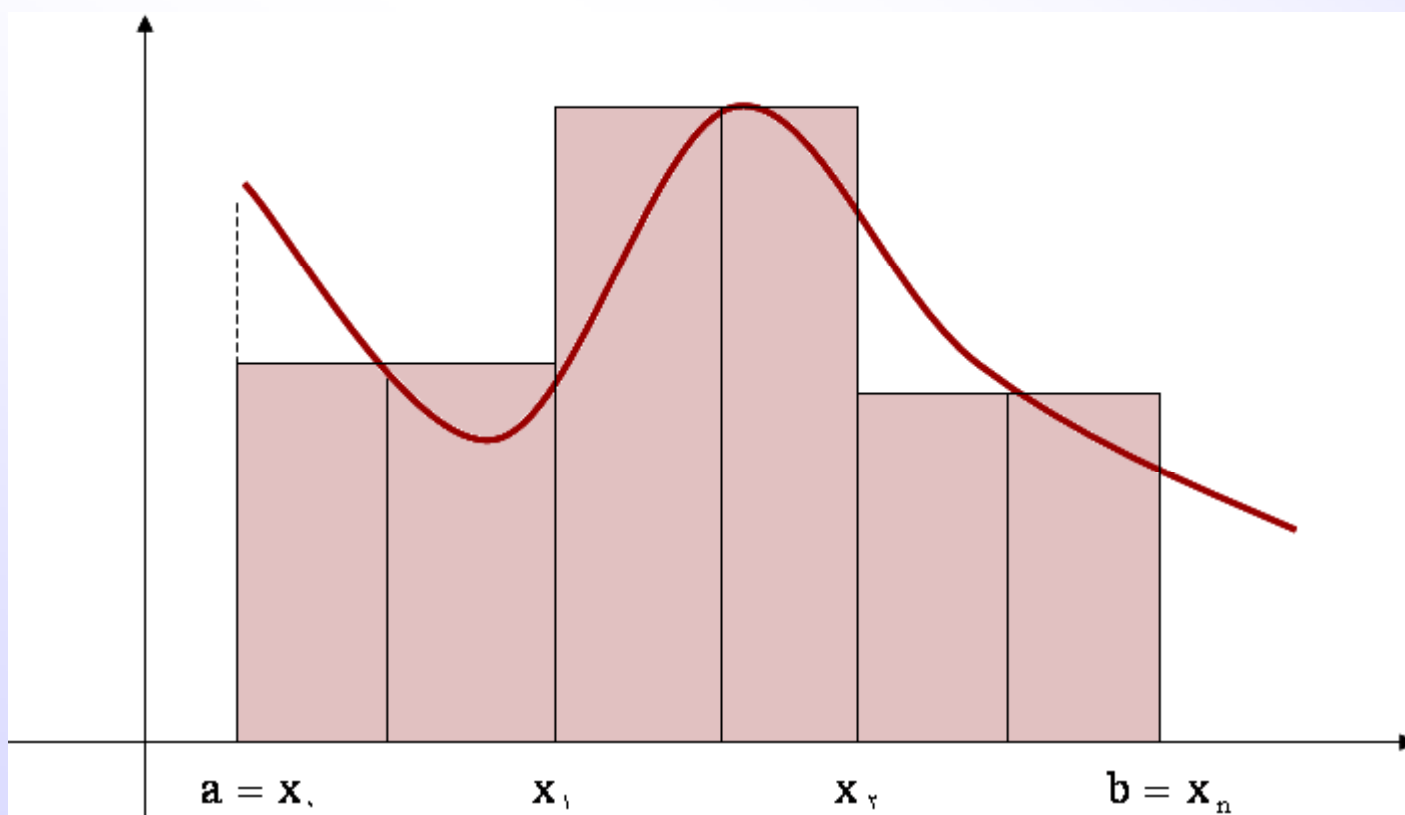
به این روشها میسر نیست . در این قسمت روش ساده ای را شرح می-
دهیم که می توان تقریبهایی از $\int_a^b f(x) dx$ وقتی $f(a)$ یا $f(b)$ نامعین هستند ، به وسیله آن حساب کرد.

۵-۴-۱ فرمول قاعده نقطه میانی

در این قاعده قرار می دهیم

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx hf \left(x_i + \frac{h}{2} \right) \quad *$$

شکل زیر چگونگی تقریب بالا را نشان می دهد.



با استفاده مکرر از (*) فرمول این قاعده برای $\int_a^b f(x) dx$ بدست می آید:

$$\int_a^b f(x) dx \approx hf\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) + hf\left(x_1 + \frac{h}{2}\right) + \dots + hf\left(x_{n-1} + \frac{h}{2}\right)$$

که با فاکتورگیری از h نتیجه می دهد، M حرف اول کلمه Midpoint است،

$$\int_a^b f(x) dx \approx M(h) = h\left(f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) + f\left(x_1 + \frac{h}{2}\right) + \dots + f\left(x_{n-1} + \frac{h}{2}\right)\right)$$

ملاحظه می شود که در فرمول (**) از مقدار تابع در x_0 یعنی x_n و b ،

استفاده نشده است بنابراین ، می توان آن را برای انتگرال هایی که در

آنها $f(a)$ یا $f(b)$ تعریف نشده اند به کار برید.

۵-۴-۲ مثال

تقریبهایی از $\int_0^1 x^2 dx$ ، به روش نقطه میانی ، و به ازای $\frac{1}{2}$ حساب $\frac{1}{4}$ کنید و خطای این مقادیر را به دست آورید

حل :

مقدار واقعی انتگرال برابر است با

$$\int_0^1 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1}{3}$$

به ازای $h = \frac{1}{2} = 0.5$ داریم $\frac{h}{2} = \frac{1}{4} = 0.25$ نتیجه

$$M(0.5) = 0.5((0.25)^2 + (0.75)^2) = 0.5(0.0625 + 0.5625)$$

$$= 0.5 + 0.625 = 0.3125$$

به ازای $h = \frac{1}{4} = 0.25$ داریم $\frac{h}{2} = 0.125$ نتیجه

$$\begin{aligned} M(0.25) &= 0.25 ((0.125) + (0.375) + (0.625) + (0.875)) \\ &= 0.25 (0.015625 + 0.140625 + 0.390625 + 0.765625) \\ &= 0.25 + 1.3125 = 0.328125 \end{aligned}$$

$$EM(0.5) = \frac{1}{3} - M(0.5) = \frac{1}{3} - 0.3125 = 0.02083 \quad (5D)$$

$$EM(0.25) = \frac{1}{3} - M(0.25) = \frac{1}{3} - 0.328125 = 0.00521 \quad (5D)$$

مشاهده می شود که اولاً با نصف شدن h خطا می $\frac{1}{4}$ شود. ثانیاً این خطاها

نصف خطاهای به دست آمده، به ترتیب $\frac{1}{24}$ برای قاعده دوزنقه ای

هستند (مثال ۵-۲-۲). این نتایج برای حالت کلی در (۵-۴-۴) ثابت می شوند.

۵-۴-۳ مثال

تقریبی از $\int_0^{0.09} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ را حساب کنید.

حل:

اولاً مقدار واقعی انتگرال چنین به دست می آید :

$$\int_0^{0.09} \frac{dx}{\sqrt{x}} = [2\sqrt{x}]_0^{0.09} = 0.6$$

ضمناً با استفاده از فرمول ** به دست می آوریم (با انتخاب $h = 0.03$) :

$$\begin{aligned} \int_0^{0.09} \frac{dx}{\sqrt{x}} &\approx 0.03 (f(0.015) + f(0.045) + f(0.075)) \\ &= 0.03 (8.165 + 4.7140 + 3.6515) \end{aligned}$$

بنابراین

$$\int_0^{0.09} \frac{dx}{\sqrt{x}} \approx 0.03 \times 16.5305 = 0.495915$$

مشاهده می شود که این مقدار تقریبی حدود 0.104 خطا دارد که قابل توجه است .
از این رو ، توصیه می شود که در نزدیکی نقاطی که $f(a)$ یا $f(b)$ بینهایت هستند
مقدار h بسیار کوچک اختیار شود .

با انتخاب $h = 0.01$ به دست می آوریم

$$\int_0^{0.09} \frac{dx}{\sqrt{x}} \approx 0.01 \left(\frac{1}{\sqrt{0.005}} + \frac{1}{\sqrt{0.015}} + \frac{1}{\sqrt{0.025}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{0.085}} \right)$$
$$= 0.539587$$

خطای این مقدار تقریبی حدود 0.07 است . به طور کلی در چنین انتگرالهایی
باید برای قسمتی که نزدیک نقطه منفرد تابع است h را بسیار کوچک اختیار
کرد و برای بقیه بازه h را خیلی کوچک نگرفت .

مثلاً قرار دهید

$$\int_0^{0.09} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_0^{0.01} f(x) dx + \int_{0.01}^{0.09} f(x) dx$$

و برای $\int_0^{0.01} f(x) dx$ مقدار h را 0.002 و برای $\int_{0.01}^{0.09} f(x) dx$ مقدار h را 0.02

در نظر بگیرید ، با این انتخابها به دست می آوریم

$$\int_0^{0.01} f(x) dx \approx 0.002 \left(\frac{1}{\sqrt{0.001}} + \frac{1}{\sqrt{0.003}} + \frac{1}{\sqrt{0.005}} + \frac{1}{\sqrt{0.007}} + \frac{1}{\sqrt{0.009}} \right)$$

$$= 0.002 (31.6228 + 18.2574 + 14.1421 + 11.9523 + 10.5409)$$

$$= 0.173031$$

همچنین داریم:

$$\int_{0.01}^{0.09} f(x) dx \approx 0.02 \left(\frac{1}{\sqrt{0.02}} + \frac{1}{\sqrt{0.04}} + \frac{1}{\sqrt{0.06}} + \frac{1}{\sqrt{0.08}} \right)$$

$$= 0.02(4.0711 + 5 + 4.0825 + 3.5355)$$

$$= 0.02 \times 19.6891 = 0.393782$$

پس

$$\int_0^{0.09} \frac{dx}{\sqrt{x}} \approx 0.173031 + 0.393782 = 0.566813$$

اختلاف این مقدار ، با مقدار واقعی 0.6 برابر است با 0.033187 . اما برای کم کردن خطا ، h را باید کوچک گرفت، که در این صورت نیاز به کامپیوتر خواهد بود تا تعداد زیاد جملات را حساب کند.

۵-۴-۴ خطای قاعده نقطه میانی

ابتدا خطای تقریب * را حساب می کنیم . برای این منظور داریم:

$$(۱) \quad f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) = f_i + \frac{h}{2}f'_i + \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^2}{2}f''_i + \dots$$

همچنین با توجه به مطالب گذشته

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \left[x f_i + \frac{(x - x_i)^2}{2}f'_i + \frac{(x - x_i)^3}{6}f''_i + \dots \right]_{x_i}^{x_{i+1}}$$

که با توجه به این که $x_{i+1} - x_i = h$ چنین به دست می آید:

$$(۲) \quad \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = hf_i + \frac{h^2}{2}f'_i + \frac{h^3}{6}f''_i + \dots$$

از تفریق (۱) و (۲) داریم:

(۳)

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx - hf \left(x_i + \frac{h}{2} \right) = \frac{h^3}{24} f_i'' + \dots \approx \frac{h^3}{24} f_i''$$

با مقایسه (۳). (۱) نتیجه می گیریم که خطای قاعده نقطه میانی نصف خطای قاعده دوزنقه ای است. برای تعیین خطای کل چنین ادامه می دهیم:

$$\begin{aligned} \text{EM}(h) &= \left(\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx - f \left(x_0 + \frac{h}{2} \right) \right) + \dots + \left(\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx - f \left(x_{n-1} + \frac{h}{2} \right) \right) \\ &\approx \frac{h^3}{24} (f_0'' + f_1'' + \dots + f_{n-1}'') \end{aligned}$$

که با استفاده از قضیه (۷-۲-۵) نتیجه می دهد

$$EM(h) \approx \frac{h^3}{24} \times nf''(\eta)$$

چون $nh = b-a$ ، پس

$$EM(h) \approx \frac{(b-a)h^2}{24} f''(\eta) \quad (a \leq \eta \leq b)$$

و یا

$$|EM(h)| \leq \frac{(b-a)h^2}{12} h^2 M_2$$

که در آن M_2 $\max_{a \leq x \leq b} |f''(x)| \leq M_2$ تعریف شده است. البته (۴) وقتی مفید

است که M_2 متناهی باشد.

۵-۴-۵ خصوصیات روش نقطه میانی

این روش ظاهراً بهتر از روش دوزنقه ای است زیرا خطای آن نصف خطای روش دوزنقه ای است و از یک مقدار تابع نیز کمتر استفاده می کند. علاوه براین ، برای انتگرال توابعی که در نقاط a یا b مقدار نامعین (بینهایت) دارند قابل استفاده است. اما قاعده دوزنقه ای خاصیت جالبی دارد که نه روش نقطه میانی و نه قاعده سیمسون آن خاصیت را ندارند. فرض کنید به ازای h ثابتی $T(h)$ و $M(h)$ را حساب کرده اید . در $T(h)$ نقاطی که تابع در آنها باید حساب شود، عبارت انداز:

$$a, a + h, a + 2h, \dots, a + (n - 1)h, b$$

و در $M(h)$ نقاط عبارتند از:

$$a + \frac{h}{2}, a + \frac{3h}{2}, \dots, a + (n - 1)h + \frac{h}{2}$$

حال اگر بخواهیم $T(\frac{h}{2})$ به دست آوریم ، داریم:

$$a, a + \frac{h}{2}, a + h, a + \frac{3h}{2}, \dots, \underline{a + (n-1)h}, a + (n-1)h + \frac{h}{2}, b$$

برای $M(\frac{h}{2})$:

$$a + \frac{h}{4}, a + \frac{3h}{4}, a + \frac{5h}{4}, \dots, b - \frac{h}{4}$$

مشاهده می شود که تمام نقاطی که برای محاسبه $T(h)$ به کار می روند در محاسبه $T(\frac{h}{2})$ نیز دیده می شوند (زیر آنها خط کشیده شده است). بنابراین ، برای محاسبه $T(\frac{h}{2})$ می توان از مقادیر تابع که قبلاً حساب شده است استفاده کرد . ولی ، هیچ کدام از نقاطی که در محاسبه $M(\frac{h}{2})$ به کار می روند از نقاطی که در محاسبه $M(h)$ به کار رفته اند نیستند!

برای قاعده سیمسون نیز ضریب مقادیر چنان است که نمی توان از محاسبات قبلی کمک گرفت $S(\frac{h}{2})$ را به کمک $S(h)$ حساب کرد. از خاصیت بالا در پیدا کردن مقادیر دقیقتر برای $\int_a^b f(x)dx$ ، با استفاده از مقادیر نا دقیق $T(h)$ ، استفاده می شود .

اشکال دیگر قاعده نقطه میانی آن است که ممکن است نتوان آن را برای برآورد مقدار انتگرال یک تابع جدولی به کار برد ، زیرا اگر مقدار تابع در نقاطی که در جدول نیست لازم باشد ابتدا باید از درونیابی استفاده و این مقادیر را بر آورد کرد.

۵-۴-۶ مثال

تقریبی از $\int_0^{1.2} f(x)dx$ با استفاده از جدول مقادیر زیر ، و روش نقطه میانی حساب کنید.

x_i	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2
f_i	1	1.2214	1.4918	1.8221	2.2255	2.7183	3.3201

حل:

برای استفاده از روش نقطه میانی و جدول مقادیر بالا، تنها می توان h را 0.4 اختیار کرد . با انتخاب $h = 0.4$ مقادیر تابع در نقاط زیر

0.2 , 0.6 , 1

مورد نیاز است .

بنابراین ،

$$\int_0^{1.2} f(x) dx \approx 0.4(f(0.2) + f(0.6) + f(1)) = 2.30472$$

اگر بخواهیم از $h = 0.2$ استفاده کنیم مقدار تابع در نقاط زیر مورد نیاز است

$$0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 1.1$$

که هیچ کدام در جدول نیستند و باید مقادیر تبع را در این نقاط به کمک

درونیابی بر آورد کرد!

۵-۵ قاعده رامبرگ

با استفاده از قاعده رامبرگ ، و به کمک مقادیر تقریبی که از روشهای

ساده ای همچون قاعده دوزنقه ای و قاعده سیمسون برای $\int_a^b f(x)dx$

حساب می شود، و بدون محاسبه تابع f در نقاط اضافی ، می توان

تقریبهای بهتری برای $\int_a^b f(x)dx$ حساب کرد . اساس این روش بر این

مطلب استوار است که می دانیم

$$I = \int_a^b f(x)dx = T(h) + a_2 h^2 + a_4 h^4 + a_6 h^6 + \dots \quad (1)$$

که در آن a_i ها مستقل از h و متناسب با مشتق i ام تابع f هستند.

اگر در (۱)، h را به $\frac{h}{2}$ تبدیل کنیم خواهیم داشت:

$$I = T\left(\frac{h}{2}\right) + a_2\left(\frac{h}{2}\right)^2 + a_4\left(\frac{h}{2}\right)^4 + a_6\left(\frac{h}{2}\right)^6 + \dots \quad (۲)$$

برای حذف a_2 معادلات (۱) و (۲) معادله (۱) را از چهار برابر (۲) کم می کنیم تا حاصل شود

$$4I - I = 4T\left(\frac{h}{2}\right) - T(h) + \frac{a_4}{4}h^4 - a_4h^4 + \frac{a_6}{16}h^6 - a_6h^6 + \dots$$

در نتیجه

$$I = \frac{4T\left(\frac{h}{2}\right) - T(h)}{3} - \frac{a_4}{4}h^4 - \frac{5a_6}{16}h^6 + \dots \quad (۳)$$

رابطه بالا نشان می دهد که مقدار

$$\frac{4T\left(\frac{h}{2}\right) - T(h)}{3}$$

تقریبی از I است که خطای آن متناسب با h^4 است (خطای $T(h)$ و $T\left(\frac{h}{2}\right)$ متناسب با h^2 است.)

۵-۵-۱ مثال

تقریب هایی از $\int_0^1 x^3 dx$ به قاعده ذوزنقه ای و با $\frac{1}{2}$ ، حساب کنید و بعد به قاعده رامبرگ تقریب بهتری با استفاده از دو مقدار تقریبی حاصل را به دست آورید .

حل:
داریم

$$T(1) = \frac{1}{2} (0^3 + 1^3) = \frac{1}{2}$$

$$T\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(0^3 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 1^3 \right) = \frac{5}{16}$$

و بنا بر قاعده رامبرگ داریم:

$$\frac{4T\left(\frac{1}{2}\right) - T(1)}{3} = \frac{\frac{5}{4} - \frac{1}{2}}{3} = \frac{\frac{3}{4}}{3} = \frac{1}{4}$$

از طرف دیگر ، $\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$ تقریبی که از قاعده رامبرگ به دست می آید با

مقدار واقعی انتگرال مساوی است . این نتیجه با استفاده از (۳) قابل توجیه است .

زیرا ، خطای کسر بالا مساوی است با

$$a'_4 h^4 + a'_6 h^6 + \dots$$

که در آن a'_i متناسب با مشتق i ام تابع $f(x) = x^3$ اما می دانیم که از

مشتق مرتبه چهارم به بعد این تابع صفر است ، در نتیجه مقدار کسر با مقدار

واقعی انتگرال برابر است.

۵-۵-۲ تعمیم قاعده رامبرگ

در عمل تلفیقی از قاعده دوزنقه ای و قاعده رامبرگ به کار می رود . ابتدا به قاعده دوزنقه ای مقادیر زیر را حساب می شود

$$\begin{array}{lll} h_0 = (b - a) & \vdots & T(h_0) = T_{00} \\ h_1 = \frac{b - a}{2} = \frac{h_0}{2} & \vdots & T(h_1) = T_{01} \\ h_2 = \frac{b - a}{2^2} & \vdots & T(h_2) = T_{02} \\ \\ h_{k-1} = \frac{b - a}{2^{k-1}} & \vdots & T(h_{k-1}) = T_{0(k-1)} \\ h_k = \frac{b - a}{2^k} & \vdots & T(h_k) = T_{0k} \end{array}$$

خطای T_{0i} متناسب با h_i^2 است. بعد به قاعده رامبرگ و به کمک T_{0i} ها مقادیر

زیر را به دست می آوریم، که خطای هر یک متناسب با h^4 است

$$T_{10} = \frac{4T_{01} - T_{00}}{3}$$

$$T_{11} = \frac{4T_{02} - T_{01}}{3}$$

⋮

$$T_{1(k-1)} = \frac{4T_{0k} - T_{0(k-1)}}{3}$$

می توان باز هم به کمک T_{1i} تقریبهای بهتری برای $\int_a^b f(x) dx$ حساب کرد.

برای این منظور (۳) را چنین می نویسیم، برای h به جای

$$I = T_{1i} + a'_4 h_i^4 + a'_6 h_i^6 + \dots \quad (۴)$$

اگر در تساوی بالا به جای مقدار $\frac{h_i}{2}$ قرار دهیم به دست می آوریم

(۵)

$$I = T_{1(i+1)} + a'_4 \left(\frac{h_i}{2} \right)^4 + a'_6 \left(\frac{h_i}{2} \right)^6 + \dots$$

حال (۴) را از 4^2 برابر (۵) کم می کنیم تا حاصل شود

$$I = 4^2 \frac{T_{1(i+1)} - T_{1i}}{4^2 - 1} + a''_6 h^6 + \dots$$

که در آن a''_6 مستقل از h و متناسب با مشتق ششم تابع f است. به این ترتیب بعد از محاسبه T_{1i} ها به محاسبه T_{2i} ها دو آی بخوانید) به قرار زیر می پردازیم.

$$T_{20} = \frac{4^2 T_{11} - T_{10}}{4^2 - 1}$$

$$T_{21} = \frac{4^2 T_{12} - T_{11}}{4^2 - 1}$$

⋮

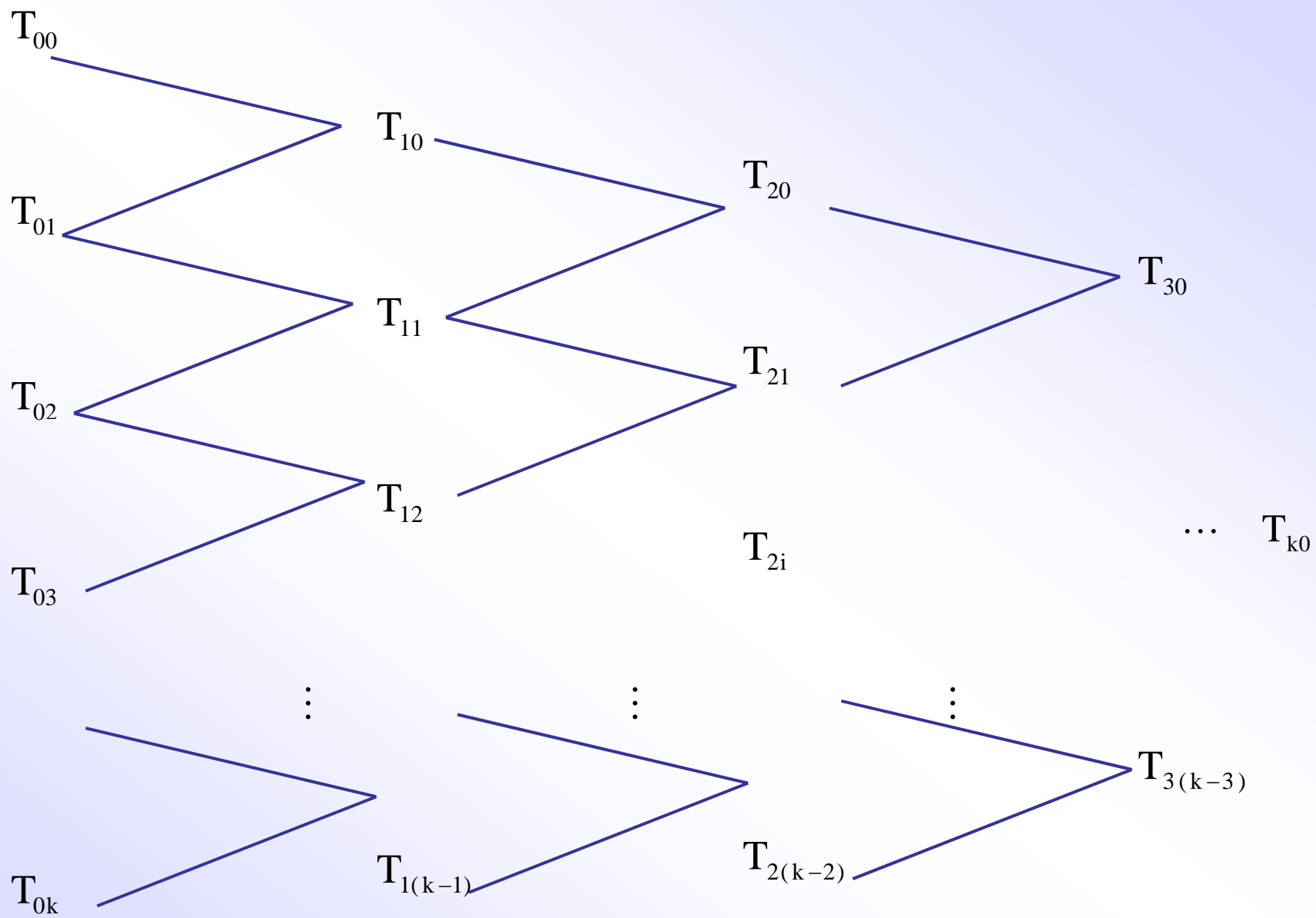
$$T_{2i} = \frac{4^2 T_{1(i+1)} - T_{1i}}{4^2 - 1}$$

در مرحله P ام از قاعده رامبرگ داریم

$$T_{pi} = \frac{4^p T_{(p-1)(i+1)} - T_{(p-1)i}}{4^p - 1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad p = 1, 2, 3, \dots$$

و خطای T_{pi} متناسب با 4^{p+2} است و برای چند جمله ای های تا درجه $2p+1$

دقیق است . با استفاده از فرمول بالا اعداد جدول زیر حساب می شوند:



ثابت می شود که ،

$$\lim_{P \rightarrow \infty} T_{p0} = \int_a^b f(x) dx$$

بنابراین ، در عمل T_{p0} را حساب می کنیم و وقتی ، برای مفروضه ، داشته

باشیم

$$|T_{(p+1)0} - T_{p0}| < \varepsilon$$

عملیات را متوقف و $T_{(p+1)0}$ به عنوان تقریبی از $\int_a^b f(x) dx$ بپذیریم . توجه

داشته باشید که T_{pi} کمک های اولیه که از قاعده ذوزنقه ای حاصل

می شوند به دست می آید و نیازی به محاسبه مجدد تابع ندارد.

۵-۴-۵ مثال

تقریب هایی از $\int_0^2 x^5 dx$ به قاعده ذوزنقه ای به ازای $\frac{1}{2}$ ، 1 و 2 حساب کنید و با استفاده از مقادیر حساب شده، و به قاعده رامبرگ ، تقریبی بهتر برای این انتگرال به دست آورید.

حل:

داریم $a = 0$ ، $b = 2$ و $f(x) = x^5$ بنابراین

$$T(2) = \frac{2}{2} (0^5 + 2^5) = 32$$

$$T(1) = \frac{1}{2} (0^5 + 2(1)^5 + 2^5) = 17$$

$$T\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \left(0^5 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^5 + 2(1)^5 + 2\left(\frac{3}{2}\right)^5 + 2^5 \right) = \frac{197}{16}$$

حال جدول زیر را تشکیل می دهیم

$$T_{00} = 32$$

$$T_{01} = 17$$

$$T_{02} = \frac{197}{16}$$

$$T_{10} = \frac{4 \times 17 - 32}{3} = 12$$

$$T_{11} = \frac{\frac{197}{4} - 17}{3} = \frac{43}{4}$$

$$T_{20} = \frac{4^2 \times \frac{43}{4} - 12}{4^2 - 1} = \frac{32}{3}$$

از طرف دیگر

$$\int_0^2 x^5 dx = \frac{x^6}{6} \Big|_0^2 = \frac{32}{3}$$

مشاهده می شود که مقدار T_{20} دقیقاً با مقدار انتگرال برابر است و این بدین خاطر

است که T_{20} برای توابع تا درجه $2 + 1 = 5$ دقیق است (یعنی خطایش صفر است!)

۵-۶ قاعده های دقیقتر

اگر به فرمول قاعده دوزنقه ای توجه کنید مشاهده می کنید که

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx \frac{h}{2} f_i + \frac{h}{2} f_{i+1} = \sum_{k=i}^{i+1} w_k f_k$$

که خطای آن نیز $\frac{h^3}{12} f''(\eta)$ است.

وهمچنین از فرمول قاعده سیمسون نتیجه می شود که

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x) dx \approx 3f_i + \frac{4h}{3} f_{i+1} + \frac{h}{3} f_{i+2} = \sum_{k=i}^{i+2} w_k f_k$$

و خطای آن $\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\eta)$ است .

بنابراین ، به طور کلی ، دنبال قواعدی می گردیم که در آنها

$$\int_x^{x_m} f(x) dx = \sum_{k=0}^m w_k f_k + E$$

در اینجا آنچه می تواند مجهول باشد نقاط x_0, x_1, \dots, x_m و ضرایب w_0, \dots, w_m

است ، که در اینجا دو روش برای محاسبه آنها ارائه می کنیم . E نیز خطای

$$\sum_{k=0}^m w_k f_k \text{ است.}$$

۵-۶-۱ روش نیوتن - کوتر

در این روش نقاط x_0, x_1, \dots, x_m معلوم فرض می شوند ، مثلاً متساوی الفاصله

و به صورت

$$x_{i+1} - x_i = h, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m-1$$

بنابراین باید $(m+1)$ مجهول w_0, \dots, w_m به دست آید .

برای این منظور، در (۱) قرار می دهیم:

$$E = 0$$

وقتی که

$$f(x) = 1, x, \dots, x^m$$

یعنی، w_i ها را چنان پیدا می کنیم که خطای $\sum_{k=0}^m w_k f_k$ برای چند جمله ای های تا درجه m

صفر باشد. در زیر فرمول قاعده چهار نقطه ای یا قاعده را به دست می آوریم. برای این

منظور، بدون این که به کلیت خللی وارد شود قرار می دهیم

بنابراین، x_i باید داشته باشیم

$$\int_0^{3h} f(x) dx = \sum_{k=0}^3 w_k f_k + E$$

که در آن $x_i = ih$ یعنی

$$x_0 = 0, \quad x_1 = h, \quad x_2 = 2h, \quad x_3 = 3h$$

حال برای به دست آوردن w_0, w_1, w_2, w_3 قرار می دهیم $E = 0$ وقتی که

$$f(x) = 1, x, x^2, x^3$$

به این ترتیب چهار معادله زیر حاصل می شود:

$$f(x) = 1 \Rightarrow \int_0^{3h} 1 dx = 3h = w_0 + w_1 + w_2 + w_3$$

$$f(x) = x \Rightarrow \int_0^{3h} x dx = \frac{9h^2}{2} = hw_1 + 2hw_2 + 3hw_3$$

$$f(x) = x^2 \Rightarrow \int_0^{3h} x^2 dx = 9h^3 = h^2w_1 + 4h^2w_2 + 9h^2w_3$$

$$f(x) = x^3 \Rightarrow \int_0^{3h} x^3 dx = \frac{81h^4}{4} = h^3w_1 + 8h^3w_2 + 27h^3w_3$$

که پس از خلاصه کردن دستگاه زیر حاصل می شود:

$$\begin{cases} w_0 + w_1 + w_2 + w_3 = 3h \\ w_1 + 2w_2 + 3w_3 = \frac{9h}{2} \\ w_1 + 4w_2 + 9w_3 = 9h \\ w_1 + 8w_2 + 27w_3 = \frac{81h}{4} \end{cases} \quad (1)$$

معادلات سوم و چهارم، پس از حذف w_1 کمک به معادله دوم، به صورت زیر در می آیند:

$$\begin{cases} 2w_2 + 6w_3 = \frac{9h}{2} \\ 6w_2 + 24w_3 = \frac{63h}{4} \end{cases} \quad (2)$$

اگر w_2 را نیز از معادله دوم دستگاه اخیر حذف کنیم حاصل می شود:

$$6w_3 = \frac{9h}{4} \Rightarrow w_3 = \frac{3h}{8}$$

از معادله (۲) به دست می آید

$$w_2 = \frac{9h}{8}$$

سپس از معادله دوم (۱) حاصل می شود

$$w_1 = \frac{9h}{8}$$

و بالاخره از معادله اول (۲) به دست می آوریم

$$w_0 = \frac{3h}{8}$$

بنابراین فرمول چهار نقطه ای عبارت است از

$$\int_0^{3h} f(x) dx \approx \frac{3h}{8} (f(0) + 3f(h) + 3f(2h) + f(3h))$$

که با تغییر متغیر $X = x_0 + x$ صورت زیر در می آید

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x) dx \approx \frac{3h}{8} (f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3)$$

که در آن طبق معمول ،

$$x_i = x_0 + ih \quad , \quad f_i = f(x_i)$$

روش فوق به روش **ضرایب مجهول** نیز معروف است .

فرمول های نیوتن – کوتز پنج نقطه ای و... نیز به همین ترتیب به دست می آیند.
در زیر جدول مربوط به این فرمولها ، ضرایب و خطای آنها ، آمده است . به طور کلی داریم:

$$\int_x^{x_m} f(x) dx = A_0 \sum_{k=0}^m a_k f_k + A_1 h^{l+1} f^{(l)}(\eta) \quad (3)$$

که در آن $\eta \in [x_0, x_m]$

$$l = \begin{cases} m+1 & \text{اگر } m \text{ فرد باشد} \\ m+2 & \text{اگر } m \text{ زوج باشد} \end{cases}$$

پس بهتر است از فرمول هایی استفاده کنیم که در آنها m زوج است.

m	A_0	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	A_1
1	$\frac{1}{2}$	1	1				$\frac{-1}{12}$
2	$\frac{1}{3}$	1	4	1			$\frac{-1}{90}$
3	$\frac{3}{8}$	1	3	3	1		$\frac{-3}{80}$
4	$\frac{2}{45}$	7	32	12	32	7	$\frac{-8}{905}$
5	$\frac{1}{140}$	19	75	50	50	75	$\frac{-9}{2096}$
6	$\frac{7}{17280}$	41	216	27	272	27	$\frac{-8183}{518400}$
7	$\frac{4}{14175}$	989	5888	-928	10942	-4540	$\frac{-2368}{467775}$

جدول (١)

آنچه از جدول (۱) نتیجه می شود آن است که ضرایب جملات متساوی البعد از طرفین برابرند . تا $m = 7$ ضرایب همگی مثبت ولی برای $m = 8$ بعضی ضرایب منفی هستند . اصولاً توصیه می شود ، با توجه به این که محاسبه ها توأم با خطاست و برای m های بزرگ ضرایب منفی است منفی باشند، فرمول های نیوتن - کوتز را برای m های کوچک به کار برید . بخصوص m های زوج را اختیار کنید و مثلاً با توجه به (۳) فرمول های ۳ نقطه (یعنی قاعده سیمسون) و ۴ نقطه ای (یعنی قاعده $\frac{3}{8}$) هر دو برای چند جمله ایهای تا درجه سوم دقیق هستند.

اما روش سیمسون از یک نقطه کمتر استفاده می کند و قدر مطلق خطای آن (یعنی، $\frac{1}{90}$) از قدر مطلق خطای قاعده $(\frac{3}{8})$ یعنی $(\frac{3}{80})$ کوچکتر است.

۵-۶-۲ روش گاوس

در این روش نقاط و ضرایب همگی مجهول فرض می شوند پس در فرمول

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^m w_k f_k + E$$

$(m+1)$ نقطه x_0, x_1, \dots, x_m و $(m+1)$ ضریب w_0, \dots, w_m مجهول هستند. جهت به

دست آوردن این $2m+2$ مجهول قرار می دهیم $E = 0$ برای

$$f(x) = 1, x, x^2, \dots, x^{2m+1}$$

به عبارت دیگر کاری می کنیم که $\sum_{k=0}^m w_k f_k$ برای چند جمله ای ایهای تا درجه $2m+1$ دقیق باشد.

★ واضح است که این روش از روش های متناظر در روش نیوتن - کوتز دقیقتر

است.

۵-۶-۳ فرمول قاعده دو نقطه ای گاوس

به دلایلی که بعداً شرح می دهیم ، فرمول گاوس را برای بازه $[-1, 1]$ به دست می آوریم . واضح است که بازه های $[a, b]$ و $[-1, 1]$ را به سادگی می توان به هم تبدیل کرد . با تغییر متغیر

$$x = \frac{1}{2}[(b-a)u + (b+a)]$$

$$dx = \frac{(b-a)}{2} du \quad \text{به دست می آوریم:}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^1 \psi(u) du$$

که در آن

$$\psi(u) = \frac{(b-a)}{2} f\left(\frac{1}{2}[(b-a)u + (b+a)]\right)$$

پس ، فرمول دو نقطه ای گاوس را برای

$$\int_{-1}^1 f(x) dx$$

به دست می آوریم.

می خواهیم داشته باشیم

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{k=0}^1 w_k f_k + E$$

برای تعیین x_1, x_0, w_1, w_0 قرار می دهیم $E = 0$ برای

$$f(x) = 1, x, x^2, x^3$$

همان طور که در روش نیوتن - کوتز عمل کردیم ، در اینجا نیز دستگاه زیر حاصل می شود:

$$f(x) = 1 \Rightarrow \int_{-1}^1 1 dx = 2 = w_0 + w_1 \quad (1)$$

$$f(x) = x \Rightarrow \int_{-1}^1 x dx = 0 = w_0 x_0 + w_1 x_1 \quad (2)$$

$$f(x) = x^2 \Rightarrow \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3} = w_0 x_0^2 + w_1 x_1^2 \quad (3)$$

$$f(x) = x^3 \Rightarrow \int_{-1}^1 x^3 dx = 0 = w_0 x_0^3 + w_1 x_1^3 \quad (4)$$

مشاهده می شود که چهار معادله و چهار مجهول داریم که نسبت به w_1 خطی ولی نسبت به x_1, x_0 غیر خطی هستند (مشکل حل این دستگاهها تا مدتی مانع از کاربرد آنها بود). این دستگاه را به طریق زیر حل می کنیم.

معادله (2) را در ضرب و با معادله (4) جمع می کنیم تا حاصل شود

$$w_1 x_1^3 - w_1 x_0^2 x_1 = 0$$

بنابراین، باید داشته باشیم

$$w_1 x_1 (x_1 - x_0)(x_1 + x_0) = 0 \quad (5)$$

در زیر ثابت می کنیم که تنها $(x_1 + x_0) = 0$ و $x_1 = x_0$ عوامل سمت چپ تساوی

(5) مخالف صفر هستند. این مطلب را به برهان خلف ثابت می کنیم. فرض کنید

$$w_1 x_1 = 0 \quad (6)$$

از این تساوی و (2) نتیجه می گیریم

$$w_0 x_0 = 0 \quad (7)$$

(6) و (7) و (3) نتیجه می دهند

$$\frac{2}{3} = 0$$

که یک تناقض است . پس فرض $w_1 x_1 = 0$ باطل است و باز هم فرض می کنیم

$x_1 - x_0 = 0$ که از آن نتیجه می شود

$$x_1 = x_0 \quad (8)$$

(8) و (2) نتیجه می دهند

$$0 = (w_0 + w_1)x_1 \quad (9)$$

که با توجه به (1) نتیجه می گیریم

$$0 = 2x_1$$

که خلاف $w_1 x_1 \neq 0$ است (چرا؟) پس

$$x_1 - x_0 \neq 0$$

$$x_1 + x_0 = 0$$

از این رو ، باید داشته باشیم

یعنی،

$$x_1 = -x_0$$

چون x_0 و x_1 صفر نیستند و معمولاً کوچکتر از فرض می شود

(۱۰)

$$x_1 > 0 , \quad x_0 < 0$$

از (۹) و (۳) به دست می آوریم

$$\frac{2}{3} = w_0 x_0^2 + w_1 x_0 = (w_0 + w_1) x_0^2$$

که با توجه به (۱) نتیجه می دهد

$$x_0^2 = \frac{1}{3}$$

بنابراین ، با توجه به (۱۰) ،

$$x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

و

$$x_1 = -x_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

ضمناً از (۹) و (۲) نتیجه می شود که

$$0 = w_0 x_0 + w_1 x_0 = (w_0 + w_1) x_0$$

که چون $x_0 \neq 0$ نتیجه می دهد

$$w_0 + w_1 = 0$$

$$w_0 = w_1 = 1$$

از (۱) و (۱۱) به دست می آوریم

بنابراین ، فرمول دو نقطه ای گاوس عبارت است از

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

این فرمول برای چند جمله ایهای تا درجه سوم دقیق است (مطابق آنچه عمل کردیم) و تنها از دو مقدار تابع استفاده می کند. بنابراین ، قاعده دونقطه گاوس از نظر دقت و خطا تقریباً نظیر قاعده سیمسون است که از سه مقدار تابع استفاده می کند ، در نتیجه از آن بهتر است.

خوشبختانه مقادیر W_0, \dots, X_1, X_0 حساب شده اند و در جدو لهایی در اختیار استفاده کنندگان از این روش قرار می گیرند . جدول (۲) این مقادیر را نشان می دهد .

از جمله خصوصیات این دسته از فرمولهای انتگرالگیری گاوس این است که اگر m فرد باشد تعداد نقاط زوج است و داریم :

$$\begin{cases} X_{m-i} = -X_i \\ W_{m-i} = W_i \end{cases}, \quad i=0,1,\dots,\frac{m-1}{2} \quad (**)$$

و اگر m زوج باشد تعداد نقاط فرد است و داریم

$$\begin{cases} X_{m-i} = -X_i, & i=0,1,\dots,\frac{m}{2}-1 \\ X_{\frac{m}{2}} = 0 \\ W_{m-i} = W_i, & i=0,1,\dots,\frac{m}{2}-1 \end{cases} \quad (***)$$

خصوصیات مندرج در $(*)$ و $(**)$ در جدول (۲) آمده است.

m	x_i	w_i
1	$x = -x_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$w_1 = w_0 = 1$
2	$x_1 = 0$	$w_1 = \frac{8}{9}$
	$x_2 = -x_0 = \sqrt{\frac{3}{5}}$	$w_2 = w_0 = \frac{5}{9}$
3	$x_2 = -x_1 \approx 0.33998104$	$w_2 = w_1 \approx 0.65214515$
	$x_3 = -x_0 \approx 0.86113631$	$w_3 = w_0 \approx 0.34785485$
	$x_2 = 0$	$w_2 = 0.56888889$
4	$x_3 = -x_1 \approx 0.53846931$	$w_3 = w_1 = 0.47862867$
	$x_4 = -x_0 = 0.90617985$	$w_4 = w_0 = 0.23692689$

جدول (٢)

از خصوصیات بارز فرمولهای انتگرالگیری گاوس آن است که تمام ضرایب w_i مثبت هستند و مهمتر اینکه $|w_i| \leq 1$ این ویژگی و دقت بالای این فرمولهای استفاده از آنها را اجتناب ناپذیر می کند. تنها اشکال روش انتگرال گیری گاوس استفاده از بازه $[-1,1]$ است که $\int_a^b f(x) dx$ به $\int_a^b \psi(u) du$ تبدیل شود. اشکال دیگر، که با ظهور کامپیوترها عمده نیست، اصم بودن نقاط و ضرایب است که استفاده از این روشها را با دست خسته کننده می کند. ولی بایک برنامه کامپیوتری می توان یکبار، و برای همیشه، نقاط و ضرایب را کامپیوتر داد و برای همیشه از آنها استفاده کرد.

۵-۶-۴ مثال

۱- با استفاده از فرمول چهار نقطه ای گاوس تقریبی از انتگرال زیر را حساب

کنید.

$$I = \int_1^3 \frac{\sin^2 x}{x} dx$$

حل:

با تغییر متغیر $x = u+2$ داریم

$$I = \int_1^3 \frac{\sin^2 (u + 2)}{(u + 2)} du$$

که با توجه به جدول (۲) ، به ازای $n = 3$ به دست می آوریم

$$I \approx 0.7942833$$

۲- فرمول چهار نقطه ای گاوس را برای محاسبه تقریبی از انتگرال زیر به کار برید.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt$$

حل:

با تغییر متغیر $u = \frac{\pi}{4}(t + 1)$ دست می آوریم

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt = \frac{\pi}{4} \int_{-1}^1 \sin \frac{\pi(u + 1)}{4} du = 1.000000$$

می توانید تحقیق کنید که تقریب 1.000000 را با 65 نقطه و به قاعده سیمسون می توان به دست آورد!

www.salampnu.com

سایت مرجع دانشجوی پیام نور

- ✓ نمونه سوالات پیام نور : بیش از ۱۱۰ هزار نمونه سوال همراه با پاسخنامه
- تستی و تشریحی
- ✓ کتاب ، جزوه و خلاصه دروس
- ✓ برنامه امتحانات
- ✓ منابع و لیست دروس هر ترم
- ✓ دانلود کاملاً رایگان بیش از ۱۴۰ هزار فایل مختص دانشجویان پیام نور

www.salampnu.com