www.salampnu.com

سایت مرجع دانشجوی پیام نور

- ✓ نمونه سوالات پیام نور : بیش از ۱۱۰ هزار نمونه سوال همراه با پاسخنامه تستی و تشریحی
- ✓ کتاب ، جزوه و خلاصه دروس
- ✓ برنامه امتحانات
- ✓ منابع و لیست دروس هر ترم
- ✓ دانلود کاملا رایگان بیش از ۱۴۰ هزار فایل مختص دانشجویان پیام نور

www.salampnu.com

بسم الله
الرحمن
الرحيم

آنالیز ریاضی ۲ رشته ریاضی و آمار

نام کتاب : آنالیز ریاضی ۲

مولف : دکتر علیرضا مدقالچی

تعداد واحد درسی : ٤ واحد

تعداد واحد نظری : ٤ واحد

از سری دروس :

۴ واحدی

تخصصی الزامی رشته ریاضی

اختیاری رشته آمار

تهیه کننده : حمید شجاعی

گروه ریاضی مرکز کرمان

فهرست

اهداف کلی درس

فصل اول

- ✓ اهداف رفتاری فصل اول
- ✓ تعریف افراز
- ✓ تعریف نرم افراز
- ✓ تعریف مجموع پائینی و بالائی ریمان – استیلتیس
- ✓ رابطه بین مجموع بالائی و پائینی

- تعریف انتگرال بالائی و پائینی
- تعریف انتگرال ریمان–استیلتیس
- تعریف انتگرال ریمان
- شرط ریمان برای انتگرالپذیری
- خواص انتگرال
- مثال از توابع ناپیوسته انتگرالپذیر
- خاصیت خطی بودن انتگرالها
- مشتق گیری از انتگرال

- مثالهائی از توابع انتگرال ناپذیر
- رابطه بین انتگرال ریمان و ریمان – استیلتیس
- قضیه اول مقدار میانگین برای انتگرال
- اولین قضیه اساسی حسابان
- دومین قضیه اساسی حسابان
- انتگرالپذیری به صورت جزء به جزء
- توابع پله ای
- نامساوی هولدر
- تغییر متغیر

فصل دوم

- اهداف رفتاری فصل دوم
- تعریف انتگرالهای ناسره نوع اول
- خواص انتگرال ناسره نوع اول
- شرط کوشی برای همگرائی انتگرال ناسره
- مقایسه دو انتگرال ناسره

فصل سوم

- اهداف رفتاری فصل سوم
- تعریف تابع با تغییر کراندار
- مثال از تابعی که با تغییر کراندار نمی باشد .
- تعریف تغییر کلی
- انتگرالپذیری از توابع بردار
- خمهای طولپذیر
- تعریف خم بسته
- تعریف قوس
- محاسبه طول قوس

فصل چهارم

- اهداف رفتاری فصل چهارم
- تعریف همگرائی نقطه وار
- تعریف همگرائی یکنواخت
- شرایط همگرائی یکنواخت
- شرط کوشی برای همگرائی یکنواخت
- همگرائی یکنواخت و پیوستگی
- همگرائی یکنواخت و انتگرال

- ✓ همگرائی یکنواخت و مشتق پذیری
- ✓ قضیه دینی
- ✓ سریهای توابع
- ✓ شرط کوشی برای همگرائی یکنواخت سری توانی
- ✓ آزمونهای همگرائی یکنواخت سریهای توانی
- ✓ آزمون آبل
- ✓ آزمون دیریکله
- ✓ توابع پیوسته همه جا مشتق پذیر

- قضیه وایرشتراس
- همپیوستگی
- دنباله توابع نقطه وار کراندار
- دنباله توابع یکنواخت کراندار
- تعریف همپیوستگی
- قضیه آرزولا-اسکولی
- تعریف جبر توابع
- قضیه استون - وایرشتراس

فصل پنجم

- ✓ اهداف رفتاری پنجم
- ✓ تعریف سری توانی
- ✓ تعریف شعاع همگرائی
- ✓ قضیه پیدا کردن شعاع همگراییٔ
- ✓ قضیه آبل
- ✓ بسط تیلور

- توابع خاص
- توابع نمائی
- تعریف e
- توابع لگاریتمی
- توابع مثلثاتی
- تعریف π

اهداف کلی درس

1. انتگرالهای ریمان-استیلتیس
2. انتگرالهای ناسره
3. توابع با تغییر محدود
4. دنباله ها و سریهای توابع
5. سریهای توانی و توابع خاص

فصل اول

- شناخت و معرفی انتگرال ریمان – استیلیتس
- تعریف افزار یک بازه
- شناخت جمع بالائی و پائینی یک تابع
- تعریف انتگرال بالائی و پائینی
- تعریف انتگرال ریمان – استیلتیس

اهداف رفتاری فصل ۱

- شناخت افزار یک بازه بسته
- تعریف مجموعه های بالائی و پائینی ریمان – استیلتیس
- تعریف انتگرال بالائی و پائینی
- رابطه بین مجموعه های بالائی و پائینی
- تعریف انتگرال ریمان – استیلتیس
- تعریف توابع انتگرالپذیر

- شرط لازم و کافی برای داشتن انتگرال ریمان- استیلتیس
- شرط ریمان در مورد توابع انتگرال پذیر
- محاسبه انتگرال گیری
- بررسی خواص انتگرال
- تعریف و کاربرد قضایای حسابان
- رابطه بین انتگرال و مشتق

- روش انتگرالگیری جزء به جزء
- اولین و دومین قضیه مقدار میانگین برای انتگرال
- توابع پله ای و انتگرالگیری
- تغییر متغیر در انتگرالهای
- مشتق گیری از انتگرال

قبل از اینکه وارد بحث انتگرالها گردیم به چند تعریف زیر توجه نمائید

۱,۱ تعریف: فرض کنید $[a,b]$ یک بازه بسته باشد مجموعه

$$P=\{a=x_0,x_1,\ldots x_{n-1},x_n=b\}$$

را یک افرازبازه $[a,b]$ می نامند در صورتیکه

$$x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n$$

مجموعه افرازهای $[a,b]$ را به $p[a,b]$ نمایش می دهیم

و $\{a=x_0, b=x_1\}$ یک عضو $p[a,b]$ می باشد .

1.2تعریف: اگر $p \in p[a,b]$ در این صورت تعریف می کنیم

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

و نرم افراز P را به علامت $\|p\|$ نمایش داده و تعریف میکنیم

$$\|p\| = Max\{\Delta x_i : i = 1,2,..., n\}$$

1.3تعریف : فرض کنید که تابع f بر بازه $[a,b]$ کراندار و P افزاری

از $[a,b]$ باشد اعداد $M_i(f)$, $m_i(f)$ رابصورت زیر تعریف میکنیم

$$M_i(f)=\sup\{f(x): x_{i-1}\leq x\leq x_i\}$$

$$m_i(f)=\inf\{f(x): x_{i-1}\leq x\leq x_i\}$$

1.4تعریف :اگر f تابعی کراندار و α تابعی صعودی بر $[a,b]$

تعریف شده باشد. و P افرازی از $[a,b]$ باشد مجموعه های

بالائی و مجموعه های پائینی ریمان – استیلیتس را به ترتیب به

$L(p,f,\alpha),U(p,f,\alpha)$ نمایش داده و به صورت زیر

تعریف می نمائیم.

$$U(p,f,p)=\sum_{i=1}^{n} M_i(f)\Delta\alpha_i \quad , \quad L(p,f,p)=\sum_{i=1}^{n} m_i(f)\Delta\alpha_i$$

که در آن : $\Delta\alpha_i = \alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})$

اگر $\alpha(x)=x$ تابع همانی باشد $L(p,f,\alpha),U(p,f,\alpha)$

را به ترتیب ، به $L(p,f),U(p,f)$ نشان می دهیم .

1.5 تعریف : افراز P' را ظریفتر از p می نامیم و با

علامت $p \subseteq p'$ نمایش می دهیم. اگر افراز p' را بتوان

از افراز p با اضافه کردن نقاط دیگر بدست آورد .

در این فصل همواره f تابع کراندار و α تابعی صعودی

بر $[a,b]$ می باشد.

۱.۱قضیه : الف) اگر p_1 و p_2 دو افراز از $[a,b]$ باشد و

$p_1 \subseteq p_2$ (p_2 ظریفتر از p_1 باشد) آنگاه

$$L(p_1, f, \alpha) \le L(p_2, f, \alpha) \quad , \quad U(p_2, f, \alpha) \le U(p_1, f, \alpha)$$

ب)اگر $Q\,, P$ دو افراز از $[a,b]$ باشد داریم :

$$L(p, f, \alpha) \le U(Q, f, \alpha)$$

خلاصه اثبات: در اثبات این قضیه اول فرض می کنیم که افراز p_2

فقط یک نقطه بیش از افراز p_1 دارد و در حالت کلی از استقراءٍ

استفاده می نماییم .به این مطلب هم توجه می کنیم که اگر بازه

تعریف یک تابع کوچک گردد آنگاه سوپریمم تابع کم و اینفیموم

تابع زیاد می گردد .

اثبات الف) فرض کنید $P_2 = P_1 \cup \{c\}$ که در آن $x_{k-1} < c < x_k$

و فرض کنید

$$M'_k = \sup_{x_{k-1} \le x \le c} f(x) \qquad M''_k = \sup_{c \le x \le x_k} f(x)$$

چون $[x_{k-1}, c] \subseteq [x_{k-1}, x_k]$ و $[c, x_k] \subseteq [x_{k-1}, x_k]$

بنا براین $M'_k \le M_k$ و $M''_k \le M_k$ پس

$$L(p_1, f, \alpha) = \sum_{1}^{n} M_i \left(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})\right) =$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} M_i \left(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})\right) + M_k \left(\alpha(x_k) - \alpha(c)\right) + M_k \left(\alpha(c) - \alpha(x_{i-1})\right) \geq$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} M_i \left(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})\right) + M'_k \left(\alpha(x_k) - \alpha(c)\right) + M''_k \left(\alpha(c) - \alpha(x_{i-1})\right) =$$

$$L(p_2, f, \alpha)$$

که این را برای تعداد متناهی نقطه که p_2 بیشتر از p_1 داشته باشد

می توان تعمیم داد برای U به همین طریق است .

برای اثبات ب) قضیه اگر P , Q افرازهایی از بازه $[a,b]$

باشند آنگاه $P_1 = p \cup Q$ نیز افرازی از $[a,b]$

می باشد این افراز را تظریف مشترک P , Q می خوانیم

اگر P_1 تظریف مشترک P, Q باشد بنا به الف داریم

$$L(p,f,\alpha) \le L(p_1,f,\alpha) \le U(p_1,f,\alpha \le U(Q,f,\alpha)$$

۱,۱نتیجه : اگر $m=\inf\limits_{a\le x\le b} f(x)$ و $M=\sup\limits_{a\le x\le b} f(x)$ آنگاه

بازای هر $P\in p[a,b]$ داریم :

$$m[\alpha(b)-\alpha(a)]\le L(P,f,\alpha)\le U(P,f,\alpha)\le M[\alpha(b)-\alpha(a)]$$

با توجه به اینکه $\{a,b\}$ افرازی از بازه $[a,b]$ می باشد

با توجه به الف قضیه قبل حکم برقرار می شود

1.6.تعریف : اگر f بر $[a,b]$ کراندار و α بر $[a,b]$

صعودی باشد آنگاه انتگرالهای بالا $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ و پائین

$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ تابع f را نسبت به α چنین تعریف می نمائیم

.

$$\overline{\int_a^b} f d\alpha = \sup_p L(p, f, \alpha) \quad , \underline{\int_a^b} f d\alpha = \inf_p U(p, f, \alpha)$$

تذکر:باتوجه به قضیه ب −۱ به ازای افراز $P_0=\{a,b\}$ مقدار

$L(P_0, f, \alpha)$ یک کران پائین برای مجموعه

$\{U(P_0, f, \alpha) : p \in P[a,b]\}$ است بالنتیجه $\inf_p U(P_0, f, \alpha)$

وجود دارد (عدد حقیقی است) .

بهمین ترتیب $U(P_0, f, \alpha)$ کران بالا برای مجموعه

$\{L(P, f, \alpha) : p \in p[a,b]\}$ می باشد و این نشاندهنده آن

است که $\underline{\int_a^b} f(x)\, dx$ نیز وجود دارد بعبارت دیگر

مقدار حقیقی است.

1.2نتیجه:همواره داریم: $\underline{\int_a^b} f\,d\alpha \le \overline{\int_a^b} f\,d\alpha$.

ثبات : بنا به قضیه ۱ برای افرازهای Q, P از بازه $[a,b]$

داریم $L(p,f,\alpha)\le U(Q,f,\alpha)$ اگر سوپریموم روی L

بگیریم داریم $L(p,f,\alpha)\le \underline{\int_a^b} f\,d\alpha \le U(Q,f,\alpha)$

و اکنون اگر از U اینفیموم, بگیریم حکم ثابت می شود

مثال 1.1: اگر تابع f بر بازه $[0,1]$ با ضابطه زیر

تعریف شده است .

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\in Q\\ 0 & x\notin Q\end{cases}$$

و α تابع اکیدا" صعودی و دلخواهی بر $[0,1]$ باشد و اگر P

افراز دلخواه از $[0,1]$ در نظر بگیریم در این صورت

در بازه جزء $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ هم عدد حقیقی اصم وجود دارد

وهم عدد حقیقی گویا بالنتیجه : $m_i(f) = 0 \quad , \quad M_i(f) = 1$

بنابراین :

$$U(P,f,\alpha)=\sum_{i=1}^{n} M_i(f)\Delta\alpha_u=\sum_{i=1}^{n}\Delta\alpha_i=\sum_{i=1}^{n}\left[\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})\right]=\alpha(x_n)-\alpha(x)=\alpha(1)-\alpha(0)$$

$$L(P,f,\alpha)=\sum_{i=1}^{n} m_i(f)\Delta\alpha_i=\sum_{i=1}^{n} 0\,\Delta\alpha_i=0$$

بالنتیجه:

$$\underline{\int_0^1} f\,d\alpha = \sup_p L(p, f, \alpha) = \sup_p \{0\}$$

$$\overline{\int_0^1} f\,d\alpha = \inf_p U(p, f, \alpha) = \inf_p \{\alpha(1) - \alpha(0)\} =$$

$$\alpha(1) - \alpha(0)$$

همانطوریکه در مثال بالا می بینیم با توجه به اینکه α اکیدا”صعودی

است پس $a(1) - \alpha(0) \neq 0$ بالنتیجه

$$\underline{\int_0^1} f\,d\alpha \neq \overline{\int_0^1} f\,d\alpha$$

1.7تعریف : چنانچه $\overline{\int_a^b} fd\alpha = \underline{\int_a^b} fd\alpha$ (برای f کراندار و

α صعودی بر $[0,1]$) در این صورت می گوئیم تابع f بر

$[a,b]$ انتگرالپذیر (ریمان – استیلتیس) نسبت به α می باشد

ومی نویسیم $f \in R(\alpha)$

مقدار انتگرال را با $\int_a^b f\,d\alpha$ نمایش می دهیم و قرار میدهیم

$$\overline{\int_a^b} f\,d\alpha = \underline{\int_a^b} f\,d\alpha = \int_a^b f\,d\alpha$$

طبق قرارداد $\int_a^a f\,d\alpha = 0 \quad , \quad \int_b^a f\,d\alpha = -\int_a^b f\,d\alpha$

درمثال ۱ دیدیم که $\underline{\int_0^1} f\,d\alpha \neq \overline{\int_0^1} f\,d\alpha$ پس $f \notin R(\alpha)$

1.8تعریف :اگر $\alpha(x) = x$, $f \in R(\alpha)$ آنگاه برای سادگی

می نویسیم $f \in R$ و می گوئیم f انتگرال پذیر ریمان است در

این حالت $\Delta\alpha_i$ را به Δx_i نمایش می دهیم .

مثال102: اگر $f(x)=x$ بر بازه $[0,1]$ تعریف شده باشد

ثابت کنید $f \in R$ بر $[0,1]$.

حل : فرض کنید $P_n=\left\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\ldots\frac{n-1}{n},1\right\}$ افزاری از $[0,1]$

باشد دراین صورت : $M_i=\frac{i}{n}$, $M_i=\frac{i-1}{n}$, $\Delta x_i=\frac{1}{n}$

پس
$$U(p_n, f) = \sum_{i=1}^{n} M(f)\Delta\alpha_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}.\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{n+1}{2n}$$

$$L(P_n, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(f)\Delta\alpha_i = \sum_{i=n}^{n} \frac{i-1}{n}.\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(i-1) = \frac{n-1}{2n}$$

در نتیجه

$$\frac{n-1}{2n} \le \underline{\int_0^1} x\,dx \le \overline{\int_0^1} x\,dx \le \frac{n+1}{2n}$$

که وقتی $n \to \infty$ جدول حد دو طرف برابر با $\frac{1}{2}$ است پس

$$\overline{\int_0^1} x\,dx = \underline{\int_0^1} x\,dx = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$$

یک شرط برای آزمایش اینکه آیا $f \in R(\alpha)$ ؟

با شرط ریمان می توان تشخیص دهیم که f تابع نسبت.

به

$$[a,b] \qquad \alpha$$

تابعی مانند بر انتگرالپذیر می باشد یا خیر؟

با یک قضیه این شرط بیان می گردد.

۱.۲قضیه: (شرط ریمان) : شرط لازم و کافی برای آنکه $f \in R(\alpha)$

آن است که :

$$\forall \varepsilon \exists P_\varepsilon \forall P (P_\varepsilon \subseteq P \Rightarrow U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \varepsilon)$$

اثبات: (لزوم) فرض کنیم $f \in R(\alpha)$ و ε مثبت دلخواه باشد.

با توجه به خاصیت مشخصه سوپریموم و اینفیموم افرازهای P'', P'

وجود دارد که : $U(p', f, \alpha) < \int_a^b f d\alpha + \frac{\varepsilon}{2} \;\; , \int_a^b f d\alpha - \frac{\varepsilon}{2} < L(p'', f, \alpha)$

اگر $P = P' \cup P''$ داریم

$$U(p, f, \alpha) - L(p, f, \alpha) \le U(p', f, \alpha) - L(p'', f, \alpha) < \varepsilon$$

که در این صورت لزوم برقرار می گردد.

(کفایت). اگر شرط ریمان برقرار باشد بازای هر $\varepsilon > 0$ داریم:

$$\overline{\int_a^b} f d\alpha \le U(p, f, \alpha) \le L(Q, f, \alpha) + \varepsilon \le \underline{\int_a^b} f d\alpha$$

که نتیجه می دهد

$$\overline{\int_a^b} f d\alpha \le \underline{\int_a^b} f d\alpha$$

با توجه به $\underline{\int_a^b} f d\alpha \le \overline{\int_a^b} f d\alpha$ تساوی برقرار میگردد.

۱.۱لم: اگر f بر بازه کراندار باشد آنگاه

$$M_i - m_i = \sup\left\{ \left| f(x) - f(y) \right| : x_{i-1} \le x \ , \ y \le x_i \right\}$$

برای اثبات این لم اولا از خاصیت سوپریموم و اینفیموم استفاده نماییم

ثانیا از رابطه زیرکه اگر: $x_{i-1} \le x, y \le x_i$ انگاه داریم

$$m_i \le f(x), f(y) \le M_i$$

۱.۳قضیه : اگر f بر بازه $[a,b]$ پیوسته و α صعودی

باشد آنگاه $f \in R(\alpha)$ بر $[a,b]$.

اثبات: اگر α ثابت باشد حکم بدیهی است در غیر اینصورت با

توجه به اینکه f بر بازه فشرده $[a,b]$ پیوسته است پس

پیوسته یکنواخت است بنابراین

رابطه زیر را داریم

$$\forall\, \varepsilon \exists \partial \forall\ u, v(|u - v| < \partial \Rightarrow |f(u) - f(v)| < \frac{\varepsilon}{2[a(b) - a(a)]})$$

حال اگر افراز p طوری در نظر بگیریم بطوریکه $\|P\| < \delta$

با توجه به لم ۱ و رابطه فوق نتیجه می گیریم

$$M_i - m_I \leq \frac{\varepsilon}{2[a(b)-a(a)]}$$

با ضرب طرفین در $\Delta\alpha_i$ و جمع آنها و روابط فوق نتیجه

حاصل می شود $U(p,f,\alpha) - L(p,f,\alpha) < \varepsilon$

که نشان دهنده شرط ریمان است پس $f \in R(\alpha)$

۱.۹ تعریف: اگر f تابعی کراندار و α تابعی صعودی بر

$[a,b]$ باشد و P افرازی از $[a,b]$ باشد و همچنین

$t_R \in [x_{R-1}, x_R]$ آنگاه تعریف می کنیم

$$S(p, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} f(t_R)\Delta\alpha_R$$

و آنرا مجموع ریمان نسبت به می خوانیم

۱.٤قضیه: بازای هر افراز P از $[a,b]$ داریم

$$L(p,f,\alpha)\le S(p,f,\alpha)\le U(p,f,\alpha)$$

اثبات: با توجه به اینکه $m_i \le f(x)\le M_i$ بازای $x\in[x_{i-1},x_i]$

با ضرب طرفین در $\Delta\alpha_i$ وجمع آنها بدست می آوریم:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta\alpha_i \le \sum_{i=1}^{n} f(x)\Delta\alpha_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta\alpha_i$$

که همان حکم است.

۱.۵قضیه: اگر f بر $[a,b]$ صعودی و α بر $[a,b]$

پیوسته و صعودی باشد آنگاه $f \in R(\alpha)$.

خلاصه اثبات:بازای هر افراز P نظر به صعودی بودن f

پس $M_i = f(x_i) \quad , \quad m_i = f(x_{i-1})$

$$U(p,f,\alpha)-L(p,f,\alpha)=\sum\{f(x_i)-f(x_{i-1})\}\Delta\alpha_i$$

چون α بر بازه فشرده $[a,b]$ پیوسته یکنواخت است بنابراین

$$\forall \varepsilon \exists \delta \forall u,v \ (|u-v| < \delta \Rightarrow |\alpha(u)-\alpha(v)| < \varepsilon$$

اگر افراز P طوری باشد که $\|P\| < \delta$ در این صورت $\Delta\alpha_i < \varepsilon$

پس

$$U(p,f,\alpha) - L(p,f,\alpha) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta\alpha_i <$$

$$\varepsilon \sum_{i=1}^{n} \{ f(x_i) - f(x_{i-1}) = \varepsilon \{ f(b) - f(a) \}$$

یعنی $f \in R(\alpha)$.

در قضیه ۶ یک شرط برای f و α در نظر می گیریم که

$$f \notin R(\alpha)$$

۱.۶ قضیه: اگر توابع f و α در نقطه x_0 از بازه $[a,b]$

هر دو از راست(یا هر دو از چپ) ناپیوسته باشند آنگاه

$$f \notin R(\alpha)$$

اثبات: چون توابع $f\ ,\ \alpha$ در x_0 ناپیوسته هستند بنا به تعریف داریم:

$$\exists \varepsilon_1 \forall \delta \exists x[x_0 < x < x_0 + \delta \ \& \left| f(x) - f(x_0) > \varepsilon_1 \right|$$

$$\exists \varepsilon_2 \forall \delta \exists y[x_0 < y < x_0 + \delta \ \& \left| \alpha(y) - \alpha(x_0) > \varepsilon_2 \right|$$

فرض کنید $x < y$ اگر P افرازی باشد که در آن

و $x_k = x$ در اینصورت $x_{k+1} = y$

.

$$U(p, f, \alpha) - L(p, f, \alpha) = \sum (M_i - m_i)\Delta\alpha_i$$

$$\geq (M_{k+1} - m_{k+1})\Delta\alpha_{k+1} \geq \varepsilon_1\varepsilon_2$$

پس شرط کوشی برقرار نیست و $f \notin R(\alpha)$

در قضیه زیر ملاحظه می کنیم که اگر f از چپ در نقطه x_0

و α از راست در نقطه x_0 از بازه بسته $[a,b]$

ناپیوسته باشد و یا بلعکس آنگاه $f \in R(\alpha)$

اما اگر هر دو تابع در آن نقطه از چپ (و یا از راست)

ناپیوسته باشند ممکن است که $f \notin R(\alpha)$.

که میتوان را در این ارتباط قضیه و مثال زیر را بیان نمود.

۱.۷قضیه :فرض کنید تابع f کراندار و به غیر از تعداد متناهی

نقطه از نقاط داخلی بازه $[a,b]$ پیوسته و تابع α در نقاط

ناپیوستگی f یک تابع پیوسته باشد آنگاه : $f \in R(\alpha)$

اگر به مثال صفحه بعد توجه کنیم خاصیت مهمتری نیز

وجود دارد که محک لبگ برای انتگرال پذیری ریمان

می باشد.

۱۰۳مثال: تابع f را با ضابطه زیر تعریف می کنیم

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x\notin Q \\ \dfrac{1}{n} & x=\dfrac{m}{n} \quad , \quad (m,n)=1 \end{cases}$$

تابع f در نقاط اصم بازه $[0\ ,1\ ]$ پیوسته و در نقاط گویا آن بازه

تابعی ناپیوسته است تابع f بر بازه $[0,1]$ انتگرالپذیر ریمان است .

بعبارت دیگر $f\in R$

هر چند این تابع در نقاط نامتناهی ناپیوسته می باشد

ولی در آن نقاط تابع $\alpha(x) = x$ پیوسته می باشد.

خواص انتگرال

انتگرالهای ریمان-استیلتیس دارای خواص زیادی می باشد .

خاصیت خطی بودن یکی از این خواص است در زیر خاصیت

از اهم خواص انتگرال را می آوریم .

۱.۸ قضیه : اگر $f,g \in R(\alpha)$ بر $[a,b]$ و $c \in R$ (c عددی

حقیقی) آنگاه احکام زیر برقرار است :

الف) $f+g \in R(\alpha)$ و داریم

$$\int_a^b (f+g)\,d\alpha = \int_a^b f\,d\alpha + \int_a^b g\,d\alpha$$

ب) $cf \in R(\alpha)$ و $\int_a^b c\, f\, d\alpha = c\int_a^b f\, d\alpha$

ج) بعلاوه آن بر بازه $[a,b]$ اگر $f \leq g$ آنگاه

$$\int_a^b fd\alpha \leq \int_a^b gd\alpha$$

د) $fg \in R(\alpha)$

دو خاصیت (الف و ب) فوق خطی بودن عملگرد انتگرالگیری را

نشان می دهد .

توجه داریم که در قسمت (د) هیچ رابطه ای بین $\int_a^b g d\alpha$ ،

$\int_a^b f d\alpha$ و $\int_a^b fg d\alpha$ وجود ندارد .

اثبات: الف) اگر $h = f + g$ باشد داریم: بگیریم و P افرازی $[a,b]$

$$m_k(f)+m_k(g)\leq f(x)+g(x)=h(x)\leq M_k(f)+M_k(g)$$

در نتیجه

$$m_k(f)+m_k(g)\leq m_k(h)\leq M_k(h)\leq M_k(f)+M_k(g)$$

اگر این نامساوی در $\Delta\alpha_i$ ضرب و سپس جمع نماییم بدست

می آوریم

$$L(p, f, \alpha) + L(P, g, \alpha) \leq L(p, h, \alpha) \leq U(p, h, \alpha)$$

$$\leq U(p, f, \alpha) + U(P, g, \alpha)$$

که با استفاده از خاصیت سوپریموم و اینفیموم شرط کوشی را میتوان

نتیجه گرفت.

ب) اگر $c=0$ حکم برقرار است . فرض کنید $c>0$ با توجه به

اینکه $$L(p,cf,\alpha)=\sum_{k=1}^{n} m_k(cf)\Delta\alpha_k = c\sum_{k=1}^{n} m_k(f)\Delta\alpha_k = cL(p,f,\alpha)$$

و به همین ترتیب $$U(p,cf,\alpha)=cU(p,f,\alpha)$$

با استفاده از شرط کوشی حکم برقرار می گردد.

ج)اگر $h \geq 0$ آنگاه $m_i(f) \geq 0$ و از اینکه $\Delta\alpha_i$ نتیجه

می شود که $L(p, f, \alpha) \geq 0$

پس $\underline{\int_a^b} fd\alpha \geq 0$ چون $f \in R(\alpha)$ بنابراین $\int_a^b fd\alpha \geq 0$

حال اگر $f \geq g$ آنگاه $f - g \geq 0$ و بسادگی حکم را

می توان نتیجه گرفت .

۱.۹قضیه : اگر $f \in R(\alpha)$ و $g \in R(\beta)$ بر $[a,b]$ و $c \geq 0$

عدد حقیقی است احکام زیر برقراراست :

الف) $f \in R(\alpha + \beta)$ و $\int_a^b fd(\alpha + \beta) = \int_a^b fd\alpha + \int_a^b gd\beta$

ب) $\int_a^b fd\,(cx) = c\int_a^b fd\,\alpha$

در قضیه فوق قسمت ب با توجه به اینکه $c \geq 0$ تابع $c\alpha$

صعودی باقی می ماند.

اثبات این قضیه همانند قضیه است.

۱.۱۰ قضیه : اگر $f \in R(\alpha)$ بربازه $[a,b]$ و $a \le c \le b$

آنگاه $f \in R(\alpha)$ بر بازه های $[a,c]$ و $[c,b]$ و داریم

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^c f d\alpha + \int_c^b f d\alpha$$

اثبات: از اینکه $f \in R(\alpha)$ بر $[a,b]$ پس

$$\forall \varepsilon \exists p_{\varepsilon} \forall p (p_{\varepsilon} \subseteq p \Rightarrow U(p,f,\alpha) - L(p,f,\alpha) < \varepsilon$$

اگر $P'_{\varepsilon} = (p_{\varepsilon} \bigcup \{c\}) \bigcap [a,c]$ و P ظریفتر از P'_{ε} از بازه $[a,c]$

باشد آنگاه $P_0 = P' \cup P_{\varepsilon}$ افرازی از $[a,b]$ و $P' \subset P$ که

نتیجه می دهد $U(p, f, \alpha) - L(p, f, \alpha) < \varepsilon)$ در بازه

$[a,c]$ یعنی $f \in R(\alpha)$ بر $[a,c]$.

و به طریق مشابه ثابت می شود که $f \in R(\alpha)$ بر $[c,b]$.

برای اثبات $\int_a^b f d\alpha = \int_a^c f d\alpha + \int_c^b f d\alpha$ افرازهای

$p_1 = [(p \cup \{c\}] \cap [a,c]$ و $p_2 = [(p \cup \{c\}] \cap [c,b]$

بترتیب افرازی از $[a,c]$ و $[c,b]$ می باشند وداریم

$$U(p, f, \alpha) = U(p_1, f, \alpha) + U(p_2, f, \alpha)$$

$$L(p, f, \alpha) = L(p_1, f, \alpha) + L(p_2, f, \alpha)$$

بنابراین

$$U(p, f, \alpha) \geq \int_a^c f d\alpha + \int_c^b f d\alpha$$

و

$$L(p, f, \alpha) \leq \int_a^c f d\alpha + \int_c^b f d\alpha$$

با گرفتن اینفیموم و سوپریموم بترتیب از طرفین دو رابطه بالا

داریم

$$\int_a^c f d\alpha + \int_c^b f d\alpha \le \int_a^b f d\alpha \le \int_a^c f d\alpha + \int_c^b f d\alpha$$

چون دو طرف نامساوی برابر هستند حکم ثابت می شود.

اکنون سوالی که مطرح می باشد این است که اگر دو تابع

انتگرال پذیر باشند آیا ترکیب دو تابع نیز انتگرالپذیر می باشند

البته درحالت کلی جواب منفی می باشد . در صفحه بعد مثالی از

این مورد می آوریم.

۱.٤ مثال: در مثال ۱.۳ دیدیم تابع f با ضابطه زیر تعریف گردد

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\notin Q\\ \dfrac{1}{n} & x=\dfrac{m}{n}\ ,\quad (m,n)=1\end{cases}$$

آنگاه $f\in R(\alpha)$ ولی $f\circ f$ که دارای ضابطه

$$f \circ f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & x = \dfrac{m}{n} \quad \text{و} \quad (m,n)=1 \\ 1 & x \notin Q \end{cases}$$

و $f \circ f$ در هیچ نقطه ای پیوسته نیست و از این رو .

$$fof \notin R$$

اما در قضیه زیر با اضافه کردن شرایطی می توان نتیجه مثبت را گرفت

۱.۱۱ قضیه : فرض کنید $f \in R(\alpha)$ بر $[a,b]$ و $m \leq f \leq M$

و تابع φ بر $[m, M]$ پیوسته باشد آنگاه تابع $\varphi \circ f \in R(\alpha)$

بر $[a,b]$.

۱.۱۲قضیه: اگر $f \in R(\alpha)$ آنگاه $|f| \in R(\alpha)$ و داریم

$$\left| \int_a^b f d\alpha \right| \le \int_a^b |f| d\alpha$$

اثبات: اگر تابع φ را با ضابطه $\varphi(t) = |t|$ تعریف کنیم

با استفاده ازقضیه قبل حکم ثابت می گردد. برای اثبات نامساوی

از نامساوی $-|f| \le f \le |f|$ استفاده نمایید.

1.13 قضیه : اگر $f, g \in R(\alpha)$ آنگاه $fg \in R(\alpha)$

اثبات :برای اثبات اگر در قضیه 1.11 فرض کنیم $\varphi(t) = t^2$

نتیجه می شود $(f-g)^2, (f+g)^2 \in R(\alpha)$

با توجه به قضیه ۱.۳

$$fg = \tfrac{1}{4}[(f+g)^2 - (f+g)^2 \in R(\alpha)$$

در مواردی که تابع α مشتق پذیر باشد می توان

قضیه زیر را بیان کرد. که رابط ای بین انتگرال ریمان

و انتگرال ریمان- استیلتیس است .

1.14قضیه : اگر α' مشتق تابع α موجود و انتگرال پذیر $(\alpha' \in R)$

ریمان باشد آنگاه $f \in R(\alpha)$ اگر فقط اگر $f\alpha' \in R$ و بعلاوه

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f(x)\alpha'(x)dx$$

محاسبه انتگرالها

همچنان که در ریاضی عمومی دیدیم هر انتگرال دارای یک مقدار

می باشد. برای محاسبه مقدار انتگرال اول ارتباط بین انتگرال گیری و

مشتق گیری که کاملا” مشخص است را در قضیه اول حسابان می بینیم .

۱.۱۵ قضیه (اولین قضیه مقدار میانگین) : اگر f بر $[a,b]$

پیوسته باشد آنگاه نقطه ای مانند C از بازه $[a\,,b]$ موجود

است بطوریکه $\int_a^b f d\alpha = f(c)[\alpha(b)-\alpha(a)]$.

اثبات:اگر $M=\sup_{a\le x\le b} f(x)$ و $m=\inf_{a\le x\le b} f(x)$ بنا به نتیجه ۱.۱

داریم

$$m\,[\alpha(b)-\alpha(a)]\le L(P,f,\alpha)\le U(P,f,\alpha)$$

$$\le M\,[\alpha(b)-\alpha(a)]$$

اگر $\alpha(b)=\alpha(a)$ حکم بدیهی است در غیر اینصورت بنا به

پیوستگی f و قضیه مقدار میانگین برای توابع $c \in [a,b]$

موجود است بطوریکه

$$\frac{1}{\alpha(b)-\alpha(a)}\int_a^b f d\alpha = f(c)$$

و این قضیه را ثابت می کند.

شرط پیوستگی f از شرایط اساسی قضیه بالا می باشد

در حالتی که پیوسته نباشد قضیه به صورت صفحه بعد

تعمیم می یابد .

۱.۱۶ قضیه : اگر $f \in R(\alpha)$ آنگاه عددی مانند λ موجود

است که $m \le \lambda \le M$ (m , M به ترتیب سوپریمم و

اینفیموم تابع f می باشند) بر بازه $[a,b]$ می باشد و

$$\int_a^b fd\alpha = \lambda[\alpha(b)-\alpha(a)]$$

اثبات:داریم $m\,[\alpha(b)-\alpha(a)] \le \int_a^b f\,d\alpha \le M\,[\alpha(b)-\alpha(a)]$

با فرض $\lambda = \frac{1}{\alpha(b)-\alpha(a)}\int_a^b f\,d\alpha = f(c)$ در حالت $\alpha(b) \ne \alpha(a)$

و $m < \lambda < M$ دلخواه در حالت $\alpha(b)=\alpha(a)$ حکم برقرار است

اکنون قضیه زیر که به قضیه مشتق گیری معروف است را بیان می کنیم

1.17قضیه : اگر

$$F(x)=\int_a^x f d\alpha \quad \text{و} \quad a \le x \le b \quad \text{و} \quad f \in R(\alpha)$$

تعریف کنیم آنگاه:

الف) اگر α در x_0 پیوسته باشد آنگاه F نیز در x_0 پیوسته است

ب) اگر f در x_0 پیوسته و α در x_0 مشتقپذیر باشد آنگاه F در x_0 مشتقپذیر است و

$$F'(x) = f(x_0)\alpha'(x_0)$$

اثبات:الف) از فرض و قضیه ۱.۱۶ عدد λ موجود است بطوریکه

$$F(x_0+h)-F(x_0)=\int_{x_0}^{x_0+h} f d\alpha=\lambda[\alpha(x_0+h)-\alpha(x_0)]$$

اگر $M_1=\max\{|M|,|m|\}$ آنگاه

$$|F(x_0+h)-F(x_0)|\le M_1=|\alpha(x_0+h)-\alpha(x_0)|$$

از پیوستگی α در x_0 حکم الف ثابت می شود

ب) از رابطه $M\,[\alpha(b)-\alpha(a)] \le \int_a^b f d\alpha \le m\,[\alpha(b)-\alpha(a)]$ و

$F(x_0+h)-F(x_0)=\int_{x_0}^{x_0+h} f d\alpha$ داریم:

$$m[\alpha(x_0+h)-\alpha(x_0)] \le F(x_0+h)-F(x_0)$$

$$(*)$$

$$\le M[\alpha(x_0+h)-\alpha(x_0)]$$

و از اینکه f در x_0 پیوسته است پس اگر آنگاه

$$\forall \varepsilon \exists \delta \forall x(|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon)$$

پس

$$f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon$$

اگر $x_0-\delta<x<x_0+\delta, 0<h<\delta$ آنگاه

$$f(x_0)-\varepsilon \le m \le M < f(x_0)+\varepsilon$$ بنابراین

$$[f(x_0)-\varepsilon]\frac{[\alpha(x_0+h)-\alpha(x_0)]}{h} \le \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}$$

$$\le [f(x_0)+\varepsilon]\frac{\alpha(x_0+h)-\alpha(x_0)}{h}$$

با توجه به رابطه فوق اگر $h \to 0+$ بدست می آوریم.

$$\lim_{h\to 0+}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=f(x_0)\alpha'(x_0)$$ به طریق مشابه

$$\lim_{h\to 0-}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=f(x_0)\alpha'(x_0)$$ و حکم ثابت می گردد.

نتیجه بعد که به قضیه اساسی حسابان معروف

است رابطه بین مشتق و انتگرال را بیان می کند

که عکس هم بنظر می رسند

۱.۳نتیجه (اولین قضیه اساسی حسابان) : اگر $f \in R$ و f

در نقطه x_0 پیوسته باشد و $F(x) = \int_a^x f(t)dt$

آنگاه F در x_0 مشتق پذیر است و $F'(x_0) = f(x_0)$

اثبات: با توجه به ب قضیه قبل برقرار است.

1.18 قضیه : (دومین قضیه اساسی حسابان) اگر $f \in R$ بر $[a,b]$

و اگر تابعی مشتقپذیر مانند F موجود باشد بطوریکه $F' = f$

آن گاه $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

اثبات: اگر P افرازی دلخواه باشد با توجه به قضیه مقدارمیانگین

در مشتق داریم:

$$F(b)-F(a)=\sum_{k=1}^{n}[F(x_k)-F(x_{k-1})]=\sum_{k=1}^{n}F'(t_k)\Delta x_k =$$

$$S(p,F',\alpha)=S(p,f,\alpha)\rightarrow\int_a^b fd\alpha$$

این قضیه مقدار انتگرال را بوسیله تابع F که در تابع

اولیه نامیده می شود می توان محاسبه نمود .

بعنوان نتیجه ای از این بحث قضیه زیر را به دو صورت

میآوریم.

۱.۱۹ (انتگرال گیری به روش جزءٍ به جزءٍ): فرض کنید F و G

بر $[a,b]$ مشتقپذیر باشند و $F' = f \in R$ و $G' = g \in R$

آنگاه

$$\int_a^b F(x)g(x)dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(x)G(x)dx$$

اثبات: فرض کنید $H(x) = F(x)G(x)$ ازاینرو

$$H'(x) = F'(x)G(x) + F(x)G'(x) = f(x)G(x) + F(x)g(x)$$

پس $H' \in R$ و با انتگرال گیری از رابطه فوق رابطه به

سادگی بدست می آید.

۱.۲۰ قضیه (صورت دیگری از انتگرال گیری به روش جزءٍ به جزءٍ)

اگر α و f هر دو بر $[a,b]$ صعودی باشند و $f \in R(\alpha)$

بر $[a,b]$ آنگاه $\alpha \in R(f)$ بر $[a,b]$ و داریم

$$\int_a^b f\,d\alpha + \int_a^b \alpha\,df = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a)$$

اثبات:(خلاصه) به ازای افراز P با یک محاسبه ساده داریم:

$$f(b)\alpha(b)-f(a)\alpha(a)-S(p,\alpha,f)=S(p',\alpha,f)$$

که در آن $P'=P\cup\{t_0,t_1,t_2,\dots,t_n\}$ چون $f\in R(\alpha)$ پس

$$\forall\,\varepsilon\exists p_\varepsilon\forall p[\,p_\varepsilon\subseteq p\Rightarrow\left|S(p,f,\alpha)-\int_a^b fd\alpha\right|<\varepsilon$$

چنانچه $P'\subseteq P$ داریم

$$\left| f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - s(p,\alpha,f) - \int_a^b f d\alpha \right| < \varepsilon$$

یعنی $\alpha \in R(f)$ و

$$\int_a^b \alpha df = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \int_a^b f d\alpha$$

از قضیه ۱.۲۰ در حالتی استفاده می شود که محاسبه انتگرال

سمت چپ مشکل و یا امکانپذیر نباشد که با این عمل به انتگرال

راست می رسیم که ساده تر و قابل حل می باشد .

اکنون دومین قضیه مقدار میانگین را بیان می نمائیم .

۱.۲۱قضیه (دومین قضیه مقدار میانگین) : اگر f صعودی و α

صعودی و پیوسته بر بازه $[a,b]$ باشد آنگاه نقطه ای مانند C

در بازه $[a,b]$ وجود دارد بقسمیکه :

$$\int_a^b f d\alpha = f(a)\int_a^c d\alpha + f(b)\int_a^b d\alpha$$

اثبات:بنا به قضایای ۱.۱۵ و ۱.۲۱۰ داریم:

$$\int_a^b f d\alpha = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \int_a^b \alpha df$$

$$= f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \alpha(c)[f(b) - f(a)]$$

$$= f(a)\int_a^c d\alpha + f(b)\int_a^b d\alpha$$

از این قضیه دو نتیجه حاصل می گردد که نتیجه اول به قضیه بنه معروف است.

۱.٤ نتیجه : اگر f صعودی و g پیوسته و نامنفی باشد

آنگاه نقطه ای مانند c در بازه $[a,b]$ وجود دارد بطوریکه

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^c g(x)dx + f(b)\int_a^b g(x)dx$$

اثبات: با فرض $\alpha(x) = \int_c^x g(t)\,dt$ و قضیه 1.21 حکم ثابت

می شود.

انتگرالگیری نسبت به توابع پله ای

۱.۱۰ تعریف : تابع پله ای واحد به صورت زیر تعریف می شود

$$I(x)=\begin{cases}0 & , \quad x\le 0\\ 1 & , \quad x>0\end{cases}$$

۱.۲۲ قضیه : هرگاه $a<c<b$ و f در c پیوسته باشد و

$\alpha(x)=I(x-c)$ و آنگاه نتیجه می شود که $f\in R(\alpha)$

بر $[a,b]$ و $\int_a^b f d\alpha = f(c)$

۱.۲۳ قضیه: در صورتیکه $a_n \geq 0$ و $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد ، اگر $\{c_n\}$

دنباله ای از اعضای متمایز $[a,b]$ باشد و $\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n I(x - c_n)$

اگر f بر $[a,b]$ پیوسته باشد در این صورت :

$$f \in R(\alpha) \qquad \text{و} \qquad \int_a^b f d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f(c_n)$$

۱.۲۴قضیه : اگر $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ دنباله ای متناهی از اعضای $[a,b]$

باشد آنگاه $\sum_{k=1}^{n} a_k$ را می توان به صورت یک انتگرال

ریمان – استیلتیس نوشت .

۱.۵ چند مثال

اگر $\{r_n\}$ دنباله اعداد گویای $[0,1]$ باشد و

$$\alpha(x) = \sum_{r_n < x} \frac{1}{2^n}$$

اگر f بر $[0,1]$ پیوسته باشد در اینصورت :

$$\int_0^1 f d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(r_n)}{2^n}$$

حل (خلاصه): α بر $[0,1]$ صعودی است و چون f پیوسته

نیز می باشد پس $f \in R(\alpha)$ تابع α در نقاط اصم پیوسته

ولی در نقاط گویا ناپیوسته است (چرا؟)

و دارای ناپیوستگی جهشی در نقطه $x_0 = r_n \in Q$ دارای جهش

$\frac{1}{2^n}$ می باشد و نتیجه حاصل می گردد .

ب) اگر f بر $[a,b]$ پیوسته و مثبت باشد و

$M = \sup\{f(x) \ : a \le x \le b\}$ نشان دهید :

$$M = \lim_{n\to\infty}\left[\int_a^b f^{n}(x)dx\right]^{\frac{1}{n}}$$

خلاصه حل : چون $f(x) \le M$ پس $f^n(x) \le M^n$

با انتگرال گیری از طرفین داریم: $\int_a^b f^n(x)dx \le M^n(b-a)$

از اینکه $\lim_{n\to\infty}(b-a)^{\frac{1}{n}}$ پس $\overline{\lim}\left[\int_a^b f^n(x)dx\right]^{\frac{1}{n}} \le M$

برای اثبات عکس چون f پیوسته است پس نقطه ای مانند x_0

از $[a,b]$ هست که $f(x_0)=M$ از طرفی بنا به پیوستگی تابع f

در x_0 داریم $\forall\varepsilon\exists\delta\forall x(|x-x_0|<\delta\ ,\ a\le x\le b\Rightarrow f(x)>M-\varepsilon)$

چون f نامنفی است پس از به توان n رساندن طرفین و

انتگرال گیری داریم $\int_a^b f^n(x)dx \ge (M-\varepsilon)^n\delta$

پس از حدگیری داریم $\underline{\lim}\left[\int_a^b f^n(x)\,dx\right]^{\frac{1}{n}} \geq M - \varepsilon$

که توجه به اینکه دلخواه است پس $\underline{\lim}\left[\int_a^b f^n\,dx\right]^{1/n} \geq M$

و همراه با رابطه قبل تساوی برقرار می گردد.

ج) (نامساوی هولدر) اگر p و q اعداد حقیقی مثبتی باشند

بطوریکه $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ نشان دهید :

۱. اگر a و b اعداد نامنفی باشند آنگاه $ab \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$

و تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که $a^p = a^q$

۲. اگر $|f|^p \in R(\alpha)$, $|g|^q$ آنگاه $fg \in R(\alpha)$ و داریم

$$\left| \int_a^b fg\,d\alpha \right| \le \left\{ \int_a^b |f|^p\,d\alpha \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \int_a^b |g|^q\,d\alpha \right\}^{\frac{1}{q}}$$

د) ۱. اگر f , g , b بر $[a,b]$ نسبت به α انتگرالپذیر باشند

آنگاه

$$\|f-h\|_2 \le \|f-g\|_2 + \|g-h\|_2$$

۲. اگر $f \in R(\alpha)$ بر $[a,b]$ و $\varepsilon > 0$ نشان دهید تابع

پیوسته ای مانند φ وجود دارد که $\| f - \varphi \|_2 < 4$

تغییر متغیر

تغییر متغیر در انتگرالها به ویژه در انتگرالهای ریمان

ابزاری توانا برای محاسبه انتگرالهاست .

1.25 قضیه : فرض کنید $f \in R(\alpha)$ بر بازه $[a,b]$ و تابع φ

بر $[c,d]$ بر روی $[a,b]$ پیوسته و اکیدا" صعودی است اگر

$h = f \circ \varphi$ و $\beta = \alpha \circ \varphi$ بر $[c,d]$ تعریف شده باشند آنگاه

$h \in R(\beta)$ بر $[c,d]$ و داریم :

$$\int_c^d h d\beta = \int_a^b f d\alpha$$

۱.۲۶ قضیه: اگر $\alpha(x) = x$ و φ' موجود و انتگرالپذیری

ریمان باشد آنگاه

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d hd\beta = \int_c^d (f \circ \varphi)(x)\varphi'(x)dx \quad .$$

مشتق گیری از انتگرال

قبلا” دیدیم که اگر تابع f در نقطه x پیوسته باشدو

$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ آنگاه $F'(x)$ موجود است و $F'(x)=f(x)$

اکنون سئوالی مطرح است اینکه اگر f تابعی از دو متغیر $x\ ,\ t$

باشد چگونه می توان مشتق گرفت.

اکنون این سئوال پیش می آید که اگر f تابعی از دو

متغیر x , t باشد و یا به جای x و یا حتی α

توابعی از x قرار گیرد چگونه می توان مشتق گرفت .

۱.۲۷ قضیه : فرض کنید $R=[a,b]\times[c,d]$ و تابع f

بر R تعریف شده و $D_2 f$ بر R پیوسته است تابع f

را بر $[c,d]$ چنین تعریف می نمائیم

$$F(x)=\int_a^b f(t,x)\,d\alpha(t) \qquad (c\le x\le d)$$

در این صورت f' بر $[c,d]$ موجود است و

$$F'(x)=\int_a^b D_2 f(t,x)\,d\alpha(t)$$

۱.۲۸ قضیه : فرض کنید $R=[a,b]\times[c,d]$ و توابع $f\ ,\ D_2 f$

بر R پیوسته باشند فرض کنید $p\ \ ,\ \ q$ دو تابع مشتق پذیر بر $[c,d]$

باشند . که بازای هر $x\in[a,b]$ داریم $a\le q(x)\le b\ ,\ a\le p(x)\le b$

آنگاه F' موجود است و

$$F'(x)=\int_{p(x)}^{q(x)} D_2 f(x,t)dx+f\left[q(x),t\right]q'(x)-f\left[p(x),t\right]p'(x)$$

۱.۵ نتیجه : اگر $g \in R$ بر $[a,b]$ و $\alpha(x) = \int_a^x g(t)dt$

آنگاه $$F'(x) = \int_a^b f(x,t)g'(t)dt$$

اهداف رفتای فصل ۲

- شناخت انتگرالهای ناسره نوع اول
- همگرائی و واگرائی انتگرال های ناسره
- آزمون های همگرائی و واگرائی انتگرال های ناسره
- رابطه بین همگرائی سری های نامتناهی و انتگرال های ناسره

انتگرال های ناسره دارای دو ویژگی بسیار مهم است.

اول آنکه تابع f کراندار است .

دوم آنکه بازه انتگرال گیری همواره بسته و کراندار است.

سوال:اگر یکی از این دو شرط حذف شود چه اتفاق می افتد؟

۲.۱مثال: تابع $f(x) = 1/x^2$ روی بازه $(0,1]$ کراندار نمی باشد آیا

می توان $\int_0^1 1/x^2 \, dx$ را تعریف کرد؟

در مورد $\int_0^1 1/\sqrt{x} \, dx$ چه میتوان گفت؟

اگر بازه کراندار نباشد چه تعریفی میتوان داشته باشیم؟

آیا $\int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ دارای مقدار است؟

بعبارت دیگر سطح زیر منحنی زیر یک مقدار حقیقی است؟

انتگرال های ناسره نوع اول

۲.۱تعریف: اگر بازای هر عدد حقیقی T تابع f بر بازه $[a,b]$

دارای انتگرال ریمان و حد زیر نیزموجود باشد

$$\lim_{T \to \infty} \int_a^T f(x)\,dx$$

آنگاه این حد را انتگرال ریمان ناسره نوع اول می نامیم

وآنراباعلامت زیرنمایش می دهیم و گوییم

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \quad (= \int_a^\infty f \;)$$

موجود و یا همگراست و در واقع داریم

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{T\to\infty}\int_a^T f(x)\,dx$$

در اینصورت $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ را انتگرال ناسره نوع اول می گوییم.

پس $$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{T\to\infty}\int_a^{T} f(x)\,dx$$

و بسادگی به $\int_a^{\infty} f$ نمایش می دهیم.

اگر حد فوق موجود نباشد انتگرال را واگرا می گوییم.

تعدادی از انتگرال ناسره را می توان به طورمستقیم و با

محاسبه انتگرال معین وسپس حدگیری همگرائی یا واگرایی

آنرا مشخص نماییم

۲.۲مثال: برای محاسبه $\int_0^\infty dx \big/ 1+x^2$ می دانیم که

$$\int_0^\infty dx \big/ 1+x^2 = \lim_{T\to\infty} \int_0^T dx \big/ 1+x^2 = \lim_{T\to\infty} tgT = \pi/2$$

پس این انتگرال بطور مستقیم محاسبه گردید.

اما تعدادی از انتگرالها را نمی توان به طور مستقیم حل نمود

و با آزمونهایی که دردست داریم همگرایی و واگرایی انتگرالها

را مشخص می نماییم

۲.۱ نتیجه الف)اگر $\int_a^\infty f$ و $\int_a^\infty g$ موجود باشند آنگاه $\int_a^\infty (f \pm g)$

نیز موجود وداریم $\int_a^\infty (f \pm g) = \int_a^\infty f \pm \int_a^\infty g$

ب)اگر $\int_a^\infty f$ موجود باشد و $\int_a^\infty g$ موجودنباشدآنگاه $\int_a^\infty (f \pm g)$

موجود نمی باشد

ج) اگر $\int_a^{\infty} f$ و $\int_a^{\infty} g$ موجود نباشد درمورد

$\int_a^{\infty} (f \pm g)$ نمیتوان تصمیم گرفت.

٤.١.٢ قضیه فرض کنید بازای هر عدد حقیقی T تابع f بر بازه

$[a,T]$ انتگرالپذیر باشد شرط لازم و کافی برای آنکه $\int_a^\infty f$

موجود باشد آن است که

$$\forall \varepsilon \exists T_0 \forall T_1, T_2 \ (T_2 > T_1 > T_0 \Rightarrow \left| \int_{T_1}^{T_2} f \right| < \varepsilon$$

شرط پایین صفحه قبل به شرط کوشی معروف است

اثبات (خلاصه) : با توجه به فرض بازای هر ε عددی مانند T_0

موجود است که اگر $T \geq T_0$ داریم $\left|\int_a^T f\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ پس $T_2 \geq T_1 \geq T_0$

آنگاه

$$\left|\int_{T_1}^{T_2} f\right| \leq \left|\int_a^{T_2} f\right| + \left|\int_a^{T_1} f\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

برای عکس فرض کنید $I_n = \int_a^{a+n} f(t)\,dt$ بنابراین I_n کوشی

است پس به I همگراست واز شرط کوشی استفاده می کنیم

نتیجه حاصل می گردد

۲.۲نتیجه: اگر g تابع نامنفی باشد بطوری که همواره $|f| < g$

و $\int_a^{\infty} g$ موجودباشد آنگاه $\int_a^{\infty} f$ موجوداست

اثبات: با توجه به شرط کوشی برای g داریم

$$\forall \varepsilon \, \exists T_0 \forall T_1, T_2 \; (T_2 > T_1 > T_. \Rightarrow \left| \int_{T_1}^{T_2} g \right| < \varepsilon$$

که با توجه به نامساوی فرض و رابطه بالا داریم

$$\left|\int_{T_1}^{T_2} f\right| \le \int_{T_1}^{T_2} |f| \le \int_{T_1}^{T_2} g < \varepsilon$$

که نشاندهنده این است که f نیز در شرط کوشی صدق می کند

رابطه بین سری های نامنفی وانتگرالها ی ناسره

وجوددارد که در قضیه صفحه بعد این رابطه

مشخص می شود

۶.۱.۲قضیه- اگر $f:[1,\infty)\to[0,\infty)$ نزولی باشد آنگاه $\int_1^\infty f$

همگرااست اگر وتنها اگر $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ همگرا باشد.

اثبات:فرض کنید $\int_1^\infty f$ موجود باشد تابع F را به صورت زیر

تعریف می کنیم: $$F(T)=\int_1^T f(x)\,dx$$

که بدست می آوریم:

$$f(n)=\int_1^n f(x)dx=\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k} f(x)dx \geq \sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{n} f(k)dx=\sum_{k=2}^{n} f(k)$$

که نتیجه می شود دنباله $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ از بالا کراندار بلنتیجه

همگراست

- بقیه صفحه بعد

برای اثبات عکس مطلب با توجه به اینکه $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ همگراست

و رابطه $\int_1^n f(x)dx = \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k) = s_{n-1}$

نتیجه می گیریم که اگر $n=[T]$ آنگاه

$$F(T) = \int_1^n f(x)dx + \int_n^T f(x)dx \leq \sum_{1}^{\infty} f(n)$$

یعنی F صعودی و کراندار است پس همگراست.

۲.۳ مثالها

الف) $\int_1^\infty 1/x \, dx$ موجود نیست زیرا سری همسازه $\sum_{n=1}^\infty 1/n$ واگراست

ب) $\int_1^\infty \sin x/x^2$ مطلقا همگر است زیرا $\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$ و چون

$\int_1^\infty \sin x/x^2$ موجود است پس $\int_1^\infty dx/x^2$ موجود است

ج) انتگرال $\int_1^{\infty} \sin x / x$ موجود است. (همگرا است)

حل : بازای عدد طبیعی T و عدد N طوری باشد که

$N\pi \le T < (N+1)\pi$ داریم

$$\int_1^{T} \frac{\sin x}{x} dx = \int_1^{N\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{N\pi}^{T} \frac{\sin x}{x} dx \qquad (1)$$

$$\int_0^{N\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \sum_{n=1}^{N-1} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x+n\pi} dx = \sum_{n=1}^{N-1} (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x+n\pi} dx \qquad (2)$$

اگر $a_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x+n\pi} dx$ تعریف کنیم آنگاه $\{a_n\}$ نزولی و با توجه

به رابطه $a_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x+n\pi} dx \le \int_0^{\pi} \frac{1}{n\pi} dx = \frac{1}{n} \to 0$ همگراست

پس سمت راست (۲) همگراست و همچنین

$$\int_{N\pi}^{T} \frac{\sin x}{x+n\pi} dx \le \int_{N\pi}^{T} \frac{dx}{x} < \frac{1}{N\pi} \to 0$$

بنابراین با توجه به رابطه (۱) حکم ثابت می گردد.

$\int_{-\infty}^{a} f(x)$ نیز به صورت $\lim_{T \to -\infty} \int_{T}^{a} f(x)dx$ تعریف میگردد

$\int_{-\infty}^{\infty} f$ به صورت مجموع $\int_{-\infty}^{\infty} f = \int_{a}^{\infty} f + \int_{-\infty}^{a} f$ تعریف می گردد

اگر تابع f در یک و یا تعدادمتناهی نقطه از بازه $[a,b]$ تعریف

شده باشد آنگاه $\int_a^b f$ را انتگرال ناسره نوع دوم می گوییم

$\int_0^1 {}^1\!/_x$ یک انتگرا ل ناسره نوع دوم است

اهداف رفتاری فصل سوم

- شناخت تعریف توابع با تغییر کراندار
- ارتباط توابع یکنوا با توابع باتغییر کراندار
- تعریف تابع متغیر کلی است
- ارتباط بین نقاط ناپیوستگی تابع و تابع تغییرات آن
- انتگرالگیری از توابع برداری
- خمهای طولپذیر

اگر P افرازی از بازه $[a,b]$ باشد آنگاه نمایش

می دهیم $\Delta f_k = f(x_k) - f(x_{k-1})$

۳.۱ تعریف : تابع f بر بازه $[a,b]$ با تغییر کراندار میگوییم

در صورتیکه عددی ثابت مانند M موجود باشدکه به ازای هر

افراز P داشته باشیم $\sum(p) = \sum_{k=1}^{n} |\Delta f_k| \le M$

۳.۱ قضیه : اگر f بر $[a,b]$ با تغییر کراندار باشد آنگاه f بر $[a,b]$ کراندار است.

اثبات : فرض کنید $a < x < b$ عدد M موجود است که

بازای هر افراز P بالاخص $p_0 = \{a, x, b\}$ داریم

$$\sum |\Delta f_k| < M$$

پس $|f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \le M$

که نتیجه می دهد

$$|f(x)| \le \frac{1}{2}\{|f(a)| + |f(b)| + M\}$$

۳.۲ قضیه : اگر f تابع بر $[a,b]$ یکنوا (صعودی و
یا نزولی) باشد آنگاه f بر این بازه با تغییر
کراندار است.

اثبات : اگر f صعودی باشد در اینصورت

$$\sum|\Delta f_k| = \sum|f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum\{f(x_k) - f(x_{k-1})\}$$

$$= f(b) - f(a)$$

که همواره مقدار ثابت است و این نشان می دهد که با تغییر

کراندار است .

۳.۳ قضیه : اگر تابع f بربازه $[a,b]$ دارای

مشتق کراندارباشدآنگاه f بر $[a,b]$ با تغییر

کراندار است .

اثبات : عددی مانند M موجود است که $\forall x, \left|f'(x)\right| \le M$

از قضیه مقدار میانگین برای مشتق داریم

$$\left|f(x_i)-f(x_{i-1})\right| = \left|f'(t_i)\right|\left|x_i-x_{i-1}\right| \le M(x_i-x_{i-1})$$

که اگر از طرفین جمع بگیریم حکم ثابت می شود

$$\sum_{i=1}^{n} \left|f(x_i)-f(x_{i-1})\right| \le \sum_{i=1}^{n} M(x_i-x_{i-1}) =$$

$$M\sum(x_i-x_{i-1}) = M(b-a)$$

۳.۱ مثال : تابع f بر $[0,1]$ با ضابطه زیر تعریف شده

است آیا با تغییرکراندار است چرا؟

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & , \quad x\neq 0 \\ 0 & , \quad x=0 \end{cases}$$

حل: اگر افراز P_n را به صورت زیر تعریف کنیم

$$p_n = \left\{0, \frac{2}{(2n+1)\pi}, \frac{2}{2n\pi}, \dots, \frac{3}{3\pi}, \frac{2}{3\pi}, \frac{2}{\pi}, 1\right\}$$

با یک محاسبه ساده داریم

$$\sum_{k=1}^{2n+2} |\Delta f_k| \geq \frac{4}{\pi}\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{2n+1}\right\}$$

با توجه به اینکه طرف سمت راست وقتیکه $n \to +\infty$ به

سمت $+\infty$ میل می کند طرف سمت چپ نیز به $+\infty$ میل

می کند پس تابع کراندار نیست بنابراین با تغییر کراندار

نمی باشد.

تغییر کلی

۳.۱تعریف: فرض کنید تابع f بر $[a,b]$ با تغییر کراندار

باشد تغییرات کلی تابع f بر $[a,b]$ باضابطه زیر

رتعریف تعریف می شوند

$$v_f(a,b) = \sup\left\{ \sum(p) : p \in p[a,b] \right\}$$

۳.٤قضیه : فرض کنید توابع f , g بر بازه $[a,b]$

باتغییرکراندار باشند آنگاه:

الف)به ازای اعداد ثابت B, A تابع $Af+Bg$ بر $[a,b]$

با تغییرکرانداراست و

$$v_{Af+Bg} \leq |A| v_f + |B| v_g$$

ب) اگرتابع f و g بر $[a,b]$ با تغییر کراندار باشند

آنگاه fg با تغییر کراندار است و

$$v_{fg} \le M_1 v_f + M_2 v_g$$

که در آن M_1, M_2 به ترتیب سوپریمم $|g|$ و $|f|$

میباشد

ج) اگر عددی مانند m موجود باشد که بازای هر x و

$|f(x)| \geq m > 0$ آنگاه P با تغییر کراندار است و

داریم

$$v_{\frac{1}{f}} \leq \frac{1}{m^{2}} v_{f}$$

اثبات (الف) : اگر f افراز دلخواهی از $[a,b]$ باشد

آنگاه

$$\Delta(Af+Bg)_k = Af(x_k)+Bg(x_k)-Af(x_{k-1})-Bg(x_{k-1})$$

$$= A\Delta f_k + B\Delta g_k$$

ب)

$$\left|\Delta(fg)_k\right| = \left|f(x_k)g(x_k) - f(x_{k-1})g(x_{k-1})\right| =$$

$$\left|f(x_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})] + g(x_{k-1})[f(x_k) - f(x_{k-1})]\right| =$$

$$\left|f(x_k)\Delta g_k + g(x_{k-1})\Delta f_k\right| \leq \left|f(x_k)\Delta g_k\right| + \left|g(x_{k-1})\Delta f_k\right| +$$

$$M_1 \Delta g_k + M_2 \Delta f_k \leq M_1 v_g + M_2 v_f$$

ج) با توجه به مفروضات مسئله رابطه زیر را داریم :

$$\Delta\left(\frac{1}{f}\right)_k = \frac{1}{f(x_k)} - \frac{1}{f(x_{k-1})} = -\frac{\Delta f_k}{f(x_k)\,f(x_{k-1})}$$

$$\Rightarrow \left|\Delta\left(\frac{1}{f}\right)_k\right| \le \frac{\Delta f_k}{m^2} \le \frac{v_f}{m^2}$$

پس حکم ثابت می گردد .

۳.۱تعریف : تابع V بر بازه $[a,b]$ چنین تعریف می کنیم

$$V(x)=\begin{cases} v_f(a,x) & , \quad a<x<b \\ 0 & , \quad x=a \end{cases}$$

این تابع را تابع تغییرات f می نامیم

نشان می دهیم که هر تابع با تغییر کراندار را می توان

به صورت تفاضل دو تابع صعودی نوشت و بالعکس

۳.۵ قضیه :

الف) تابع V بر $[a,b]$ صعودی است.

ب) تابع $D=V-f$ بر $[a,b]$ صعودی است.

ج) هر تابع با تغییر کراندار تفاضل دو تابع صعودی است.

اثبات : توجه داریم که $v_f(a,x) \geq 0$ و همچنین

$$v_f(x,y) \geq \left| f(x) - f(y) \right|$$

با فرض $a \leq x < y \leq b$ اثبات الف و ب را میآوریم

الف) با توجه به اینکه

$$V(y) - V(x) = v_f(a,y) - v_f(a,x) = v_f(y,x) \geq 0$$

پس $V(x) \le V(y)$ یعنی V صعودی است.

ب) با توجه به توضیح اول اثبات و رابطه زیر بدیهی است

$$D(y) - D(x) = v_f(x, y) - [f(y) - f(x)] \ge 0$$

ج) چون $f = V - D$ با توجه به الف و ب D , V صعودی

هستند پس f تفاضل دو تابع صعودی است.

البته توجه داریم که هر تابع صعودی یک تابع با تغییر کراندار

است و تفاضل دو تابع با تغییر کرانداریک تابع با تغییر کراندار

است پس عکس قسمت ج قضییه فوق نیز برقرار است .

نکته قابل توجه آن است که نوشتن یک تابع با تغییرکراندار

بصورت تفاضل دو تابع صعودی منحصر بفرد نمی باشد

نکته دیگر آنکه با توجه به اینکه مجموعه نقاط ناپیوستگی هر

تابع صعودی (ویا نزولی) مجموعه ای متناهی یا شماراست

بالنتیجه مجموعه نقاط ناپیوستگی هر تابع با تغییر کراندار نیز

مجموعه ای متناهی یا شمارا می باشد.

در قضیه زیر ارتباط بین نقاط ناپیوستگی V, f را بیان

می نماییم

۳.۶ قضیه : مجموعه نقاط ناپیوستگی V, f در $[a,b]$

یکسان است. بعبارت دیگر اگر f در نقطه $a \le x \le b$

پیوسته باشد آنگاه V نیز پیوسته است و بالعکس

اثبات(خلاصه): فرض کنید f در نقطه x_0 پیوسته باشد پس

$$\forall \varepsilon \exists \delta \forall x \left(|x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

از خاصیت مشخصه سوپریموم استفاده نموده برای ε بالا P

افرازی از $[x_0,b]$ وجود دارد که

$$v_f(x_0,b) - \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{k=1}^{n} \Delta f_k$$

فرض کنید $x_0 < t < x_1$ باشد بطوری که $t - x_0 < \delta$

(بنابراین $\left| f(t) - f(x_0) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$) اگر $P_0 = P \cup \{t\}$ داریم

$$v_f(x_0, b) - \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{k=1}^{n} \Delta f_k = \sum(p) \le \sum(P_0)$$

$$< \left| f(t) - f(x_0) \right| + v_f(x_0, b) < \frac{\varepsilon}{2} + v_f(x_0, b)$$

بنابراین $v_f(x_0,b)-v_f(t,b)<\varepsilon$

اما با توجه به اینکه $x_0<t$ و صعودی بودن V داریم

$$0\le V(t)-V(x_0)=v_f(x_0,b)-v_f(t,b)<\varepsilon$$

پس V در x_0 از راست پیوسته است به طریق مشابه می توان

ثابت کرد که V در x_0 از چپ نیز پیوسته است.

بعکس اگر V در x_0 پیوسته باشد از نامساوی

$$\left| f(t) - f(x_0) \right| \leq V(t) - V(x_0)$$

نتیجه حاصل میگردد که f در x_0 پیوسته است.

انتگرال گیری از توابع برداری

۳.۲ تعریف : فرض کنید $f=\left(f_1, f_2, \ldots f_k\right) : [a,b]\to R^k$

یک تابع برداری باشد اگر تابع α بر $[a,b]$ صعودی باشد

آنگاه $f\in R(\alpha)$ اگر و فقط اگر $f_i\in R(\alpha)$

بازای $1\le i\le k$.

ودراین صورت تعریف می کنیم

$$\int_a^b f d\alpha = \left(\int_a^b f_1 d\alpha, \int_a^b f_2 d\alpha, \ \ldots \ , \int_a^b f_k d\alpha, \right)$$

توجه داریم که $\int_a^b f d\alpha$ عضوی از R^k می باشد پس یک

بردار است

۳.۷ قضیه : اگر F , f توابع برداری بر $[a,b]$ و $F' = f$

آنگاه

$$\int_a^b f(t)d\alpha = F(b) - F(a)$$

اثبات: با توجه به قضیه اساسی حسابان وتعریف انتگرال برداری ساده است.

۳.۸ قضیه : اگر $f \in R(\alpha)$ آنگاه $\|f\| \in R(\alpha)$ و

$$\left\| \int_a^b f d\alpha \right\| \le \int_a^b \|f\| d\alpha$$

اثبات : داریم $\|f\| = \left(f_1^2, f_2^2, \ldots, f_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$ چون $f_i \in R(\alpha)$

پس $f_i^2 \in R(\alpha)$ اکنون از نامساوی کوشی-شوارتز کمک

می گیریم

خمهای طولپذیر

در تعریف توابع با تغییر کراندار ا توابع حقیقی مقدار استفاده

کردیم. برای تعمیم به توابع برداری به بررسی خمهای طولپذیر

می پردازیم

۳.۳ تعریف : تابع پیوسته $f=\left(f_1, f_2, \dots\ f_k\right):[a,b]\to R^k$

را یک **خم** بر $[a,b]$ می نامیم

اگر f یک به یک باشد خم را یک **قوس** می نامیم

اگر در یک خم $f(a)=f(b)$ آنگاه خم را **خم بسته**

می گوییم.

در واقع اگر $f = \left(f_1, f_2, \dots\ f_k\right)$ آنگاه خم f

بصورت زیر است.

$$x_1 = f_1(t), x_2 = f_2(t), \dots\ x_n = f_n(t)$$

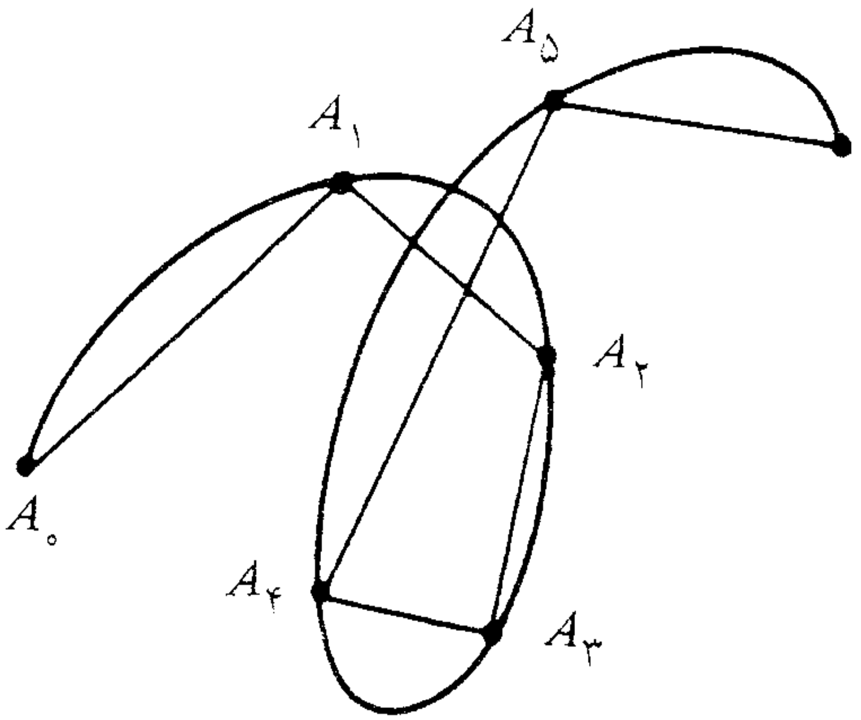
بنابراین برد یک خم زیر مجموعه ای از R^k است.

۳.٤ تعریف : به ازای افراز $P=\{a=x_0, x_1, x_2, \dots, x_n=b\}$

از $[a,b]$ عدد $\Lambda(P,f)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\Lambda(P,f)=\sum_{i=1}^{n}\left|f(x_i)-f(x_{i-1})\right|$$

به شکل صفحه بعد توجه نمایید



A۵
A۱
A۲
A۰
A۴
A۳

a=t۰
t۱
t۲
t۳
t۴
t۵
t۶=b

۳.۵ تعریف : همانطوریکه در شکل صفحه قبل می بینیم با ظریفتر

شدن افراز P این خط شکسته به طول منحنی (به برد تابع f)

نزدیکتر می شود در نتیجه طول f بصورت زیر تعریف

می کنیم:

$$\Lambda(f) = \sup\{A(P, f) : P \in P[a,b]\}$$

9. ۳ قضیه: اگر f بر $[a,b]$ یک خم و f' بر $[a,b]$

موجود و پیوسته باشد آنگاه f طولپذیر است و

$$\Lambda(f) = \int_a^b \| f'(t) \| dt$$

اهداف رفتاری فصل چهارم

- تعریف دنباله و سری های توابع
- همگرائی نقطه به نقطه و همگرائی یکنواخت دنباله توابع
- ارتباط بین پیوستگی دنباله توابع و حد آن در همگرائی یکنواخت
- ارتباط بین انتگرال دنباله توابع و حد آن در همگرائی یکنواخت

- ارتباط بین مشتق دنباله توابع و حد آن در همگرائی یکنواخت
- تعریف و خواص سری توابع
- آزمونهای همگرائی سری توابع
- تعریف همپیوستگی و ارتباط آن با سری توابع همگرا
- تعریف جبر و زیر جبرها

تعاريف و خواص دنباله توابع

٤.١ تعریف : فرض کنید $(M \ , \ d)$ یک فضای متریک باشد

و $E \subseteq M$ و $\{f_n\}$ دنباله ای از توابع (حقیقی و

یا مختلط) بر E

باشد

فرض کنید به ازای هر $x_0 \in E$ دنباله عددی $\{f_n(x_0)\}$

همگرا باشد در این صورت می توانیم تابع f را با ضابطه

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (x \in E)$$

تعریف کنیم

دراین صورت می گوئیم دنباله توابع $\{f_n\}$ به طور نقطه

وار به تابع f همگراست

$$\forall x \forall \varepsilon > 0\ \exists N_x\ \ \forall n (n \geq N_x \Rightarrow \left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon$$

و به علامت $f_n \to f$

سوالی بشرح زیر مطرح می گردد :

آیا اگر $\{f_n\}$ نقطه وار به f همگرا باشند آیا خواص به f منتقل می گردد؟

آیا اگر تمام $\{f_n\}$ ها پیوسته باشند f نیز پیوسته است

آیا اگر تمام $\{f_n\}$ ها انتگرال پذیر باشند f نیز انتگرالپذیر است

4.1مثال : دنباله $\{f_n\}$ را بر $[0,1]$ ضابطه $f_n(x) = x^n$

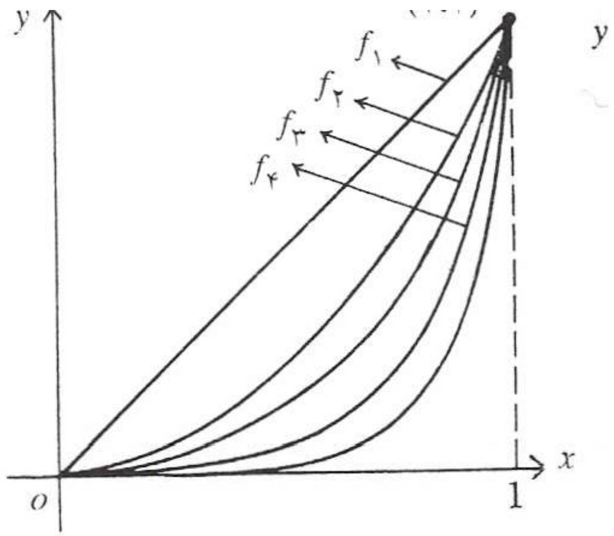
در نظر می گیریم واضح است که اگر $x \in [0,1)$ آنگاه

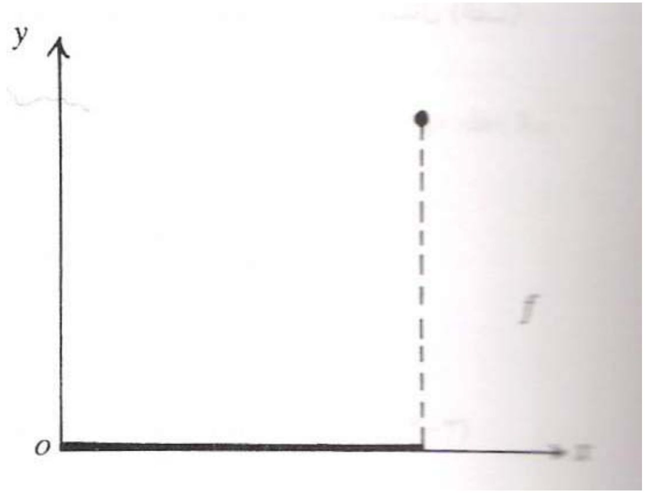
$\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$ و اگر $x = 1$ آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 1$

بالنتیجه اگر

$$f(x)=\begin{cases}0 & 0\le x<1\\ 1 & x=1\end{cases}$$

آنگاه $\{f_n\}$ نقطه وار به f همگراست





همانطوریکه در این دو شکل نیز مشخص است تمام f_n پیوسته

می باشند ولی f پیوسته نیست در مثال بالا ملاحظه می گردد

که $\{f_n\}$ بر بازه بسته $[0,1]$ پیوسته و حتی مشتقپذیر

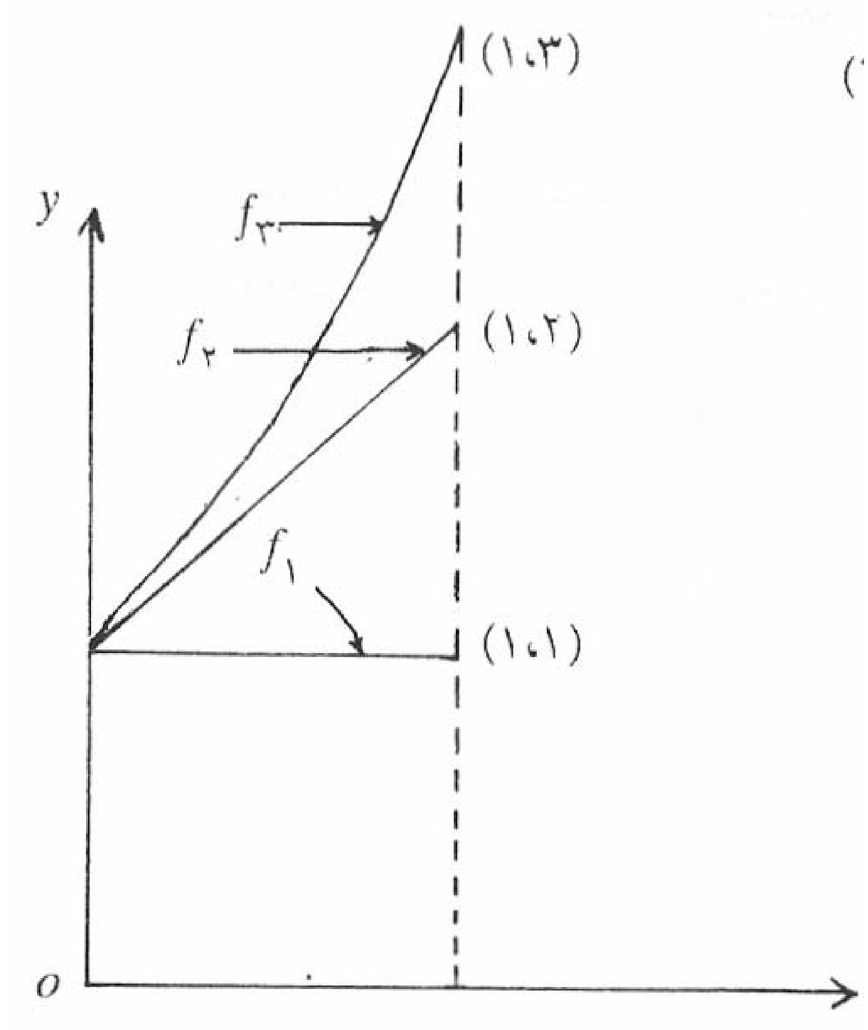
می باشند ولی f پیوسته می باشد (در ۱ ناپیوسته است)

دنباله $\{f_n\}$ با ضابطه $f_n(x)=\dfrac{1-x^n}{1-x}$ بر بازه $[0,1)$

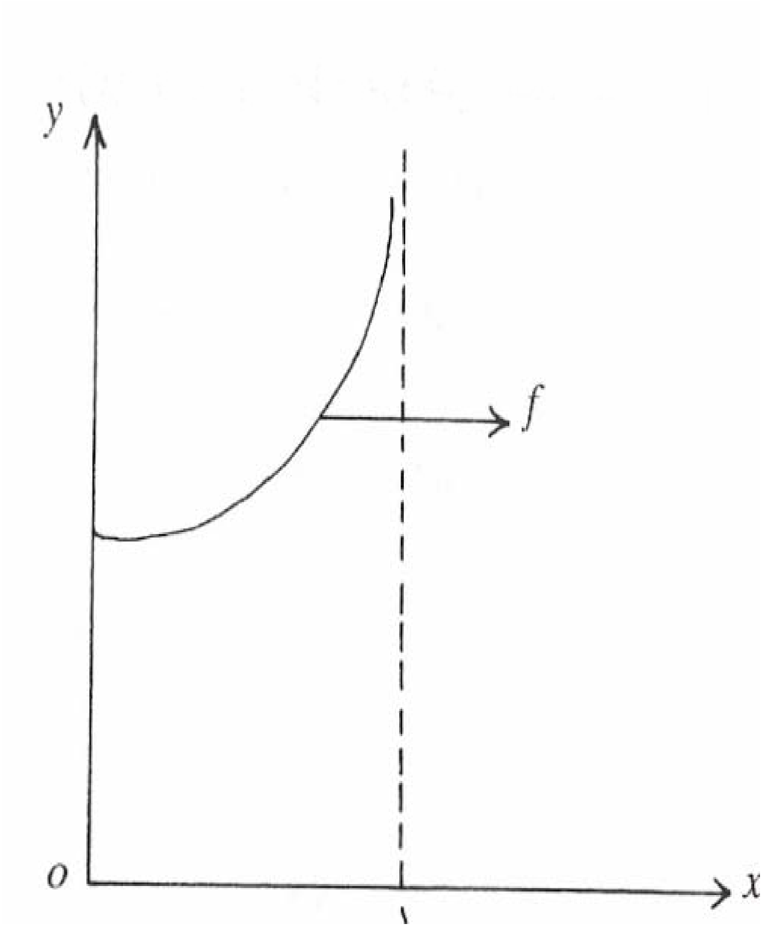
تعریف شده است در این صورت این دنباله توابع به تابع

$f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ نقطه وار همگراست تمام توابع f_n بر $[0,1)$

کراندار می باشد $\left(|f_n(x)|\le n\right)$ ولی f کراندار نیست



y
f۳
(۱،۳)
f۲
(۱،۲)
f۱
(۱،۱)
o



y
f
o
x

همگرائی یکنواخت :

۴.۲ تعریف :اگر تابع f حد نقطه وار دنباله توابع $\{f_n\}$ بر E

باشد گوئیم دنباله $\{f_n\}$ بر E بطور یکنواخت همگراست

درصورتیکه داشته باشیم

$$\forall \varepsilon\ \exists N\ \forall n\ \forall n(n \geq N, x \in E \Rightarrow \left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon)$$

در این حالت می نویسیم $f_n \Rightarrow f$

تفاوت تعریف همگرائی نقطه وار و همگرائی یکنواخت در این

است که در تعریف همگرائی یکنواخت عدد N مستقل از x

می باشد درصورتی که در همگرائی نقطه وار عدد N_x وابسته

به x می باشد که آنرا به N_x نمایش می دهیم .

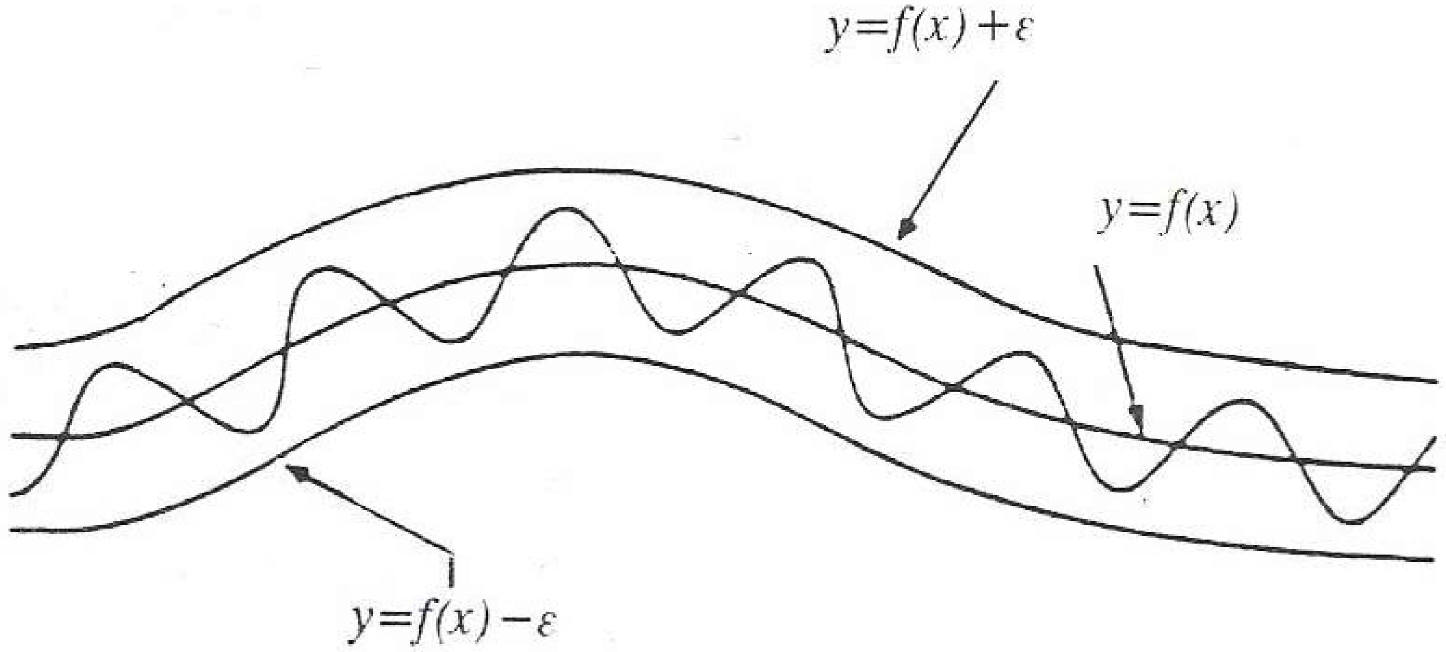
اگر $f_n \Rightarrow f$ و تمام f_n ها و بالنتیجه f حقیقی مقدار باشند

دراین صورت رابطه

$$\forall \varepsilon \ \exists N \ \ \forall n \ \forall n(n \geq N, x \in E \Rightarrow \left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon)$$

به صورت زیر می باشد

$$n \geq N \ \Rightarrow f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$$


y=f(x)+ε
y=f(x)
y=f(x)−ε

شرایط همگرائی یکنواخت

4.1قضیه : شرط لازم و کافی برای آنکه $f_n \Rightarrow f$ بر E

آنست که

$$\sigma_n = \sup \left| f_n(x) - f(x) \right| \to 0$$

برهان : اگر $f_n \Rightarrow f$ آنگاه

$$\forall \varepsilon\ \forall N\ \forall n \forall x [n \geq N, x \in E \Rightarrow \left| f_n(x) - f(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}]$$

درنتیجه

$$\sup_{x \in X} \left| f_n(x) - f(x) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < 2$$

بعکس اگر $\sigma_n \to 0$ آن گاه

$$\forall \varepsilon \ \forall N \ \forall n [n \geq N \Rightarrow \sigma_n < \varepsilon]$$

پس

$$[n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \sigma_n < \varepsilon]$$

بنابراین

$$f_n \rightrightarrows f$$

4.2قضیه (شرط همگرایی یکنواخت کوشی) :

شرط لازم و کافی است برای آنکه $\{f_n\}$ بر E

بطور یکنواخت همگرا باشد آن است که

$$\forall \varepsilon\ \forall N\ \forall m,n,x[m,n \geq N, x \in E \Rightarrow \left| f_m(x) - f_n(x) \right| < \varepsilon]$$

تذکر : شرط فوق شرط یکنواخت کوشی نامیده می شود .

اثبات : اگر $f_n \Rightarrow f$ و $\varepsilon > 0$ دلخواه باشد عددی

مانند N هست که $n \geq N$ و داریم

$$\left| f_n(x) - f(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

اگر $m \geq N$ در این صورت نیز $\left| f_m(x) - f(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$

اگر $(m, n \geq N)$ با بکاربردن نامساوی مثلثی داریم

$$\left| f_m(x) - f_n(x) \right| \leq \left| f(x) - f_n(x) \right| + \left| f(x) - f_m(x) \right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

بعکس اگر f_n در شرط فوق صدق کند بنا به شرط کوشی در

دنباله ها $\{f_n\}$ نقطه وار به f همگراست حال اگر

$n \geq N$ و $x \in E$ ثابت نگه داریم و $m \to \infty$ نتیجه

حاصل می گردد . $\left| f(x) - f_n(x) \right| < \varepsilon$

۴.۳ قضیه : فرض کنید a یک نقطه اجتماع E باشد

بطوریکه $\lim_{x\to a} f_n(x) = A_n$ آنگاه $\{A_n\}$ همگراست و

اگر $\lim A_n = A$ آنگاه $\lim_{x\to a} f(x) = A$

بعبارت دیگر

$$\lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} f_n(x)$$

اثبات : چون $f_n \Rightarrow f$ پس بنا به شرط کوشی

$$\forall \varepsilon \exists N \forall m, n, x (m, n \geq N \ , x \in N \Rightarrow$$

$$|f_m(x) - f_n(x)|) < \frac{\varepsilon}{2}$$

از طرفین حد بگیریم وقتیکه $x \to a$ آنگاه داریم :

$$m, n \geq N \Rightarrow |A_m - A_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

پس $\{A_n\}$ کوشی ، بنابراین همگرا به عددی مانند A

است چون $f_n \Rightarrow f$, $A_n \to A$ پس

$$\left| f_N(x) - f(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad , \quad \left| A_N - A \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\exists N_2 \ \forall n \ (n \geq N_2 \Rightarrow \left| A_n - A \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

اگر $N = \max\{N_1, N_2\}$ آن گاه

$$\exists \sigma \ \forall x \ (d(x,a) < \sigma \Rightarrow |f_N(x) - A_N| < \frac{\varepsilon}{3}$$

و چون $\lim_{x \to a} f_N(x) = A_N$ آنگاه

$$\exists N_1 \ \forall n, x \ (n \geq N_1 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

با استفاده از نامساوی مثلثی، روابط بالا ثابت می شود که

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

ادامه اثبات با توجه به قضیه قبل ساده است .

$$\exists N_1 \ \forall n, x \ (n \geq N_1 \Rightarrow \left| f_n(x) - f(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

در قضیه زیر رابطه بین پیوستگی دنباله توابع و حد آنها (در

همگرایی یکنواخت) را نشان می دهیم

٤.٤قضیه :اگر $\{f_n\}$ دنباله ای از توابع پیوسته بر E باشد که

بطور یکنواخت به f همگرا باشد آنگاه f بر E پیوسته

است .

اثبات : ساده با توجه به قضیه قبل است

همگرائی یکنواخت و انتگرال

٤.٥قضیه : فرض کنید $f_n \Rightarrow f$, $f_n \in R(\alpha)$ بر $[a,b]$

آنگاه $f \in R(\alpha)$ بر $[a,b]$ و داریم

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \, d\alpha = \int_a^b f \, d\alpha$$

اثبات $f_n \Rightarrow f$ پس

$$\forall \varepsilon \exists n \forall m \forall (n \geq m, a < x < b \Rightarrow \left| f_n(x) - f_m(x) \right| < \varepsilon$$

پس

$$f(x) - \varepsilon < f(x) < f_n(x) + \varepsilon$$

از طرفین انتگرال بالا سپس پائین بگیریم

$$\overline{\int_a^b}(f_n-\varepsilon)\,d\alpha \le \overline{\int_a^b} f\,d\alpha \le \overline{\int_a^b}(f_n+\varepsilon)\,d\alpha$$

$$\underline{\int_a^b}(f_n-\varepsilon)\,d\alpha \le \underline{\int_a^b} f\,d\alpha \le \underline{\int_a^b}(f_n+\varepsilon)\,d\alpha$$

چون $f_n \in R(\alpha)$ از دو رابطه بالا داریم (با کم کردن آنها از یکدیگر)

$$-2\varepsilon[\alpha(b)-\alpha(a)] \le \overline{\int_a^b} f d\alpha - \int_a^b f d\alpha \le 2\varepsilon[\alpha(b)-\alpha(a)]$$

چون ε دلخواه بود نتیجه می گیریم

$$\overline{\int_a^b} f d\alpha - \underline{\int_a^b} f d\alpha = 0$$

پس $f \in R(\alpha)$ و از اولین رابطه در اثبات نتیجه

.

$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)| d\alpha \leq \varepsilon[\alpha(b) - \alpha(a)]$$

از اولین رابطه در اثبات نتیجه می شود

$$\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f d\alpha$$

همگرائی یکنواخت و مشتق پذیری

۴.۶قضیه : فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله ای از توابع مشتق پذیر بر

(a,b) باشد بطوریکه $\{f_n\}$ بطور یکنواخت همگرا به

تابعی مانند g باشد و حداقل در یک نقطه از بازه (a,b)

مانند c دنباله عددی $\{f_n(c)\}$ همگرا باشد

آنگاه $\{f_n\}$ بطور یکنواخت به تابعی مانند f

همگر است و $f' = g$

اثبات : دنباله $\{\varphi(n)\}$ را به (a, b) به صورت زیر

تعریف می کنیم:

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} & x \neq c \\ f_n'(c) & x = c \end{cases}$$

از قضیه مقدار میانگین در مشتق استفاده کنیم داریم :

$$\varphi_m(x)-\varphi_n(x)=\frac{f_m(x)-f_m(c)-[f_n(x)-f_n(c)}{x-c}=$$

$$f'_m(u)-f'_n(u) \qquad x\neq c \qquad\qquad (*)$$

که u عددی بین x, c است (البته این رابطه بازای $x = c$

نیز برقرار است) چون $f_n' \Rightarrow g$ پس

$$\forall \varepsilon \exists N_1 \forall m,n \geq N_1, a \leq v \leq b \Rightarrow \left| f_n'(v) - f_m'(v) \right| < \varepsilon$$

اگر $m, n \geq N_1$ آنگاه $\left|\varphi_m(x) - \varphi_n(x)\right| < \varepsilon$

یعنی $\{\varphi_n\}$ بطور یکنواخت همگراست با توجه به $(*)$ داریم

$$\left|f_m(x) - f_n(x)\right| = (x-c)\left|\varphi_m(x) - \varphi_n(x)\right| + \left|f_m(c) - f_n(c)\right|$$

با توجه به همگرایی $\{f_n(c)\}$ و رابطه بالا نتیجه میگریم

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon(b - a + 1)$$

پس $\{f_n\}$ به طور یکنواخت همگرا است.

برای اثبات $f'(x) = g(x)$ با توجه به همگرایی $\varphi_n(x)$ داریم

$$\lim_{t \to x} \varphi_n(t) = \varphi(x)$$

پس

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \lim_{t \to x} \varphi(t) = \lim_{n \to \infty} f_n'(x) = g(x)$$

قضیه زیر به قضیه دینی معروف است عکس گونه ای از

قضیه می باشد

۴.۷قضیه (دینی) : فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله ای از توابع بر X

باشد بطوریکه :

الف) دنباله $f_n \to f$ نزولی است .

ب) دنباله $\{f_n\}$ نزولی است .

ج) هر f_n و f پیوسته است .

د) X فشرده است .

آنگاه $f_n \Rightarrow f$

اثبات: فرض کنیم $g_n = f_n - f$ از اینکه f_n ها نزولی

می باشند پس $0 \leq g_n \downarrow$ و $g_n \to 0$

پس

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall x \exists N_x (n \geq N_x \Rightarrow 0 \leq g_{n_x}(x) < \frac{\varepsilon}{3}$$

چون تابع g_{n_x} در x پیوسته است پس بازای ε فوق

$$0 \le g_n(t) \le g_{n_x}(t) \le \left|g_{n_x}(t) - g_{n_x}(x)\right| + \left|g_{n_x}(x)\right| < \varepsilon$$

اگر $n \ge N_x$ آنگاه

$$\exists \sigma \quad \forall t \, (t \in N(x, \sigma_x)) \Rightarrow \left|g_{n_x}(t) - g_{n_x}(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

از طرفی خانواده $\{N(x,\sigma_x) | x \in X\}$ پوشش بازای برای

X است و چون X فشرده است پس تعدادی متناهی انرا

پوشش می دهد یعنی $X \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} N(x,\sigma_x)$

اگر $M = \max\{n_{x_1}, \ldots, n_{x_m}\}$ و $n \geq M$ و $x \in X$

آنگاه R ای وجود دارد که $x \in N(x, x_K)$ از این رو

$$0 \leq g_n(x) < \varepsilon$$

یعنی $g_n \Rightarrow 0$ پس $f_n \Rightarrow f$

سریهای توابع

اگر $\{f_n\}$ دنباله ای از توابع بر مجموعه E باشد سری

$\sum_{n=1}^{\infty} f(x)$ را یک سری از توابع بر E می نامیم .

اگر دنباله $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ بطور یکنواخت همگرا

به $S(x)$ باشد سری $\sum_{n=1}^{\infty} f(x)$ را بطور یکنواخت

همگرا بر E می نامیم

در صورتیکه سری $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ بطور یکنواخت همگرا باشد

آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} f(x)$ را بطور مطلق و یکنواخت همگرا

گوئیم .

اگر یک سری همگرا نباشد آنرا سری واگرا می نامیم

۴.۸ قضیه : شرط لازم و کافی برای آنکه $\sum_{n=1}^{\infty} f(x)$ بطور

یکنواخت همگرا باشد آنستکه بطور یکنواخت کوشی باشد یعنی:

$$\forall \varepsilon \exists N, \forall n, m \forall x \left(n \geq m \geq N, x \in E \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(x) \right| < \varepsilon \right)$$

اثبات : بنا به تعریف شرط لازم و کافی برای آنکه $\sum_{n=1}^{\infty} f(x)$

بطور یکنواخت همگرا باشد آن است $\{S_n\}$ بطور یکنواخت

باشد به عبارت دیگر در شرط یکنواخت کوشی صدق کند یعنی

$$\forall \varepsilon \exists N \forall m,n \forall x \left(n \geq m \geq N, x \in E \Rightarrow \left| S_n(x) - S_m(x) \right| < \varepsilon \right)$$

بنابراین داریم

$$\left|\sum_{k=n_1}^{m} f_n(x)\right| + \left|\sum_{k=1}^{m} f_n(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| = \left|S_m(x) - S_n(x)\right| < \varepsilon$$

و این حکم را ثابت می کند.

نتیجه ای که ازاین قضیه می توان گرفت قضیه M – وایرشتراس

است.

۴.۹ قضیه (M – تست وایرشتراس) فرض کنید $\{M_n\}$

دنباله ای ازاعداد نامنفی باشد بطوری که $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ همگراست

و f_n دنباله ای از توابع باشد و بازای هر $n\ ,\ x$ داریم

$|f_n(x)| \leq M_n$ آنگاه بطور یکنواخت همگراست $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

اثبات . با توجه به شرط کوشی در سری عددی $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ داریم

$$\forall \varepsilon \exists N \forall m,n \left(n \geq m \geq N \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{m} M_k \right| < \varepsilon \right)$$

و اکنون با استفاده از قضیه فوق بدیهی است

با توجه به خواص همگرایی یکنواخت دنباله توابع و رابطه آن

با پیوستگی، مشتقپذیری و انتگرال ها از اینکه $S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$

یک دنباله از توابع می باشد بسادگی خواص زیر را برای سریهای

توابع داریم

خواص همگرائی یکنواخت سریهای توانی

1. اگر $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ بطور یکنواخت همگرا و هر f_n بر E

پیوسته باشد آنگاه $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ بر E پیوسته است .

۲. اگر به ازای هر n , $f_n \in R(\alpha)$ بر $[a,b]$ و $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$

بطور یکنواخت به S همگرا باشد آنگاه $S \in R(\alpha)$ بر

$[a,b]$ و داریم

$$\int_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right] d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n d\alpha$$

۳. اگر هر f_n مشتقپذیر $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ بطور یکنواخت همگرا و

سری $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ در نقطه ای مانند C از بازه (a,b)

همگرا باشد آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ بطور یکنواخت همگراست و

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right]' = \sum_{n=1}^{\infty} f'(n)$$

آزمونهای همگرایی یکنواخت

۴.۱۰قضیه : فرض کنید $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ بطور یکنواخت همگرا و

$\{g_n\}$ بطور یکنواخت کراندار باشد آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$

بطور یکنواخت همگراست .

اثبات (خلاصه) : چون دنباله $\{g_n\}$ بطور یکنواخت کرانداراست

عددی ثابت مانند M وجود دارد که $\forall x, \; |g_n(x)| \leq M$

با توجه به رابطه زیر و همگرایی یکنواخت $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ حکم بدیهی

است

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} f_k g_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |f_k g_k| \leq M \sum_{k=n+1}^{m} |f_k|$$

۴.۱۱ قضیه : فرض کنید $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ بطور یکنواخت همگرا و g

کراندار باشد آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g$ بطور یکنواخت همگراست.

اثبات مانند قضیه قبل و ساده است

۴.۱۲ قضیه (آزمون دیریکله) : فرض کنید $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ یک

سری از توابع بر E باشد و $A_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$

بطوریکه :

الف) $\{A_n\}$ بر E بطور یکنواخت کراندار باشد

ب) به ازای هر x از E دنباله $\{g_n(x)\}$ یکنواخت باشد

ج) $g_n \Rightarrow 0$ بر E

آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ بر E بطور یکنواخت همگراست

.

۴.۱۳ قضیه (آزمون آبل) : فرض کنید

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ بطور یکنواخت همگراست .

ب) دنباله $\{g_n\}$ یکنواخت کراندار باشد

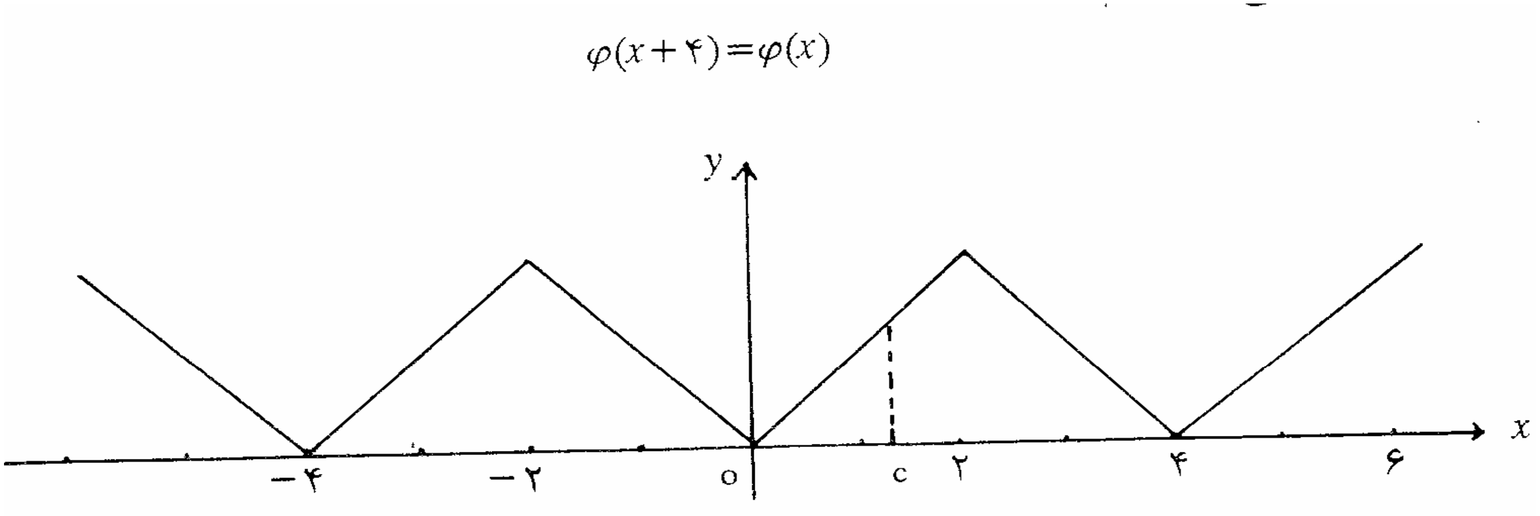
ج) بازای هر n , x داریم $g_n(x) \le g_{n+1}(x)$

آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ بطور یکنواخت همگراست .

توابع پیوسته هیچ جا مشتق ناپذیر

قضیه : تابع حقیقی وجود دارد که بر R پیوسته است ولی

در هیچ نقطه ای دارای مشتق نیست .



۱۴۰۴قضیه (وایرشتراس) : تابع f بر بازه $[0,1]$ پیوسته

باشد در این صورت چند جمله ایها مانند $\{p_n\}$ وجود دارد که

$$p_n \Rightarrow f$$

همپیوستگی

میدانیم که هر دنباله عددی کراندار دارای زیر دنباله ای

همگراست در مورد دنباله توابع می توان گفت ؟

آیا این نتیجه در مورد دنباله توابع هم برقرار است ؟

سئوال : در مورد دنباله توابع کرانداری به چه معنی می باشد .

۴.۲ تعریف : گوییم دنباله $\{f_n\}$ بر E بطور نقطه وار

کراندار است اگر به ازای هر x تابع حقیقی مقدار مانند

$\varphi(x)$ باشد بطوریکه به ازای هر عدد طبیعی n

داشته باشیم

$$|f_n(x)| \leq \varphi(x) \qquad (x \in E,\ n = 1,2,\ldots)$$

۴.۳ تعریف : گوئیم دنباله $\{f_n\}$ بر E بطور یکنواخت

کراندار است ، اگر عددی مثبت مانند M موجود باشد

بطوریکه به ازای هر $x \in E$ و هر عدد طبیعی N

داشته باشیم

$$|f_n(x)| \leq M \qquad (x \in E \,,\ n = 1,2,\ldots)$$

تذکر : همانطوریکه در دو تعریف فوق می بینیم در تعریف اول

عدد $\varphi(x)$ به نقطه X وابسته است در صورتیکه در

تعریف دوم M به X بستگی ندارد.

۴.۱۵ قضیه : فرض کنید دنباله $\left\{ f_n \right\}$ بر مجموعه شمارش

پذیر E بطور نقطه وار کراندار باشد، آنگاه $\left\{ f_n \right\}$ دارای

زیر دنباله ی همگرا بر E است .

اثبات : از اینکه E شماراست پس $E=\{x_1,x_2,...\}$

اکنون با توجه به کراندار بودن دنباله عددی $\{f_n(x_1)\}$

نتیجه می شود زیر دنباله کرانداری $\{f_{n1}\}$ می باشد به

همین ترتیب $\{f_{n1}(x_2)\}$ دارای زیر دنباله کرانداری مانند

$\{f_{n2}\}$ می باشد .

اکنون دنباله های $s_1 , s_2 , \ldots$ بصورت زیر که

شماراست بوجود می آید

$$s_1 : f_{1,1} \; , \; f_{1,2} \; , \; f_{1,3} \; ,\ldots$$

$$s_2 : f_{2,1} \;\; f_{2,2} \; , \; f_{2,3}$$

اگر $s : f_{11}\ , f_{22}\ , f_{33}\ ,\dots$ در نظر بگیریم آنگاه

بازای هر $x_k \in E$ ، $\{f_{nn}(x_k)\}$ فقط تعداد

متناهی نقطه با $\{f_{nk}(x_k)\}$ متفاوت است پس

$\{f_{nn}(x_k)\}$ همگراست .

تذکر : دنباله های بطور یکنواخت کراندار وجود دارد که هیچ

زیر دنباله آن همگرا نیست

٤.٤مثال : دنباله توابع $f_n(x) = \cos nx$ بر $[0,2\pi]$

بطوریکنواخت کراندار است .

تذکر : از کراندار یکنواخت یک دنباله توابع به هیچ وجه

همگرائی یکنواخت زیر دنباله ای از آن عاید نمی شود .

مثال٤.۵ : دنباله $\{f_n\}$ با ضابطه $f_n(x) = \dfrac{x}{x+(1+nx)^2}$

بر $[0,+\infty)$ بطور یکنواخت کراندار است ولی دارای زیر

دنباله ای به طور یکنواخت همگرا نیست چرا ؟

بعضی از تعاریف مورد نیاز را قبل از تعریف همپیوستگی می آوریم

٤.٤ تعریف : فرض کنید X یک فضای متریک فشرده باشد

$C(X)$ را مجموعه توابع مختلط پیوسته به X می گیریم

با جمع نقطه وارو ضرب اسکالر زیر $C(X)$ به یک فضای

برداری تبدیل می شود

$$\forall x \in X \; , \; (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(\forall x \in X \, , \, \lambda \in C)(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

حال به ازای هر $f \in c(x)$ تعریف می کنیم

$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$ چون f کراندار است پس $\|f\| < \infty$

اکنون روی $c(X)$ یک تعریف می نمائیم که فضای را به یک

فضای متریک تبدیل کند .

۴.۵تعریف : به ازای هر $f, g \in C(X)$ تعریف می کنیم

$$d(f, g) = \| f - g \|$$

یک متریک روی $C(x)$ است (چرا؟) بنابراین $(C(X), d)$

یک فضای متریک می باشد .

۴.۱۶قضیه : دنباله $\{f_n\}$ مفروض است $f_n \Rightarrow f$ اگر

و فقط اگر $f_n \to f$ در $C(X)$

خلاصه اثبات : اگر $f_n \Rightarrow f$ در این صورت بازای هر

$x \in X$ $\quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ از این رو

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < 4$$

بنابراین $d(f_n, f) < \varepsilon$

بالعکس اگر $f_n \to f$ پس

$$\forall \varepsilon \ \exists N \ \forall n \, (n \geq N \Rightarrow (f_{11}, f) < \varepsilon)$$

آنگاه $\|f_n - f\| < \varepsilon$ پس $f_n \to f$ در $C(x)$

۴.۱۷قضیه : با متریک d تعریف شده فوق $C(x)$ یک

فضای متریک کامل است .

اثبات (خلاصه) : فرض کنید که $\{f_n\}$ در $C(x)$ کوشی

است با توجه تعریف دنباله کوشی :

اگر $\varepsilon > 0$ دلخواه باشد عدد طبیعی N وجود دارد که

$m, n \geq N$ بطوریکه $\| f_n - f_m \| < \frac{\varepsilon}{2}$

بازای هر x ، $|f_n(x) - f_m(x)| < \| f_n - f_m \|$

اگر $n \to \infty$ نتیجه حاصل می شود .

۴.۶تعریف (همپیوستگی) : فرض کنید F خانواده ای از توابع

مختلط بر مجموعه E در فضای متریک (M,d) باشد

گوئیم F همپیوسته است در صورتیکه :

$$\forall\, \varepsilon\, \exists\, \delta\, \forall\, x, y \in E \,,\quad f \in F\, [d(x, y) < \delta \;\Rightarrow$$

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon\,]$$

۴.۱۸ قضیه : اگر X یک فضای فشرده باشد $f_n \in c(x)$

و $f_n \Rightarrow f$ آنگاه $\{f_n\}$ همپیوسته است .

برهان : چون $\{f_n\}$ بطور یکنواخت همگراست پس به ازای

هر $\varepsilon > 0$ از مرتبه ای ببعد N , $\|f_n - f_N\| < \frac{\varepsilon}{2}$

و از پیوستگی توابع f_1 ، f_2 ، ... ، f_{n-1} بر X و

فشردگی X که پیوستگی یکنواخت این توابع را نشان

می دهد عددی مانند δ پیدا می شود که $d(x,y)<\delta$

آنگاه

$$1 \le n < N \qquad \left| f_n(x) - f_n(y) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

و اگر $n \geq N$ داریم

$$\left| f_n(x) - f_n(y) \right| \leq$$

$$\left| f_n(x) - f_N(x) \right| + \left| f_n(x) + f_n(y) \right| + \left| f_n(y) - f_n(y) \right| < \varepsilon$$

4.19قضیه : اگر X فشرده باشد و $f_n \in C(x)$ که

بطورنقطه وار کراندار و همپیوسته باشد آنگاه :

الف) $\{f_n\}$ به X بطور یکنواخت کراندار است .

ب) زیر دنباله ای از $\{f_n\}$ وجود دارد که بطور یکنواخت

همگراست .

اثبات (خلاصه) : از همپیوسته بودن $\{f_n\}$ نتیجه می گیریم

که عددی مانند $\delta > 0$ موجود است که اگر $d(x,y) < \delta$

آنگاه $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$ چون خانواده $\{s(x,\delta) : x \in X\}$

یک پوشش باز بر مجموعه فشرده X است پس

$$X \subseteq \bigcup_{k=1}^{p} S(x_K, \delta)$$

بالنتیجه : اگر $x \in X$ آنگاه

$$k = 1 \quad , \quad \exists K , x \in s(x_k , \delta)$$

نتیجه می شود $d(x, x_k) < \delta$ از این رو

$$\left| f_n(x) - f_n(x_k) \right| < \varepsilon$$

از شرط دیگر مسئله که همان نقطه وار کرانه دار بودن

$\{f_n\}$ ها استفاده کرد عدد است که M_k $(1 \leq K \leq p)$

$$|f_n(x_k)| < M_k$$

اگر $M = \max\{m_1, m_2, \ldots m_k\}$ در نظر بگیریم

آنگاه حکم به راحتی بدست می آید .

پس از اینکه X فشرده است پس مجموعه شمارش

پذیر مانند $E = \{x_1, x_2, \ldots\}$ موجود است .

که در X چگال است از اینکه $\overline{E} = X$ پس می توان

ثابت کرد که $\left\{ S(x_k, \delta) \middle| k = 1,2,\ldots \right\}$ یک پوشش باز

برای مجموعه X فشرده است پس

$$X \subseteq \bigcup_{k=1}^{p} S(x_K, \delta)$$

حال که X را توانستیم توسط تعداد متناهی مجموعه باز با

شعاع δ پوشش دهیم و با استفاده از قضیه ۱ که $\{f_n\}$

دارای زیر دنباله همگرا مانند $\{f_{n_i}\}$ می باشد .

نتیجه می گیریم که N ای هست که $n_i \geq N \quad , \quad n_i$ آنگاه

از طرفی برای هر $x \in X$ دهر $\left| f_{n_i}(x_k) - f_{n_i}(x_k) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$

صورت $x \in S(x_k, \delta)$ و بنا به همپیوستگی $\{f_{n_i}\}$ داریم

که نتیجه حاصل می گردد . $\left| f_{n_i}(x_k) - f_{n_i}(x_s) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$

۴.۲۰ قضیه (آرزولا – آسکولی) : اگر X یک فضای متریک

فشرده و F زیر فضای بسته ای از $C(x)$ باشد آنگاه F

فشرده است اگر و فقط اگر کراندار و همپیوسته باشد .

اثبات (خلاصه) : اگر F فشرده باشد پس بسته و کراندار

است خانواده $\left\{ S(f, \frac{\varepsilon}{3}) \middle| f \in F \right\}$ پوشش باز برای

F است چون F فشرده است پس :

$$F \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} S(f_K, \frac{\varepsilon}{3})$$

از طرفی هر f_k به فضای فشرده X پیوسته یکنواخت است پس :

$$\forall \varepsilon \exists \delta_k [d(x,y) < \delta_k \Rightarrow |f_k(x) - f_k(y)| < \frac{\varepsilon}{3}]$$

اگر $\delta = \min\{\delta_1, ..., \delta_k\}$ در نظر بگیریم و

$d(x, y) < \delta$ آنگاه براحتی می بینیم $|f(x, y)| < \varepsilon$

یعنی F همپیوسته است .

برای اثبات عکس : کافی است ثابت کنیم هر دنباله دارای زیر

دنباله ای همگراست که این کار نیز براحتی انجام می گیرد .

اکنون تعریف زیر را در مورد جبرها بیان می نمائیم .

۴۰۷تعریف : فرض کنید A مجموعه ای از توابع به مجموعه

E باشد بطوریکه با عمل جمع و ضرب اسکالر یک فضای

برداری است و به ازای هر $f\ ,\ g$ از A داشته باشیم

$fg \in A$ آنگاه A یک جبر می گوییم.

پس A یک جبر است اگر به ازای هر $f, g \in A$ و

هر دو اسکالر α , β داشته باشیم

$$f\, g \in A \quad , \quad \alpha\, f + \beta\, g \in A$$

واضح است که $C(x)$ یک جبر است و هر زیر مجموعه

با خواص فوق را یک زیر جبر $C(x)$ می گوئیم .

۴.۱لم : اگر A یک زیر جبر $C(x)$ باشد آنگاه $\overline{A}$

نیز یک جبر است .

اثبات (خلاصه) : در اثبات این قضیه از این نکته استفاده

می شود که هر عضو $\overline{A}$ حد یک دنباله از اعضای

A می باشد .

بقیه در صفحه بعد

بعبارت دیگر اگر $f \in \overline{A}$ دراین صورت دنباله $\{f_n\}$ از

از اعضای A موجود است که $f_n \to f$ $(\|f_n - f\| \to 0)$

اگر $f \circ g \in \overline{A}$ پس $\{g_n\}$, $\{f_n\}$ وجود دارد

که

$$g_n \to g \quad , \quad f_n \to f \quad , \quad f_n , g_n \in A$$

چون A جبر است پس $\alpha f_n + \beta g_n \in A \quad , \quad f_n g_n$

و بازای هر دو عدد $\alpha \quad , \quad \beta$ از طرفی چون

$$\alpha f_n + \beta g_n \rightarrow \alpha f + \beta g \quad \text{و} \quad f_n g_n \rightarrow f g$$

$$\alpha f + \beta g \in \overline{A} \quad \text{و} \quad f g$$

یعنی A یک جبر است .

۴.۷ تعریف : فرض کنید A یک جبر از توابع بر مجموعه E

باشد گوئیم A نقاط E از هم جدا کند اگر به ازای

x_1 , x_2 متمایز از E تابعی مانند f در A باشد

بطوری که

$$f(x_1) \neq f(x_2)$$

اگر به ازاءِ هر x در E تابعی مانند f در A

باشد بطوریکه $f(x) \neq 0$ گوئیم A در هیچ نقطه

E صفرنمی شود .

۴.۲۱قضیه : فرض کنید A جبری به E باشد که نقاط E را جدا می کند و بر E صفر نیست اگر E , c_1 , c_2 دو نقطه متمایز x_1 , x_2 دو عدد ثابت باشند آنگاه تابعی مانند f عضو A وجود دارد بطوریکه :

$$f(x_1) = c_1 \quad , \quad f(x_2) = c_2$$

اثبات (خلاصه) : با توجه به فرض اینکه A نقاط E را

جدا می کنند تابعی مانند γ موجود است که $\gamma(x_1) \neq \gamma(x_2)$

و A به E صفر نیست توابع α , β وجوددارد که

$\beta(x_2) \neq 0$ و $\alpha(x_1) \neq 0$ با این دو تابع می توان تابع f

را ساخت که در شرایط قضیه صدق کند .

۴.۲۲قضیه (استون - وایراشتراس)

فرض کنید X یک فضای متریک فشرده و A زیر جبری

از باشد بطوری که X نقاط را جدا کند و بر $C_r(x)$

صفر نباشد در این صورت $\overline{A} = C_r(x)$ توجه شود

که منظور از $C_r(x)$ فضای توابع حقیقی پیوسته بر است و

قضیه فوق برای میدانهای مختلط برقرار نیست .

۴.۲۳قضیه : فرض کنید X یک فضای متریک فشرده

باشد و $\overline{A} \subseteq C(x)$ یک زیر جبر خود الحاقی باشد و اگر

A نقاط X را جدا کند و بر X صفر نشود و آنگاه

$$\overline{A} = C(x)$$

اهداف رفتاری فصل پنجم

- سریهای توانی و شعاع همگرائی آنها
- بسط تیلور یک تابع
- قضیه آبل
- شناخت تابع نمائی و خواص آن
- شناخت تابع لگاریتمی و خواص آن
- شناخت توابع مثلثاتی و خواص آن

۵۰۱ تعریف: یک سری توانی (حقیقی) به شکل $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$

تعریف می شود که در آن a یک عدد حقیقی و c_n اعداد

حقیقی هستندکه برای سادگی به صورت $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

اگر عددی مثبت مانند R موجود باشد به طوری که به ازای

هر عدد حقیقی x در بازه $(-R, R)$ سری (۱) همگرا

باشد در این صورت می نویسیم:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad x \in (-R, R)$$

در اینصورت می گوئیم f بوسیله سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

حول نقطه صفر بسط داده شده و چنانچه تابع f بصورت

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \qquad |x-a| < R$$

حول نقطه a بسط داده شده است

5.1قضیه : فرض کنید $R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{x\to a}} \sqrt[n]{|c_n|}}$ یک سری توانی

باشد

الف) اگر $|x| < R$ ، آن گاه $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ بطور

مطلق همگراست .

.

ب) اگر $|x| > R$ ، آن گاه $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ واگراست

ج) بازای هر $0 < \alpha < R$ آنگاه $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

بر $[-R+\alpha \, , \, R-\alpha]$ بطور یکنواخت همگراست

R همان شعاع همگرائی سری است .

اثبات : الف) بنا به فرض $\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R}$ بنا به خاصیت

مشخصه حد بالا داریم

$$\forall \varepsilon \; \exists N \; \forall n \; (n \geq N \Rightarrow \sqrt[n]{|c_n|} < \frac{1}{R} + \varepsilon)$$

اگر فرض کنیم $\varepsilon = L - \frac{|x|}{R}$ طرفین رابطه را در $|x|$

ضرب نمائیم داریم $n \geq N \quad , \quad \sqrt[n]{|c_n|}\,|x| < (\frac{|x|}{R} + \varepsilon) = L$

اگر طرفین به توان n برسد داریم :

$$n \geq N \Rightarrow |c_n x^n| < L^n$$

ب) اگر $|x| > R$ آنگاه $1 < \frac{|x|}{R}$ بازای $1 < L < \frac{|x|}{R}$

پس $|c_n||x|^n > L^n > 1$ لهذا $|c_n x^n| \xrightarrow{\neq} 0$

پس سری واگراست

$$\forall n \ \exists N \ (n > N \quad \& \quad \sqrt[n]{|c_n|}|x| > L)$$

ج) اگر $|x| < R - \varepsilon$ آنگاه $\sqrt[n]{|c_n x^n|} < \sqrt[n]{|c_n|}(R - \varepsilon)$

و این ثابت می کند که سری مطلقا” همگراست .

5.1نتیجه : اگر $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (|x|<R)$ آنگاه

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1)c_n x^{n-k} \quad |x|<R$$

بالاخص $f^{(k)}(0)=R!C_R$ که در آن $f^{(k)}$ مشتق

k ام و منظور از $f^{(0)}$ همان f است .

5.1 مثال :

1. از اینکه $\sqrt[n]{n} = 1$ پس شعاع همگرائي سري $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$

برابر با 1 مي باشد

2. شعاع همگرائی $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ برابر با ۱ میباشد چون $C_n = 1$

پس $R = 1$

3. ازاینکه $\sqrt[n]{n!} \to \infty$ در این صورت شعاع همگرائی سری

$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$ برابر صفر است

۵.۲قضیه (آبل) : فرض کنید $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ همگرا باشد

اگر

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad , \quad -1<x<1$$

آنگاه

$$\lim_{x\to 1-} f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

اثبات:بنا به قضیه آبل سری $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ بر $[0,1]$ بطور

یکنواخت همگرا به تابعی مانند $f(x)$ است از اینکه f بر

$[0,1]$ پیوسته است پس $\lim_{n\to 1^-} f(x) = f(1)$ و یا

$$\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

۵.۳قضیه : فرض کنید f در نقطه x از بازه (a,b)

دارای مشتقات تا مرتبه n باشد ، آن گاه تابعی مانند

$R(x)$ بر (a,b) موجود است به طوریکه $\lim_{x\to x_0} R(x)=0$

و

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{k}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R(x)(x-x_0)\ ,\quad a\le x\le b$$

اثبات (خلاصه) :

چند جمله ایها

$$p_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^K$$

را بر بازه $[a, b]$ تعریف می کنیم .داریم

$$p_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

اگر توابع ψ , φ را بر (a, b) با ضابطه زیر تعریف

نمائیم

$$\psi(x) = f(x) - p_n(x) \quad , \quad \psi(x) = (x - x_0)^n$$

آنگاه شرایط قضیه هوپیتال برقرار است داریم:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi^{(n)}(x_0)}{\psi^{(n)}(x_0)} = 0$$

تابع R را بصورت زیر تعریف می کنیم

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)} & x\neq x_0\\ 0 & x=x_0\end{cases}$$

داریم

$$f(x)=P_n(x)+\varphi(x)=P_n(x)+R(x)\left(x-x_0\right)^n$$

فرمول فوق در صفحه قبل را بسط تیلور تابع f در نقطه

x_0 می نامیم.

همانطوری که می دانیم در سری مضاعف تغییر ترتیب در

سری مضاعف $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}$ همواره مجاز نمی باشد .

بعنوان مثال اگر

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & i < j \\ -1 & i = j \\ 2^{j-i} & i > j \end{cases}$$

در این صورت $\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} = 0$ ولی $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = -2$

پس $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \neq \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}$

اما با اضافه کردن شرط زیر می توان جای دو $\sum$ را

عوض کرد .

5.4 قضیه : اگر $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|a_{ij}\right|$ همگرا باشد آنگاه

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}$$

اثبات بر عهده دانشجو می باشد .

۵.۵ قضیه : اگر تابع $f(x)$ دربازه $(-R, R)$ دارای

بسط تیلور حول نقطه صفر باشد بعبارت دیگر

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad , \quad -R < x < R$$

و عدد ثابت a طوری باشد که $|a| < R$ آنگاه f

دارای بسط تیلری حول نقطه a بصورت زیر نوشت :

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n \qquad |x-a|<R_1$$

که در آن

$$b_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad , \quad R_1=R-|a|$$

از دیگر مسائل مهم در سری های توانی یکتائی این سریها

است بعبارت دیگر اگر در بازه $(-R, R)$ داشته باشیم

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

آنگاه همواره $a_n = b_n$

توابع خاص

یکی از کاربردهای سری توانی آن است که می توان تعاریف دقیق از توابع را ارائه دهیم و خواص آنها را پیدا کنیم که این توابع شامل توابع نمائی لگاریتمی و مثلثاتی می باشند که به اختصار در بررسی قرار می دهیم .

۵.۲تعریف : شعاع همگرائی سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ عدد) Z را

در حالت کلی عدد مختلط در نظر می گیریم) برابر با $+\infty$

است بازای هر عدد مختلط تابع نمائی E را با ضابطه زیر

در نظر می گیریم :

$$E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

۵.۵ قضیه (خواص تابع نمائی E)

1. با توجه به ضرب دو سری می توان نتیجه گرفت

$$E(z_1)\,E(z_2) = E(z_1 + z_2)$$

2. به استقراءِ می توان ثابت کرد برای هر

$$E(nz) = (E(z))^n$$

۳. قسمت ۲ را به هر عدد حقیقی می توان تعیمم داد بعبارت

دیگر بازای هر عدد حقیقی r داریم $E(rz) = rE(z)$

اثبات: با توجه به حاصلضرب دو سری

$$E(z_1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_1^{\,n}}{n!}$$

$$E(z_2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_2^{\,n}}{n!}$$

داریم

$$E(z_1)E(z_2)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n$$

که در آن

$$c_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{z_1^k}{k!}\cdot\frac{z_2^{n-k}}{(n-k)!}=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot z_1^k z_2^{n-k}=\frac{(z_1+z_2)^n}{n!}$$

بنابراین $E(z_1)E(z_2) = E(z_1 + z_2)$ و این اثبات را کامل می کند.

به استقراء می توان نشان داد:

$$E(z_1)E(z_2)\ldots E(z_n) = E(z_1 + z_2 + \ldots + z_n)$$

که اگر تمام z ها مساوی بگیریم بدست می آوریم

$$E(z^n) = E(nz)$$

از $E(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ رابطه نیز بدست می آوریم

$E(0) = 1$ و عدد $E(1)$ را به e نمایش می دهیم

ادامه خواص تابع نمایی

4. در واقع داریم $e = E(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

5. می توان نتیجه گرفت که $\forall x \in R \quad , \quad e^x = E(x)$

6. تابع E مشتقپذیر است و $(\forall x \in R)\, E'(x) = E(x) = e^x$

7. همواره $e^x > 0$ بنا براین تابع نمائی اکیدا" صعودی است .

8. اگر $x>0$ با توجه به تعریف e^x داریم $e^x > x \ , \ e^x.e^{-x}=1$

بنابراین $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

۹. این تابع مشتقپذیر می باشد و دارای مشتق e^x می باشد.

۱۰. چون $e^x>0$ تابع $E : R \to (0,+\infty)$ تابعی اکیدا" صعودی

(بنا براین یک به یک) و پوشا می باشد

بالنتیجه دارای توابع وارون می باشد که با دامنه $(0,+\infty)$ و برد

R می باشد

۵.۳ تعریف: وارون $E:R\to(0,+\infty)$ را L به نمایش می دهیم

پس $L:(0,+\infty)\to(-\infty,+\infty)$.

۵.۶ قضیه: خواص زیر را در مورد تابع L داریم

۱. از خاصیت تابع معکوس داریم

$$L(E(x))=x \quad x\in R$$ و $$E(L(y))=y \quad y>0$$

۲. با توجه به قضیه مشتق تابع معکوس داریم $L'(E(x)).E(x)=1$

بنابراین اگر $y=E(x)$ فرض نمائیم $L'(y)=\frac{1}{y}$

ما بصورت دیگر وارد بحث تابع لگاریتمی می گردیم :

۵.۳تعریف : تابع L را به صورت زیر تعریف نموده و آنرا تابع

لگاریتم می نامیم

$$L(y)=\int_1^y \frac{dt}{t} \quad , \quad y\in(0,+\infty)$$

همچنان در تعریف فوق می بینیم تابع L بر $(0,1)$ منفی و بر

$(1,+\infty)$ مثبت است و همچنین $L(1)=0$

5.7 قضیه : داریم

$$L(uv) = L(u) + L(v) \qquad (u.v > 0)$$

اثبات : داریم

$$L(uv) = \int_1^{uv} \frac{dt}{t} = \int_1^{u} \frac{dt}{t} + \int_u^{uv} \frac{dt}{t} = \int_1^{u} \frac{dt}{t} + \int_1^{v} \frac{dt}{t}$$

$$= L(u) + L(v)$$

و حکم ثابت است .

خواص تابع لگاریتمی :

۱. باتوجه به اینکه

$$E[L(x)] = x$$

درنتیجه

$$E[nL(x)] = E[L(x)]^n = x^n \quad (n \in N)$$

و میتوان برای هر عدد حقیقی مانند α تعمیم داد بعبارت دیگر

$$E[aL(x)] = x^a$$

2. بنا به خاصیت ۱ داریم

$$E[aL(x)] = x^a$$

که اگر با توجه به قضیه مشتق توابع ازطرفین مشتق گیری گردد

بدست می آوریم

$$(x^a)' = \left[E[aL(x)]\right]' = [aL(x)]' E' aL(x)$$

$$= \frac{a}{x} E[aL(x)] = \frac{a}{x} x^a = a x^{a-1}$$

پس

$$(x^a)' = a x^{a-1}$$

۵.۲ مثال : تصاعد هندسی زیر را در نظر می گیریم:

$$1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n = \frac{1 - (-1)^{n+1} x^{n+1}}{1 + x} \qquad (|x| < 1)$$

از حد گیری از طرفین وقتیکه $n \to \infty$ خواهیم داشت

$$1 - x + x^2 - x^3 \ldots = \frac{1}{1 + x} \qquad (|x| < 1)$$

$$1 - x + x^2 - x^3 \ldots = \frac{1}{1+x} \qquad (|x| < 1)$$

اگر از طرفین رابطه بالا انتگرال گیری کنیم داریم

$$\int_0^a \frac{dx}{1+x} = \int_0^a (1 - x + x^2 - x^3 \ldots) dx = a - \frac{a^2}{2} + \ldots$$

که باتوجه به تعریف لگاریتم $\ln$ بدست می آوریم

$$\ln(1+a) = a - \frac{a^2}{2} + \ldots$$

توابع مثلثاتی:

توابع مثلثاتی را بدون توسل به نمادهای هندسی و زاویه و صرفا بر اساس تابع نمایی E مورد بررسی قرار دهیم.

۵.۳ تعریف: توابع S, C را به ترتیب همان توابع سینوس و

کسینوس می نامیم و به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$S(x) = \frac{E(ix) - E(-ix)}{2i}$$

$$C(x) = \frac{E(ix) - E(-ix)}{2}$$

اگر دو رابطه فوق با هم جمع نمایم داریم

$$E(ix) = c(x) + is(x)$$

یعنی $C(x)$, $S(x)$ قسمت های حقیقی و موهمی $E(ix)$ و

همچنین $S(0) = 0, C(0) = 1$

و از رابطه $E(\bar{z}) = \overline{E(z)}$ داریم:

$$|E(ix)|^2 = E(ix)\overline{E(ix)} = E(ix)E(-ix) = E(0) = 1$$

لهذا $(x \in R)$ $|E(ix)| = 1$

و به سادگی داریم

$$S'(x) = c(x) \quad , \quad C'(x) = s(x)$$

و از تعریف قدر مطلق یک عدد مختلط داریم :

$$S^2(x) + C^2(x) = 1$$

5.8قضیه:عدد حقیقی و مثبت مانند x وجود دارد که $C(x)=0$

اثبات:(خلاصه) بنا به تعریف داریم

$$c(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{x^{4k+2}}{(4k-2)!}[\frac{x^2}{4k(4k-1)}-1]$$

$$C(2)=1-4+\frac{16}{24}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2^{4k-2}}{(4k-2)!}[\frac{4}{4k(4k-1)}-1]$$

اعداد داخل $\sum$ منفی هستند پس

$$C(2)=1-2+\frac{2}{3}=-\frac{1}{3}<0$$

و $C(0)=1$ چون C پیوسته است و $C(2)<0<C(0)$

بنا به قضیه بولتسانو نقطه ای مانند x_0 وجود دارد $C(x_0)=0$

اگر فرض کنیم که $A=\{x: 0<x<2\ ,\ c(x)=0\}$ پس بنا به رابطه

فوق مجموعه A غیر خالی و کراندار است لذا اینفیمم دارد .

فرض کنیم $\alpha = \inf A$ که می توان ثابت کرد که $\alpha \in A$

پس $C(\alpha)=0$

۵.٤ تعریف:عدد π را برابر با 2α تعریف می کنیم.

تابع C بر بازه $[0, \frac{\pi}{2}]$ مثبت است و با توجه به رابطه

و اینکه $S^2(x)+C^2(x)=1$

داریم $C(\frac{\pi}{2}) = 0$ چون در بازه $[0, \frac{\pi}{2}]$

داریم $S(\frac{\pi}{2}) = \pm 1$ پس تابع S در این بازه اکیدا صعودی است و

$S'(x) = C(x) > 0$ و $S(0) = 0$ پس $S(x) > 0$ بنابراین

$$S(\frac{\pi}{2}) = +1$$

همچنین می توان نشان داد که $E(\frac{\pi}{2}) = i$ و $E(\pi) = -1$

و $E(2\pi i) = 1$

۵.۹ قضیه :

الف)اگر $0 < t < 2\pi$ آنگاه $E(it) \neq 0$

ب) توابع C و S متناوب با دوره تناوب 2π و E متناوب با

دوره تناوب $2\pi i$ است.

ج) اگر $T=\{z:|z|=1\}$ آنگاه تابع E از $[0,2\pi)$ بر روی T

یک به یک است

علائم بکاررفته در این کتاب :

Δx_i

$\Delta \alpha_i$

P

$\|P\|$

$M_i(f)$

$m_i(f)$

$U(p, f, \alpha)$

$L(p, f, \alpha)$

$\int_a^b f d\alpha$

$$S(p, f, \alpha)$$

$$U(p, f)$$

$$L(p, f)$$

$$I(x)$$

$$\int_a^b f d\alpha$$

$$\alpha \in R(\alpha)$$

$$\alpha \notin R(\alpha)$$

$$\alpha \in R$$

$$\int_a^{\infty} f$$

$$I(p)$$

$$V_f(a,b)$$

$$V(x)$$

$$(p, f)$$

$$(f)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

$$S_n(x)$$

www.salampnu.com

سایت مرجع دانشجوی پیام نور

- ✓ نمونه سوالات پیام نور : بیش از ۱۱۰ هزار نمونه سوال همراه با پاسخنامه تستی و تشریحی
- ✓ کتاب ، جزوه و خلاصه دروس
- ✓ برنامه امتحانات
- ✓ منابع و لیست دروس هر ترم
- ✓ دانلود کاملا رایگان بیش از ۱۴۰ هزار فایل مختص دانشجویان پیام نور

www.salampnu.com