www.salampnu.com

سایت مرجع دانشجوی پیام نور

- ✓ نمونه سوالات پیام نور : بیش از ۱۱۰ هزار نمونه سوال همراه با پاسخنامه تستی و تشریحی
- ✓ کتاب ، جزوه و خلاصه دروس
- ✓ برنامه امتحانات
- ✓ منابع و لیست دروس هر ترم
- ✓ دانلود کاملا رایگان بیش از ۱۴۰ هزار فایل مختص دانشجویان پیام نور

www.salampnu.com

آنالیز ریاضی ۲

منبع :آنالیز ریاضی ۲

مولف:دکتر علیرضا مدقالچی

تهیه کننده:علی ظهری

فصل اول

انتگرال هاي ريمان ـ استيلتيس

جایگاه درس :

آنالیز ریاضی ۲درس اصلی تخصصی والزامی رشته ریاضی میباشد.

این درس در دوره کارشناسی ارشد آمار نیز تدریس میشود.

این درس پیش نیاز آنالیز ریاضی۳ و پیش نیاز آن انالیز ریاضی ۱ است.

هدف های کلی

در این درس انتگرالهای ریمان استیلتیس به عنوان تعمیم انتگرال ریمان ارایه میشود.

انتگرالهای ناسره و توابع با تغییر کراندار از دیگر موضوعات این درس می باشد.

دنباله ها وسری های توابع وبررسی خواص آنها وسپس مطالعه سری های فوریه وسری های توانی وتوابع خاص مانند تابع گاما از دیگر موضوعات مورد مطالعه این درس می باشد.

هدف های رفتاری

پس از مطالعه این فصل باید بتوانید

١ . یک افراز برای بازه $[a,b]$ را تعریف نمایید

٢. مجموع های بالایی و پایینی یک تابع f روی $[a,b]$ را تعریف نمایید

٣. انتگرالهای بالایی و پایینی برای یک تابع را روی یک بازه تعریف نمایید

٤. انتگرال ریمان استیلیتیس یک تابع روی یک بازه $[a,b]$ را تعریف نمایید .

ادامه هدف های رفتاری

۵. شرط ریمان را برای یک تابع روی یک بازه تعریف نمایید.

۶.خواص انتگرال ریمان استیلیتیس را بیان و اثبات نمایید.

۷. رابطه انتگرال پذیری ریمان ایتیلیتیس را با مشتق پذیری بیان کنید .

۸. قضایای اساسی برای انتگرال ریمان استیلیتیس را بیان کنید .

۹.انتگرال گیری به روش جز به جز را انجام دهید.

تعریف : هر گاه $[a.b]$ یک بازه باشد مجموعه $P=\{a=x_۰<x_۱<\cdots<x_n=b\}$ را یک افراز $[a.b]$ می نامند. مجموعه افراز های $[a.b]$ را به $P[a.b]$ نمایش می دهیم.

مثال :

$$\{a,b\}\in P[a,b]$$

$$\left\{a,\frac{a+b}{۲},b\right\}\in P[a,b]$$

$$\left\{a,\frac{۳a+b}{۴},\frac{a+b}{۲},\frac{a+۳b}{۴},b\right\}\in P[a,b]$$

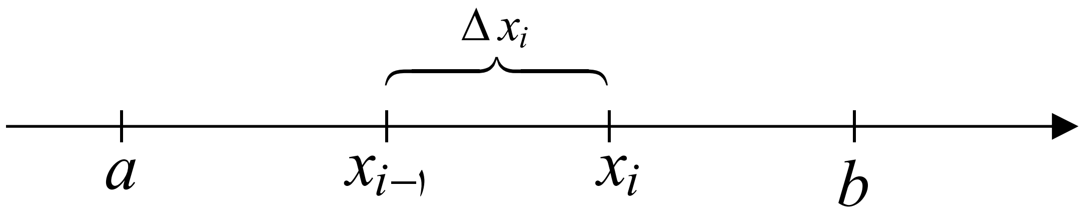
تعریف : اگر $P = \{a, x_1, \dots, x_{n-1}, b\}$ افرازی از $[a,b]$ باشد نماد Δ را

چنین تعریف می کنیم :

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-۱} \quad (i = ۱,۲,\dots,n)$$

و قرار می دهیم

$$\|P\| = \text{Max}\ \{\Delta x_i , i = ۱,۲,\dots,n\}$$



مثلاً در بازه $[\cdot,1]$ ، مجموعه های

$$P_1=\{0,1\}\ ,\ P_2=\{0,\tfrac{1}{2},1\}\ ,\ P_3=\{0,\tfrac{1}{n},\tfrac{1}{n-1},\dots,1\}$$

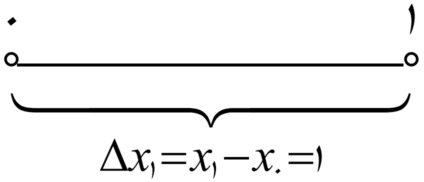
تشکیل افراز می دهند در P_1 داریم : $x_0=0$, $x_1=1$. در نتیجه $\Delta x_1=1$.

در P_2 داریم : $x_0=0, x_1=\frac{1}{2}, x_2=1$. در نتیجه $\Delta x_1=\frac{1}{2}$ ، $\Delta x_2=\frac{1}{2}$

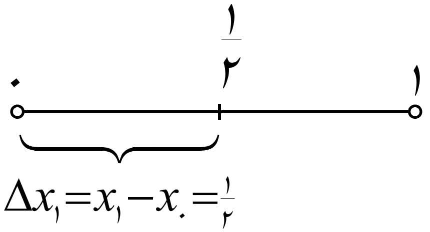
بالاخره در P_3 داریم : $\Delta x_2=\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{n(n-1)}$

حال به تعبیر هندسی این موارد می پردازیم :

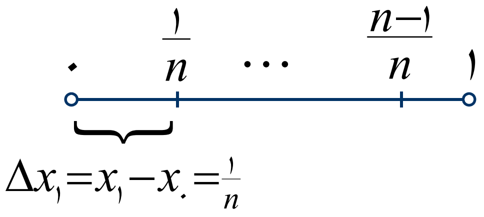
P_1 :



P_2 :



P_3 :



تعریف : هر گاه $P_۲$, $P_۱$ دو افراز برای بازه $[a , b]$ باشد $P_۱$ را ظریف

تر از $P_۲$ گوییم هرگاه

$$P_۲ \subset P_۱$$

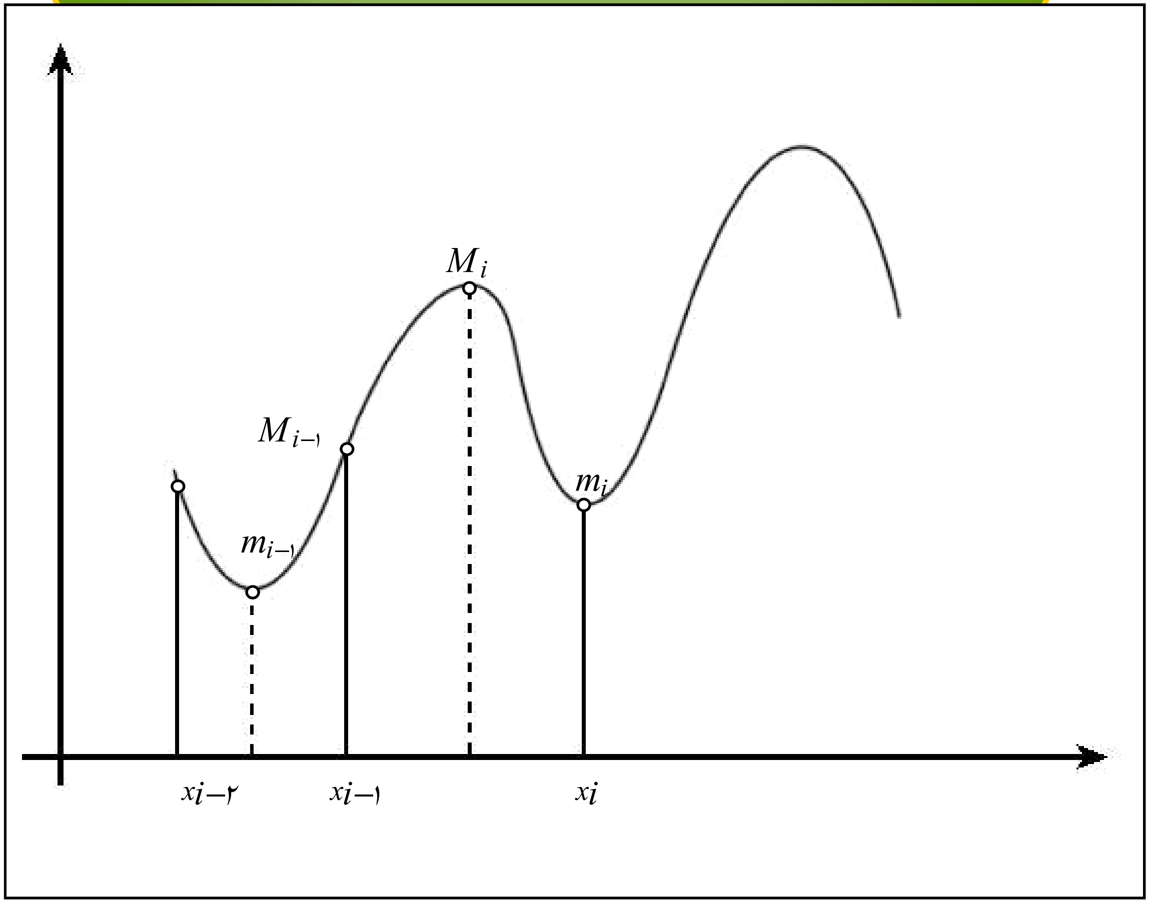
تعریف : تابع f را بر بازه $[a,b]$ کراندار و P را افرازی از $[a,b]$ می گیریم اعداد

$M_i(f)$ و $m_i(f)$ را چنین تعریف می کنیم :

$$M_i = M_i(f) = \sup\{f(x) | x_{i-1} \le x \le x_i\}$$

$$m_i = m_i(f) = \inf\{f(x) | x_{i-1} \le x \le x_i\}$$

دانشگاه پیام نور



تعریف : اگر f بر بازه $[a,b]$ کراندار و α بر $[a,b]$ صعودی و P افرازی از $[a,b]$

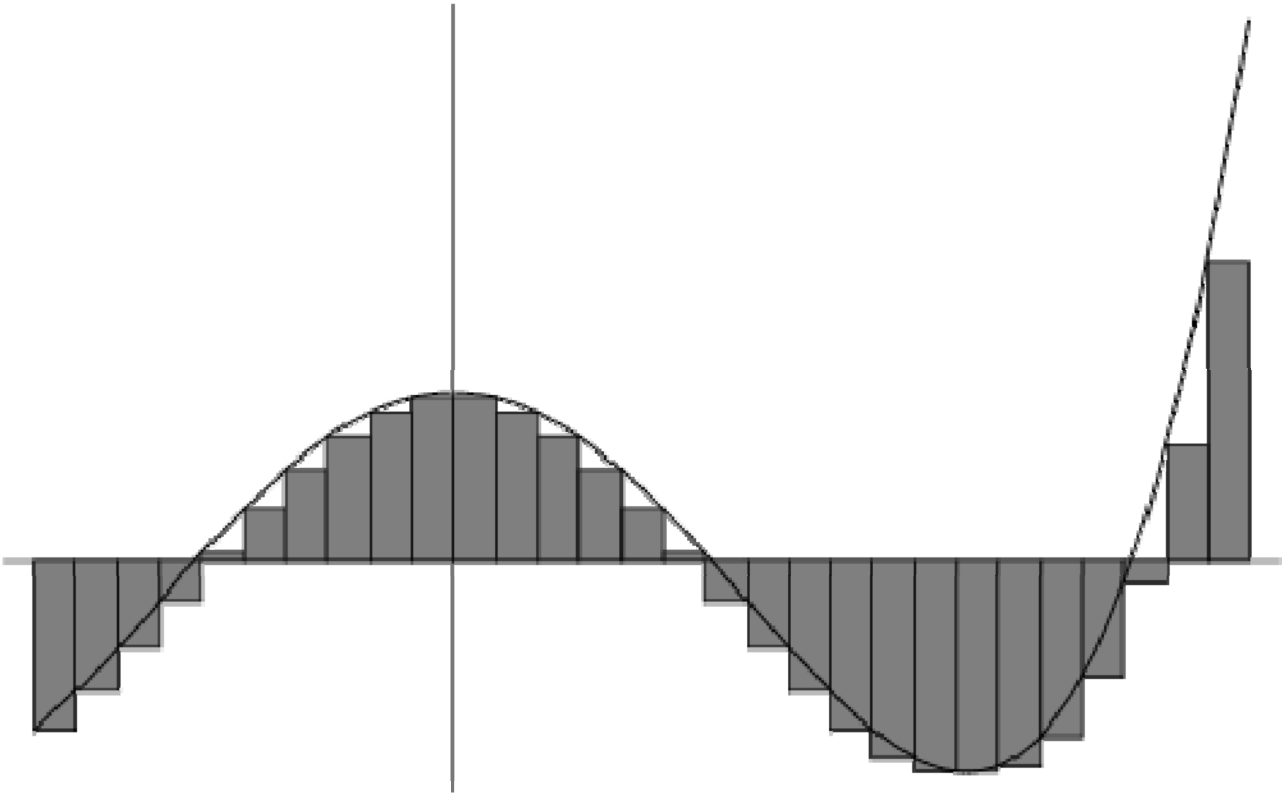
باشد مجموعه های بالا و پایین را به ترتیب با $L(P,f,\alpha)\,,U(P,f,\alpha)$ نمایش

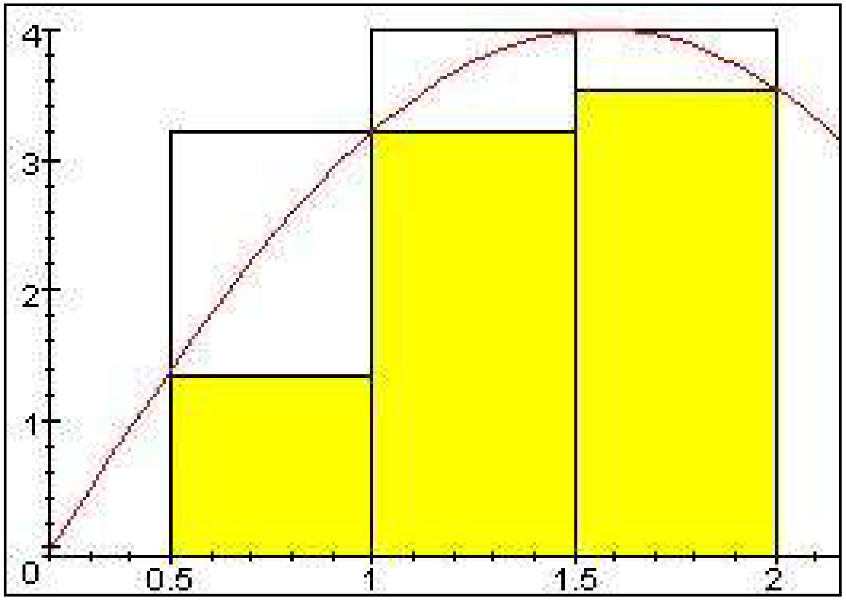
می دهیم و چنین تعریف می کنیم :

$$U(P,f,\alpha)=\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta\alpha_i \quad ,L(P,f,\alpha)=\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta\alpha_i$$

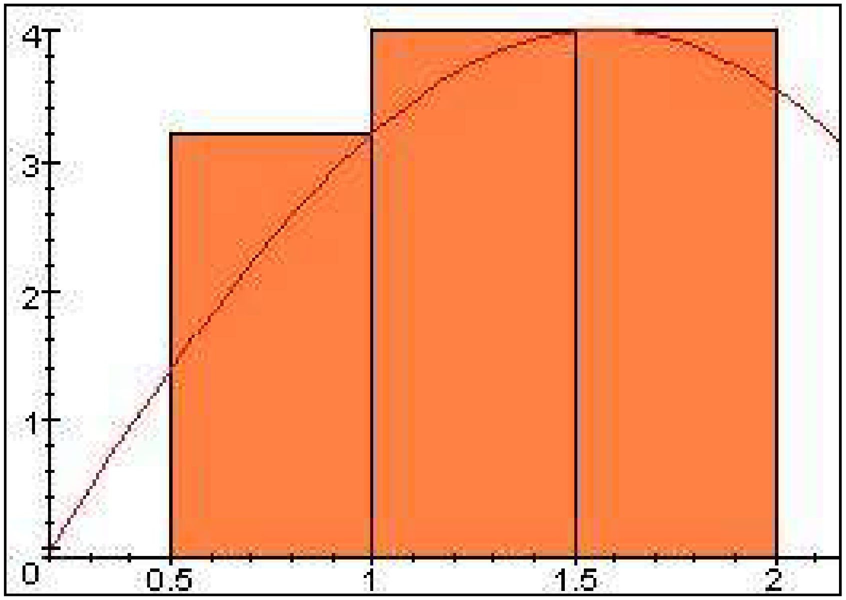
که در اینجا

$$\Delta\alpha_i = \alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})$$

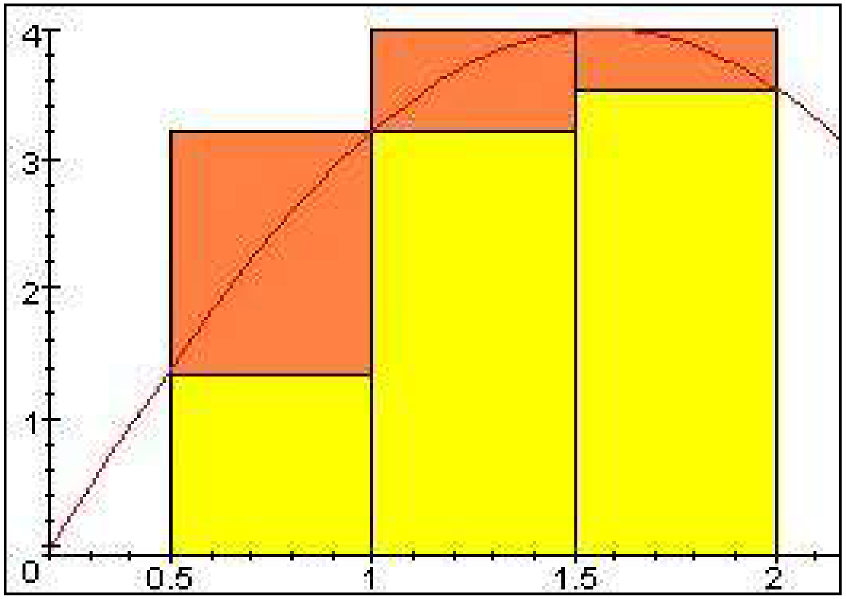




4
3
2
1
0
0.5
1
1.5
2



4
3
2
1
0
0.5
1
1.5
2


4
3
2
1
0
0.5
1
1.5
2

قضیه . الف) اگر P_1 و P_2 دو افراز از $[a,b]$ و $P_1 \subseteq P_2$ (یعنی P_1 ظریف تر از P_2 باشد)،

آن گاه :

$$L(P_1,f,\alpha) \leq L(P_2,f,\alpha) \ , \ U(P_2,f,\alpha) \leq U(P_1,f,\alpha)$$

ب) به ازای هر دو Q,P داریم :

$$L(P,f,\alpha) \leq U(Q,f,\alpha)$$

تعبیر هندسی

الف) یعنی با ظریف‌تر شدن افراز حاصل جمع های بالایی افزایش نمی یابند و حاصل جمع های پایینی کاهش نمی یابند. به عبارتی دیگر حاصل جمع های بالایی از بالا کراندارند و حاصل جمع های پایینی از پایین کراندارند.

سوال : *این کران ها کدامند ؟*

ب) هر حاصل جمع پایینی از هر حاصل جمع بالایی نابیشتر است به عبارت دیگر هر حاصل جمع بالایی یک کران برای مجموعهٔ حاصل جمع های پایینی و هر حاصل جمع پایینی یک کران پایین برای مجموعهٔ حاصل جمع های بالایی است.

سوال : کدام یک از این دو مجموعه سوپریموم و کدام اینفیموم دارد ؟

چه رابطه ای بین آن دو برقرار است ؟

نتیجه : اگر $m = \sup_{a\le x\le b} f(x)$, $M = \sup_{a\le x\le b} f(x)$ آنگاه برای هر افراز P از $[a,b]$

$$m(a(b)-a(a)) \le L(P,f,a) \le U(P,f,a) \le M(a(b)-a(a))$$

تعریف : اگر f بر $[a,b]$ کراندار و α بر $[a,b]$ صعودی باشد آن گاه انتگرال های بالا

و پایین را به ترتیب چنین تعریف می کنیم .

$$\int_a^b fd\alpha = \inf U(P,f,\alpha) \quad , \quad \int_a^b fda = \sup L(P,f,\alpha)$$

f را نسبت به α انتگرال پذیر می نامیم در صورتی که دو انتگرال فوق با هم برابر باشند و در ایـن صورت می نویسیم $f \in R(\alpha)$ و مقدار انتگرال را با نماد $\int_a^b fd\,\alpha$ نشان می دهیم . طبق قرارداد $\int_a^a fd\alpha = 0$ و $\int_b^a fd\alpha = -\int_a^b fd\alpha$ می گیریم.

مثال : تابع f بر $[a,b]$ با ضابطه زیر تعریف شده است :

$$f(x)=\begin{cases} 1 & x\in Q\cap[a,b] \\ -1 & x\notin Q\cap[a,b] \end{cases}$$

و α تابع صعودی دلخواهی است آیا $f\in R(\alpha)$ بر $[a,b]$ ؟چرا ؟

حل . اگر P افرازی دلخواه از $[a,b]$ باشد. می دانیم که در هر بازه اعداد گویا و اصم

وجود دارد. از این رو $M_k(f)=1$ و $m_k(f)=-1$ بنابراین ،

$$U(P,f,\alpha)=\sum_{k=1}^{n}M_k(f)\Delta\alpha_k=\sum_{k=1}^{n}\Delta\alpha_k=\alpha(b)-\alpha(a)$$

در نتیجه ، $\int_a^b f d\alpha = \alpha(b) - \alpha(a)$ و به طریق مشابه

$$L(P, f, \alpha) = \alpha(a) - \alpha(b)$$

در نتیجه، $\int_a^b f d\alpha = \alpha(a) - \alpha(b)$. پس $f \notin R(\alpha)$

مثال : تابع f و α بر فاصله $[۰,۱]$ چنین تعریف شده است :

$$f(x)=\begin{cases} x & x\in Q\cap[۰,۱] \\ -x & x\notin Q\cap[۰,۱] \end{cases}$$

$$\alpha(x)=\begin{cases} ۱ & ۰\le x<\frac{۱}{۲} \\ -۱ & \frac{۱}{۲}\le x\le ۱ \end{cases}$$

آیا $f\in R(\alpha)$ ؟ چرا ؟

حل. چون در هر بازهٔ $[x_{k-1}, x_k]$ نقاط گویا و اصم وجود دارد. از این رو ، به ازای هر

افراز P از $M_k(f) = -x_k$, $m_k(f) = -x_k$. از این رو

$$U(P, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} x_i \Delta\alpha_i = x_k(2-1) = x_k$$

$$L(P, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} -x_i \Delta\alpha_i = -x_k$$

که در آن $x_k \le \frac{۱}{۲} < x_{k-۱}$ از این رو ،

$$\int_{۰}^{-۱} f(x)d\alpha(x) = \inf U(P,f) = \inf x_k = \frac{۱}{۲}$$

$$\int_{۰}^{-۱} f(x)d\alpha(x) = \sup L(P,f) = \sup(-x_k) = -\frac{۱}{۲}$$

پس $f \in R(\alpha)$.

مثال : تابع f بر بازهٔ $[0,1]$ به صورت $f(x)=x$ تعریف شده است. به کمک تعریف

نشان دهید این تابع به مفهوم ریمان انتگرال پذیز است. انتگرال آن را بیابید.

حل. فرض کنید $P_n=\left\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\frac{3}{n},\ldots,\frac{n-1}{n},1\right\}$، در این صورت

$$L(P_n,f)=\sum_{k=1}^{n}m_k(f)\Delta x=\sum_{k=1}^{n}\frac{k-1}{n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{(n-1)n}{2}$$

$$U(P_n,f)=\sum_{k=1}^{n}M_k(f)\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

در نتیجه ،

$$\frac{(n-1)n}{2n^2} \leq \int_0^1 f(x)dx \leq \int_0^1 f(x)dx \leq \frac{n(n+1)}{2n^2}$$

رابطه فوق به ازای هر n برقرار است. چون حدود طرفین برابر $\frac{1}{2}$ است. پس

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$$

مثال : تابع f بر $[0,1]$ با ضابطه زیر تعریف شده است. آیا $f \in R$ ؟ چرا؟

$$f(x)=\begin{cases} x & x\in Q \\ -x & x\notin Q \end{cases}$$

حل. اگر $g(x)=x$ بگیریم، داریم :

$$U(P,f)=\sum_{k=1}^{n} M_k(f)\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n} M_k(g)\Delta x_k=U(P,g)$$

در نتیجه با توجه به مثال قبل چون $\int_0^1 g(x)dx=\frac{1}{2}$. بنابراین

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1 g(x)dx=\frac{1}{2}$$

به طریق مشابه اگر $h(x)=-x$ بگیریم، خواهیم داشت :

$$L(P,f)=\sum_{K=1}^{n} m_k(f)\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n} m_k(h)\Delta x_k=L(P,h)$$

از این رو چون با توجه به مثال قبل h نیز انتگرال پذیر است و $\int_0^1 h(x)dx=-\frac{1}{2}$

بنابراین

$$\int_{0}^{1} f(x)dx = \int_{0}^{1} h(x)dx = \int_{0}^{1} h(x)dx = -\frac{1}{2}$$

پس $f \notin R$.

مثال : تابع $f(x)=x^۲$ بر $[۰,۱]$ تعریف شده است. انتگرال f را بیابید (به مفهوم ریمان)

حل. همانند (ج) به ازای افراز P_n داریم :

$$U(P_n, f) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{2} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n^{3}} \sum_{h=1}^{n} k^{2} = \frac{1}{n^{3}} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$L(P_n, f) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^{2} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n^{3}} \sum_{k=1}^{n}(k-1)^{3} = \frac{1}{n^{3}} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

در نتیجه ،

$$\frac{(n-۱)n(۲-۱)}{۶n^{۳}} \leq \int_{۰}^{۱} f(x)dx \leq \int_{۰}^{۱} f(x)dx \leq \frac{n(n+۱)(n+۲)}{۶n^{۳}}$$

از این رو ،

$$\int_{0}^{1} f(x)dx = \int_{0}^{1} f(x)dx = \frac{1}{3}$$

اولین سؤالی که بعد از این مثال ها مطرح می شود این است که کدام توابع هستند که انتگرال پذیرند. ذیلاً دسته ای از توابع را مشخص می کنیم که نسبت به هر تابع صعودی انتگرال پذیرند. در واقع توابع پیوسته انتگرال پذیرند. اما قبل از اثبات این موضوع به قضیه ای که ذیلاً می آوریم نیاز داریم.

قضیه (شرط ریمان). شرط لازم و کافی برای آن که $f \in R(\alpha)$ آن است که

$$\forall \varepsilon \exists P_\varepsilon \forall P \left(P_\varepsilon \subseteq P \Rightarrow U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < \varepsilon \right)$$

شرط اخیر را شرط ریمان می نامند .

لم . اگر تابع f بر بازهٔ $[a,b]$ کراندار باشد، آنگاه

$$M_i - m_i = \sup\{|f(x) - f(y)| \mid x_{i-1} \leq x, y \leq x_i\}$$

قضیه . اگر تابع f بر بازهٔ $[a,b]$ پیوسته و α بر $[a,b]$ صعودی باشد ، آن گاه $f \in R(\alpha)$.

قضیه . احکام زیر معادلند :

الف) $f \in R(\alpha)$ ؛

ب)

$$\exists A \forall \varepsilon \exists P_\varepsilon \forall P \forall t_k \left(P\varepsilon \subseteq P, t_k \in \left(x_{k-1}, x_k \right) \right.$$
$$\left. \Rightarrow \left| S(P, f, \alpha) - A \right| < \varepsilon \right)$$

دانشگاه پیام نور

ج)

$$\forall \varepsilon \exists P_\varepsilon \forall P u_i, v_i \left(P_\varepsilon \subseteq P, u_i, v_i \in [x_{i-1}, x_i]\right.$$

$$\left.\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \left| f(u_i) - f(v_i) \right| \Delta\alpha_i < \varepsilon \right)$$

د)

$$\forall \varepsilon \exists P_\varepsilon \forall P' \left(P_\varepsilon \subseteq P, P' \Rightarrow \left| S(P, f, \alpha) - S(P', f, \alpha) \right| < \varepsilon \right)$$

قضیه : اگر f بر $[a,b]$ صعودی و α بر $[a,b]$ صعودی و پیوسته باشد، آن‌گاه $f \in R(\alpha)$

قضیه : اگر توابع f و α در نقطه $x_{\circ}$ از بازهٔ $[a,b]$ از راست ناپیوسته باشند ، آن

گاه $f \notin R(\alpha)$

قضیه : فرض کنید تابع کراندار f به غیر از تعداد متناهی نقطه از نقاط داخلی

بازهٔ $[a,b]$ پیوسته و تابع α در نقاط ناپیوستگی f پیوسته باشد در این صورت

$$f \in R(\alpha)$$

مثال : تابع f با ضابطهٔ زیر تعریف شده است .

$$f(x)=\begin{cases} 0 & (x \notin Q) \\ \frac{1}{n} & \left(x=\frac{m}{n},(m,n)=1\right) \end{cases}$$

در آنالیز دیده اید که تابع f در نقاط اصم پیوسته ولی در نقاط گویا ناپیوسته است .

در این مجموعه نشان می دهیم که تابع فوق دارای انتگرال های ریمان بر

بازهٔ $[a,b]$ است .

حل. فرض کنید $\varepsilon > 0$ عدد طبیعی N را طوری انتخاب می کنیم که

$$\frac{2}{N} < \varepsilon$$

فرض کنید

$$X = \left\{ \frac{r}{s} \,\middle|\, 1 \leq r < s < N, (r,s) = 1 \right\}$$

$$P = \left\{ 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}, 1 \right\}$$

که در آن n عدد طبیعی دلخواه است. اگر $n \geq N$ ، آن گاه $P \cap X = \{۰,۱\}$

مجموعه های B, A را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$A = \left\{ i \,\middle|\, \left[\frac{i-۱}{n}, \frac{i}{n}\right] \cap X = \varphi \right\}$$ و $$B = \left\{ i \,\middle|\, \left[\frac{i-۱}{n}, \frac{i}{n}\right] \cap X \neq \varphi \right\}$$

اگر $A \ni i$ ، آن گاه اعداد گویای بازهٔ $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ دارای مخرج بزرگتر یا مساوی N

است . از این رو ، $M_i \leq \frac{1}{N} < \frac{2}{\varepsilon}$ واضح است که همواره $M_i \leq 1$ همچنین

$$\sum_{i \in B} \Delta x_i \leq m \times \frac{1}{n} = \frac{m}{n} < \frac{2}{\varepsilon}$$

که در آن m تعداد اعضای X است ، و $n > \frac{2m}{\varepsilon}$. در نتیجه ،

$$U(P,f)=\sum_{i=1}^{n} M_i\,\Delta x_i = \sum_{i\in A} M_i\,\Delta x_i + \sum_{i\in B} M_i\,\Delta x_i$$

$$< \frac{\varepsilon}{2}\sum_{i\in A}\Delta x_i + \sum_{i\in B} 1\times\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

از این رو ، $\overline{\int_0^1} f(x)dx = 0$ ، پس $f \in R$ و $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

محک لبگ در مورد انتگرال پذیری ریمان

تعریف. گوییم مجموعهٔ $S \subseteq R$ با اندازهٔ صفر است در صورتی که به ازای هر $\varepsilon > 0$

خانواده‌ای شمارا از بازه‌های باز مانند $\{(a_k, b_k)\}$ وجود دارد به طوری که

$$\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k) < \varepsilon \quad \text{و} \quad S \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k, b_k)$$

بـدیهی است کـه هـر مـجموعه یکـانی بـا مجموعه‌ای بـا انـدازه صـفر است

زیـرا $\{a\} \subseteq (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. از این رو مجموعه‌های متناهی با اندازهٔ صفر

است. ذیلاً ثابت می کنیم هر مجموعهٔ شمارش پذیر با اندازهٔ صفر است.

قضیه. اگر E شمارش پذیر باشد ، آن گاه E با اندازهٔ صفر است .

برهان. فرض کنید $E=\{x_1, x_2, \dots\}$ داریم :

$$E\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(x_n-\frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, x_n+\frac{\varepsilon}{2^{n+2}}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

همانند قضیهٔ فوق می توان نشان داد که اگر E_n با اندازه صفر باشد، آن گاه $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ نیز با اندازه صفر است .

تعریف : فرض کنید f بر بازهٔ (a,b) کراندار باشد. اگر $T\subseteq(a,b)$ عدد

$$\Omega_f(T)=\sup\{f(x)-f(y)\ |\ x,y\in T\}$$

را نوسان تابع f بر T می نامیم. نوسان تابع f را در نقطهٔ x به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$\omega_f(x)=\lim_{h\to 0^+}\Omega_f((x-h,x+h)\cap(a,b))$$

اگر $T_1\subseteq T_2$ ، آن گاه $\Omega_f(T_1)\le\Omega_f(T_2)$ ، در نتیجه ، حد بالا موجود است .

قضیه . تابع f بر بازهٔ (a,b) تعریف شده است این تابع در نقطهٔ x پیوسته است

اگر و فقط اگر $\omega_f(x)=0$.

برهان. فرض کنید تابع f در x پیوسته است در نتیجه ،

$$\forall \varepsilon \exists h \forall y \left(|y-x| < h \Rightarrow |f(y)-f(x)| < \varepsilon \right)$$

اگر $y_1 , y_2 \in (x-h, x+h)$ ، آن گاه

$$|f(y_1) = f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \ , \ |f(y_2) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

از این رو ، $|f(y_1) - f(y_2)|$.

در نتیجه ، $\Omega_f((x-h, x+h) \cap (a,b))$ ، پس $\omega_f(x) = 0$.

قضیه . فرض کنید تابع f بر بازهٔ $[a,b]$ کراندار است و به ازای هر $\varepsilon > ۰$ ، همواره $\omega_f(x) < \varepsilon$. آن گاه $\delta > ۰$ی (وابسته به ε) وجود دارد به طوری که به ازای هر زیر بازهٔ $T \subseteq [a,b]$ اگر $L(T) < \delta$، آن گاه $\Omega_f(T) < \varepsilon$. (منظور از $L(T)$ طول بازهٔ T است) .

برهان. بنا به خاصیت اینفیمم، δ_x ی وجود دارد به طوری که

$$\Omega_f\left(\left(x-\delta_f, x+\delta_f\right)\cap[a,b]\right)$$

چون، $[a,b]\subseteq\bigcup_x\left(x-\delta_f, x+\delta_f\right)$ و $[a,b]$ فشرده است پس

$$[a,b]\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}\left(x_i-\tfrac{1}{2}\delta_{x_i},\,x_i+\tfrac{1}{2}\delta_{x_i}\right)$$

فرض کنید $\delta=\min\left\{\tfrac{1}{2}\delta_{x_1},\tfrac{1}{2}\delta_{x_2},\ldots,\tfrac{1}{2}\delta_{x_n}\right\}$. اگر $L(T)<\delta$ ،

آنگاه $\Omega_f(T) <$.

قضیه : فرض کنید تابع f بر بازهٔ $[a,b]$ کراندار است . به ازای هر $\varepsilon > ۰$

مجموعهٔ E_E به صورت زیر تعریف می شود

$$E_E = \left\{ x \,\middle|\, x \in [\,a,b\,],\, \omega_f\,(x) \geq \varepsilon \right\}$$

در این صورت E_E بسته است .

برهان. فرض کنید $x \in E'_E$. اگر $x \notin E_E$ ، آن گاه $\omega_f(x) < \varepsilon$، از این

رو $\varepsilon > 0$ ی وجود دارد به طوری که

$$\Omega_f\left(\left(x-\delta, x+\delta\right) \cap [a,b]\right) < \varepsilon$$

از این رو هیچ نقطهٔ $\left(x-\delta, x+\delta\right)$ به E_E تعلق ندارد ، که با فرض $x \in E'_E$

متناقض است . پس $x \in E_E$

قضیه (محک لبگ برای انتگرال پذیری ریمان) . فرض کنید تابع f بر بازهٔ $[a,b]$ کراندار و D مجموعهٔ نقاط ناپیوستگی f بر $[a,b]$ باشد. $f \in R$ بر $[a,b]$ اگر و فقط اگر D با اندازهٔ صفر باشد

خواص انتگرال

انتگرال ریمان استیلتیس دارای خواص زیادی است که ذیلاً اهم آن خواص را می آوریم.

قضیه : احکام زیر برقرار است (همهٔ انتگرال ها در بازهٔ $[a,b]$ تعریف شده اند مگر آنکه خلاف آن تصریح شود)

الف) اگر $f \in R(\alpha)$ و $c \in R$ ، آن گاه $cf \in R(\alpha)$ و $\int_a^b c\,f\,d\alpha = c\int_a^b f\,d\alpha$

اگر $c \geq 0$ ، آن گاه

$$\int_a^b fd(c\alpha) = c\int_a^b fd\alpha, f \in R(\alpha)$$

ب) اگر $f, g \in R(\alpha)$ ، آن گاه $f + g \in R(\alpha)$ و

$$\int_a^b (f+g)d\alpha = \int_a^b fd\alpha + \int_a^b gd\alpha$$

ج) اگر $f, g \in R(\alpha)$ و $f \leq g$ ، آن گاه $\int_a^b g d\alpha \leq \int_a^b f d\alpha$.

د) اگر $f \in R(\alpha)$ و $f \in R(\beta)$ ، آن گاه $f \in R(\alpha+\beta)$ و

$$\int_a^b fd(\alpha+\beta) = \int_a^b fd\alpha + \int_a^b fd\beta$$

قضیه : اگر $f \in R(\alpha)$ بر $[a,b]$ ، آن گاه $f \in R(\alpha)$ بر $[a,c]$ و $[c,b]$ و

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^c f d\alpha + \int_c^b f d\alpha$$

قضیه . فرض کنید $f \in R(\alpha)$ بر $[a,b]$، $m \le f \le M$ و تابع φ بر $[m,M]$

پیوسته است . آن گاه تابع $h = \varphi o f$ بر $[a,b]$ نسبت به α دارای انتگرال است.

نتیجه . ۱) اگر $f \in R(\alpha)$ ، آن گاه $|f| \in R(\alpha), \left|\int_a^b f d\alpha\right| \le \int_a^b |f| d\alpha$

۲) اگر $f, g \in R(\alpha)$ ، آن گاه $fg \in R(\alpha)$.

برهان. فرض کنید $\varphi(t)=|t|$ پس $\varphi o f=|f|\in R(\alpha)$. عددی

حقیقی مانند c وجود دارد به طوری که $c\int_a^b f d\alpha \geq ۰$ $(c=\pm ۱)$. در این

صورت ،

$$\left|\int_a^b f d\alpha\right| = c\int_a^b f d\alpha = \int_a^b cf d\alpha \leq \int_a^b |f| d\alpha$$

۲) با فرض $\varphi(t)=t^{۲}$ و ۳.٤.۱ نتیجه می شود که $(f+g)^{۲}\in R(\alpha)$

$$(f-g)^{۲}\in R(\alpha)$$

پس

$$fv=\frac{۱}{۴}\left((f+g)^{۲}-(f-g)^{۲}\right)\in R(\alpha)$$

قضیه : فرض کنید α' موجود است و $\alpha' \in R$. آنگاه $f \in R(\alpha)$. اگر و

فقط اگر $f\alpha' \in R$

قضیه (اول مقدار میانگین) . اگر f بر $[a,b]$ پیوسته باشد ، آن گاه نقطه‌ای

مانند c بر $[a,b]$ وجود دارد به طوری که

$$\int_a^b f d\alpha = f(c)\left(\alpha(b)-\alpha(a)\right)$$

برهان. فرض کنید

$$m=\inf\{f(x)|\,a\le x\le b\}\ ,\ M=\sup\{f(x)|\,a\le x\le b\}$$

بنابه قضیهٔ ۱.٤.۱ داریم :

$$m(\alpha(b)-\alpha(a))\le\int_a^b f d\alpha\le M(\alpha(b)-\alpha(a))$$

اگر $\alpha(b) = \alpha(a)$ ، آن گاه حکم بدیهی است ، در غیر این صورت بنا به

پیوستگی f، نتیجه می شود عضوی مانند c در بازهٔ $[a,b]$ وجود دارد به طوری

که

$$\frac{1}{\alpha(b)-\alpha(a)}\int_a^b f d\alpha = f(c)$$

ذیلاً قضیهٔ فوق را به حالتی که f پیوسته نیست تعمیم می دهیم .

قضیه . فرض کنید $f \in R(\alpha)$ ، آن گاه عددی مانند λ وجود

دارد به طوری که $m \leq \lambda \leq M$ و $\int_a^b f d\alpha = \lambda(\alpha(b) - \alpha(a))$ که

در آن M و m به ترتیب سوپریمم و اینفیمم تابع f در بازهٔ $[a, b]$

است .

(قضیهٔ مشتق گیری). فرض کنید $f \in R(\alpha)$ و

$$F(x) = \int_a^x f d\alpha \qquad (a \le x \le b)$$

آن گاه

الف) اگر α در x_0 پیوسته باشد ، آن گاه F در x_0 پیوسته است .

ب) اگر f در $x_\circ$ پیوسته و α در $x_\circ$ مشتق پذیر باشد ، آن گاه F

در $x_\circ$ مشتق پذیر است و

$$F'(x_\circ) = f(x_\circ)\alpha'(x_\circ)$$

قضیهٔ اول اساسی حسابان

نتیجه : اگر $f \in R$ و در نقطهٔ $x_\circ$ پیوسته باشد و

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

آن گاه F در $x_\circ$ مشتق پذیر است و

$$F'(x_\circ)=f(x_\circ)$$

دومین قضیهٔ اساسی حسابان

اگر $f \in R$ و تابعی مانند F باشد به طوری که $F' = f$ ، آن گاه

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

انتگرال گیری به روش جزء به جزء

قضیه. فرض کنید F و G بر $[a,b]$ مشتق پذیر ،

$$G' = g \in R \ , \ F' = f \in R$$

آن گاه

$$\int_a^b F(x)g(x)dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(x)G(x)dx$$

قضیه (صورت دیگر انتگرال گیری به روش جزء به جزء). اگر f و α هر دو

صعودی باشند و $f \in R(\alpha)$، آن گاه $\alpha \in R(f)$ و

$$\int_a^b f d\alpha + \int_a^b \alpha df = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a)$$

قضیه (دوم مقدار میانگین) . اگر f صعودی و αعلاوه بر صعودی بودن پیوسته

هم باشد آن گاه نقطه ای مانندc در بازهٔ $[a,b]$ وجود دارد به طوری که

$$\int_a^b f d\alpha = f(a)\int_a^c d\alpha + f(b)\int_a^d d\alpha$$

نتیجه . اگر f صعودی و g پیوسته و نامنفی باشد ، آن گاه نقطه‌ای مانند c در

بازۀ $[a,b]$ وجود دارد به طوری که

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^c g(x)dx + f(b)\int_a^b g(x)dx$$

نتیجه . اگر در F تابع نامنفی هم باشد آن گاه نقطه‌ای مانند c در بازهٔ $[a,b]$

وجود دارد به طوری که

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(b)\int_c^b g(x)dx$$

انتگرال گیری نسبت به توابع پله‌ای

تعریف. تابع پله‌ای واحد به صورت زیر تعریف می شود :

$$I(x)=\begin{cases} ۰ & x\leq ۰ \\ ۱ & x>۰ \end{cases}$$

قضیه. فرض کنید $a<c<b$ و f در c پیوسته باشد و $\alpha(x)=I(x-c)$.

آن گاه $f\in R(\alpha)$ بر $[a,b]$ و $\int_a^b f d\alpha = f(c)$.

قضیه. فرض کنید $a_n \geq 0$ و $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشند، $\{c_n\}$ دنباله‌ای از اعضای متمایز $[a,b]$ باشد و $\alpha(x)=\sum_{n-1}^{\infty} a_n I(x-c_n)$. اگر f بر $[a,b]$ پیوسته باشد آن گاه $f \in R(\alpha)$ و

$$\int_a^b f d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f(c_n)$$

قضیه. اگر $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ دنباله‌ای متناهی از اعضای $[a,b]$ باشد، آن گاه $\sum_{k=1}^{n} a_k$

را می توان به صورت یک انتگرال ریمان ـ استیلتیس نوشت .

برهان. تعریف می کنیم:

$$f(0)=0 \qquad , \qquad fx=a_k \qquad , k-1<x\leq k$$

بنا به بحث برهان قضیهٔ داریم :

$$\int_0^n f(x)\,d[x]=\sum_{k=1}^{n} f(k)\times 1=\sum_{k=1}^{n} a_k$$

که در آن $[x]$ به معنی جزء صحیح x است .

مثال :فرض کنید $\{r_n\}$ دنبالهٔ اعداد گویای $[0,1]$ باشد و $\alpha(x)=\sum_{r_n<x}\frac{1}{2^n}$.

اگر f بر $[0,1]$ پیوسته باشد . $\int_0^1 fd\alpha$ را بیابید .

مثال : اگر $f \in R$ نشان دهید :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=۱}^{n} f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right)=\int_a^b f(x)\,dx$$

نتیجه بگیرید

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=۱}^{n}\frac{n}{k^{۲}+n^{۲}}=\frac{\pi}{۴} \quad , \quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k+۱}^{n}\frac{۱}{\sqrt{n^{۲}+k^{۲}}}=\log\left(۱+\sqrt{۲}\right)$$

مثال : اگر f بر $[a,b]$ پیوسته و مثبت باشد و $M=\sup\{f(x)\,|\,a\le x\le b\}$

نشان دهید

$$M=\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f^n(x)dx\right)^{\frac{1}{n}}$$

مثال : (نامساوی هلدر) فرض کنید p و q اعداد حقیقی مثبتی باشند به طوری

که $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ابتدا نشان دهید که اگر b,a نامنفی باشند آن گاه

$$ab \le \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$$

و تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که $a^p=b^q$ ، نتیجه بگیرید که

اگر $|f|^p \in R(\alpha)\,,\,|g|^q \in R(\alpha)$ آن گاه $fg \in R(\alpha)$ و

$$\left|\int_a^b f d\alpha\right| \le \left\{\int_a^b |f|^p d\alpha\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\int_a^b |g|^q d\alpha\right\}^{\frac{1}{q}}$$

مثال : الف) ابتدا نشان دهید که اگر f ، g و h بر $[a,b]$ نسبت به α انتگرال پذیر باشد ، آن گاه

$$\|f-h\|_{۲} \leq \|f-g\|_{۲} + \|g-h\|_{۲}$$

ب) اگر $f \in R(\alpha)$ بر $[a,b]$ و $\varepsilon > ۰$ ، نشان دهید تابع پیوسته‌ای مانند φ وجود دارد که $\|f-\varphi\|_{۲} < \varepsilon$ (توجه کنید که $\|f\|_{۲} = \left(\int_a^b |f|^{۲} d\alpha\right)^{\frac{۱}{۲}}$) .

تغییر متغیر

تغییر متغییردر انتگرال ها بـه ویـژه در انتگرال هـای ریـمان ابـزاری تـوانا بـرای محاسبه انتگرال ها است . از ان رو قضیه و نتیجهٔ زیر را می آوریم :

قضیه. فرض کنید $f \in R(\alpha)$ و تابع φ بر $[c,d]$ به روی $[a,b]$ پیوسته و اکیداً صعودی است اگر $h = fo\varphi$ و $\beta = \alpha o\varphi$ بر $[c,d]$ تعریف شوند آن گاه $h \in R(\beta)$ بر $[c,d]$ و $\int_c^d h d\beta = \int_a^b f d\alpha$.

مشتق گیری از انتگرال

قبلاً قضیهٔ اساسی حسابان را ثابت کردیم و نشان دادیم که اگر تابع f در نقطهٔ x پیوسته باشد و $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ آن گاه $F'(x)$ موجود است و $F'(x)=f(x)$. کنون این سؤال پیش می‌آید که اگر f تابعی از دو متغیر x , t باشد و یا به جای x و یا حتی a توابعی از x قرار گیرد چگونه می توان مشتق گرفت .

قضیه. فرض کنید $R=[a,b]\times[c,d]$ وتابع f بر R تعریف شده و $D_2 f$ (مشتق نسبت f به t) بر R پیوسته است . تابع F بر $[c,d]$ چنین تعریف شده است .

$$F(x)=\int_a^b f(t,x)\,d\alpha(t) \qquad (c\le x\le d)$$

در این صورت F' بر $[c,d]$ موجود است و داریم

$$F'(x)=\int_a^b D_2 f(x,t)\,d\alpha(t)$$

نتیجه. اگر R $g \in$ بر $[a,b]$, $\alpha(x)=\int_a^x g(t)\,dt$ آن گاه

$$F'(x)=\int_a^b D_۲ f(x,t)\,g'(t)\,dt$$

قضیه. فرض کنید $R=[a,b]\times[c,d]$ و تابع f و $D_2 f$ بر $[c,d]$ پیوسته است. فرض کنید q, p دو تابع مشتق پذیر بر $[c,d]$ باشند به طوری که به ازای x هر $[a,b]$ از $a\le q(x)\le b$, $a\le p(x)\le b$ داریم :

در این صورت F' موجود است و .

$$F'(x)=\int_{p(x)}^{q(x)} D_2 f(x,t)dt+f(q(x),t)q'(x)-f(p(x),t)p'(x)$$

فصل دوم

انتگرال های ناسره

پس از مطالعه این فصل باید بتوانید

۱.انتگرالهای ناسره را تعریف نمایید.

۲ . انواع انتگرالهای ناسره را تعریف و برای آنها مثال بیاورید.

۳. همگرایی انتگرال ناسره را تعریف نمایید.

٤. شرط لازم و کافی برای وجود انتگرال ناسره را بیان کنید.

٥. آزمون انتگرال برای همگرایی سری های نا منفی را بیان کنید .

اگر

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$$

را در نظر بگیریم و بدون توجه به بی کران بودن

تابع $f(x) = \frac{1}{x^2}$ محاسبه کنیم در می یابیم که

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1} = -2$$

مسلماً با تکیه بر خواص انتگرال ریمان رابطهٔ فوق نمی تواند برقرار باشد . یعنی طرف راست منفی است در حالی که طرف چپ انتگرال ، یک تابع نامنفی است .

مثال فوق نشان می دهد که نیاز به تعریف این نوع انتگرال ها داریم که منجر به تناقض نشویم. این انتگرال ها را می توان به صورت انتگرال های ناسرهٔ نوع اول و نوع دوم مورد بررسی قرار داد .

انتگرال های ناسره نوع اول

تعریف (انتگرال های ناسرۀ نوع اول). انتگرال های ناسرۀ نوع اول از بسیاری جهات شبیه سری های نا متناهی است. اگر به ازای هر عدد حقیقی T تابع f بر $[a,T]$ دارای انتگرال ریمان و حد زیر موجود باشد

$$\lim_{T\to\infty}\int_a^T f(x)dx$$

گوییم

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx \left(= \int_a^{\infty} f \right)$$

موجود یا همگراست و در واقع داریم :

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{T\to+\infty} \int_a^{T} f(x)\,dx$$

در حالتی که $\int_a^{\infty} |f|$ موجود باشد گوییم $\int_a^{\infty} f$ مطلقاً همگراست .

مثال . اگر $f(x)=\frac{1}{x^p}$ و $a>0$ ، آن گاه

$$\int_a^T \frac{dx}{x^p} = -\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Bigg|_a^T = \frac{a^{-p+1}}{-p+1} - \frac{T^{-p+1}}{-p+1}$$

در صورتی که $p>1$ آن گاه $-p+1<0$ و بنابراین ، $\frac{T^{-p+1}}{-p+1}$ وقتی که $T \to +\infty$.

از این رو داریم :

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = -\frac{a^{p+1}}{p+1}$$

مثال : $\int_{0}^{T} e^{-x}dx = 1 - e^{-T} \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} 1$

به طوری که اشاره شد این انتگرال ها شبیه سری ها هستند. در

واقع $\int_a^{\infty} f(x)dx$ متناظر سری $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ و $\int_a^{T} f(x)dx$ متناظر حاصل جمع

جزیی $\sum_{k=m}^{n} a_k$ است. این شباهت ها ، شباهت هایی در اثبات همگرایی انتگرال

ها و سری ها را ایجاب می کند.

نتیجه : اگر $\int_a^{\infty} f$, $\int_a^{\infty} g$ موجود باشند ، آن گاه $\int_a^{\infty}(f \pm g)$ نیز موجود و برابر مجموع (تفاضل) دو انتگرال قبلی است .

به طریق مشابه می توان انتگرال $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ $\left(\int_{-\infty}^{b} f \right)$ را به صورت زیر تعریف کرد :

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{T \to -\infty} \int_{T}^{b} f(x)dx$$

مشروط به این که f بر هر بازهٔ $[T, d]$ دارای انتگرال ریمان باشد .

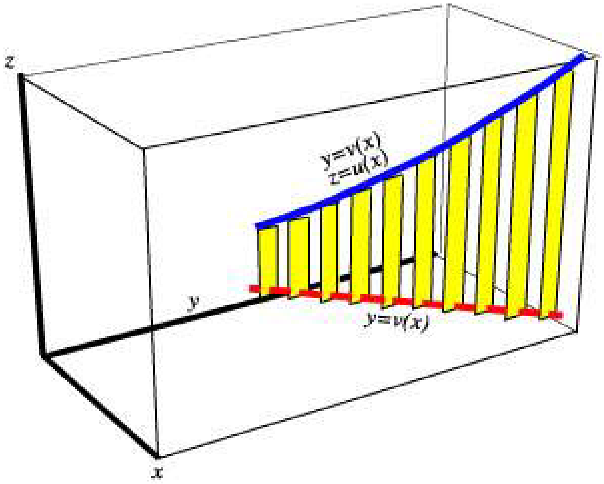
قضیه. فرض کنید به ازای هر عدد حقیقی T تابع f بر بازهٔ $[a,T]$ انتگرال پذیر است . شرط لازم و کافی برای آن که $\int_a^\infty f$ موجود باشد آن است که

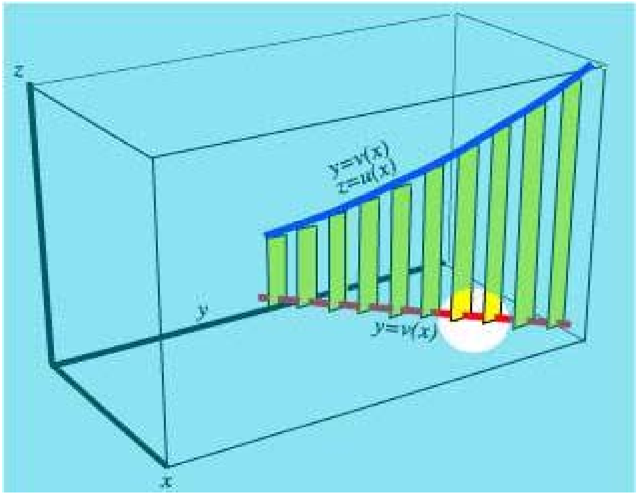
$$\forall \varepsilon \, \exists T_0 \, \forall T_2, T_1 \left(T_2 \geq T_1 \geq T_0 \Rightarrow \left| \int_{T_1}^{T_2} f \right| < \varepsilon \right)$$

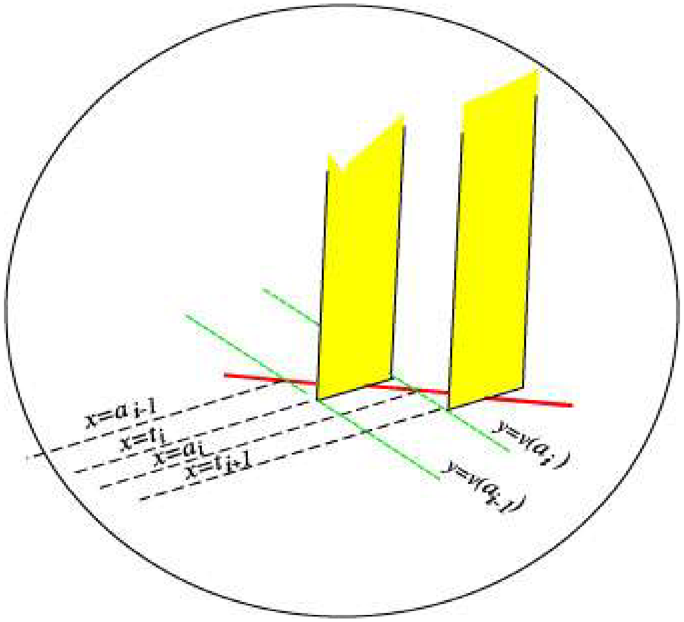
(شرط کوشی)

نتیجه. اگر g یک تابع نا منفی باشد به طوری که همواره $|f| \leq g$ و $\int_a^\infty g$ موجود باشد، آن گاه $\int_a^\infty f$ موجود است .

قضیه. اگر $f:[1,\infty)\to[0,\infty)$ نزولی باشد، آن گاه $\int_1^\infty f$ همگراست اگر و فقط اگر $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ همگرا باشد. (این قضیه به «آزمون انتگرال» در مورد سری های نامنفی مشهور است)

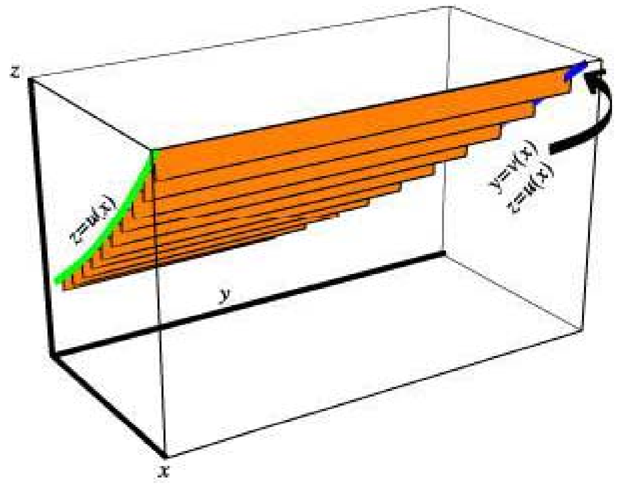

z
y=v(x)
z=u(x)
y
y=v(x)
x

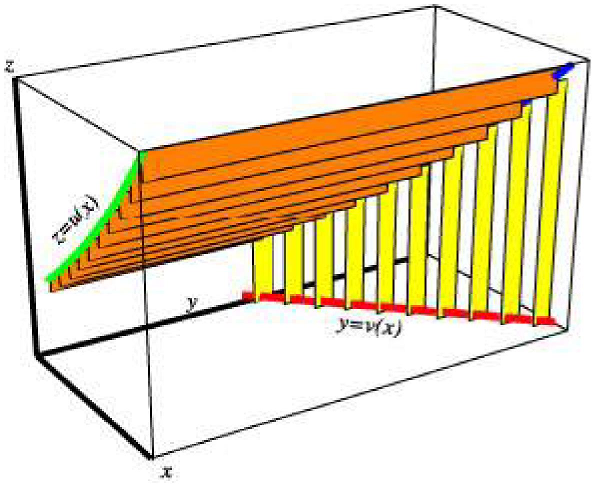

z
y=v(x)
z=u(x)
y
y=v(x)
x

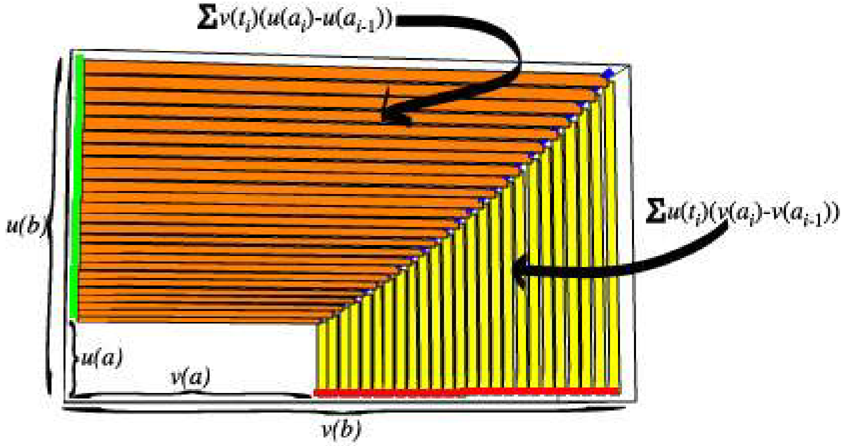


x=a i-1
x=t i
x=a i
x=t i+1
y=v(a i)
y=v(a i-1)

دانشگاه پیام نور




z
z=u(x)
y
y=v(x)
x



Σv(t_i)(u(a_i)-u(a_{i-1}))
Σu(t_i)(v(a_i)-v(a_{i-1}))
u(b)
u(a)
v(a)
v(b)

توابع با تغییر کرانداز

تعاریف وخواص کلی:

تعریف: تابع f را بر بازه $[a,b]$ با تغییر کراندار می نامیم هرگاه:

$$\exists M \forall P \left[\sum_{k=1}^{n} |\Delta f_k| \le M \right.$$

توابع با تغییر کراندار چه نوع توابعی هستند؟

وچه ویژگیهایی دارند؟اولین ویژگی را در قضیه زیر می بینیم:

قضیه: اگرتابع f بر بازه $[a , b]$ با تغییر کراندار باشد آنگاه f بر $[a, b]$ کراندار است.

اثبات:

با انتخاب افراز $\{a, x, b\}$ بنا به تعریف با تغییر کرانداری عذدی حقیقی مانند M وجود دارد که

$$|f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \le M$$

درنتیجه $|f(x) - f(a)| \le M$ یعنی $|f(x)| \le |f(a)| + M$

فصل چهار

دنباله ها وسریهای توابع

تعریف: فرض کنید (M,d) یک فضای متریک باشدو $E \subseteq M$ و $\{f_n\}$ دنباله ای از توابع (حقیقی ویامختلط)برEباشد.فرض کنید به ازای هر $x \in E$ دنباله عددی $\{f_n(x)\}$ همگرا باشد.دراین صورت می توانیم تابع f راباضابطه

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad (x \in E)$$

تعریف کنیم. دراین صورت گوییم دنباله $\{f_n\}$ به طور نقطه وار به تابع f همگراست.

مثالها. الف) دنباله $\{f_n\}$ رابر $[0,1]$ باضابطه $f_n(x)=x^n$ درنظرمی گیریم.

واضح است که اگر $0\le x<1$ آن گاه $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$ واگر $x=1$ آن گاه

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=1$ درنتیجه

$$f(x)=\begin{cases}0 & 0\le x<1\\ 1 & x=1\end{cases}$$

ملاحظه می کنیم که هرجمله $\{f_n\}$ پیوسته ویاحتی مشتق پذیراست درحالی که f چنین نیست.

در مثالهای گذشته ومثالهای دیگر کتاب که مجال پرداختن به آنها

نیست می بینیم که همگرایی نقطه وار خواص مهمی مانند

پیوستگی- مشتق پذیری -انتگرال پذیری و حتی کرانداری را

به حد دنباله منتقل نمی کند.

دنبال شرایطی هستیم که بتواند چنین خواصی را منتقل نماید.

دنباله $\{f_n\}$ با ضابطه $f_n(x)=\frac{1-x^n}{1-x}$ بر بازه $[0,1)$ تعریف شده است.

داریم

$$f(x)=\frac{1}{1-x}$$

ملاحظه میکنیم که هر f_n بر $[0,1)$ کراندار است در واقع

$$f_n=(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1})\leq n$$

در حالی که f بر $[0,1)$ کراندار نیست.

دنباله $\{f_n\}$ با ضابطه $f_n(x)=\dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$ بر R مفروض است

واضح است که

$$f(x)=\begin{cases} 0 & |x|<1 \\ \dfrac{1}{2} & |x|=1 \\ 1 & |x|>1 \end{cases}$$

ملاحظه می شود که هر f_n بر R پیوسته است در حالی که f در نقاط $x=1$ و $x=-1$ نا پیوسته است.

نتیجه: مشتق پذیری –کرانداری وپیوستگی بوسیله همگرایی نقطه وار منتقل نمی شود.

همگرايي يکنواخت

تعريف: فرض کنيد f حد نقطه وار دنباله

$\{f_n\}$ باشدگوييم دنباله $\{f_n\}$ بر E به طور

يکنواخت به f

همگراست در صورتي که داشته باشيم

$$\forall \varepsilon \, \exists N \, \forall n \, \forall x (n \geq N, x \in E \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

در اين صورت مي نويسيم

$$f_n \Rightarrow f$$

چه تفاوتی بین دو تعریف همگرایی نقطه وار و یکنواخت وجود دارد؟

در همگرایی یکنواخت N مستقل از x است

در صورتی که در همگرایی نقطه وار N وابسته

به x می باشد.

ملاحظه می کنیم که یک تفاوت اساسی در تعریف بوجود آمد . در اثر این تفاوت انتظار داریم که:

اگر تمام جملات پیوسته باشند حد نیز پیوسته باشد.

اگر تمام جملات مشتق پذیر باشند حد نیز چنین باشد.

اگر تمام جملات کراندار باشند حد نیز کراندار باشد.

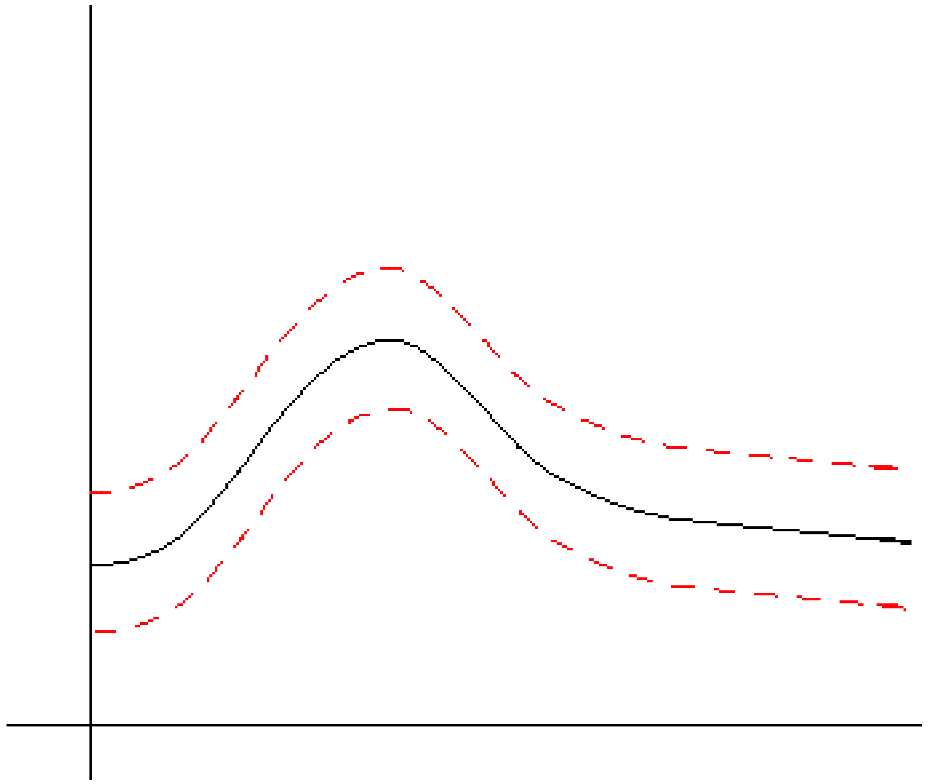
توجه:

در حالتیکه تمام f_n ها و در نتیجه f حقیقی باشند از تعریف همگرایی یکنواخت چنین نتیجه می شود که

$$n \geq N \Rightarrow f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$$

یعنی از مرتبه ای به بعد نمودار تمام f_n ها بین دو نمودار $y = f(x) + \varepsilon$ و $y = f(x) - \varepsilon$ واقع می شوند.

به نمودار اسلاید بعد توجه کنید:



قضیه زیر شرط لازم وکافی برای همگرایی یکنواخت را بیان میکند

قضیه: شرط لازم وکافی برای آنکه $f_n \Rightarrow f$ بر E آن است که

$$\sigma_n = \sup \left| f_n(x) - f(x) \right| \to 0$$

از آنالیز ریاضی یک به یاد داریم که شرط کوشی برای دنباله ها معادل با همگرایی بود. در مورد دنباله توابع نیز شرطی مشابه آن به نام

شرط همگرایی یکنواخت کوشی

وجود دارد که معادل با همگرایی یکنواخت است.

قضیه(شرط همگرایی یکنواخت کوشی)

شرط لازم وکافی برای آنکه $\{f_n\}$ بر E به طور یکنواخت همگرا باشد آن است که

$$\forall \varepsilon\ \exists N \forall m,n,x (m,n \geq N, x \in E \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

همپيوستگي

تعریف:گوییم دنباله $\{f_n\}$ بر E به طور نقطه وارکرانداراست

اگربه ازای هر x تابعی حقیقی مقدارنامنفی مانند $\phi(x)$

باشدبه طوری که به ازای هرعددطبیعی n داشته باشیم.

$$|f_n(x)| \leq \phi(x) \qquad (x \in E, n = ۱,۲,\ldots)$$

تعریف:گوییم دنباله $\{f_n\}$ بر E به طوریکنواخت کراندار

است اگر عددی مثبت مانند M موجودباشدبه طورکه

به ازای هر $X \in E$ وهرعددطبیعی n داشته باشیم:

$$|f_n(x)| \le M \qquad (x \in E, n = ۱,۲,\ldots)$$

قضیه: فرض کنید دنباله $\{f_n\}$ بر مجموعه شمارش پذیر E

به طور نقطه وار کراندار باشد آنگاه زیر دنباله ای ما نند $\{f_{n_k}\}$

وجود دارد که بر E همگراست

تعریف :فرض کنید X یک فضای متریک فشرده باشد $C(X)$

را مجموعه توابع مختلط پیوسته بر X میگیریم با تعریف

جمع نقطه وار وضرب اسکالر $C(X)$ به یک فضای برداری

تبدیل می شود.

در این فضای برداری نرمی به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

چون کراندار است لذا $\|f\| < \infty$

پس با استفاده از این نرم می توان یک متریک

به صورت زیر تعریف کرد:

$$d(f,g) = \|f - g\| \qquad (f, g \in C(X))$$

بدین ترتیب $C(X)$ یک فضای متریک است.

حال می خواهیم ببینیم که چه ارتباطی بین همگرایی یکنواخت یک دنباله از توابع و نرم $C(X)$ وجود دارد؟

قضیه:دنباله $\{f_n\}$ به طور یکنواخت به f همگراست اگروفقط اگر $f_n \to f$ در $C(X)$

تعریف فرض کنید F خانواده ای از توابع مختلط بر مجموعه E در فضای متریک (M,d) باشد.گوییم

F همپیوسته است در صورتی که:

$$\forall \varepsilon\, \exists \delta \forall x,y,f \quad (f\in F, d(x,y)<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon)$$

در قضیه زیر نشان می دهیم که همگرایی یکنواخت یک دنباله از توابع در یک فضای فشرده باعث همپیوستگی دنباله می شود

قضیه:اگر X **یک فضای متریک فشرده باشد و** $f_n \in C(X)$

$f_n \Rightarrow f$ **آنگاه** $\{f_n\}$ **همپیوسته است.**

فصل سوم

توابع با تغییر کراندار

پس از مطالعه اين فصل بايد بتوانيد:

1. يك تابع با تغيير كراندار بر يك بازه را تعريف نماييد

2. براي توابع با تغيير كراندار بر يك بازه مثال بزنيد .

3. مثالي از يك تابع كه كراندار است ولي با تغيير كراندار نيست ارايه دهيد

4. تابع تغيير كلي را تعريف نماييد .

5. ثابت كنيد هر تابع با تغيير كراندار به صورت تفاضل دو تابع صعودي است

6. يك خم طول پذير را تعريف و براي آن مثال بزنيد

تعاریف وخواص کلی:

تعریف : تابع f را بر بازه $[a, b]$ با تغییر کراندار می نامیم هرگاه :

$$\exists M \, \forall P \left[\sum_{k=1}^{n} \left| \Delta f_k \right| \leq M \right]$$

که در آن

$$\Delta f_k = f(x_k) - f(x_{k-1})$$

توابع با تغییر کراندار چه نوع توابعی هستند؟

و چه ویژگی هایی دارند؟ اولین ویژگی را در قضیه زیر می بینیم:

قضیه : اگرتابع f بر بازه $[a , b]$ با تغییر کراندار باشد آنگاه

بر $[a, b]$ کراندار است.

اثبات:

با انتخاب افراز $\{a, x, b\}$ بنا به تعريف با تغيير كرانداري عددي حقيقي

مانند M وجود دارد كه $|f(x)-f(a)|+|f(b)-f(x)|\le M$

درنتيجه $|f(x)-f(a)|\le M$ يعني $|f(x)|\le|f(a)|+M$

يعني f كراندار است.

آيا عكس اين مطلب نيز صحيح است؟

جواب اين سوال را در مثال زير مي بينيم :

مثال : تابع زير كه به وضوح كراندار است با تغيير كراندارنيست

$$f(x)=\begin{cases} ۰ & x\in Q \\ ۱ & x\notin Q \end{cases}$$

براي اينكه نشان دهيم اين تابع با تغيير كراندار نيست بايد ثابت كنيم:

$$\forall M\ \exists P\left(\sum(P) \geq M\right)$$

فرض مي كنيم M عددي مثبت ودلخواه باشد افراز P را چنين ميگيريم

$$P = \{ 0, x_1, r_1, x_2, r_2, \ldots, r_{n-1}, x_n, 1 \}$$

که در آن $1 \le i \le n,\quad r_i \in Q,\quad x_i \notin Q$ در نتیجه داریم:

$$\sum(P)=\sum_{k=1}^{2n}\left|\Delta f_k\right|=\left|f(x_1)-f(0)\right|+\left|f(r_1)-f(x_1)\right|+\ldots+$$

$$\left|f(x_n)-f(r_{n-1})\right|+\left|f(1)-f(x_n)\right|=1+1+1+\ldots+1=2n$$

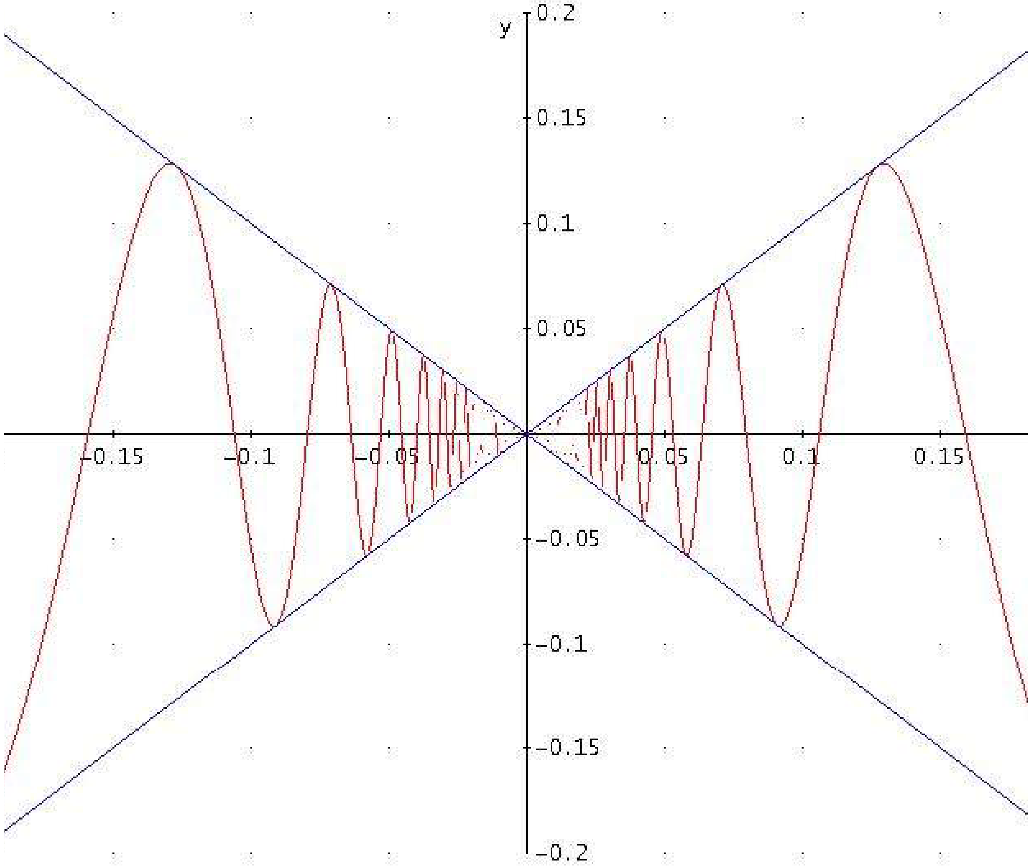
بديهي است ميتوان گرفت:

$2n > M$ يعني f با تغيير كراندار نيست .

تابع f بر $[0,1]$ به صورت زیر تعریف شده است

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

دانشگاه پیام نور



با توجه به نوسانات اين تابع در همسايگي صفر حدس مي زنيم كه

اين تابع بر $[0,1]$ با تغيير كراندار نيست.

اگر $\sin\frac{1}{x}=\pm 1$ آن‌گاه، $\frac{1}{x}=K\pi+\frac{\pi}{2}$ ، يعني $x=\frac{2}{2k\pi+\pi}$ ،

و اگر $\sin\frac{1}{x}=0$ ، آن گاه $\frac{1}{x}=K\pi$. از اين رو $x=\frac{1}{K\pi}=\frac{2}{2K\pi}$.

حال اگر M عدد حقيقي دلخواهي باشد افراز P را به صورت زير در نظر مي گيريم:

$$P=\{0,\frac{2}{(2n+1)\pi},\frac{2}{2n\pi},\frac{2}{(2n-1)\pi},\cdots,\frac{2}{3\pi},\frac{2}{2\pi},\frac{2}{\pi},1\}$$

داريم:

$$\sum_{k=1}^{2n=1}\left|\Delta f_k\right| = \left|\frac{2}{(2n+1)\pi}\sin\frac{2}{(2n+1)\pi} - 0\right| +$$

$$\left|\frac{2}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi}{2} - \frac{2}{(2n+1)\pi}\sin\frac{(2n+1)\pi}{2}\right| + \ldots$$

$$+\left|\frac{2}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{2} - \frac{2}{3\pi}\sin\frac{3\pi}{2}\right| + \left|\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2} - \frac{2}{2\pi} - \sin\frac{2\pi}{2}\right|$$

$$+\left|\sin 1 - \frac{2}{\pi}\sin\frac{2}{\pi}\right| =$$

$$= \frac{۲}{(۲n+۱)\pi} + \frac{۲}{(۲n+۱)\pi} + \cdots + \frac{۲}{۳\pi} + \frac{۲}{۳\pi} + \frac{۲}{\pi} + \left| \sin ۱ - \frac{۲}{\pi} \right|$$

$$\geq \frac{۴}{(۲n+۱)\pi} + \frac{۴}{(۲n+۱)\pi} + \cdots + \frac{۳}{۴\pi} = \frac{۴}{\pi}\left[\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} + \cdots + \frac{۱}{۲n+۱}\right]$$

با توجه به اينكه طرف راست وقتي كه $n \to \infty$ به بي نهايت ميل مي كند لذا عددي طبيعي مانند n وجود دارد كه به ازاي آن طرف راست از M بيشتر است پس f با تغيير كراندار نيست در حالي كه كراندار است.

قضيه. اگر تابع f بر بازه $[a,b]$ يكنوا باشد آنگاه بر اين بازه با تغيير كراندار است .

برهان: فرض كنيد f صعودي و P افراز دلخواهي از $[a,b]$ باشد. در اين صورت

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\Delta f_k\right| = \sum_{k=1}^{n}\left|f(x_k)-f(x_{k-1})\right|$$

$$= \sum_{k=1}^{n}[f(x_k)-f(x_{k-1}) = f(b)-f(a)]$$

قضيه. اگر تابع f بر بازه $[a,b]$ صعودي (نزولي) باشد، آن گاه f

بر اين بازه با تغيير كراندار است.

برهان. فرض كنيد f صعودي و P افرازي دلخواه از $[a,b]$ باشد. در اين صورت

$$\sum_{k=1}^{n}|\Delta f_k| = \sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(f(x_k)-f(x_{k-1}))$$

$$= f(b)-f(a)$$

پس f با تغيير كراندار است. به طريق مشابه در مورد توابع نزولي ثابت مي شود.

قضيه. اگر تابع f بر بازه $[a,b]$ داراي مشتق كراندار باشد، آن گاه f با

تغيير كراندار است.

برهان. اگر $P=\{a,x_1,x_2,\dots,x_{n-1},b\}$ افرازي دلخواه از $[a,b]$ باشد، آن گاه

$$f(x_k)-f(x_{k-1})=[x_k-x_{k-1}]f'(c_k)$$

$$x_{k-1}<c_k<x_k$$

چون f' کراندار است پس

$$\exists A\forall x\left[\,|f'(x)|\le A\right]$$

از این رو،

$$\left|f\left(x_{k}\right)-f\left(x_{k-1}\right)\right| \leq A\left[x_{k}-x_{k-1}\right]$$

لهذا،

$$\sum_{k=1}^{n}\left|f\left(x_{k}\right)-f\left(x_{k-1}\right)\right| \leq A(b-a)$$

يعني حكم برقرار است.

تعريف. فرض كنيد تابع f بر $[a,b]$ با تغيير كراندار باشد. تغييرات كلي

تابع f بر $[a,b]$ با ضابطه زير تعريف مي شود:

$$\upsilon_f(a,b) = \sup\left\{ \sum(p) \,\middle|\, p \in p[a,b] \right\}$$

كه در آن $P[a,b]$ مجموعه افرازهاي $[a,b]$ است.

قضیه. فرض کنید توابع f و g بر بازه $[a,b]$ با تغییر کراندار است، آن

گاه،

الف) به ازاي اعداد ثابت A و B تابع $Af+Bg$ بر $[a,b]$ با تغییر

کراندار است و

$$\upsilon_{Af+Bg} \le |A|\upsilon_f + |B|\upsilon_g$$

ب) تابع $f \cdot g$ بر $[a,b]$ با تغییر کراندار است و

$$\upsilon_{fg} \le M_1 \upsilon_f + M_2 \upsilon_g$$

که در آن M_1 و M_2 به ترتیب سوپریمم $|g|$ وسوپریمم $|f|$ است.

ج) اگر تابع f از صفر دور شود يعني m ي باشد كه به ازاي x

هر $\circ > m > |f(x)|$ ، آن گاه ،

$$\upsilon_{\frac{1}{f}} \leq \frac{1}{m^2}\upsilon_f$$

برهان. الف) اگر P افراز دلخواهي از $[a,b]$ باشد، آنگاه

$$\Delta(Af+Bg)_k = Af(x_k)+Bg(x_K)-Af(x_{k-1})+Bg(x_{k-1})$$

$$= A\Delta f_k + B\Delta g_k$$

در نتيجه،

$$|\Delta(Af+Bg)_k| \le |A||\Delta f_k| + |B||\Delta g_k|$$

←

دانشگاه پیام نور

$$\sum_{k=1}^{n} \left|\Delta(Af+Bg)_k\right| \le |A| \sum_{k=1}^{n} \left|\Delta f_k\right| + |B| \sum_{k=1}^{n} \left|\Delta g_k\right|$$

$$\le |A| \upsilon_f + |B| \upsilon_g$$

پس $Af + Bg$ با تغییر کراندار است و

$$\upsilon_{Af+Bg} \le |A| \upsilon_f(a,b) + |B| \upsilon_g(a,b)$$

ب)

$$\Delta(fg)_k = f(x_k)g(x_k) - f(x_{k-1})g(x_{k-1})$$

$$= f(x_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})] - g(x_{k-1})[f(x_k) - f(x_{k-1})]$$

$$= f(x_k)\Delta g_k - g(x_{k-1})\Delta f_k$$

ازاین رو،داریم

←

→

$$\left|\Delta(fg)_k\right| \le \left|f(x_k)\right|\left|\Delta g_k\right| + \left|g(x_{k-1})\right|\left|\Delta f_k\right|$$

$$\le M_{۱}\left|\Delta g_k\right| + M_{۲}\left|\Delta f_k\right|$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\Delta(fg)_k\right| \le M_{۱}\sum_{k=1}^{n}\left|\Delta g_k\right| + M_{۲}\sum_{k=1}^{n}\left|\Delta f_k\right|$$

$$\le M_{۱}\upsilon_g + M_{۲}\upsilon_f$$

ج)

$$\Delta\left[\frac{1}{f}\right]_k = \frac{1}{f(x_k)} - \frac{1}{f(x_{k-1})}$$

$$= \frac{f(x_{k-1}) - f(x_k)}{f(x_k)f(x_{k-1})} = -\frac{\Delta f_k}{f(x_k)f(x_{k-1})}$$

$$\left|\Delta\left[\frac{1}{f}\right]_k\right| \le \frac{|\Delta f_k|}{m^2}$$

بالنتيجه،

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\Delta\left[\frac{۱}{f}\right]_k\right| \leq \frac{۱}{m^۲}\sum_{k=1}^{n}|\Delta f_k| \leq \frac{\upsilon_f}{m^۲}$$

يعني تابع $\frac{۱}{f}$ با تغيير كراندار است و

$$\upsilon_{\frac{1}{f}} \leq \frac{۱}{m^۲}\upsilon_f$$

تعريف. تابع V را به $[a,b]$ چنين تعريف مي كنيم:

$$V(x)=\begin{cases} \upsilon_f(a,x) & a<x\leq b \\ \circ & x=a \end{cases}$$

ذيلاًنشان مي دهيم كه هر تابع با تغيير كراندار را مي توان به صورت دو تابع صعودي و يا تفاضل دو تابع نزولي نوشت. براي اين منظور نشان مي دهيم كه توابع V و $D=V-f$ بر $[a,b]$ صعودي هستند.

قضيه. الف) تابع V بر $[a,b]$ صعودي است.

ب)تابع $D=V-f$ بر $[a,b]$ صعودي است.

ج)هر تابع با تغيير كراندار تفاضل دو تابع صعودي است

الف) $V(y)-V(x)=\upsilon_f(a,y)-\begin{cases}\upsilon_f(a,x)\\ 0\end{cases}=\upsilon_f(x,y)\geq 0$

ب) $D(y)-D(x)=\upsilon_f(a,y)-[f(x)-f(y)]$

$$\geq \upsilon_f(x,y)-|f(x)-f(y)|$$

طرف راست نامنفي است زيرا به ازاي افراز $P=\{x,y\}$ مقدار $\sum(P)$

برابر است با $|f(x)-f(y)|$ D V يعني و صعودي هستند

ج)با توجه به (ب)داريم:

$$f = V - D$$

يعني تفاضل دو تابع صعودي است. همچنين، با توجه به رابطه

$$f = (-D) - (-V)$$

نتيجه مي شود كه تفاضل دو تابع نزولي است و برهان تمام است.

باید توجه داشت که نمایش فوق منحصر به فرد نیست. زیرا، مثلاً، اگر φ

يك تابع صعودي دلخواهي باشد،آن گاه

$$f = (V + \varphi) - (D + \varphi)$$

نمايش ديگري براي تابع با تغيير كراندار f به صورت تفاضل دو تابع

صعودي است

قضیه. مجموعه نقاط نا پیوستگي f و V در $[a,b]$ یکسان است. به عبارت دیگر،اگر f در نقطه $a \le x_{\circ} \le b$ پیوسته باشد، آن گاه V نیز چنین است و بعکس.

برهان. فرض کنید تابع f در نقطه $a \le x_{\circ} \le b$ پیوسته است.

پس

$$\forall \varepsilon \exists \delta \forall x \left[|x - x_{\circ}| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_{\circ})| < \frac{\varepsilon}{۲} \right]$$

فصل چهار

دنباله ها وسریهای توابع

پس از مطالعه این فصل باید بتوانید :

۱. دنباله وسری تابعی را تعریف و برای آنها مثال بزنید.

۲. همگرایی نقطه وار یک دنباله از توابع را تعریف کنید.

۳. همگرایی یکنواخت یک دنباله از توابع را تعریف کنید و فرق آن با همگرایی نقطه وار را بیان کنید .

٤. شرط کوشی برای همگرایی یکنواخت یک دنباله تابعی را بیان واثبات کنید.

٥. رابطه همگرایی یکنواخت و پیوستگی را بیان و اثبات کنید .

٦. رابطه همگرایی یکنواخت و انتگرال پذیری را بیان و اثبات کنید .

٧. رابطه همگرایی یکنواخت و مشتق را بیان و اثبات کنید

۸. مفاهیم مربوط به دنباله تابعی را به سری تابعی تعمیم دهید .

۹. قضیه تقریب وایراشتراس را بیان و اثبات کنبد.

۱۰. کرانداری نقطه وار یک دنباله بر یک مجموعه را بیان کنید

۱۱. همپیوستگی خانواده‌ای از توابع راتعریف کنید.

۱۲. رابطه بین همپیوستگی و فشردگی را بیان واثبات کنید

۱۳. قضیه استون وایراشتراس را بیان و اثبات کنید .

تعریف: فرض کنید (M, d) یک فضای متریک باشدو $E \subseteq M$ و $\{f_n\}$ دنباله ای از توابع (حقیقی ویامختلط)برEباشد.فرض کنید به ازای هر $x \in E$ دنباله عددی $\{f_n(x)\}$ همگرا باشد.دراین صورت می توانیم تابع f راباضابطه

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad (x \in E)$$

تعریف کنیم. دراین صورت گوییم دنباله $\{f_n\}$ به طور نقطه وار به تابع f همگراست.

مثال. الف) دنباله $\{f_n\}$ را بر $[0,1]$ باضابطه $f_{n(x)} = x^n$ در نظر می گیریم .

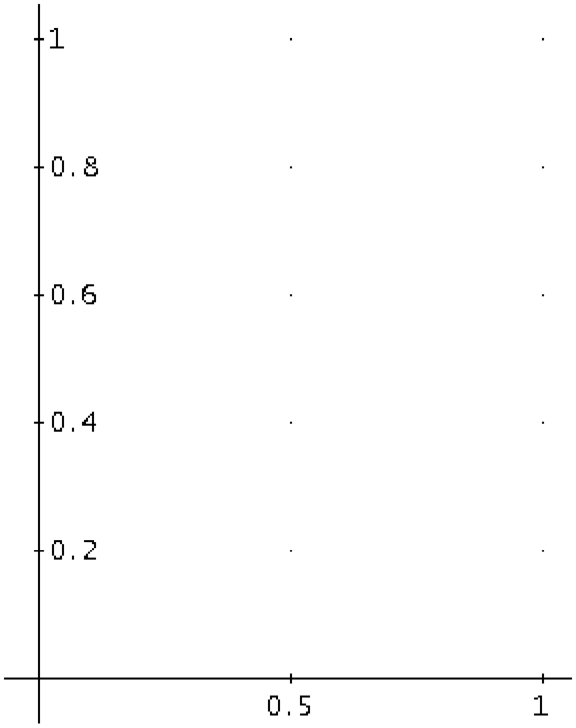
واضح است که اگر $0 \le x < 1$ آن گاه $\lim_{n\to\infty} f_{n(x)} = 0$ واگر $x = 1$ آن گاه $\lim_{n\to\infty} f_{n(x)} = 1$ درنتیجه

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

ملاحظه می کنیم که هرجمله $\{f_n\}$ پیوسته ویا حتی مشتق پذیراست

درحالی که f چنین نیست.نمودار تعدادی از جملات دنباله فوق را

ملاحظه می کنیم


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0.5
1

در مثالهای گذشته ومثالهای دیگر کتاب که مجال پرداختن به آنها

نیست می بینیم که همگرایی نقطه وار خواص مهمی مانند

پیوستگی ـ مشتق پذیری ـ انتگرال پذیری و حتی کرانداری را به

حد دنباله منتقل نمی کند .

دنبال شرایطی هستیم که بتواند چنین خواصی را منتقل نماید .

دنباله $\{f_n\}$ با ضابطه $f_n(x)=\frac{۱-x^n}{۱-x}$ بر بازه $[۰,۱)$ تعریف شده است. با توجه به مثال (الف) داریم :

$$f(x)=\frac{۱}{۱-x}$$

ملاحظه میکنیم که هر f_n بر $[۰,۱)$ کراندار است در واقع $f_n=(۱+x+x^۲+x^۳+\cdots+x^{n-۱})\leq n$

دنباله $\{f_n\}$ با ضابطه $f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{1 + x^{2n}}$ بر R مفروض است

واضح است که

$$f(x) = \begin{cases} 0 & |x| < 1 \\ \dfrac{1}{2} & |x| = 1 \\ 1 & |x| > 1 \end{cases}$$

ملاحظه می شود که هر f_n بر R پیوسته است در حالی که f در نقاط $x = 1$ و $x = -1$ نا پیوسته است.

نتیجه: مشتق پذیری -کرانداری وپیوستگی بوسیله همگرایی نقطه وار منتقل نمی شود.

همگرايي يكنواخت

تعريف: فرض كنيد f حد نقطه وار دنباله $\{f_n\}$ باشدگوييم دنباله $\{f_n\}$ بر E به طور يكنواخت به f همگراست در صورتي كه داشته باشيم

$$\forall \varepsilon\, \exists N\, \forall n\, \forall x (n \geq N, x \in E \Rightarrow |f_{n(x)} - f(x)| < \varepsilon$$

در اين صورت مي نويسيم

$$f_n \Rightarrow f$$

چه تفاوتی بین دو تعریف همگرایی نقطه وار و یکنواخت وجود دارد؟

در همگرایی یکنواخت N مستقل از x است

در صورتی که در همگرایی نقطه وار N وابسته به x می باشد.

ملاحظه می کنیم که یک تفاوت اساسی در تعریف

بوجود آمد . در اثر این تفاوت انتظار داریم که:

اگر تمام جملات پیوسته باشند حد نیز پیوسته باشد.

اگر تمام جملات مشتق پذیر باشند حد نیز چنین باشد.

اگر تمام جملات کراندار باشند حد نیز کراندار باشد.

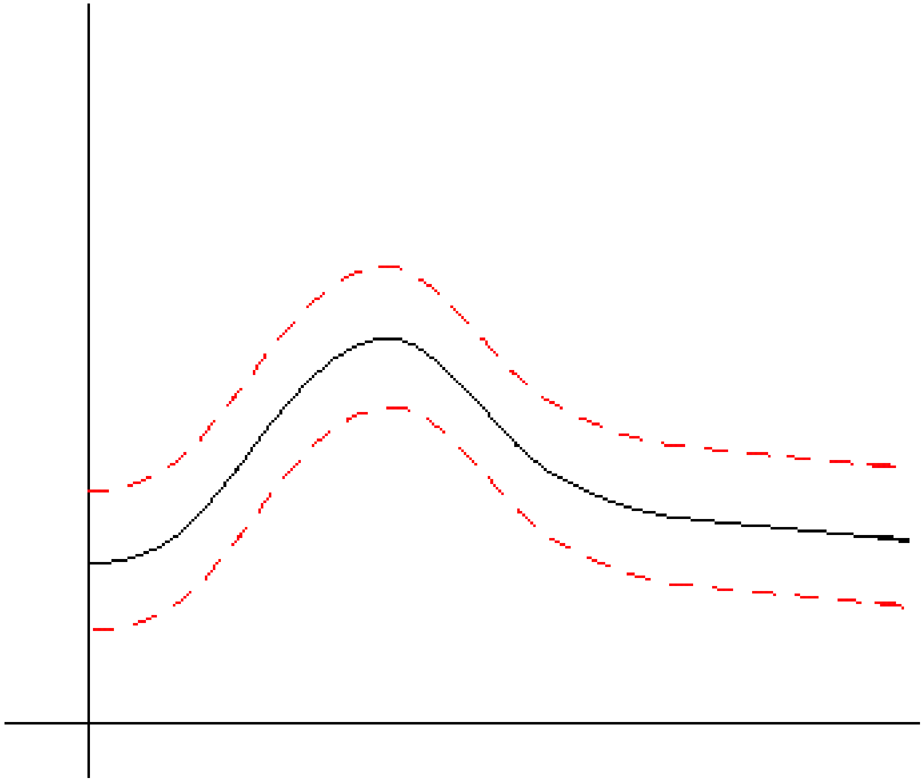
توجه:

در حالتیکه تمام f_n ها و در نتیجه f حقیقی باشنداز تعریف همگرایی یکنواخت چنین نتیجه می شود که

$$n \geq N \Rightarrow f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$$

یعنی از مرتبه ای به بعد نمودار تمام f_n ها بین دو نمودار $y = f(x) + \varepsilon$ و $y = f(x) - \varepsilon$ واقع می شوند.

به نمودار اسلاید بعد توجه کنید:



قضیه زیر شرط لازم وکافی برای همگرایی یکنواخت را بیان میکند

قضیه: شرط لازم وکافی برای آنکه $f_n \Rightarrow f$ بر E آن است که

$$\sigma_n = \sup |f_n(x) - f(x)| \to 0$$

از آنالیز ریاضی یک به یاد داریم که شرط کوشی برای دنباله ها معادل با همگرایی بود. در مورد دنباله توابع نیز شرطی مشابه آن به نام

شرط همگرایی یکنواخت کوشی

وجود دارد که معادل با همگرایی یکنواخت است.

قضیه(شرط همگرایی یکنواخت کوشی)

شرط لازم وکافی برای آنکه $\{f_n\}$ بر E

به طور یکنواخت همگرا باشد آن است که

$$\forall \varepsilon\, \exists N \forall m, n, x (m, n \geq N, x \in E \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

همپیوستگي

تعریف:گوییم دنباله $\{f_n\}$ بر E به طور نقطه وارکرانداراست

اگربه ازای هر x تابعی حقیقی مقدارنامنفی مانند $\phi(x)$

باشدبه طوری که به ازای هرعددطبیعی n داشته باشیم.

$$|f_n(x)| \le \phi(x) \qquad (x \in E, n = ۱,۲,\ldots)$$

تعریف: گوییم دنباله $\{f_n\}$ بر E به طوریکنواخت کراندار

است اگر عددی مثبت مانند M موجودباشدبه طورکه

به ازای هر $X \in E$ وهرعددطبیعی n داشته باشیم:

$$|f_n(x)| \leq M \qquad (x \in E, n = ۱,۲,\ldots)$$

قضیه: فرض کنید دنباله $\{f_n\}$ بر مجموعه شمارش پذیر E

به طور نقطه وار کراندار باشد آنگاه زیر دنباله ای ما نند $\{f_{nk}\}$

وجود دارد که بر E همگراست

تعریف : فرض کنید X یک فضای متریک فشرده باشد $C(X)$

را مجموعه توابع مختلط پیوسته بر X میگیریم با تعریف

جمع نقطه وار وضرب اسکالر $C(X)$ به یک فضای برداری

تبدیل می شود.

در این فضای برداری نرمی به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

چون کراندار است لذا $\|f\| < \infty$

پس با استفاده از این نرم می توان یک متریک

به صورت زیر تعریف کرد:

$$d(f,g) = \|f - g\| \qquad (f,g \in C(X))$$

بدین ترتیب $C(X)$ یک فضای متریک است.

حال می خواهیم ببینیم که چه ارتباطی بین همگرایی یکنواخت یک دنباله از توابع و نرم $C(X)$ وجود دارد؟

قضیه: دنباله $\{f_n\}$ به طور یکنواخت به f همگراست اگروفقط اگر $f_n \to f$ در $C(X)$

دانشگاه پیام نور

تعریف فرض کنید F خانواده ای از توابع مختلط بر مجموعه E در فضای متریک (M,d) باشد.گوییم F همپیوسته است در صورتی که:

$$\forall \varepsilon\, \exists \delta \forall x,y,f \quad (f \in F, d(x,y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$

فصل پنجم

سری های توانی و توابع خواص

پس از مطالعه این فصل با ید بتوانید

۱. یک سری توانی را تعریف کنید .

۲. شعاع همگرایی یک سری توانی را تعریف و روابط مربوط به آن

را بیان کنید .

۳. شعاع همگرایی یک سری توانی را بیان کنید

۴. تابع نمایی را تعریف و خواص آنرا بیان کنید.

۵. توابع مثلثاتی را بر حسب سری توانی تعریف و خواص آن را اثبات نمایید

تعریف: یک سری توانی(سری توانی حقیقی) به شکل

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \, x^x \qquad (۱)$$

یا به طورکلی به صورت

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \qquad (۲)$$

تعریف می شودکه درآن a یک عددحقیقی x یک متغیرحقیقی و c_n ها

اعداد حقیقی هستند .

اگرعددی مثبت مانند R موجود باشد به طوری که به ازای هرعدد

حقیقی x دربازه $(-R,R)$ سری(۱) همگرا باشد در این صورت می

نویسیم :

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad x\in(-R,R)$$

وگوییم f به وسیله سری توانی(۱)حول نقطه صفربسط داده شده

است .در حالت (۲)گوییم تابع f به صورت

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

حول نقطه a بسط داده شده است .

تعریف: عددحقیقی R را شعاع همگرایی سری توانی (۱) ویا (۲) می‌نامیم . باید

توجه داشت که R می تواند ∞ باشد. در حالتی که $R = 0$ در این صورت سری

(۱) فقط در صفر و سری (۲) فقط در a همگراست

قضیه.فرض کنید $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ یک سری توانی باشد و

(۳)

$$R = \frac{1}{\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}$$

الف)اگر $|x| < R$ آن گاه $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ به طور مطلق همگراست

ب)اگر $|x| > R$ آنگاه $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ واگراست

ج)اگر $0<\varepsilon<R$ آنگاه $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ بربازه

$[-R+\varepsilon, R-\varepsilon]$ به طور یکنواخت همگرا است.

اگر $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (|x|<R)$ آن گاه

(۵)

$$f^{k}(x)=\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)c_n x^{n-k} \quad (|x|<R)$$

به ویژه(٦) $f^{(k)}(0)=k!c_k \qquad (k=0,1,2,\ldots)$

که درآن منظوراز $f^{(k)}$ مشتق **k** ام **f** ومنظوراز $f^{(0)}$ همان **f** است

الف)شعاع همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ را بیابید.

حل.چون همواره $c_n=1$ پس $R=1$

ب)شعاع همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ رابیابید.

حل.میدانیم که $\sqrt[n]{n} \to 1$ پس $R = 1$

قضیه(آبل). فرض کنید $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ همگرا باشد. اگر

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad [-1 < x < 1] \qquad (۱)$$

آن گاه

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \qquad (۲)$$

قضیه. فرض کنید f درنقطه $X_\circ$ دربازه (a,b) دارای مشتقات تامرتبه n باشد

آنگاه تابعی مانند $R(x)$ بر (a,b) موجوداست به طوری که $\lim_{x\to x_\circ} R(x)=\circ$

و

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R(x)(x-x_0)^n \quad (۱)$$

$$[x\in(a,b)] \quad n=۰,۱,۲,\dots$$

قضیه. فرض کنید $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|$ همگرا باشد.آن گاه

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} \qquad (1)$$

قضیه .فرض کنید سری های $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ بر $A=(-R,R)$

همگرا باشد و

$$E=\left\{x \middle| x\in A, \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right\}$$

اگر E در A دارای حداقل یک نقطه اجتماع باشد آن گاه

$$a_n = b_n (n=1,2,3,\ldots),\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

تعریف. تابع نمای E رابرصفحه مختلط C را باضابطه

$$E(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n}}{n!}$$

تعریف می کنیم باتوجه به اینکه شعاع همگرایی این سری را برابر ∞ است

پس بر تمام صفحه مختلط تعریف شده است

در آنالیز ۱ نشان دادیم که e عددی است اصم. در واقع e نه تنها اصم

است بلکه غیرجبری هم است یعنی ریشه هیچ معادله‌ای با ضرایب گویا

نیست.

اگر x یک عددحقیقی منفی باشد،آن گاه بنابه رابطه(۲)و(۹)داریم:

$$1 = E(0) = E(x)E(-x) = E(x)e^{-x}$$

لهذا،

$$E(x) = e^{x}$$

یعنی رابطه(۹)به ازای xهای منفی هم برقراراست ازاین رو،به ازای هر $x \in R$،

داریم

$$E(x) = e^{x}$$

تعریف. تابع L راکه به صورت زیرتعریف می شود تابع *لگاریتم* می نامیم.

$$L(y)=\int_{1}^{y}\frac{dt}{t} \qquad [y\in(0,\infty)]$$

تعریف فوق نشان میدهدکه L بر $(0,1)$ منفی و بر $(1,\infty)$ مثبت است و $L(1)=0$.

قضیه. اگر $x>0$، آن گاه $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$ که درآن α عدد مثبت دلخواه وناصفر است.

برهان. بنابه رابطه(۱۳)، قضیه ۲.۲.۵ و قضیه مشتق ترکیب توابع داریم :

$$\left(X^{\alpha}\right)' = \left[E\left[\alpha L\left(x\right)\right]\right]'$$

$$= \left[\alpha L(x)\right]' E'\left[\alpha L(x)\right]$$

$$= \frac{\alpha}{X} E\left[\alpha L(x)\right]$$

$$= \frac{\alpha}{X} X^{\alpha} = \alpha x^{\alpha-1}$$

تصاعدهندسی زیررا در نظر می گیریم:

$$1-x+x^{2}-\cdots+(-1)^{n}x^{n}=\frac{1-(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x} \qquad (|x|<1) \qquad (۱)$$

ازحدگیری از طرفین(۱)وقتی که $n \to \infty$ ،خواهیم داشت:

$$1-x+x^{2}-x^{3}+\cdots=\frac{1}{1+x} \qquad (|x|<1) \qquad (۲)$$

اگر α یک عدد مثبت دلخواه باشد به طوری که $a<1$، در بازه $[-a,a]$

داریم: $|x|<a$ لهذا $|x^n|<a^n$ ، چون سری $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ همگراست پس سری

۲ بر بازه $[-a,a]$ به طور یکنواخت همگراست و در نتیجه از سری فوق می

توان جمله به جمله انتگرال گرفت، یعنی

$$\int_{۰}^{a} \frac{dx}{۱+x} = \int_{۰}^{a} \left(۱ - x + x^{۲} + \cdots\right) dx = \int_{۰}^{a} dx - \int_{۰}^{a} x\,dx + \cdots$$

$$= a - \frac{a^{۲}}{۲} + \cdots$$

تعریف. توابع S و C را به ترتیب توابع سینوس و کسینوس می نامیم و چنین

تعریف می کنیم:

(۱)

$$S(x)=\frac{E(ix)-E(-ix)}{2i} \quad , \quad C(x)=\frac{E(ix)-E(-ix)}{2}$$

درواقع، نشان می دهیم که توابع S و C همان توابع سینوس و کسینوس عادی

هستند. از رابطه (۱) داریم

$$۲C(x) = E(ix) + E(-ix)$$

$$۲iS(x) = E(ix) - E(-ix)$$

از جمع دو رابطه اخیر خواهیم داشت

$$E(ix) = C(x) = iS(x)$$

قضیه. عددی حقیقی و مثبت مانند وجود دارد به طوری که $C(x)=0$

تعریف. عدد π را مساوی ۲α تعریف می کنیم . در مثلثات مقدماتی با این عدد آشنا شده اید. عدد π نه تنها اصم است بلکه متعالی هم است. اصم بودن π را ضمن مثالها ثابت کرده‌ایم ولی اثبات متعالی بودن π از حوصله این درس خارج است .

ثابت کنید: $\cos x + x\sin x > ۰ \quad \left[۰ < x \le \frac{\pi}{۲} \right]$

حل. تابع $\varphi(x) = \cos x + x\sin x$ را تعریف می کنیم، داریم:

$$\varphi'(x) = -\sin x + \sin x + x\cos x = x\cos x > ۰ \left[x \in \left(۰, \frac{\pi}{۲} \right) \right]$$

از این رو، φ در این بازه صعودی است و $\varphi(x) > \varphi(۰) = ۱$

در قضیه زیر نشان می دهیم که همگرایی یکنواخت یک دنباله از توابع در یک فضای فشرده باعث همپیوستگی دنباله می شود

قضیه: اگر X یک فضای متریک فشرده باشد و $f_n \in C(X)$

$f_n \Rightarrow f$ آنگاه $\{f_n\}$ همپیوسته است.

فصل ششم

سریهای فوریه

دانشگاه پيام نور

قضيه. اگر سري (1)به طور يكنواخت همگرا باشد ، آن گاه

$$a_{\circ} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

تعريف. سري (1) را سري فوريه تابع f و a_n و b_n را ضرايب فوريه

تابع f مي ناميم.

قضيه . اگر سريه فوريه

$$\frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \cos nx + B_n \sin nx\right]$$

در بازه $[0,2\pi]$ به طور يكنواخت به $f(x)$ همگرا باشد آن گاه (7)

سري فوريه تابع f است .

قضیه. اگر توابع انتگرال پذیر f و g در c پیوسته باشد

و $f(c) \neq g(c)$ ، آن گاه سریهاي فوریه f و g متفاوت هستند .

نتيجه. اگر fپيوسته و سري فوريه f به طوريكنواخت همگرا باشد ، آن

گاه مجموع اين سري در هر نقطه f(x) است

برهان.اگر سري فوريه f به تابع ديگري مانند g همگرباشد ،در اين

صورتبنابه قضيه 4.1.6اين سري ،سري فوريه g نيز است پس $f = g$

قضیه(ریمان-لبگ). فرض کنید f بربازه $[a,b]$ انتگرل پذیر ریمان است،

آن گاه

$$\lim_{t\to\infty}\int_a^b f(x)\cos tx \, dx = 0$$

$$\lim_{t\to\infty}\int_a^b f(x)\sin tx \, dx = 0$$

تعريف. به طوري كه قبلا اشاره كرديم چند جمله‌اي زير را يك چند جمله اي مثلثاتي مي‌ناميم .

$$S_N = S_N(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}[a_n \cos nx + b_n \sin nx] \left[= \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} \right]$$

كه در آن a_n ها و b_n ها اعدادي مختلط هستند حال اگر a_n و b_n ضريب فوريه در بازه $[-\pi,\pi]$ باشد، آن گاه S_N را ميتوان به صورت مناسب

$$S_N = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(t)\cos nt \cos nx + f(t)\sin nt \sin nx\right]dt$$

$$= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sum_{n=1}^{N} \cos n(t-x)\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N}\cos(t-x)\right\} f(t)\,dt$$

تعريف. دنباله $\{D_N\}$ با ضابطه زير را هسته ديريكله مي ناميم

$$D_N(t)=\frac{۱}{۲}+\sum_{n=۱}^{N}\cos nt$$

با توجه به تعريف كسينوس مي توان $D_N(t)$ را محاسبه كرد

قضيه. اگر به ازاي x مفروض اعداد مثبتي مانند δ و M باشد به

طور ي كه به ازاي هر t اگر $|t|<\delta$ ، آن گاه

$$| f(x+t)-f(x)| \leq M\,|t|$$

در اين صورت

$$\lim_{N\to\infty} S_N(f;x)=f(x)$$

مي دانيم كه سري $1-1+1-1+1\ldots$

واگراست. در واقع، اگر S_n مجموع n جمله اول اين سري باشد ، آن گاه

$$S_n = \begin{cases} 1 & \text{اگر n فرد باشد} \\ 0 & \text{اگر n زوج باشد} \end{cases}$$

اما ميانگين S_n برابر است با

$$\sigma_n = \frac{S_1 + S_2 + \cdots S_n}{n}$$

در نتیجه ،

$$\sigma_n \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) & \text{اگر n فرد باشد} \\ \frac{1}{2} & \text{اگر n زوج باشد} \end{cases}$$

تعریف. فرض کنید $S_n = a_1 + a_2 + \dots a_n$ و

$$\sigma_n = \frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_n}{n}$$

در این صورت گوییم $\{\sigma_n\}$ $(C,1)-$ میانگین S_n است و اگر $\sigma_n \to A$

گوییم $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ، $(C,1)-$ جمع پذیر به A است

تعريف. فرض كنيد $\{S_n\}$ دنباله مجموع nجمله اول يك سري فوريه

باشد. در اين صورت دنباله $\{\sigma_n\}$ را چنين تعريف مي كنيم :

$$\sigma_n(x)=\frac{S_0(x)+S_1(x)+\ldots+S_{n-1}(x)}{x}$$

توجه كنيد كه در اين حالت جمله اول صفر است

تعريف. فرض كنيد $\{\varphi_n\}$ دنباله اي از توابع مختلط انتگرال پذير بر $[a,b]$ بازه باشد به طوري كه

$$\int_a^b \varphi_n(x)\overline{\varphi_m(x)}\,dx = \begin{cases} ۰ & (n \neq m) \\ ۱ & (n = m) \end{cases}$$

در اين صورت $\Phi = \{\varphi_n\}$ يك دستگاه يكا متعامد مي ناميم

الف) خانواده

$$T=\left\{\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}},\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\frac{\cos ۲x}{\sqrt{۲\pi}},\frac{\sin ۲x}{\sqrt{\pi}},\ldots\right\}$$

يك خانواده يكا متعامد در بازه $[-\pi,\pi]$ است.

ب) به عنوان مثال ديگر ، خانواده توابع لژاندر $L = \{L_۰, L_۱, L_۲, \cdots\}$

را در نظر مي گيريم كه در آن

$$L_n(x) = \frac{۲n+۱}{۲} \cdot \frac{۱}{۲^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^۲ - ۱)^n \quad (-۱ \leq x \leq ۱, n = ۱, ۲, \ldots)$$

يك خانواده يكا متعامد بر بازه $[-۱, ۱]$ است .

ج)مثال ديگر خانواده توابع رادماخر است. اين خانواده به صورت

$$R = \{ R_{۰} , R_{۱} , \ldots \}$$

تعريف مي شود ، كه در آن

$$R_n(x) = sgn(\sin ۲^n \pi x) \qquad (۰ \le x \le ۱ , n = ۰, ۱ , ۲ , \ldots)$$

تابع علامت (sgn) را قبلا تعريف كرديم كه به صورت زيراست

$$sgn\,t=\begin{cases}1 & (t>0)\\ -1 & (t<0)\\ 0 & (t=0)\end{cases}$$

مي توان نشان داد كه اين خانواده يك خانواده يكا متعامد بر بازه $[0,1]$ است. بايد توجه داشت كه در حالتي كه z يك عدد مختلط باشد ، در اين صورت $sgn\,z=\frac{z}{|z|}$ تعريف مي شود

تعریف.فرض کنید تابع f بر بازه $[a,b]$ انتگرال پذیر و $\{\varphi_n\}$ دنباله اي

از توابع یکا متعامد بر $[a,b]$ باشد . اگر C_n را به صورت زیر تعریف

کنیم:

$$C_n = (f, \varphi_n) = \int_a^b f(x)\,\overline{\varphi_n(x)}\,dx \qquad (n = ۱, ۲, ۳, \ldots,)$$

در اين صورت C_n را ضريب فوريه تابع f نسبت به (φ_n) بر بازه $[a,b]$

مي ناميم. در اين صورت مي نويسيم :

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \, \varphi_n(x)$$

تعريف. اگر $\{\varphi_n\}$ خانواده يكا متعامد بر $[a,b]$ باشد در اين صورت

$$T_n(x) = d_1\varphi_1(x) + d_2\varphi_2(x) \ldots + d_n\varphi_n(x)$$

را يك $\varphi -$ چند جمله اي مي ناميم

قضيه (نامساوي بسل).اگر $\{\varphi_n\}$ يك خانواده يكا متعامد بر $[a,b]$ و f بر

انتگرال پذير باشد، آن گاه

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^{2} \leq \int_a^b |f(x)|^{2}\, dx$$

قضيه. اگر تابع f پيوسته و متناوب با دوره تناوب 2π باشد، آن گاه به ازاي هر $\varepsilon > 0$ يك چند جمله‌اي مثلثاتي مانند p وجود دارد به طوري كه به ازاي هر x

$$\left| p(x) - f(x) \right| < \varepsilon$$

دانشگاه پیام نور

قضیهٔ پارسوال. فرض کنید f و g دو تابع انتگرال پذیر ریمان و متناوب

با دورهٔ تناوب باشد، و

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad , \quad g(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n e^{inx}$$

آنگاه

$$\lim_{N\to\infty} \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - S_N(f;x) \right|^{۲} dx = ۰$$

الف)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,\overline{y_n}$$

ب)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

ج)

قضیه. اگر $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx$ موجود باشد، آن گاه

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\lambda x\,dx \underset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\lambda x\,dx \underset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

فضيه. به ازاي هر عدد حقيقي x داريم:

$$\int_{0}^{\alpha} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos u(t-x)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\sin \alpha(t - x)}{t - x} dt$$

قضيه. شرط لازم و كافي براي آنكه

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos u(t-x)\,dt = s$$

آن است كه

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_{0}^{\infty} *(t)\frac{\sin \alpha t}{t}\,dt = 0$$

قضيه. همگرايي انتگرال زير وقتي كه $\alpha \to \infty$ فقط بستگي به مقدار f

در همسايگي دلخواه $(x-\delta, x+\delta)$ دارد

$$\int_{0}^{\alpha} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos u(t-x)\, dt$$

قضيه. شرط لازم و كافي براير آنكه

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos u(t-x)\,dt = s$$

آن است كه   ي مثبت موجود باشد به طوري كه

$$\lim_{\alpha \to \infty} \int_{0}^{\delta} *(t)\frac{\sin \alpha t}{t}\,dt = 0$$

كه در آن

$$*(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2s$$

فصل هفتم

تابع گاما

هدف هاي رفتاري

تابع فاکتوريل

با تعريف ساده فاکتوريل به صورت زير آشنا هستيم

$$n! = ۱ \times ۲ \times \cdots \times n$$

اما اين تعريف را فقط در مورد اعداد طبيعي مي توان به کار برد

علاوه بر اين تعريف ديگري نيز به صورت زير داريم:

$$n! = \int_{۰}^{\infty} e^{-t} t^{n} dt \qquad (n \in N)$$

تابع گاما

تابع گاما كه تعميمي از اين تابع در نظر گرفته مي شود به صورت زير تعريف مي شود:

$$\Gamma(x)=\int_{0}^{\infty} e^{-t}\, t^{x-1}\,dt \qquad (x>0)$$

حال بايد ديد آيا اين تعريف با معني است؟

براي پاسخ به اين سوال دو انتگرال زير را بررسي ميکنيم:

دانشگاه پیام نور

و

$$\int_{1}^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \qquad \int_{0}^{1} e^{-t} t^{x-1} dt$$

در مورد انتگرال اول داریم:

$$\int_{a}^{1} e^{-t} t^{x-1} dx < \int_{a}^{1} t^{x-1} dt = \frac{t^x}{x} \Big|_{a}^{1} = \frac{1}{x} - \frac{a^x}{x}$$

که با میل کردن به صفر به همگراست یعني انتگرال اول همگراست

قضیه

$$\Gamma(x+۱)=x\Gamma(x) \qquad (x>۰)$$

برهان: از انتگرال گیری جز به جز داریم

$$\int_{\alpha}^{T} e^{-t}t^{x}dt=\int_{\alpha}^{T} t^{x}d(-e^{-t})$$

$$=-t^{x}e^{-t}\Big|_{a}^{T}+x\int_{a}^{T}e^{-t}$$

$$= a^{x} e^{-a} - T^{x} e^{-T} + x\int_{a}^{T} e^{-t} t^{x-1} dt$$

حال وقتی $a \to ۰$ و $T \to +\infty$ طرف چپ به $\Gamma(x+۱)$ میل می کند در حالی

که در طرف راست جملات اول و دوم به طرف صفر و جمله سوم به $x\Gamma(x)$

میل میکند. از این رو،

$$\Gamma(x+۱) = x\Gamma(x)$$

نتیجه. اگر $x > 0$ و n یک عدد طبیعی باشد،آن گاه

$$\Gamma(x+n) = (x+n-1)\Gamma(x+n-1)$$

$$= (x+n-1)(x+n-2)\Gamma(x+n-2)$$

$$= \ldots = (x+n-1)\ldots x\Gamma(x)$$

(الف) نتیجه. $\Gamma(1)=1$ و $\Gamma(n+1)=n!$

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-t}dt=1$$

با جایگزینی $x=1$ داریم:

$$\Gamma(n+1)=n(n-1)(n-2)\ldots 2\Gamma(1)=n!$$

(ب) قضیه. $\log \Gamma(x)$ محدب است

www.salampnu.com

سایت مرجع دانشجوی پیام نور

- ✓ نمونه سوالات پیام نور : بیش از ۱۱۰ هزار نمونه سوال همراه با پاسخنامه تستی و تشریحی
- ✓ کتاب ، جزوه و خلاصه دروس
- ✓ برنامه امتحانات
- ✓ منابع و لیست دروس هر ترم
- ✓ دانلود کاملا رایگان بیش از ۱۴۰ هزار فایل مختص دانشجویان پیام نور

www.salampnu.com