

www.salampnu.com

سایت مرجع دانشجوی پیام نور

- ✓ نمونه سوالات پیام نور : بیش از ۱۱۰ هزار نمونه سوال همراه با پاسخنامه
- تستی و تشریحی
- ✓ کتاب ، جزوه و خلاصه دروس
- ✓ برنامه امتحانات
- ✓ منابع و لیست دروس هر ترم
- ✓ دانلود کاملاً رایگان بیش از ۱۴۰ هزار فایل مختص دانشجویان پیام نور

www.salampnu.com

بنام حضرت دوست که هرچه داریم از اوست

معادلات دیفرانسیل معمولی (رشته شیمی)

تهیه و تنظیم:

جمال صفار اردبیلی

عضو هیئت علمی دانشگاه پیام نور اردبیل



سرفصل معادلات دیفرانسیل

عنوان

فصل اول: معادله دیفرانسیل مرتبه اول

۱: ماهیت معادلات دیفرانسیل و طبقه بندی آنها

۲: معادله دیفرانسیل جدا شدنی و تبدیل به آن

۳: معادله دیفرانسیل همگن و تبدیل به آن

۴: دسته منحنی ها و دسته منحنی های متعامد

۵: معادله دیفرانسیل کامل

۶: عامل انتگرال ساز

۷: معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی و تبدیل به آن

فصل دوم: معادله دیفرانسیل مرتبه دوم

- 1: معادله دیفرانسیل مرتبه دوم حالت خاص فاقد x یا y
- 2: معادله دیفرانسیل مرتبه دوم با ضرایب ثابت همگن
- 3: معادله دیفرانسیل کوشی-اویلر
- 4: معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی غیر همگن (تغییر متغیر)
- 5: روش ضرایب ثابت (ضرایب نامعین)

فصل سوم: حل معادله دیفرانسیل به روش سری ها

1: سری توانی

2: نقاط معمولی و منفرد و جواب های سری معادلات

دیفرانسیل

3: نقاط منفرد منظم معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم

4: حالتی که معادله شاخص دارای ریشه های برابر است

فصل چہارم:

۱: دستگاہ معادلات دیفرانسیل

فصل پنجم: تبدیلات لاپلاس

۱: تبدیل لاپلاس

۲: خواص تبدیل لاپلاس

۳: معکوس تبدیل لاپلاس

۴: حل معادله دیفرانسیل به روش لاپلاس

۵: تبدیل لاپلاس برخی توابع

ماهیت معادله دیفرانسیل و طبقه بندی آن

مقدمه: با مفهوم معادله یعنی رابطه ای که در آن تساوی باشد، آشنا هستیم. ساده ترین معادله یک مجهولی می باشد،

که بانماد $f(x) = 0$ نشان می دهیم. مثلا $ax + b = 0$

معادله یک مجهولی درجه اول و $ax^2 + bx + c = 0$
معادله یک مجهولی درجه دوم و

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

معادله یک مجهولی درجه سوم والی آخر

معادله دو مجهولی که بانماد $f(x, y) = 0$ نشان می دهیم

مثلا $ax + by + c = 0$ معادله دو مجهولی درجه اول

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

معادله دو مجهولی درجه دوم والی اخر

در مورد معادله دونوع سوال قابل طرح می باشد:

الف) آیا x_0 جواب معادله $f(x) = 0$ می باشد؟
آیا جفت (x_0, y_0) جواب معادله $f(x, y) = 0$ می باشد؟
ب) جواب معادله را پیدا کنید؟

جواب دادن به سوال الف) ساده می باشد زیرا با جایگذاری می توان مشخص کرد. ولی جواب دادن به سوال ب) مشکل می باشد. ابتدا باید معادلات را دسته بندی کرده و برای هر نوع روش خاصی رارائه داده بعبارت دیگر برای حل معادله باید دو مرحله را مشخص کنیم:

1) مرحله شناخت

2) مرحله حل(روش حل)

حال اگر در معادله $f(x, y) = 0$ متغیر x را بعنوان متغیر

مستقل و y را بعنوان متغیر وابسته در نظر بگیریم آن گاه

x تابعی از y می باشد و می توان در مورد مشتق تابع

صحبت کرد یعنی :

$$y' = \frac{dy}{dx}, y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = y^{(2)}, \dots, y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$$

تعریف : معادله ای که شامل ترکیباتی از x (متغیر مستقل) و y (متغیر وابسته) و مشتقات آن باشد را معادله دیفرانسیل نامیم و با نماد

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

نشان می دهیم

در مورد معادله دیفرانسیل نیز می توان دو سوال طرح کرد:

الف) آیا تابع $f(x, y) = 0$ جواب معادله دیفرانسیل می باشد؟

ب) جواب های معادله دیفرانسیل را پیدا کنید؟

جواب دادن به سوال الف) ساده است (با جایگذاری) مثلا آیاتابع

$$y = e^{2x} \text{ جواب معادله } y'' - 5y' + 6y = 0 \text{ میباشد؟}$$

جواب دادن به سوال ب) مشکل می باشد و بستگی به نوع معادله و طبقه بندی آن دارد. باتعریف مرتبه و درجه معادله دیفرانسیل به سراغ سوال ب) می رویم.

تعریف: بیشترین تکرار مشتق در هر معادله را مرتبه آن
و توان بیشترین تکرار مشتق را درجه معادله دیفرانسیل نامیم .

مثلا :

(۱) معادله $(y')^3 + y^4 = x^5$ مرتبه اول ، درجه سوم می باشد.

(۲) معادله $\frac{d^3 y}{dx^3} + \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^2 = x$ مرتبه سوم ، درجه اول می باشد.

(۳) معادله $y^{(2)} + y^{(3)} = y^4$ مرتبه سوم ، درجه اول می باشد.

معادله دیفرانسیل جدا شدنی

مشابه معادله معمولی باتوجه به تعریف مرتبه و درجه معادله دیفرانسیل می توان آنها را طبقه بندی کرد. بنابراین ساده ترین معادله دیفرانسیل مرتبه اول بصورت $f(x, y, y') = 0$ می باشد که اگر توان y' برابر با یک باشد آنگاه معادله مرتبه اول درجه اول می باشد که مرتبه اول درجه اول

$$y' = \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = F(x, y) \quad \text{بصورت کلی}$$

می باشد

تعریف: معادله دیفرانسیل مرتبه اول درجه اول به صورت

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)}$$

را معادله جدا شدنی نامیم (مرحله شناخت). هر معادله مرتبه اول درجه اول جدا شدنی را اختصاراً معادله جدا شدنی (جدایی پذیر) نامیم. هر معادله جدا شدنی را می توان بصورت کلی

$$M(x)dx + N(y)dy = 0$$

تبدیل کرد.

حل معادله دیفرانسیل جداشدنی: با انتگرالگیری از معادله جداشدنی

$$M(x)dx + N(y)dy = 0$$

می توان جواب آنرا محاسبه کرد.

تذکر: هدف از حل معادله دیفرانسیل محاسبه جواب عمومی معادله دیفرانسیل می باشد. جوابی را جواب عمومی نامیم هرگاه تعداد پارامترها به تعداد مرتبه معادله دیفرانسیل باشد که بعدا آنرا دقیقا تعریف خواهیم کرد.

مثال : معادله $y' = \frac{x^2 + x}{y^2 - y}$ را حل می کنیم.

حل : داریم $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + x}{y^2 - y}$

آن گاه $(x^2 + x)dx + (y - y^2)dy = 0$

در نتیجه $\int (x^2 + x)dx + \int (y - y^2)dy = \int 0$ و یا

$$\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 = c$$

جواب (عمومی) معادله است .

معادله دیفرانسیل مرتبه اول درجه اول ممکن است به ظاهر جداشدنی نباشد ولی با تقسیم بر عباراتی می توان آن را تبدیل به جدا شدنی نمود.

$$\text{مثال: معادله } (y+1)(x^2+1)dx + (x+1)(y^2+1)dy = 0$$

به ظاهر جدا شدنی نیست، ولی با تقسیم بر حاصلضرب عبارات

$$\text{اضافی } (x+1)(y+1) \text{ داریم: } \frac{x^2+1}{x+1}dx + \frac{y^2+1}{y+1}dy = 0$$

که جدا شدنی است پس با انتگرالگیری داریم:

$$\frac{1}{2}x^2 - x + 2\ln(x+1) + \frac{1}{2}y^2 - y + 2\ln(y+1) = c$$

جواب معادله است .

معادله دیفرانسیل همگن

ملاحظه شد معادله مرتبه اول درجه اول بصورت

$$y' = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}$$

ویا به صورت

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

می باشد

مثلا معادلات

$$y' = \frac{x^2 + y}{y^2 + x}, y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}$$

معادلات مرتبه اول درجه اول می باشند که هیچکدام جدا شدنی نیستند ولی معادله اولی دارای خاصیتی می باشد که معادله دومی نیست. در معادله دیفرانسیل اول تمام جملات توابع

$$z = g(x, y), z = f(x, y)$$

از توان یکسان دو می باشد ولی معادله دومی چنین نیست. این مفهوم را بانماد ریاضی تعریف می کنیم.

تعریف : تابع دو متغیره $z = f(x, y)$

را تابع همگن از درجه n نامیم هرگاه در شرط زیر صدق کند:

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

تابع $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ تابع همگن از درجه دو می باشد

تابع

$$f(x, y) = xe^{\frac{y}{x}} + y \sin \frac{y}{x}$$

تابع همگن از درجه یک می باشد.

تعریف: معادله دیفرانسیل

$$y' = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}$$

را معادله همگن نامیم هر گاه توابع دو متغیره f, g

توابع همگن از درجه یکسان باشند. بعبارت دیگر معادله
دیفرانسیل

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

را معادله همگن نامیم هر گاه توابع دو متغیره M, N
توابع همگن از درجه یکسان باشند.

حل معادله دیفرانسیل همگن: فرض کنیم معادله $y' = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}$

همگن باشد. با فرض تغییر متغیر $v = \frac{y}{x}$ داریم $y = vx$ پس $y' = v'x + v$

آن گاه با جایگذاری در معادله نتیجه می شود که

$$v'x = \frac{f(1, v)}{g(1, v)} - v \Rightarrow \frac{dv}{dx} x = \frac{f(1, v)}{g(1, v)} - v = f(v) \Rightarrow \frac{dv}{f(v)} = \frac{dx}{x}$$

که معادله اخیر جدا شدنی است می توان آنرا به روش جدا

شدنی حل کرد و با جایگذاری $v = \frac{y}{x}$

جواب معادله دیفرانسیل اولیه بدست می آید.

مثال: معادله دیفرانسیل همگن $(x^2 + y^2)dx + xydy = 0$ را حل می کنیم با جایگذاری $y = vx$ و $dy = vdx + xdv$ داریم:

$$(x^2 + v^2 x^2)dx + xv(x)(vdx + xdv) = 0$$

$$(x^2 + v^2 x^2 + v^2 x^2)dx + x^3 vdv = 0$$

$$x^2(1 + 2v^2)dx + x^3 vdv = 0$$

$$(1 + 2v^2)dx + xv dv = 0$$

با تقسیم بر حاصلضرب عبارات اضافی $x(1 + 2v^2)$ داریم:

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{v}{1 + 2v^2} dv = \int 0$$

$$\ln x + \frac{1}{4} \ln(1 + 2v^2) = \ln c$$

تذکر: برای ساده کردن به جای c معمولا $\ln c$ را بعنوان پارامتر ثابت اختیار می کنیم.

$$\ln x (1 + 2v^2)^{\frac{1}{4}} = \ln c$$

$$x \sqrt[4]{(1 + 2v^2)} = c$$

$$x \sqrt[4]{\left(1 + \frac{2y^2}{x^2}\right)} = c$$

جواب معادله دیفرانسیل می باشد.

دسته منحنی ها و دسته منحنی های متعامد

ملاحظه شد که جواب عمومی هر معادله دیفرانسیل مرتبه اول معمولاً شامل یک ثابت اختیاری موسوم به پارامتر است. وقتی مقادیر مختلفی به این پارامتر نسبت داده می شود، یک دسته منحنی به دست می آید هر یک از این منحنی ها یک جواب خصوصی معادله دیفرانسیل مفروض است و همه آنها با هم جواب عمومی آن را تشکیل می دهند. بنابراین معادله

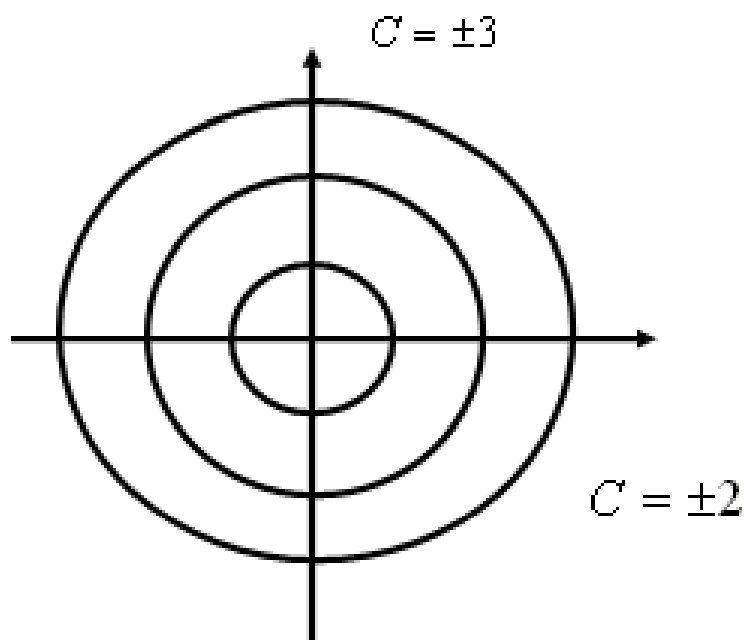
$$f(x, y, c) = 0$$

جواب عمومی آن را تشکیل می دهند. بنابراین معادله

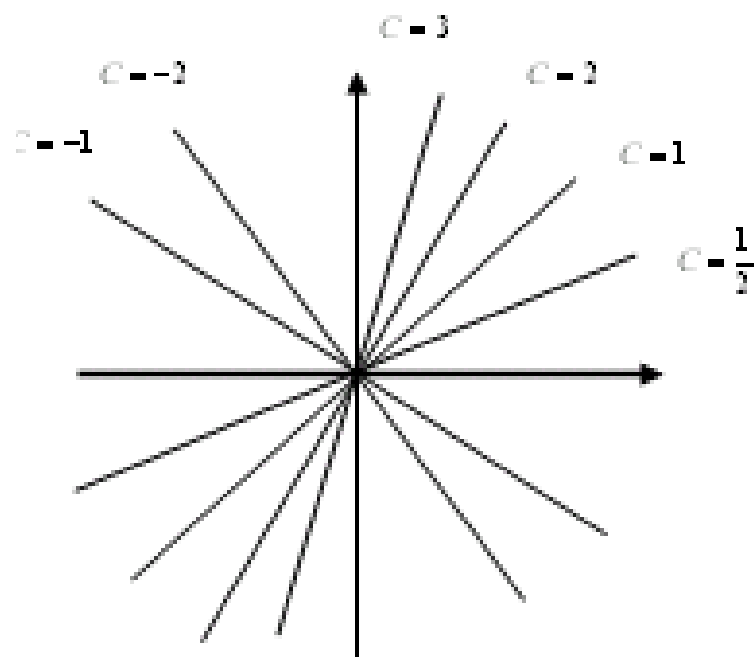
$$f(x, y, c) = 0$$

یک دسته منحنی می باشد .

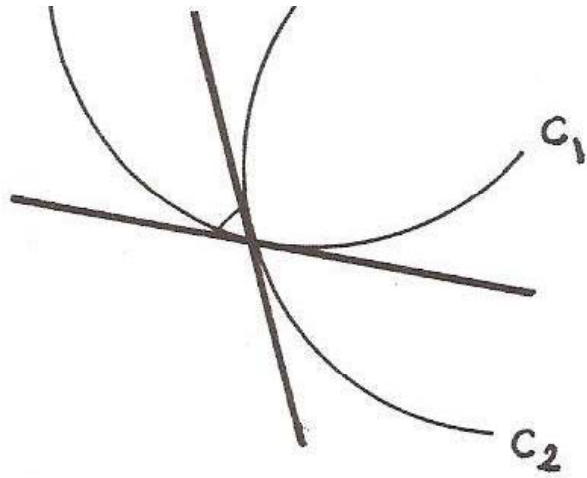
حال می خواهیم دسته منحنی های متعامد بر یک دسته منحنی مفروض را با استفاده از معادله دیفرانسیل بدست آوریم که کاربردی از معادله دیفرانسیل می باشد. بعنوان مثال تعدادی دسته منحنی را در زیر رسم می کنیم :



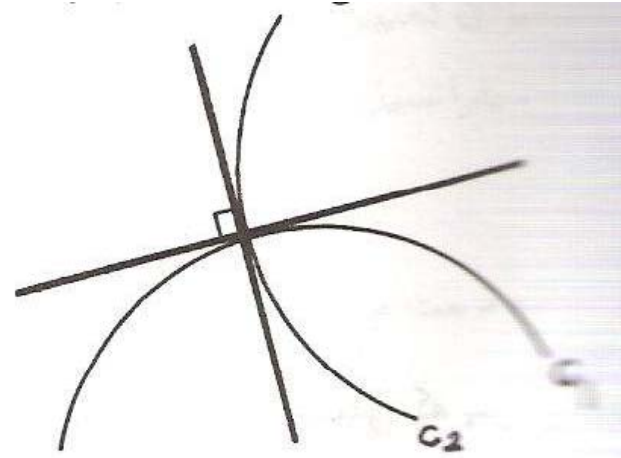
الف) $X^2 + Y^2 = C^2$



ب) $Y = CX$



متعامد نیستند A در C_2 و C_1



متعامدند A در C_2 و C_1

حال با توجه به مطالب بالا و با استفاده از روند زیر می توان
دسته منحنی های متعامد بر یک دسته منحنی ها را پیدا کرد :

$$f(x, y, c) = 0 \rightarrow$$

معادله دسته منحنی ها

$$f(x, y, y') = 0 \xrightarrow{y' = -\frac{1}{y'}} f\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0 \rightarrow g(x, y, c) = 0$$

معادله دیفرانسیل

دسته منحنی ها

معادله دیفرانسیل دسته

منحنی های متعامد

دسته

منحنی های

متعامد

مثال : دسته منحنی های متعامد بردسته منحنی های دواير به مرکز مبدا وشعاع دلخواه رابدست می

آوریم:

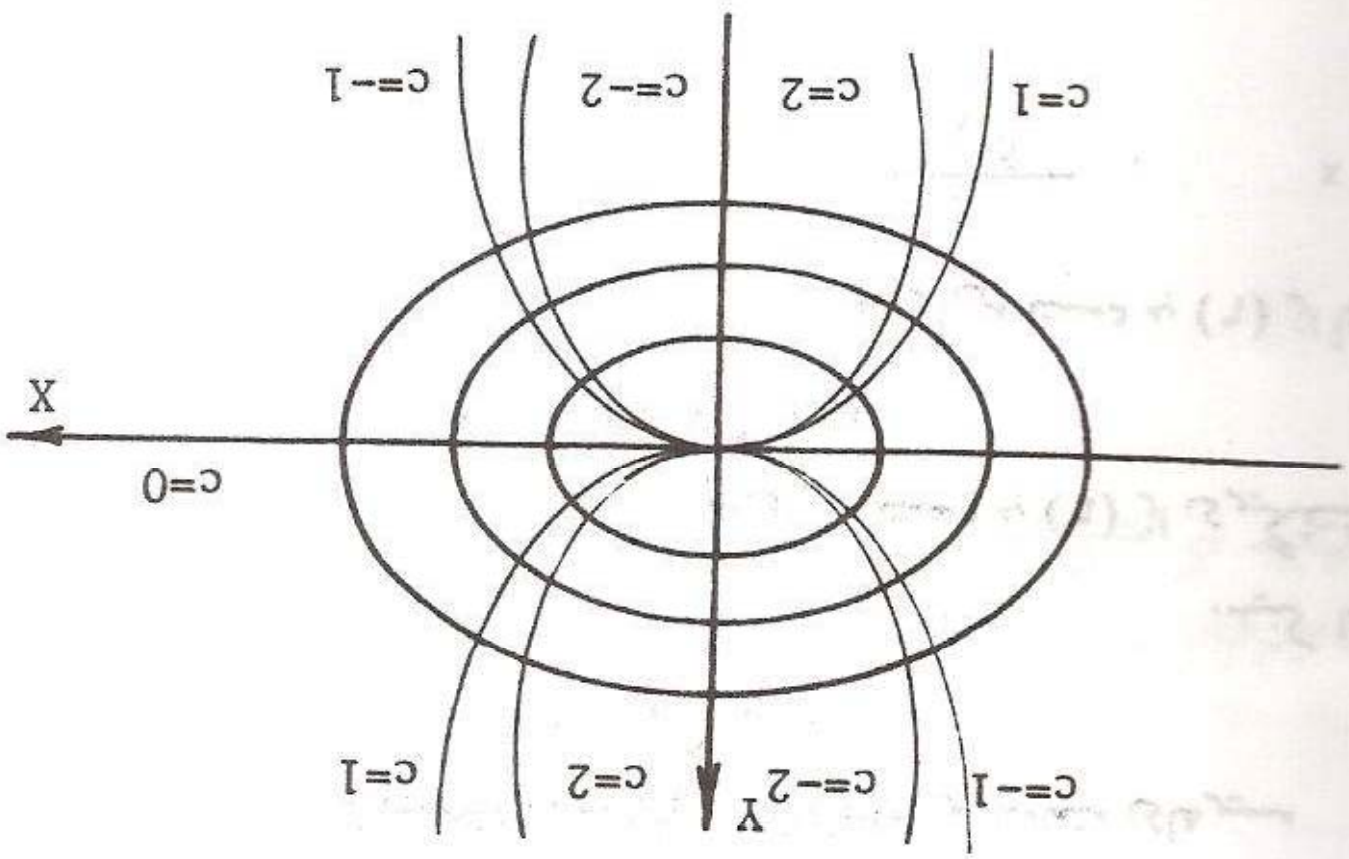
$$x^2 + y^2 = c^2 \quad \rightarrow 2x + 2yy' = 0 \Rightarrow x + yy' = 0$$

$$\xrightarrow{y' \rightarrow -\frac{1}{y'}} x + y \left(-\frac{1}{y'} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{y}{y'} \Rightarrow xy' = y$$

$$x \frac{dy}{dx} = y \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln y = \ln x + \ln c$$

$$\Rightarrow \ln y = \ln cx \Rightarrow y = cx$$

دسته منحنی های متعامد



اغلب مناسب است که دسته منحنی های داده شده را بر حسب مختصات قطبی بیان کنیم در این حالت از این موضوع استفاده می کنیم که اگر φ زاویه بین شعاع حامل و خط مماس باشد آن گاه $\tan \varphi = \frac{rd\theta}{dr}$ (ریاضی عمومی). با استفاده بحث بالا برای

یافتن دسته منحنی های متعامد در معادله دیفرانسیل دسته منحنی

داده شده به جای عبارت $\frac{rd\theta}{dr}$ منفی عکس آن یعنی $-\frac{dr}{rd\theta}$ را جایگذاری می کنیم.

مثال : دسته منحنی های متعامد بر دسته منحنی های

$$x^2 + y^2 = 2cx$$

را در مختصات قطبی بدست می آوریم. معادله دسته منحنی ها

در مختصات قطبی عبارت است از : $r = 2c \cos \theta$

بنابراین : $-\frac{dr}{d\theta} = -2c \sin \theta$

که با حذف c داریم:

$$-\frac{dr}{d\theta} = \left(\frac{r}{\cos \theta} \right) \sin \theta$$

و یا

$$\frac{rd\theta}{dr} = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

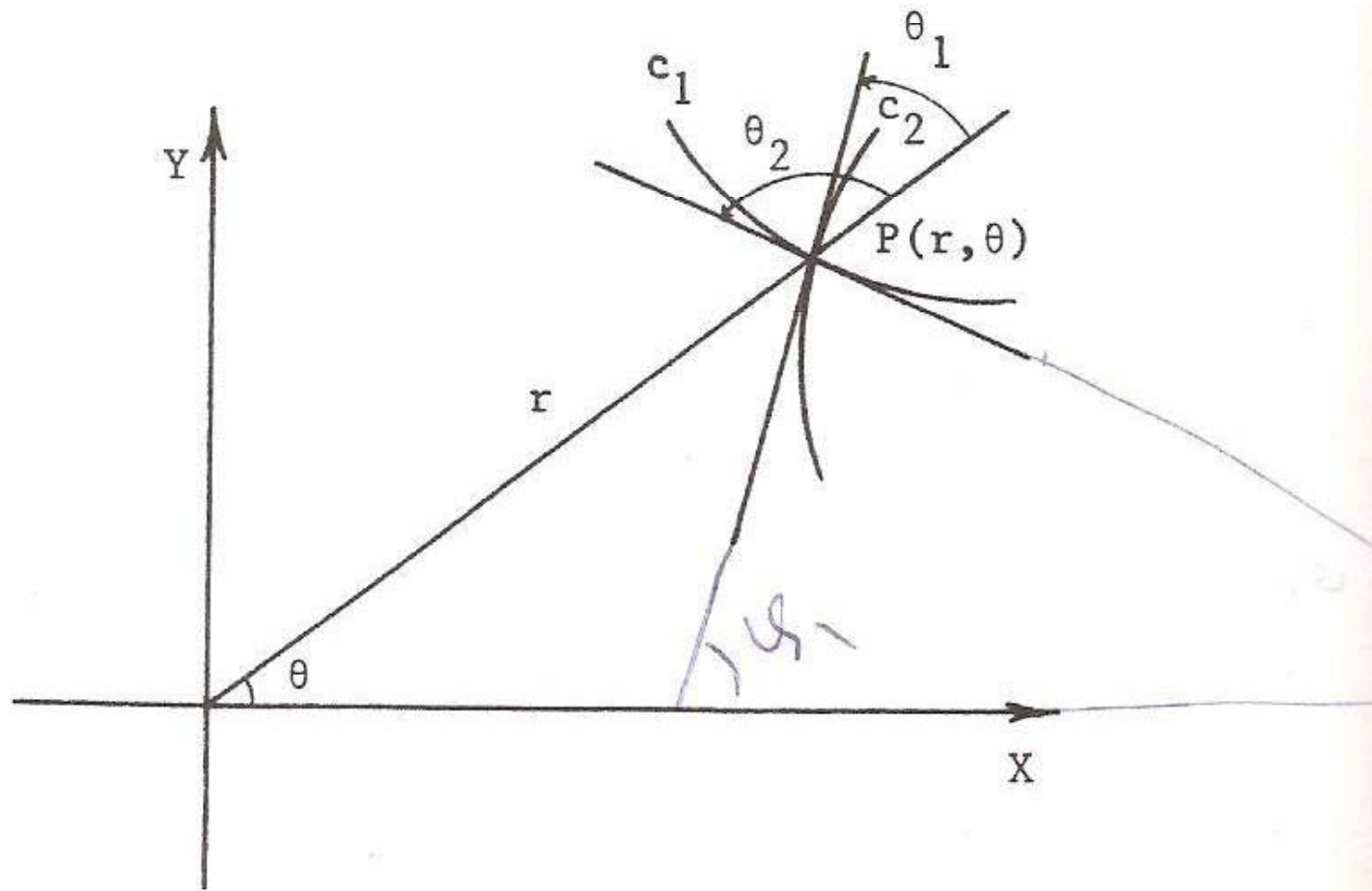
که با جایگذاری $-\frac{dr}{rd\theta}$ به $\frac{rd\theta}{dr}$ داریم:

$$-\frac{dr}{rd\theta} = -r \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \Rightarrow \int \frac{dr}{r} = \int \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta$$

$$\ln r = \ln \sin \theta + \ln 2c \Rightarrow \ln r = \ln 2c \sin \theta \Rightarrow$$

$$r = 2c \sin \theta$$

معادله دسته منحنی های متعامد می باشد.



معادله دیفرانسیل کامل

در ریاضیات عمومی با دیفرانسیل توابع دو متغیره

$$z = f(x, y)$$

آشنا شدیم و ملاحظه کردیم که دیفرانسیل کامل تابع را که با نماد df نشان می دهیم عبارت است از

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

و همچنین معادله دیفرانسیل مرتبه اول درجه اول بصورت کلی $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ می باشد.

تعریف: معادله دیفرانسیل $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$

را معادله کامل نامیم هر گاه تابع دو متغیره $z = f(x, y)$

موجود باشد بطوری که $\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y)$ و $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y)$.

با توجه به تعریف بالا تعیین اینکه معادله دیفرانسیل داده شده کامل می باشد، مشکل است زیرا باید تمام توابع دو متغیره راجستجو کنیم و ملاحظه کنیم که بترتیب کدام تابع دارای مشتقات جزئی نسبت به x و y برابر با توابع

$M = M(x, y)$ و $N = N(x, y)$ می باشد

اگر این کار امکان پذیر باشد، مشکل است به همین دلیل شرایطی روی M, N بدست می آوریم که وجود چنین تابعی را تضمین کند. با مشتق گیری جزئی از طرفین رابطه

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y) \quad \text{های}$$

به ترتیب نسبت به x, y داریم:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

با توجه به اینکه برای توابع پیوسته داریم:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

بنابراین:

بنابراین شرط کامل بودن معادله دیفرانسیل

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

عبارت است از :

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

(مرحله شناخت).

مثال: معادلات دیفرانسیل زیر کامل می باشد.

$$(2x + y)dx + (x + 3y^2)dy = 0 \quad \text{(الف)}$$

زیرا

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 = \frac{\partial N}{\partial x} = 1$$

$$(2xy^3 + y)dx + (3x^2y^2 + 3y^2 + x)dy = 0 \quad \text{(ب)}$$

زیرا

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6xy^2 + 1 = \frac{\partial N}{\partial x} = 6xy^2 + 1$$

حل معادله دیفرانسیل کامل:

فرض کنیم که معادله دیفرانسیل $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ کامل باشد بنابر تعریف معادله دیفرانسیل کامل، تابعی مانند

$$z = f(x, y)$$

موجود است که:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y)$$

پس بنابر تساوی های بالا نتیجه می شود $df = 0$

و یا $f = c$ جواب معادله دیفرانسیل می باشد .

تنها معلومات، مشتقات جزئی f می باشد که با استفاده از روند زیر می توان آنرا محاسبه کرد.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y) \end{array} \right. \xrightarrow{\int^x} f = \int M(x, y) dx + \varphi(y) \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}}$$

$$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int m(x, y) dx + \varphi'(y)$$

آن گاه با استفاده از رابطه دوم $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y)$ مقدار $\varphi'(y)$ بدست می آید که با انتگرال گیری از آن مجهول f که همان $\varphi(y)$ می باشد محاسبه می شود در نتیجه f بدست می آید که جواب معادله دیفرانسیل است .

$$f = c$$

مثال: ملاحظه شد که معادله

$$(2x + y)dx + (x + 3y^2)dy = 0$$

کامل می باشد پس:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y \xrightarrow{\int^x} f = x^2 + yx + \varphi(y) \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial f}{\partial y} = x + \varphi'(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x + 3y^2 \Rightarrow x + \varphi'(y) = x + 3y^2 \Rightarrow \varphi'(y) = 3y^2 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \varphi(y) = y^3 \Rightarrow f = x^2 + yx + y^3 \xrightarrow{df=0} x^2 + yx + y^3 = c$$

جواب معادله دیفرانسیل است.

عامل انتگرال ساز

$$ydx - (x^2 + x)dy = 0 \quad \text{معادله دیفرانسیل}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -2x - 1, \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 1 \quad \text{کامل نمی باشد زیرا}$$

$$u = \frac{1}{x^2} \quad \text{ولی اگر طرفین معادله بالا را در}$$

$$\frac{y}{x^2} dx - \left(1 + \frac{1}{x}\right) dy = 0 \quad \text{ضرب کنیم داریم :}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{1}{x^2}, \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{x^2} \quad \text{و این معادله دیفرانسیل جدید کامل می باشد زیرا}$$

و می توان به روش کامل معادله دیفرانسیل جدید را حل کرد .

بنابراین ممکن است معادله دیفرانسیل کامل نباشد ولی با ضرب کردن در تابع که آنرا عامل انتگرال ساز گوییم تبدیل به کامل کرد. اکنون شرط وجود عامل انتگرال ساز و چگونگی محاسبه آن را بیان می کنیم. فرض کنیم که معادله

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x} \quad \text{کامل نباشد یعنی}$$

و دارای عامل انتگرال ساز $u = u(x, y)$ باشد، آنگاه طبق تعریف عامل انتگرال ساز معادله جدید

$$uMdx + uNdy = 0$$

کامل می باشد

$$u \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{\partial u}{\partial y} = u \frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{\partial u}{\partial x}$$

که محاسبه U از این معادله ممکن نیست به همین دلیل تحت شرایط خاصی عامل انتگرال ساز را بررسی می کنیم.

الف) فرض می کنیم که عامل انتگرال ساز فقط تابعی از x باشد یعنی $u = u(x)$ ، آن گاه

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dx} , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

که با جایگذاری داریم:

$$p(x) = \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) \text{ و } u = e^{\int p(x) dx}$$

عامل انتگرال ساز می باشد.

ب) فرض می کنیم که عامل انتگرال ساز فقط تابعی از y باشد یعنی $u = u(y)$ ، آن گاه

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{du}{dy} , \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

که با جایگذاری داریم:

$$q(y) = \frac{1}{-M} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) \quad u = e^{\int q(y) dy}$$

عامل انتگرال ساز می باشد.

مثال: عامل انتگرال سازی برای معادله

$$xydx + (1 + x^2)dy = 0$$

را پیدا می کنیم.

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = x - 2x = -x \quad \text{حل: ابتدا مقدار مشترک}$$

را محاسبه می کنیم که با تقسیم بر $M -$ داریم:

$$q(y) = \frac{1}{-M} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = \frac{1}{-xy} (-x) = \frac{1}{y}$$

پس $u = e^{\int \frac{1}{y} dy} = e^{\ln y} = y$ می باشد.

تذکر: گاهی معادله دیفرانسیل غیر کامل دارای عامل انتگرال

$$u(x, y) = x^n y^m \quad \text{سازی بصورت}$$

است، که در آن n, m ثابت های مناسبی هستند .

برای یافتن عامل انتگرال سازی به صورت

$$u(x, y) = x^n y^m$$

طرفین معادله را در آن ضرب می کنیم و از شرط کامل

استفاده می کنیم.

تذکر: روش دسته بندی یا کوتاه، گاهی با جستجو کردن می توان معادله دیفرانسیل را به یکی از حالات زیر دسته بندی کرد:

$$M(x)dx = N(y)dy \quad \text{(الف)}$$

(جداشدنی)

$$M(x)dx = d(v(x, y)) \quad \text{(ب)}$$

$$d(u(x, y)) = N(y)dy \quad \text{(ج)}$$

$$d(u(x, y)) = d(v(x, y)) \quad \text{(د)}$$

که به سادگی می توان با انتگرال گیری از طرفین معادلات جواب آنها را بدست آورد .

یادآوری:

$$d(xy) = ydx + xdy$$

(الف)

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$$

(ب)

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{-ydx + xdy}{x^2}$$

(ج)

$$d\left(\tan^{-1} \frac{y}{x}\right) = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$$

(د) ۵۲

$$d \left(\ln \frac{x}{y} \right) = \frac{y dx - x dy}{xy} \quad (5)$$

$$d \left(\tan^{-1}(xy) \right) = \frac{y dx + x dy}{1 + x^2 y^2} \quad (6)$$

$$d \left(\ln(x^2 + y^2) \right) = 2 \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} \quad (7)$$

مثال: معادله دیفرانسیل $(y^2 + y)dx - xdy = 0$ را باروش دسته بندی حل می کنیم.

حل: معادله دیفرانسیل را به صورت $y^2 dx + ydx - xdy = 0$ می نویسیم که $ydx - xdy = -y^2 dx$ و از فرمول (ب)

داریم:

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = -dx, \quad \frac{ydx - xdy}{y^2} = -dx$$

که با انتگرال گیری نتیجه می شود

$$y = \frac{x}{c-x}, \quad \frac{x}{y} = -x + c$$

جواب معادله دیفرانسیل می باشد.

معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی

ملاحظه شد که معادله مرتبه اول بصورت $f(x, y, y') = 0$ می باشد که اگر توان های y, y' برابر با یک باشد آنرا معادله مرتبه اول خطی نامیم (معادله خط $ax + by = c$ ملاحظه شد که توان y, x برابر با یک می باشد که اگر توان یکی از x یا y به غیر یک باشد آن گاه معادله منحنی می باشد) بنابراین معادله مرتبه اول خطی به صورت

$$f_1(x) y' + f_2(x) y = f_3(x)$$

می باشد.

با تقسیم طرفین بر f_1 معادله مرتبه اول خطی بصورت

$$y' + p(x)y = q(x) \quad \text{کلی}$$

است (مرحله شناخت) مثلا معادلات زیر مرتبه اول خطی

هستند:

$$y' + \frac{1}{x}y = x^3 \quad \text{(الف)}$$

$$y' + \frac{1}{x}y = e^x \quad \text{(ب)}$$

$$y' - 2xy = e^{x^2} \quad \text{(ج)}$$

برای حل معادله دیفرانسیل $y' + p(x)y = q(x)$

ابتدا ملاحظه می کنیم که آیا کامل است یا نه؟

عامل انتگرال ساز معادله مرتبه اول خطی $u = e^{\int p(x)dx}$ است و

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left[\int e^{\int p(x)dx} \cdot q(x) dx + c \right]$$

جواب عمومی معادله مرتبه اول خطی $y' + p(x)y = q(x)$

می باشد

مثال : معادله مرتبه اول خطی $y' + \frac{1}{x}y = x^3$ را حل می کنیم.

$$y = e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left[\int e^{\int \frac{1}{x} dx} \cdot x^3 dx + c \right] \text{ چون } p(x) = \frac{1}{x} \text{ و } q(x) = x^3 \text{ پس:}$$

$$y = e^{-\ln x} \left[\int e^{\ln x} \cdot x^3 dx + c \right] \Rightarrow y = e^{\ln x^{-1}} \left[\int x \cdot x^3 dx + c \right]$$

$$y = x^{-1} \left(\frac{1}{5} x^5 + c \right) \Rightarrow y = \frac{1}{5} x^4 + \frac{c}{x}$$

جواب معادله دیفرانسیل است.

حالت خاصی از معادلات مرتبه اول خطی به صورت

$$\frac{dx}{dy} + p(y)x = q(y)$$

می باشد که توان های $x, x' = \frac{dx}{dy}$ برابر با یک می باشد. با

توجه به روش حل معادله مرتبه اول خطی با تعویض نقش x با y و بالعکس نتیجه می شود که

$$x = e^{-\int p(y)dy} \left[\int e^{\int p(y)dy} \cdot q(y)dy + c \right]$$

- حالت خاصی از معادلات مرتبه اول که تبدیل به خطی می شود به صورت

$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$

می باشد که به ازای $n = 0$ معادله مرتبه اول خطی است و به ازای $n = 1$ معادله جدا شدنی است و به ازای $n \neq 0, 1$ ، معادله برنولی نامیده می شود. معادله دیفرانسیل برنولی را می توان با تغییر متغیر $z = y^{1-n}$ حل کرد و دارای جواب

$$z = y^{1-n} = e^{-\int (1-n)p(x)dx} \left[\int e^{\int (1-n)p(x)dx} \cdot (1-n)q(x)dx + c \right]$$

است.

مثال: معادله $y' + \frac{1}{x}y = x^3 y^4$ را حل می کنیم.

حل: داریم $n = 4$ و $1 - n = -3$ و $p(x) = \frac{1}{x}$ و $q(x) = x^3$

پس:
$$y^{-3} = e^{-\int (-3)\frac{1}{x}dx} \left[\int e^{\int (-3)\frac{1}{x}dx} \cdot (-3)x^3 dx + c \right]$$

$$y^{-3} = x^3 \left[\int x^{-3} \cdot (-3x^3) dx + c \right]$$

$$y^{-3} = x^3 \left[\int -3 dx + c \right]$$

$$y^{-3} = x^3 (-3x + c)$$

$$y^{-3} = -3x^4 + cx^3$$

جواب عمومی معادله است.

$$c = y'$$

بعنوان معادله دیفرانسیل مرتبه اول می توان معادله دیفرانسیل

$$y = xy' + f(y')$$

را مطرح کرد به نام **کلرو (Clairaut)** معروف است. بسادگی ملاحظه می شود که $y = cx + f(c)$ جوابی از معادله بالامی باشد زیرا با مشتق گیری داریم $y' = c$ با جایگذاری در جواب نتیجه می شود $y = xy' + f(y')$ که معادله کلرو است. بنابراین جواب معادله کلرو با جایگذاری $c = y'$ بدست می آید.

مثال : معادله

$$y = xy' + (y')^2$$

را حل کنید.

حل: با جایگذاری $y' = c$ معادله دارای جواب

$$y = cx + c^2$$

است.

- بعنوان آخرین معادله دیفرانسیل مرتبه اول ریکاتی (Riccati) را بیان می کنیم که به صورت

$$y' = f(x) + g(x)y + h(x)y^2$$

با شرط $h(x) \neq 0$ می باشد برای پیدا کردن جواب عمومی معادله بالا باید جوابی خاص از آن معلوم باشد.

اگر $y = y_1(x)$ یک جواب خاص از معادله بالا باشد. جایگذاری

$$y = y_1 + \frac{1}{u} \quad \text{و} \quad y' = y_1' - \frac{u'}{u^2}$$

معادله را به معادله دیفرانسیل

$$u' + [g(x) + 2h(x)y_1]u = -h(x)$$

که مرتبه اول خطی است، تبدیل می کند.

مثال: معادله $y' = x^3 + \frac{2}{x}y - \frac{1}{x}y^2$ (با $y_1 = -x^2$) را حل می کنیم:

حل: چون $f(x) = x^3$ و $g(x) = \frac{2}{x}$ و $h(x) = \frac{-1}{x}$

پس: $u' + [\frac{2}{x} + 2(-\frac{1}{x}).(-x^2)]u = \frac{1}{x}$

$$u' + (\frac{2}{x} + 2x)u = \frac{1}{x}$$

بنابراین $p(x) = \frac{2}{x} + 2x$ و $q(x) = \frac{1}{x}$ پس:

$$u = e^{-(2\ln x + x^2)} \left[\int e^{2\ln x + x^2} \frac{1}{x} dx + c \right]$$

$$u = e^{-(2\ln x + x^2)} \left[\int e^{2\ln x + x^2} \frac{1}{x} dx + c \right]$$

$$u = e^{-2\ln x} e^{-x^2} \left[\int e^{2\ln x} \cdot e^{x^2} \frac{1}{x} dx + c \right]$$

$$u = x^{-2} e^{-x^2} \left[\int x^2 \cdot e^{x^2} \frac{1}{x} dx + c \right]$$

$$u = x^{-2} e^{-x^2} \left[\int x e^{x^2} dx + c \right]$$

$$u = \frac{1}{2} x^{-2} + c x^{-2} e^{-x^2} = \frac{1}{2x^2} + \frac{c}{x^2 e^{x^2}} = \frac{e^{x^2} + 2c}{2x^2 e^{x^2}}$$

$$y = -x + \frac{2x^2 e^{x^2}}{e^{x^2} + 2c}$$

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم

در این فصل معادله مرتبه دوم $f(x, y, y', y'') = 0$ را در حالات خاص بررسی می‌کنیم.

معادله مرتبه دوم حالت خاص فاقد y یا x

ممکن است در معادله ضریب x یا y برابر صفر باشد.

- معادله به صورت $f(y, y', y'') = 0$ را مرتبه دوم فاقد x

نامیم. مثلا $yy'' = (y')^2$ و $y'' + y = 0$
معادلات مرتبه دوم فاقد x می باشند.

- معادله به صورت $f(x, y', y'') = 0$ را مرتبه دوم فاقد y

نامیم. مثلا $xy'' = y'$ و $xy'' - y' = 3x^2$
معادلات مرتبه دوم فاقد y می باشند.

الف) حل معادله $f(x, y', y'') = 0$ با تغییر متغیر $y' = p$ می توان معادله را به معادله مرتبه اول تبدیل کرد که اگر معادله بدست آمده یکی از معادلات مرتبه اول باشد که قبلا بحث شده است می توان آنرا حل کرد

زیرا با فرض $y' = p$ داریم $y'' = \frac{dp}{dx}$ که با جایگذاری در معادله نتیجه می شود

$$f\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right) = 0$$

که معادله مرتبه اول می باشد.

(ب) حل معادله $f(y, y', y'') = 0$ با تغییر متغیر $y' = p$ می توان معادله را به معادله مرتبه اول تبدیل کرد که اگر معادله بدست آمده یکی از معادلات مرتبه اول باشد که قبلا بحث شده است می توان آنرا حل کرد

زیرا با فرض $y' = p$ داریم $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$ که

با جایگذاری در معادله نتیجه می شود

$$f\left(y, p, p \frac{dp}{dy}\right) = 0$$

که معادله مرتبه اول با فرض y متغیر مستقل و p متغیر وابسته می باشد.

مثال : معادله فاقد y ، $xy' = y'$ را با تغییر متغیر $y' = p$ حل می کنیم.

که با جایگذاری $y'' = \frac{dp}{dx}$ داریم:

$$x \frac{dp}{dx} = p \Rightarrow \int \frac{dp}{p} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln p = \ln x + \ln c_1 \Rightarrow \ln p = \ln c_1 x \Rightarrow p = c_1 x \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = c_1 x \Rightarrow \int dy = \int c_1 x dx \Rightarrow y = \frac{1}{2} c_1 x^2 + c_2$$

جواب عمومی معادله دیفرانسیل است.

مثال : معادله مرتبه دوم فاقد x ، $yy'' = (y')^2$ را
باتغییر متغیر $y' = p$ حل می کنیم که با جایگذاری

$$yp \frac{dp}{dy} = p^2 \Rightarrow ydp = p dy \quad \text{داریم: } y'' = p \frac{dp}{dy}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dp}{p} = \int \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln p = \ln y + \ln c_1 \Rightarrow p = c_1 y$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = c_1 y \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int c_1 dx \Rightarrow \ln y = c_1 x + c$$

$$\Rightarrow y = e^{c_1 x + c} = e^{c_1 x} \cdot e^c \Rightarrow y = c_2 e^{c_1 x}$$

جواب عمومی معادله دیفرانسیل است.

تذکر: در حل این نوع معادلات دیفرانسیل
مرتبه دوم، در واقع هر معادله مرتبه دوم را
به دو معادله مرتبه اول تبدیل کرده و آنها را
حل می‌کنیم.

معادله مرتبه دوم با ضرایب ثابت همگن

در این بخش حالت خاصی از مرتبه دوم را بررسی می کنیم.
ملاحظه شد که معادله مرتبه دوم خطی بصورت کلی

$$f_1(x)y'' + f_2(x)y' + f_3(x)y = f_4(x)$$

می باشد که اگر $f_4(x) = 0$ آنرا مرتبه دوم خطی همگن
نامیم

اگر f_1, f_2, f_3 توابع ثابت باشند بعبارت
دیگر مقادیر آنها اعداد ثابت باشند آن گاه معادله بصورت

$$a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = 0$$

می باشد که می توان آنرا بصورت ساده

$$y'' + ay' + by = 0$$

ملاحظه کرد که آنرا مرتبه دوم خطی همگن با ضرایب
ثابت ، یا اختصارا با ضرایب ثابت نامیم . (مرحله شناخت)

حل معادله : $y'' + ay' + by = 0$

با تعریف نماد $D = \frac{d}{dx}$ داریم $y' = \frac{dy}{dx} = Dy$ و

که با جایگذاری در معادله $y'' = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = D^2 y$

$$y'' + ay' + by = 0$$

نتیجه می شود که :

$$(D^2 + aD + b)y = 0$$

معادله $D^2 + aD + b = 0$ را معادله کمکی (یا مفسر) نامیم
معادله کمکی، یک معادله درجه دو می باشد که ممکن است
سه حالت زیر رخ دهد:

الف) دارای دو ریشه متمایز باشد یعنی

$$D^2 + aD + b = (D - m_1)(D - m_2) = 0$$

ب) دارای ریشه مضاعف (تکراری) باشد یعنی

$$D^2 + aD + b = (D - m)(D - m) = 0$$

ج) دارای ریشه مختلط باشد یعنی

$$D^2 + aD + b = (D - (\alpha + i\beta))(D - (\alpha - i\beta)) = 0$$

بنابر این معادله دیفرانسیل $(D^2 + aD - b)y = 0$ را با توجه به معادله کمکی به دو معادله مرتبه اول تبدیل کرده و آنرا حل می‌کنیم. بنابر این :

الف) $(D - m_1)(D - m_2)y = 0$ که با فرض $(D - m_2)y = u$ داریم
 $(D - m_1)u = 0$ و با حل معادله مرتبه اول $(D - m_1)u = 0$
 نتیجه می‌شود.

$$u = c_1 e^{m_1 x}$$

که با جایگذاری در معادله $(D - m_2)y = u$

و حل معادله خطی بالا داریم $y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$

ب) اگر $(D - m)(D - m)y = 0$ آن گاه مشابه قسمت الف) نتیجه می شود که

$$y = c_1 e^{mx} + c_2 x e^{mx}$$

جواب معادله دیفرانسیل می باشد.

ج) اگر معادله کمکی دارای دو ریشه مختلط باشد بنابر الف) داریم:

$$y = c_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha - i\beta)x}$$

$$y = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) \quad \text{ویا}$$

جواب معادله دیفرانسیل می باشد

مثال: معادلات

$$y'' - 5y' + 6y = 0 \text{ (الف)}$$

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \text{ (ب)}$$

$$y'' - y' + y = 0 \text{ (ج)}$$

معادلات مرتبه دوم با ضرایب ثابت می باشند.

حل: الف) معادله کمکی عبارت است از $D^2 - 5D + 6 = 0$ که $D = 2, 3$ بنابراین: $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$ جواب عمومی معادله دیفرانسیل است.

ب) معادله کمکی عبارت است از $D^2 - 4D + 4 = 0$ که $D = 2, 2$ بنابراین: $y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$ جواب عمومی معادله دیفرانسیل است.

ج) معادله کمکی عبارت است از $D^2 - D + 1 = 0$ که $D = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ بنابراین: $\alpha = \frac{1}{2}$ و $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ پس

$$y = e^{\frac{1}{2}x} \left(c_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right)$$

جواب عمومی معادله دیفرانسیل است.

تذکر: معادله مرتبه دوم را به روش دیگر نیز می توان حل کرد که اگر $y_1 = y_1(x)$ و $y_2 = y_2(x)$ توابعی باشند که جوابی از معادله دیفرانسیل مرتبه دوم همگن، آن گاه

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

جوابی از معادله دیفرانسیل می باشد و اگر y_1 و y_2 توابعی مستقل خطی باشند آنگاه این جواب ، جواب عمومی معادله دیفرانسیل است و می توان معادله دیفرانسیل مرتبه دوم را از این دیدگاه بررسی کرد .

معمولا شرایط وجود جواب معادله
دیفرانسیل مرتبه دوم همگن در درس نظریه
معادلات دیفرانسیل بحث می شود
و شرایطی را روی توابع بیان می کنند که
وجود جواب معادله دیفرانسیل را تضمین
کند که ما اینجا وارد این بحث نمی شویم.

تعریف: برای هر دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ دترمینان

$$\begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = f(x)g'(x) - g(x)f'(x)$$

را ورنسکینی (Wronskian) توابع f, g می نامیم
و با نماد

$$w(f, g) = f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$$

نشان می دهیم .

- ثابت می شود که رونسکینی متحد با صفر است اگر فقط اگر دو تابع وابسته خطی اند. بعبارت ساده تر دو تابع، وابسته خطی اند هر گاه یکی مضرب دیگری باشد، در غیر این صورت آنها را مستقل خطی می نامیم.

توجه: بسادگی ملا حظه میشود که توابع

$$y_2 = e^{m_2 x}, y_1 = e^{m_1 x}$$

با شرط $m_1 \neq m_2$ مستقل خطی اند مشا بها

$$y_2 = xe^{mx}, y_1 = e^{mx}$$

مستقل خطی اند و همچنین

$$y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x \quad \text{و} \quad y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$$

با شرط $\beta \neq 0$ مستقل خطی اند.

تذکر: نتایج بالا را برای معادلات دیفرانسیل
با ضرایب ثابت مرتبه بالانیزمی توان تعمیم
کرد. یعنی اگر معادله کمکی معادله
دیفرانسیل دارای ریشه های حقیقی متمایز
و مضاعف و مختلط داشته باشد. آن گاه جواب
معادله دیفرانسیل ترکیبی از جواب های بیان
شده است.

مثال معادله دیفرانسیل $D(D-1)(D-2)^2 y = 0$ دارای معادله کمکی می باشد که ریشه های آن عبارت است از:

$$D = 0, 1, 2, 2$$

بنابراین

$$y = c_1 e^{0x} + c_2 e^x + c_3 e^{2x} + c_4 x e^{2x}$$

جواب معادله دیفرانسیل است .

معادله کشی-اویلر

معادله مرتبه دوم خطی همگن

$$x^2 y'' + axy' + by = 0$$

راکه در آن a, b اعداد ثابت اند معادله کشی-

اویلر (Cauchy-Euler) می نامیم.

مثال معادلات دیفرانسیل زیر معادله های کشی – اویلر می باشند.

$$x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0 \quad (\text{الف})$$

$$x^2 y'' + xy' - y = 0 \quad (\text{ب})$$

حل معادله کشی - اویلر $x^2 y'' + axy' + by = 0$

این معادله را با تغییر متغیر $x = e^t$ می توان به معادله مرتبه دوم با ضرایب ثابت تبدیل کرد زیرا:

$$x^2 y'' = \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \quad \text{و} \quad xy' = \frac{dy}{dt}$$

اگر مشتق های y نسبت به t را با Y', Y'' نشان دهیم،

معادله تبدیل به

$$(Y'' - Y') + aY' + bY = 0$$

می شود که معادله با ضرایب ثابت است .

مثال: معادله کشی - اویلر زیر را حل می کنیم:

$$x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0$$

حل: با فرض $x = e^t$ داریم:

$$D(D-1)Y - 4DY + 6Y = 0$$

پس معادله کمکی دارای ریشه های $D = 2, 3$ است بنابراین:

$$Y = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}$$

با جایگذاری $x = e^t$ (یا $t = \ln x$) نتیجه می شود:

$$y = c_1 x^2 + c_2 x^3$$

جواب معادله کشی - اویلر است.

تذکر: نتایج بالا را برای معادلات دیفرانسیل کشی – اویلر مرتبه بالا نیز می توان تعمیم داد.

مثلا معادله کشی – اویلر مرتبه سوم

$$x^3 y''' + ax^2 y'' + bxy' + cy = 0$$

را می توان با تغییر متغیر $x = e^t$ تبدیل به معادله:

$$(D(D-1)(D-2) + aD(D-1) + bD + c)Y = 0$$

نمود و آنرا با روش ضرایب ثابت حل کرد.

مثال : معادله دیفرانسیل کشی - اویلر زیر را حل می کنیم:

$$x^3 y''' + 4x^2 y'' - 8xy' + 8y = 0$$

حل: با فرض $x = e^t$ داریم :

$$D(D-1)(D-2)Y + 4D(D-1)y + 8DY + 8Y = 0$$

$$(D(D-1)(D-2) + 4D(D-1) - 8D + 8)Y = 0$$

$$(D-1)(D-2)(D+4) = 0 \Rightarrow D = 1, 2, -4$$

$$Y = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-4t} \quad \text{بنابراین :}$$

$$y = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^{-4}$$

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی غیر همگن

ملاحظه شد که معادله مرتبه دوم خطی با ضرایب ثابت غیر همگن بصورت $y'' + ay' + by = f(x)$ می باشد که اگر $f(x) = 0$ آنرا معادله مرتبه دوم خطی با ضرایب ثابت همگن نامیم یعنی :

$$y'' + ay' + by = 0$$

و دارای جوابی بصورت $y = C_1 u_1 + C_2 u_2$ می باشد.

حال اگر y_c جواب عمومی معادله همگن

$$y'' + ay' + by = 0$$

و y_p جوابی خاص از معادله غیر همگن

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

باشد آن گاه

$$y = y_c + y_p$$

جواب عمومی معادله غیر همگن می باشد.

تعریف: معادله دیفرانسیل $y'' + ay' + by = 0$ را
معادله دیفرانسیل با ضرایب ثابت وابسته معادله دیفرانسیل

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

نامیم.

هدف از این قسمت درس پیدا کردن جواب خاص معادله غیر

$$y'' + ay' + by = f(x) \quad \text{همگن}$$

می باشد که دو روش برای پیدا کردن y_p ارائه می دهیم.

الف) روش تغییر پارامتر :

در این روش فرض می‌کنیم که جواب خاص y_p بصورت

$$y_p = v_1 u_1 + v_2 u_2$$

باشد که چون $y_c = C_1 u_1 + C_2 u_2$ جواب همگن می‌باشد و با تغییر پارامترهای C_1, C_2 به توابع $v_1 = v_1(x)$ و $v_2 = v_2(x)$ بدست آمده است، به همین دلیل این روش را تغییر پارامتر نامیم .

حال با توجه به معلوم بودن ظاهر جواب خاص کافی است روابطی که توابع v_2, v_1 در آن صدق می کنند را پیدا کنیم . بنابراین داریم:

$$y'_p = v'_1 u_1 + v_1 u'_1 + v'_2 u_2 + v_2 u'_2$$

$$y''_p = v''_1 u_1 + v'_1 u'_1 + v_1 u''_1 + v''_2 u_2 + v'_2 u'_2 + v_2 u''_2$$

چون باید در معادله همگن $y''_p + ay'_p + by_p = f(x)$ صدق کند، بنابراین

$$\begin{cases} v'_1 u_1 + v'_2 u_2 = 0 \\ v_1 u'_1 + v_2 u'_2 = f(x) \end{cases}$$

که دستگاه دو معادله دو مجهولی می باشد و می توان از آن مقادیر v_1' , v_2' را محاسبه کرده و با انتگرال گیری

v_1, v_2 محاسبه می شود و از آن جا

$$y_p = v_1 u_1 + v_2 u_2$$

بدست می آید.

با یک مثال توضیح می دهیم

مثال : معادله غیر همگن $y'' - 5y' + 6y = 3e^x$ را حل می کنیم:

حل : معادله وابسته $y'' - 5y' + 6y = 0$ دارای جواب $y_c = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$ است بنابراین $u_1 = e^{2x}$ و $u_2 = e^{3x}$

$$\begin{cases} v_1' e^{2x} + v_2' e^{3x} = 0 \\ v_1'(2e^{2x}) + v_2'(3e^{3x}) = 3e^x \end{cases} \quad \text{پس:}$$

با ضرب معادله اول در -2 و جمع طرفین دو معادله بالا

$$v_2' e^{3x} = 3e^x \quad \text{داریم:}$$

$$v_2' = 3e^{-2x} \Rightarrow v_2 = \frac{-3}{2} e^{-2x}$$

پا جایگذاری $v_2' = 3e^{-2x}$ در معادله اول داریم:

$$v_1' e^{2x} + (3e^{-2x})e^{3x} = 0$$

$$v_1' e^{2x} = -3e^x \Rightarrow v_1' = -3e^{-x} \Rightarrow v_1 = 3e^{-x}$$

$$y_p = v_1 u_1 + v_2 u_2 = 3e^{-x} \cdot e^{2x} - \frac{3}{2} e^{-2x} \cdot e^{3x}$$

در نتیجه:

$$= 3e^x - \frac{3}{2} e^x = \frac{3}{2} e^x$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + \frac{3}{2} e^x$$

پس

جواب عمومی معادله غیر همگن است.

مثال : معادله غیر همگن $y'' - 5y' + 6y = 1 + x$ را حل می کنیم.

حل: معادله وابسته $y'' - 5y' + 6y = 0$ دارای جواب $y_c = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$ است بنابراین $u_1 = e^{2x}$ و $u_2 = e^{3x}$

$$\begin{cases} v_1' e^{2x} + v_2' e^{3x} = 0 \\ v_1' (2e^{2x}) + v_2' (3e^{3x}) = 1 + x \end{cases} \quad \text{پس :}$$

با ضرب معادله اول در -2 و جمع طرفین دو معادله بالا داریم:

$$v_2' e^{3x} = 1 + x$$
$$v_2' = (1 + x)e^{-3x} \Rightarrow v_2 = -\frac{1}{3}(1 + x)e^{-3x} - \frac{1}{8}e^{-3x}$$

با جایگذاری $v_2 = (1 + x)e^{-3x}$ در معادله اول داریم:

$$v_1' e^{2x} + (1+x)e^{-3x} e^{3x} = 0 \Rightarrow v_1' = -(1+x)e^{-2x}$$

$$v_1 = -\left(-\frac{1}{2}(1+x)e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}\right) \Rightarrow v_1 = \frac{1}{2}(1+x)e^{-2x} + \frac{1}{4}e^{-2x}$$

$$y_p = v_1 u_1 + v_2 u_2 = \frac{1}{2}(1+x) + \frac{1}{4} - \frac{1}{3}(1+x) - \frac{1}{9}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{9} = \frac{1}{6}x + \frac{11}{36} \quad \text{در نتیجه :}$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + \frac{11}{36} + \frac{1}{6}x \quad \text{پس}$$

جواب عمومی معادله غیر همگن است.

تذکر: روش تغییر پارامتر را می توان برای معادلات مرتبه n ، خطی غیر همگن تعمیم داد، یعنی اگر:

$$y_c = C_1 u_1 + C_2 u_2 + \dots + C_n u_n$$

جواب عمومی معادله همگن وابسته باشد آن گاه با فرض

$$y_p = v_1 u_1 + v_2 u_2 + \dots + v_n u_n$$

و حل دستگاه n معادله و n مجهولی زیر می توان جواب خاص معادله غیر همگن را بدست آورد:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 v'_1 u_1 + v'_2 u_2 + \dots + v'_n u_n = 0 \\
 v'_1 u'_1 + v'_2 u'_2 + \dots + v'_n u'_n = 0 \\
 \mathbf{M} \\
 v'_1 u_1^{(n-2)} + v'_2 u_2^{(n-2)} + \dots + v'_n u_n^{(n-2)} = 0 \\
 v'_1 u_1^{(n-1)} + v'_2 u_2^{(n-1)} + \dots + v'_n u_n^{(n-1)} = f(x)
 \end{array} \right.$$

تذکر: معادله کشی – اوپلر غیر همگن را نیز می توان با تغییر متغیر مناسب تبدیل به معادله با ضرایب غیر همگن نمود و آنرا به روش تغییر پارامتر حل کرد.

مثلا

$$x^2 y'' + xy' - y = -2x^2 e^x$$

با تغییر متغیر $x = e^t$ تبدیل به معادله

$$D(D-1)Y + DY - Y = -2e^{2t} e^{e^t}$$

می شود.

روش ضرایب ثابت (ضرایب نامعین)

در معادله غیر همگن $y'' + ay' + by = f(x)$ ملاحظه شد که اگر $f(x)$ تابعی نمایی باشد آن گاه y_p نیز نمایی می باشد. قبلا دیدیم که اگر $f(x) = 3e^x$ آن گاه

$y_p = \frac{3}{2}e^x$ است. از این مطلب استفاده کرده و روشی را به نام روش ضرایب ثابت در حالات خاص $f(x)$ بیان می کنیم.

الف) اگر $f(x) = Ae^{\alpha x}$ تابع نمایی باشد در صورتی که α ریشه معادله کمکی نباشد آنگاه y_p نیز بصورت تابع نمایی $y_p = Be^{\alpha x}$ است که با مشتق گیری و جایگذاری در معادله مقدار B بدست می آید.

مثلا

$$y'' - 5y' + 6y = 3e^x$$

حال اگر $f(x) = Ae^{\alpha x}$ و α یکبار ریشه معادله کمکی باشد

آن گاه چون $c_1 e^{\alpha x}$ جواب معادله همگن است بنابراین

جواب خاص را بصورت $y_p = Bxe^{\alpha x}$ در نظر
می گیریم

با يك مثال توضیح می دهیم.

$$y'' - 5y' + 6y = e^{2x}$$

حال اگر $f(x) = Ae^{\alpha x}$ و α دو بار ریشه معادله کمکی باشد آن گاه $c_1 e^{\alpha x}$, $c_2 x e^{\alpha x}$ جواب هایی از معادله همگن می باشد پس جواب خاص را بصورت

$$y_p = Bx^2 e^{\alpha x}$$

در نظر می گیریم.

بنابر این اگر $f(x) = Ae^{\alpha x}$ و α ریشه معادله کمکی از مرتبه تکرار j باشد آن گاه:

$$y_p = x^j B e^{\alpha x}$$

جواب خاص معادله غیر همگن است.

مثال : معادله $y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x}$ را حل می کنیم.

حل: چون $\alpha = 2$ دو بار ریشه معادله کمکی است پس $j = 2$

بنابراین $y_p = Bx^2 e^{2x}$ در نتیجه
 $y' = 2Bxe^{2x} + 2Bx^2 e^{2x}$

$$y''_p = 2Be^{2x} + 4Bxe^{2x} + 4Bxe^{2x} + 4Bx^2 e^{2x}$$

در نتیجه با جایگذاری در معادله غیر همگن داریم:

$$2Be^{2x} + 8Bxe^{2x} + 4Bx^2 e^{2x} - 4(2Bxe^{2x} + 2Bx^2 e^{2x}) + 4Bx^2 e^{2x} = 3e^{2x}$$

$$\Rightarrow 2Be^{2x} = 3e^{2x} \Rightarrow B = \frac{3}{2}$$

پس $y_p = \frac{3}{2}x^2 e^{2x}$ و $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + \frac{3}{2}x^2 e^{2x}$

جواب عمومی معادله است.

ب) اگر $f(x) = A_0 + A_1x + \dots + A_nx^n$ تابع چند جمله ای باشد آن گاه جواب خاص نیز تابعی چند جمله ای می باشد. ولی اگر جواب خاص، جواب معادله همگن باشد آن گاه باید جواب خاص را در x^j ضرب کنیم. در صورتی جواب همگن به صورت چند جمله ای است که صفر ریشه معادله کمکی باشد. قبلاً ملاحظه شد $f(x) = 1 + x$ که چند جمله ای درجه يك می باشد آن گاه

$$y_p = \frac{11}{36} + \frac{1}{6}x$$

نیز تابعی چند جمله ای است.

تذکر: اگر $f(x) = A_0 + A_1x + \dots + A_nx^n$ و $\alpha = 0$ ریشه
معادله کمکی از مرتبه تکرار j باشد آن گاه

$$y_p = x^j (B_0 + B_1x + \dots + B_nx^n)$$

جواب خاص معادله غیر همگن است.

مثال : معادله $y'' - y' = 1 + x^2$ را حل می کنیم.

حل : چون $\alpha = 0$ یکبار ریشه معادله کمکی است ($D = 0, 1$)

پس $j = 1$ بنابراین $y_p = x(B_0 + B_1x + B_2x^2)$ در نتیجه
با جایگذاری در معادله غیر همگن داریم:

$$\begin{cases} 2B_1 - 5B_0 = 1 \\ 6B_2 - 2B_1 = 0 \Rightarrow B_2 = -\frac{1}{3}, B_1 = -1, B_0 = \frac{-3}{5} \\ -3B_2 = 1 \end{cases}$$

پس $y_p = -\frac{3}{5}x - x^2 - \frac{1}{3}x^3$ جواب خاص غیر همگن است

$$y = c_1 + c_2e^x - \frac{3}{5}x - x^2 - \frac{1}{3}x^3 \quad \text{و}$$

جواب عمومی معادله غیر همگن است.

ج) اگر $f(x) = A_1 \sin \alpha x + A_2 \cos \alpha x$ باشد نیز
جواب خاص بصورت مثلثاتی سینوس و کسینوس می باشد
و در صورتی که α ریشه مختلط محض معادله کمکی باشد
یعنی اگر $D = \pm i\alpha$ آنگاه جواب معادله همگن بصورت
مثلثاتی است که در این حالت باید به
 x^j ضرب شود .

تذکره: اگر $f(x) = A_1 \sin \alpha x + A_2 \cos \alpha x$

و α ریشه مختلط محض معادله کمکی از مرتبه تکرار j باشد آنگاه

$$y_p = x^j (B_1 \sin \alpha x + B_2 \cos \alpha x)$$

جواب خاص معادله غیر همگن است.

مثال : معادله $y'' - y' = 3 \sin x$ را حل می کنیم.

حل: چون $\alpha = 1$ ریشه مختلط محض معادله کمکی نیست

$D = \pm 1$ پس $j = 0$ بنابراین $y_p = B_0 \sin x + B_1 \cos x$
و با جایگذاری در معادله غیر همگن داریم:

$$-B_0 \sin x - B_1 \cos x - B_0 \sin x - B_1 \cos x = 3 \sin x$$

$$-2B_0 = 3 \Rightarrow B_0 = -\frac{3}{2}, \quad -2B_1 = 0 \Rightarrow B_1 = 0$$

پس $y_p = -\frac{3}{2} \sin x$ جواب خاص معادله غیر همگن و

$$y = c_1 x^x + c_2 e^{-x} - \frac{3}{2} \sin x$$

جواب عمومی معادله غیر همگن است.

تذکر: هر گاه در معادله غیر همگن اگر

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$$

به ازای هر $i = 1, 2, \dots, n$ ، يك جواب معادله
غیر همگن $y'' + ay' + by = f_i(x)$

باشد، آنگاه معادله غیر همگن، جوابی بصورت

$$y_p = y_1(x) + y_2(x) + \dots + y_n(x)$$

دارد.

تذکر : روش ضرایب ثابت را می توان برای معادلات
مرتبه n ، خطی غیر همگن استفاده کرد که در این
حالت x^j در y_p برابر با $j = 1, 2, \dots, n$ است
که j مرتبه تکرار ریشه معادله کمکی بودن ، α
است.

مثلا معادله $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + 4e^{3x}$ چون $\alpha = 0$ و $\alpha = 3$ ریشه معادله کمکی نیستند پس: $(D = 1, 2)$

$$y_p = B_0 e^{3x} + B_1 + B_2 x + B_3 x^2 \Rightarrow$$

$$y'_p = 3B_0 e^{3x} + B_2 + 2B_3 x$$

$$y''_p = 9B_0 e^{3x} + 2B_3$$

با جایگذاری در معادله غیر همگن داریم:

$$y_p = 2e^{3x} + \frac{7}{2} + 3x + x^2$$

حل معادله دیفرانسیل به روش های سریها
در فصل قبل با حل معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت، در چند حالت خاص با ضرایب متغیر آشنا شدیم. در این فصل با یکی از موثرترین روش حل برای معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم (وبالاتر)، یعنی، از سریهای توانی استفاده می کنیم. در درس ریاضیات عمومی با مفهوم سری آشنا شده ایم. برای اینکه مطالب این فصل را بهتر درک کنیم، بحث را با مرور مختصری بر سریهای توانی شروع می کنیم.

سری توانی

سری به صورت

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots$$

یا $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ که در آن $x_0, a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

اعداد ثابتی بوده و x متغیر است را سری توانی به مرکز x_0 نامیم.

سری توانی ممکن است که در یکی از سه حالت زیر صدق کند:

- ۱- تنها به ازای $x = x_0$ همگرا باشد.
 - ۲- به ازای هر x در یک همسایگی x_0 مطلقا همگرا باشد، یعنی برای $|x - x_0| < R$ همگرا و برای $|x - x_0| > R$ واگر باشد عدد R را شعاع همگرایی سری نامیم.
 - ۳- به ازای هر x مطلقا همگرا باشد.
- مجموعه مقادیر x را که سری توانی همگرا است، بازه (فاصله) همگرایی سری می نامیم.

تذکر: اگر سری به ازای $x = x_0 \pm R$ همگرا باشد آنگاه بازه همگرایی برابر است با

$$x_0 - R \leq x \leq x_0 + R$$

در درس ریاضی عمومی با پیدا کردن بازه همگرایی سری توانی آشنا شده ایم که شعاع همگرایی عبارت است از

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

ممکن است $R = \infty$ آنگاه حد بالا نامتناهی باشد.

مثال: بازه همگرایی سری توانی
 $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ را پیدا کنید .

چون

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n!}{(n+1)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n+1} \right| = 0$$

بنابراین ، سری تنها به ازای $x = 0$ همگرا است .

مثال: بازه همگرایی سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (x-1)^n}{n!}$ را پیدا کنید.

چون

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{2^n}{n!}}{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{2} \right| = +\infty$$

پس سری روی مجموعه اعداد حقیقی، یعنی در همه جا همگرا است.

مثال: بازه همگرایی سری توانی

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} (x-2)^n$$

را پیدا کنید.

چون

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{n}{n+1}}{\frac{n+1}{n+2}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+1)} \right| = 1$$

پس، سری روی مجموعه x هایی که $|x-2| < 1$

همگرا است.

قضیه: اگر سری توانی بر بازه $|x-x_0| < R$ که در آن R يك عدد ثابت مثبت است همگرا باشد، آنگاه سری توانی تابعی مانند $f(x)$ را تعریف می کند که به ازای هر x در بازه پیوسته است.

تذکر: به طور طبیعی این سوال مطرح می شود که به کدام تابع پیوسته همگرا است.
پاسخ دادن به این سوال در حالت کلی آسان نیست.

قضیه: اگر $f(x)$ به صورت زیر توسط يك سری توانی تعریف

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad |x - x_0| < R \quad \text{شده باشد،}$$

آنگاه می توان از سری بالا جمله به جمله مشتق گیری کرد

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$$

و همین طور انتگرال گرفت یعنی:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1} \quad a, b \in (x_0 - R, x_0 + R) \quad \text{که}$$

قضیه : فرض کنیم :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$$

آن گاه

(الف) به ازای هر عدد حقیقی c داریم:

$$cf(x) = \sum_{n=0}^{\infty} ca_n (x - x_0)^n$$

$$f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(x - x_0)^n \quad (\text{ب})$$

$$f(x).g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n \quad (\text{ج})$$

که در آن:

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k$$

تذکر: با انتقال اندیس می توان نشان داد که :

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} (x - x_0)^n$$

بعبارت دیگر، با کم کردن k واحد از اندیس جمع سری و اضافه کردن k واحد به همه n های داخل علامت \sum سری، دو سری مساوی به دست می آید.

تذکر: ۱.۲.۳- در کار کردن با سریهای توانی با مرکز بسط

x_0 مخالف با صفر، غالباً به کار بردن تغییر متغیر

$z = x - x_0$ مفید است. یعنی :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

قضیه: فرض کنیم سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

برای $|x - x_0| < R$ با $R > 0$ همگرا به تابع $f(x)$ باشد،
بسادگی نشان داده می شود که

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

و در حالت خاص اگر $x_0 = 0$ آنگاه

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

تعریف: سری را

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

بسط سری تیلر $f(x)$ ، حول نقطه x_0 و سری را

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (x)^n$$

بسط ماک لورن $f(x)$ حول نقطه صفر می نامیم.

تعریف: اگر سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

به ازای هر x در بازه $(x_0 - R, x_0 + R)$ به $f(x)$ همگرا باشد می‌گوییم f در نقطه x_0 تحلیلی است.

مثال : بسط سری ماک لورن برخی توابع عبارت است از:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{(الف)}$$

که $|x| < \infty$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{(ب)}$$

که $|x| < \infty$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{(ج)}$$

که $|x| < \infty$

$$|x| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (د)$$

$$|x| < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (هـ)$$

$$|x| < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (و)$$

نقاط معمولی و منفرد

تعریف: نقطه x_0 را يك نقطه معمولی (عادی) برای معادله
دیفرانسیل خطی مرتبه n ام

$$y^{(n)} + f_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + f_1(x)y' + f_0(x)y = g(x)$$

می گویم هرگاه ضرایب $f_i(x)$ و $g(x)$ در x_0 تحلیلی باشند.
نقطه ای را که معمولی نباشد نقطه منفرد (غیر عادی) معادله
می نامیم.

مثال : نقاط منفرد معادله دیفرانسیل

$$x^3(x^2 - 1)y'' + x(x+1)y' + (x-1)y = 0$$

را پیدا کنید.

حل: معادله را با تقسیم بر $x^3(x^2 - 1)$ بصورت ضریب

مشتق بالا ترین برابر يك می کنیم یعنی:

$$y'' + \frac{1}{x^2(x-1)}y' + \frac{1}{x^3(x+1)}y = 0$$

بدیهی است که همه ضرایب این معادله در همه نقاط به جز

نقاط $x=0$ و $x=1$ و $x=-1$ تحلیلی می باشند. پس

آنها نقاط منفرد و همه نقاط دیگر نقاط معمولی معادله هستند.

قضیه: اگر هر يك از توابع

$$g, f_{n-1}, \dots, f_1, f_0$$

در نقطه x_0 تحلیلی باشند، آن گاه يك جواب منحصر به فرد مانند $y(x)$ وجود دارد که در x_0 تحلیلی است و در n شرط

اولیه

$$y(x_0) = a_0, y'(x_0) = a_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1}$$

صدق می کند. یعنی هر جواب معادله دیفرانسیل توسط سری تیلر خود در نقطه x_0 در بازه I بیان می شود.

جواب های سری معادلات دیفرانسیل (دریک نقطه معمولی)

مثال : معادله دیفرانسیل مرتبه اول $y' = y$ را با پیدا کردن جواب بصورت سری مک لورن حل می کنیم.

حل: فرض $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots$$

که $R > 0, |x| < R$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{چون } y' = y \text{ پس باید :}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = a_0 \\ 2a_2 = a_1 \\ 3a_3 = a_2 \\ 4a_4 = a_3 \\ \text{M} \\ (n+1)a_{n+1} = a_n \\ \text{M} \end{array} \right.$$

و با حل کردن دستگاه از بالا به پایین نتیجه می شود که:

$$a_1 = a_0, a_2 = \frac{a_0}{2!}, a_3 = \frac{a_0}{3!}, \dots, a_n = \frac{a_0}{n!}, \dots$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}$$

و یار رابطه بازگشتی

$$a_n = \frac{a_0}{n!}$$

که به دست می آوریم،

حال با جایگذاری ضرایب بالا در

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

داریم :

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_0}{n!} x^n = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

که a_0 پارامتر می باشد دقت کنیم که جواب بالا همان جوابی است که از روش های قبلی بدست می آید یعنی جواب معادله جداشدنی بالا است.

$$y = a_0 e^x$$

مثال : بسط تیلر جواب های معادله

$$y'' + (x-1)^2 y' - 4(x-1)y = 0$$

را در نقطه معمولی $x=1$ پیدا کنید.

حل: برای سادگی از تغییر متغیر $t = x-1$ استفاده می کنیم

در این صورت متناظر $x=1$ با $t=0$ می باشد و داریم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \right) \frac{dt}{dx} = \frac{d^2 y}{dt^2}$$

بنابراین با جایگذاری ، معادله دیفرانسیل تبدیل به معادله

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + t^2 \frac{dy}{dt} - 4ty = 0$$

می شود چون همه ضرایب چند جمله ای هستند

، پس بازه همگرایی سریهای جواب معادله برابر با $-\infty < t < +\infty$ است، بازه همگرایی سریهای جواب معادله اصلی نیز برابر با $-\infty < x < +\infty$ است . سری توانی جواب را بصورت سری ماک لورن

$$y = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

در نظر می گیریم . پس:

$$\frac{dy}{dt} = a_1 + 2a_2 t + \dots + na_n t^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} na_n t^{n-1}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = 2a_2 + \dots + n(n-1)a_n t^{n-2} + \dots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2}$$

با قرار دادن سریهای بالا در معادله دیفرانسیل ثانویه داریم:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n+1} - 4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+1} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2a_2 = 0 \\ 3 \times 2a_3 - 4a_0 = 0 \\ 4 \times 3a_4 + a_1 - 4a_1 = 0 \\ 5 \times 4a_5 + 2a_2 - 4a_2 = 0 \\ 6 \times 5a_6 + 3a_3 - 4a_3 = 0 \\ 7 \times 6a_7 + 4a_4 - 4a_4 = 0 \\ \text{M} \\ n(n-1)a_n + (n-3)a_{n-3} - 4a_{n-3} = 0 \\ \text{M} \end{array} \right.$$

$$a_2 = 0 \quad , \quad a_4 = \frac{3a_1}{4 \times 3} \quad , \quad a_3 = \frac{4a_0}{3 \times 2} \quad \text{در نتیجه:}$$

$$a_5 = 0 \quad , \quad a_7 = 0 \quad , \quad a_6 = \frac{4a_0}{6 \times 5 \times 3 \times 2}$$

$$a_8 = 0 \quad , \quad a_{10} = 0 \quad , \quad a_9 = \frac{2 \times 4a_0}{9 \times 8 \times 6 \times 5 \times 3 \times 2}$$

$$a_{11} = 0 \quad , \quad a_{13} = 0 \quad , \quad a_{12} = \frac{5 \times 4 \times 2a_0}{12 \times 11 \times 9 \times 8 \times 6 \times 5 \times 3 \times 2}$$

چنانکه ملاحظه می شود همه ستون های سوم و ستون دوم
 بغیر اولین جمله بقیه صفر اند تنها ستون اول ناصفر می
 باشد و بر حسب a_0 است بنابراین:

$$a_3 = \frac{-(3n-3-4)}{3n(3n-1)} a_{3n-3} = \frac{-(3n-7)}{3n(3n-1)} a_{3n-3}$$

$$a_{3n} = \frac{(3n-7)(3n-10)\dots \times 8 \times 5 \times 2 \times (-1)^n \alpha 4}{3n(3n-3)\dots(3) \times (3n-1)(3n-4)\dots \times 2} a_0$$

$$a_{3n} = \frac{2 \times 5 \times 8 \times \dots \times (3n-10)(3n-7) \times (-1)^n \times 4}{3^n (n(n-1)(n-2)\dots \times (2 \times 1) 2 \times 5 \times \dots \times (3n-4) \times (3n-1))}$$

$$a_{3n} = \frac{(-1)^n \times 4}{3^n \cdot n! \times (3n-4)(3n-1)}$$

$$\begin{aligned}
y &= a_0 + a_1 t + 0t^2 + \frac{4}{3 \times 2} a_0 t^3 + \frac{3}{4 \times 3} a_1 t^4 + 0t^5 + \frac{4}{6 \times 5 \times 3 \times 2} a_0 t^6 \\
&+ 0t^7 + 0t^8 + \frac{2 \times 4}{9 \times 8 \times 6 \times 5 \times 3 \times 2} a_0 t^9 + 0t^{10} + 0t^{11} + \\
&\frac{2 \times 5 \times 4}{12 \times 11 \times 9 \times 8 \times 6 \times 5 \times 3 \times 2} a_0 t^{11} + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y &= a_1 \left(t + \frac{1}{4} t^4 \right) + a_0 \left(1 + \frac{2}{3} t^3 + \frac{4}{6 \times 5 \times 3 \times 2} t^6 + \right. \\
&\frac{2 \times 4}{9 \times 8 \times 6 \times 5 \times 3 \times 2} t^9 + \frac{2 \times 5 \times 4}{12 \times 11 \times 9 \times 8 \times 6 \times 5 \times 3 \times 2} t^{12} + \dots \\
&\left. + \frac{(-1)^n \cdot 4}{3^n \cdot n! (3n - 4)(3n - 1)} t^{3n} + \dots \right)
\end{aligned}$$

$$y = a_1 \left(t + \frac{1}{4} t^4 \right) + a_0 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \times 4}{3^n \cdot n! (3n-4)(3n-1)} t^{3n} \right) \quad \text{ویا}$$

با قرار دادن $t = x - 1$ داریم :

$$y(x) = a_1 \left((x-1) - \frac{1}{4} (x-1)^4 \right) + a_0 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \times 4}{3^n \cdot n! (3n-4)(3n-1)} (x-1)^{3n} \right)$$

جواب عمومی معادله دیفرانسیل داده شده به ازای هر x می باشد.

تذکر: ممکن است رابطه بازگشتی بر حسب جمله عمومی امکان پذیر نباشد یا بسادگی نتوان پیدا کرد در چنین حالتی جمله عمومی را معمولاً "پیدا نمی کنیم".

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0$$

که در آن p عدد ثابتی است به معادله دیفرانسیل لژاندر موسوم است. ملاحظه می شود که نقطه $x_0 = 0$ یک نقطه معمولی معادله است بنابراین دارای جوابی بصورت:

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}$$

است که حداقل برای $|x| < 1$ همگراست.

که با جایگذاری در معادله داریم:

$$(1-x^2) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} + p(p+1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$(1-x^2) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} + p(p+1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

با تغییر اندیس داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2xa_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} p(p+1)a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 2na_n + p(p+1)a_n] x^n = 0$$

و رابطه بازگشتی:

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= \frac{n(n-1) + 2n - p(p+1)}{(n+2)(n-1)} a_n \\ &= \frac{n^2 - n + 2n - p^2 - p}{(n+2)(n+1)} a_n \\ &= \frac{n^2 - p^2 + n - p}{(n+2)(n+1)} a_n \\ &= -\frac{(p-n)(n+p+1)}{(n+2)(n+1)} a_n \end{aligned}$$

, $n \geq 0$

نتیجه می شود که:

که با جایگذاری در معادله داریم:

$$a_2 = -\frac{p(p+1)}{2!}a_0$$

$$a_3 = -\frac{(p-1)(p+2)}{3!}a_1$$

$$a_4 = -\frac{(p-2)(p+3)}{3 \times 4}a_2 = \frac{p(p-1)(p+1)(p+3)}{4!}a_0$$

$$a_5 = -\frac{(p-3)(p+4)}{4 \times 5}a_3 = \frac{(p-1)(p-3)(p+2)(p+4)}{5!}a_1$$

$$a_6 = -\frac{(p-4)(p+5)}{5 \times 6}a_4 = -\frac{p(p-2)(p-4)(p+1)(p+3)(p+5)}{6!}a_0$$

$$a_7 = -\frac{(p-5)(p+6)}{6 \times 7}a_5 = -\frac{(p-1)(p-3)(p-5)(p+2)(p+4)(p+6)}{7!}a_1$$

با قرار دادن این ضرایب در سری داریم:

$$y = a_0 + a_1 x + \left(-\frac{p(p+1)}{2!} a_0 \right) x^2 + \left(-\frac{(p-1)(p+2)}{3!} a_1 \right) x^3 + \left(\frac{p(p-2)(p+1)(p+3)}{4!} a_0 \right) x^4 + \Lambda$$

$$y = a_0 \left(1 - \frac{p(p+1)}{2!} x^2 + \frac{p(p-2)(p+1)(p+3)}{4!} x^4 - \frac{p(p-2)(p-4)(p+1)(p+3)(p+5)}{6!} x^6 + \Lambda \right) \\ + a_1 \left(x - \frac{(p-1)(p+2)}{2!} x^3 + \frac{(p-1)(p-3)(p+2)(p+4)}{5!} x^5 - \frac{(p-1)(p-3)(p-5)(p+2)(p+4)(p+6)}{7!} x^7 + \Lambda \right)$$

که برای $|x| < 1$ همگراست و اگر p عدد صحیح نباشد شعاع همگرایی هر دو سری داخل پوانتز برابر با یک است. توابع تعریف شده در جواب سری مشهور به توابع لژاندر می باشد که توابع متعالی هستند. در حالت خاص p جواب سری ها ممکن است متناهی باشد.

نقاط منفرد منظم معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم

فرض کنیم که نقطه x_0 يك نقطه منفرد معادله

$$y'' + f_1(x)y' + f_0(x)y = 0 \quad \text{دیفرانسیل خطی همگن}$$

باشد در صورتی که اگر معادله را بصورت

$$(x - x_0)^2 y'' + (x - x_0)p(x)y' + q(x)y = 0$$

بنویسیم و $q(x), p(x)$ در x_0 تحلیلی باشند، نقطه را نقطه منفرد منظم نامیم و اگر $q(x), p(x)$ تحلیلی نباشند را نقطه منفرد غیر منظم می گوییم.

مثال: نوع نقاط منفرد معادله دیفرانسیل

$$(x-1)y'' + \frac{1}{x}y' - 2y = 0$$

را پیدا کنید.

حل: با تقسیم دو طرف معادله در $x-1$ ، معادله بالا به

$$y'' + \frac{1}{x(x-1)}y' - \frac{2}{x-1}y = 0 \quad \text{صورت}$$

در می آید مشاهده می کنیم که نقاط منفرد عبارت است از:

$x=1, x=0$ با ضرب معادله بالا در x^2 داریم:

$$x^2 y'' + x \frac{1}{x-1} y' - \frac{2x^2}{x-1} y = 0$$

$$q(x) = \frac{-2x^2}{x-1}, p(x) = \frac{1}{x-1} \quad \text{پس}$$

که هر دو در $x = 0$ تحلیلی اند. پس $x = 0$ يك نقطه منفرد منظم است. حال اگر طرفین معادله را در $(x-1)^2$ ضرب کنیم داریم:

$$(x-1)^2 y'' + \frac{x-1}{x} y' - \frac{2(x-1)}{1} y = 0$$

که ، هر دو $p(x) = \frac{1}{x}$ ، $q(x) = -2(x-1)$ در $x = 1$

تحلیلی اند

پس $x = 1$ يك نقطه منفرد منظم است.

مثال : معادله لژاندر

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0$$

را به صورت زیر می نویسیم .

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{p(p+1)}{1-x^2}y = 0$$

روشن است که $x=1$ و $x=-1$ نقاط منفرد معادله اند که اگر طرفین معادله را در $(x-1)^2$ ضرب می کنیم داریم :

$$(x-1)^2 y'' + \frac{2x(x-1)}{(x+1)} y' - \frac{p(p+1)(x-1)}{x+1} y = 0$$

آنگاه:
 $p(x) = \frac{2x(x-1)}{(x+1)}$ و $q(x) = \frac{-p(p+1)(x-1)}{x+1}$ هر دو در $x = 1$
 تحلیلی اند پس $x = 1$ يك نقطه منفرد منظم معادله است.
 حال اگر طرفین معادله را در $(x+1)^2$ ضرب کنیم داریم:

$$(x+1)^2 y'' + \frac{2x(x+1)}{(x-1)} y' - \frac{p(p+1)(x+1)}{x-1} y = 0$$

که $p(x) = \frac{2x(x+1)}{(x-1)}$ و $q(x) = \frac{-p(p+1)(x+1)}{x-1}$ هر دو در

$x = -1$ تحلیلی اند پس $x = -1$ يك نقطه منفرد منظم معادله است.

مثال: معادله دیفرانسیل خطی

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2) y = 0$$

را که به معادله بسل (Bessel) از مرتبه p معروف است در نظر می‌گیریم در این معادله که p عدد ثابت نا صفر

می‌باشد با نوشتن معادله بصورت

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \frac{x^2 - p^2}{x^2} y = 0$$

ملاحظه می‌شود که $x = 0$ نقطه منفرد معادله می‌باشد و با

توجه به توابع $p(x) = 1, q(x) = x^2 - p^2$ که در نقطه

$x = 0$ تحلیلی اند پس $x = 0$ نقطه منفرد

و منظم معادله است.

تعریف: سری بصورت

$$y = (x - x_0)^s \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+s}$$

که در آن S عددی حقیقی و یا مختلط است به سری

فروبنیوس (frobenius) مشهور است.

تذکر: اگر $x = x_0$ یک نقطه منفرد منظم معادله مرتبه دوم
خطی باشد ثابت می شود که معادله دارای یک وگاهی دو
جواب بصورت سری فروبنیوس با $a_0 \neq 0$ است.
در اینجا \mathcal{S} عددی حقیقی است

این روش را با ارائه چند مثال توضیح می دهیم.

مثال: معادله دیفرانسیل

$$2x^2 y'' + x(2x+1)y' - y = 0$$

را در نظر می‌گیریم واضح است که $x_0 = 0$ نقطه منفرد منظم معادله است جواب سری فروبنیوس

$$y = x^s \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s}$$

را در نظر می‌گیریم بنابراین:

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+s)a_n x^{n+s-1} \Rightarrow y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+s)(n+s-1)a_n x^{n+s-2}$$

با جایگذاری در معادله دیفرانسیل نتیجه می‌شود:

$$2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+s)(n+s-1)a_n x^{n+s-2} + x(2x+1) \sum_{n=0}^{\infty} (n+s)a_n x^{n+s-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s} = 0$$

و يا:

$$2\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_n x^{n+s} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_n x^{n+s+1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_n x^{n+s} - \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+s} = 0$$

با تغيير اندیس داریم :

$$2\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_n x^{n+s} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+s-1)a_{n-1} x^{n+s+1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_n x^{n+s} - \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+s} = 0$$

$$2(s)(s-1)a_0 x^s + 2\sum_{n=1}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_{n-1} x^{n+s} + 2\sum_{n=1}^{\infty}(n+s-1)a_{n-1} x^{n+s} + sa_0 x^s$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}(n+s)a_n x^{n+s} - a_0 x^s - \sum_{n=1}^{\infty}a_n x^{n+s} = 0$$

و یا :

$$(2s(s-1)+s-1)a_0x^s + \sum [2(n+s)(n+s-1)+(n+s)-1]a_n + 2(n+s-1)a_{n-1}x^{n+s} = 0$$

چون فرض بر آن است که $a_0 \neq 0$ پس :

$$2s(s-1) + s - 1 = 0$$

$$2s^2 - 2s + s - 1 = 0$$

$$2s^2 - s - 1 = 0$$

این معادله را معادله شاخص و ریشه های آن را توان شاخص معادله دیفرانسیل در نقطه منفرد منظم نامیم . پس توان های

$$s = -\frac{1}{2}, s = 1$$

شاخص معادله دیفرانسیل در نقطه منفرد منظم هستند.

حال به ازای هر کدام از مقادیر s ضرایب a_n ها در
 رابطه بازگشتی :

$$(2(n+s)(n+s-1) + n+s-1)a_n = -2(n+s-1)a_{n-1}$$

و یا :

$$a_n = \frac{-2(n+s-1)}{2(n+s)(n+s-1) + n+s-1} a_{n-1}, \quad n \geq 1$$

$$= \frac{-2(n+s-1)}{(n+s-1)(2n+2s+1)} a_{n-1} = \frac{-2}{2n+2s+1} a_{n-1}, \quad n \geq 1$$

صدق می کند .

الف) اگر $s = 1$ رابطه بالا نتیجه می دهد که :

$$a_n = \frac{-2}{2n+3} a_{n-1}, \quad n \geq 1$$

$$a_1 = \frac{-2}{5} a_0$$

$$a_2 = \frac{-2}{7} a_1 = \frac{(-2)(-2)}{5 \times 7} a_0$$

$$a_3 = \frac{-2}{9} a_2 = \frac{(-2)(-2)(-2)}{5 \times 7 \times 9} a_0$$

M

$$a_n = \frac{(-2)^n}{5 \times 7 \times 9 \times \dots \times (2n+3)} a_0$$

(ب) اگر $s = -\frac{1}{2}$ آنگاه :

$$a_n = \frac{-2}{2n + 2(-\frac{1}{2}) + 1} a_{n-1} = \frac{-2}{2n} a_{n-1} = \frac{-1}{n} a_{n-1} \quad n \geq 1 \quad \text{با}$$

پس :

$$a_1 = \frac{-1}{1} a_0 = -a_0$$

$$a_2 = -\frac{1}{2} a_1 = \frac{(-1)(-1)}{2} a_0$$

$$a_3 = -\frac{1}{3} a_2 = \frac{(-1)(-1)(-1)}{2 \times 3} a_0$$

M

$$a_n = -\frac{1}{n} a_{n-1} = \frac{(-1)^n}{n!} a_0$$

در نتیجه دو جواب سری فروبینوس عبارت است از :

$$y_1 = x \left(1 + \frac{-2}{5}x + \frac{(-2)^2}{5 \times 7}x^2 + \frac{(-2)^3}{5 \times 7 \times 9}x^3 + \Lambda + \frac{(-2)^n}{5 \times 7 \times \Lambda \times (2n+3)}x^n + \Lambda \right)$$

$$y_2 = x^{-\frac{1}{2}} \left(1 - x + \frac{(-1)^2}{2!}x^2 + \frac{(-1)^3}{3!}x^3 + \Lambda + \frac{(-1)^n}{n!}x^n + \Lambda \right)$$

و دو تابع y_1 و y_2 بدلیل x^2 در بازه $(0, +\infty)$ مستقل خطی و همگرا هستند پس :

$$y = c_1 x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{5 \times 7 \times \Lambda \times (2n+3)} x^n \right) + c_2 x^{-\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n \right)$$

جواب عمومی معادله دیفرانسیل است .

حالتی که معادله شاخص دارای ریشه های برابر است.

تذکر: در ادامه بحث خود معادلاتی را مورد بررسی قرار می دهیم که دارای یک نقطه منفرد در $x = 0$ است. در این حالت

$$x^2 y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0$$

در می آید، که در آن $q(x), p(x)$ در $x = 0$ تحلیلی

هستند. همچنانکه قبلا مشاهده کردیم، این محدودیت از کلیت

بحث نمی گاهد، زیرا با تغییر متغیر $t = x - x_0$ نقطه

منفرد منظم x_0 را به صفر تبدیل می کند.

- بررسی حالت کلی

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم

$$x^2 y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0$$

را در نظر می‌گیریم. فرض $x = 0$ نقطه منفرد منظم باشد در این صورت در $q(x), p(x)$ تحلیلی هستند، در نتیجه به ازای $|x| < R$ ، داریم:

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$$

$$q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

و y تابعی بصورت:

$$y(x) = x^s \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s}$$

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+s) x^{n+s-1} \quad \text{باشد، آنگاه:}$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+s)(n+s-1) x^{n+s-2}$$

$$xp(x)y'(x) = x^s \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+s)a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n (k+s)a_k p_{n-k} \right) x^{n+s}$$

$$q(x)y(x) = x^s \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k q_{n-k} \right) x^{n+s}$$

با قرار دادن مقادیر بالا در معادله دیفرانسیل داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+s)(n+s-1)a_n x^{n+s} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n (k+s)a_k p_{n-k} \right) x^{n+s} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k q_{n-k} \right) x^{n+s} = 0$$

در نتیجه

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (n+s)(n+s-1)a_n + \sum_{k=0}^n [(k+s)p_{n-k} + q_{n-k}] a_k \right\} x^{n+s} = 0$$

که با فرض ضریب کوچکترین توان x ($n=0$) داریم:

$$s(s-1)a_0 + (sp_0 + q_0)a_0 = 0$$

چون $a_0 \neq 0$ پس $f(s) = s(s-1)sp_0 + q_0$

و یا $f(s) = s^2 + (p_0 - 1)s + q_0$

معادله شاخص می باشد و ریشه های آن را توان های شاخص

معادله دیفرانسیل در نقطه منفرد منظم نامیده می شود.

ملاحظه می شود که سه حالت زیر می تواند در مورد معادله شاخص رخ دهد:

الف) اگر $s_1 - s_2$ عدد غیر صحیح و غیر صفر باشد.

ب) اگر $s_1 - s_2$ عدد صحیح و مثبت باشد.

ج) اگر $s_1 - s_2$ صفر باشد.

در حالت الف) معادله دیفرانسیل دارای دو جواب مستقل به صورت

$$y_2(x) = x^{s_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad \text{و} \quad y_1(x) = x^{s_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

دارد. قبلا مثالهایی در این مورد ملاحظه شد.

در حالت (ب) و (ج) فقط یک جواب به صورت

$$y_1(x) = x^{s_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

دارد. برای پیدا کردن جواب مستقل دیگر نشان داده می شود که جواب به صورت

$$y_2 = Ay_1(x) \log x + x^{s_2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

است که می توان با مشتق گیری و جایگذاری در معادله دیفرانسیل ضرایب c_n ها و A را پیدا کرد که ممکن است مقدار A برابر صفر باشد که در این صورت $y_2(x)$ به شکل یک سری فروبینوس می باشد.

تذکر: در فیزیک و ریاضیات محض، اغلب بررسی جواب

$$x^2 y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0 \quad \text{معادله دیفرانسیل}$$

وقتی متغیر مستقل x بینهایت باشد، مورد نظر است. با به

کار بردن تغییر متغیر $x = \frac{1}{t}$ مقادیر بزرگ x با

مقادیر کوچک t متناظر خواهند بود.

با جایگذاری t به جای x جوابهایی از معادله دیفرانسیل جدید را بدست

می آوریم که اگر معادله جدید دارای یک نقطه معمولی در

$t = 0$ باشد، گوییم معادله دیفرانسیل دارای یک نقطه

معمولی در بینهایت است. به همین نحو، اگر معادله جدید

دارای یک نقطه منفرد منظم در $t = 0$ باشد، گوییم معادله

دیفرانسیل دارای یک نقطه منفرد منظم در بینهایت است.

دستگاه معادلات دیفرانسیل

در این فصل با توجه به کاربردهای دستگاه معادلات

دیفرانسیل در فیزیک و مکانیک و دیگر کاربردهای آن به

بررسی و مطالعه این دستگاه ها می پردازیم.

تعریف: مجموعه ای بیش از یک معادله دیفرانسیل همزمان را دستگاه معادلات دیفرانسیل نامیم.
 ساده ترین دستگاه معادلات دیفرانسیل دستگاه دو معادله دیفرانسیل می باشد که عبارت است از:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \dots, \frac{d^n x}{dt^n}) = 0 \\ g(t, y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \dots, \frac{d^m y}{dt^m}) = 0 \end{array} \right.$$

برای اینکه ساده ترین دستگاه معادلات دیفرانسیل را بررسی کنیم این نوع دستگاهها را با بیان شرایطی به ساده ترین صورت در نظر می گیریم. ساده ترین دستگاه معادلات دیفرانسیل، دستگاه دو معادله دیفرانسیل مرتبه اول می باشد که عبارت است از:

$$\begin{cases} f(t, x, \frac{dx}{dt}) = 0 \\ g(t, y, \frac{dy}{dt}) = 0 \end{cases}$$

که ممکن است مضربی از اولی در دومی ظاهر شود و بالعکس، بنابراین صورت دیگری از دستگاه دو معادله دیفرانسیل مرتبه اول بصورت زیر است:

$$\left\{ \begin{array}{l} f\left(t, x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = 0 \\ g\left(t, x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = 0 \end{array} \right.$$

حال اگر توانهای

$$\frac{dy}{dt}, \frac{dx}{dt}, y, x$$

برابر با يك باشد آنرا دستگاه دو معادله مرتبه اول خطی
نامیم یعنی:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_1(t)x + f_2(t)y + f_3(t) \\ \frac{dy}{dt} = f_4(t)x + f_5(t)y + f_6(t) \end{cases}$$

که اگر $f_3(t) = f_6(t) = 0$ آنرا دستگاه دو معادله مرتبه اول
خطی همگن نامیم و در صورتی که

$$f_5(t), f_4(t), f_2(t), f_1(t)$$

، اعداد ثابت باشند آنرا دستگاه دو معادله مرتبه اول خطی

همگن با ضرایب ثابت نامیم. اکنون با تعدادی از دستگاه

معادلات دیفرانسیل آشنا شدیم. روشهایی را برای حل برخی

از آنها بیان می کنیم. لازم به تذکر می باشد که جواب دستگاه

دو معادله دیفرانسیل بصورت $x = x(t)$, $y = y(t)$ می باشد.

قضیه ای، وجود دارد که شرط وجود جواب و منحصر بفرد

بودن را بررسی می کند که از ذکر آن صرفنظر می کنیم و

فرض می کنیم که وجود دارد و منحصر بفرد است.

برای حل برخی از دستگاه دو معادلات دیفرانسیل
روشهایی را بیان می‌کنیم.

روش اول: یکی از معادلات دستگاه مستقلاً قابل حل می
باشد. با يك مثال توضیح می‌دهیم.
مثال: دستگاه زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2xt - x \\ \frac{dy}{dt} = 2yt + x \end{cases}$$

چنانکه ملاحظه می شود معادله اول معادله جداشدنی است

$$\frac{dx}{dt} = x(2t - 1) \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int (2t - 1) dt \quad \text{پس}$$

$$\Rightarrow \ln x = t^2 - t + c \Rightarrow x = e^{t^2 - t + c} = e^{t^2 - t} \cdot e^c$$

که با انتخاب e^c برابر با c_1 داریم: $x = c_1 e^{t^2 - t}$

که با جایگذاری در معادله دوم دستگاه نتیجه می شود:

$$\frac{dy}{dt} = 2yt + c_1 e^{t^2 - t} \Rightarrow \frac{dy}{dt} - 2ty = c_1 e^{t^2 - t}$$

و این معادله نیز معادله مرتبه اول خطی است پس:

$$y = e^{-\int -2tdt} \left[\int e^{\int -2tdt} \cdot c_1 e^{t^2-t} dt + c_2 \right]$$

$$y = e^{t^2} \left[c_1 \int e^{-t^2} \cdot e^{t^2-t} dt + c_2 \right]$$

$$y = e^{t^2} \left[c_1 \int e^{-t} dt + c_2 \right] \Rightarrow y = e^{t^2} \left[-c_1 e^{-t} + c_2 \right]$$

$$\begin{cases} x = c_1 e^{t^2-t} \\ y = -c_1 e^{t^2-t} + c_2 e^{t^2} \end{cases} \quad \text{پس}$$

جواب دستگاه می باشد.

روش بالا را می توان برای دستگاه سه معادله نیز بکار برد.

مثلا دستگاه سه معادله زیر را می توان حل کرد.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 2t \\ \frac{dz}{dt} = x + 4y + t \end{cases}$$

روش دوم: حل دستگاه دو معادله مرتبه اول خطی با ضرایب ثابت:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1x + b_1y + f(t) \\ \frac{dy}{dt} = a_2x + b_2y + g(t) \end{cases}$$

با مشتق گیری از معادلات دستگاه و استفاده از معادله دوم دستگاه آنرا به معادله مرتبه دوم خطی با ضرایب ثابت تبدیل می کنیم که با حل آن قبلاً آشنا شده ایم .
با يك مثال توضیح می دهیم.

مثال : دستگاه زیر را حل می کنیم:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y \\ \frac{dy}{dt} = 3y + x \end{cases}$$

با مشتق گیری از معادله اول داریم: $\frac{d^2x}{dt^2} = 3\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}$

و با جایگذاری $\frac{dy}{dt}$ از معادله دومی نتیجه می شود:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 3\frac{dx}{dt} + 3y + x$$

با جایگذاری y از معادله اول داریم:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 3 \frac{dx}{dt} + 3 \left(\frac{dx}{dt} - 3x \right) + x$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - 6 \frac{dx}{dt} + 8x = 0$$

$$x'' - 6x' + 8x = 0$$

که دارای معادله کمکی $D^2 - 6D + 8 = 0$ است که $D = 4$ و $D = 2$ ریشه های متمایز هستند. پس: $x = c_1 e^{2t} + c_2 e^{4t}$ حال با جایگذاری در معادله اول داریم:

$$y = \frac{dx}{dt} - 3x = 2c_1 e^{2t} + 4c_2 e^{4t} - 3c_1 e^{2t} - 3c_2 e^{4t}$$

$$y = -c_1 e^{2t} + c_2 e^{4t}$$

$$\begin{cases} x = c_1 e^{2t} + c_2 e^{4t} \\ y = -c_1 e^{2t} + c_2 e^{4t} \end{cases}$$

بنابراین

جواب دستگاه است.

روش سوم: این روش مشهور به روش
عملگر یا اپراتور می باشد.

در این روش فرض می کنیم که $\frac{d}{dt} = D$ ،
آنگاه با جایگذاری عملگر دستگاه را به روش
حذفی گوس حل می کنیم. با يك مثال این
روش را توضیح می دهیم .

مثال : دستگاه زیر را به روش D حل می کنیم:

$$\begin{cases} 2\frac{dx}{dt} - x + \frac{dy}{dt} + 4y = 1 \\ \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = t - 1 \end{cases}$$

با استفاده از نماد $\frac{d}{dt} = D$ داریم:

$$\begin{cases} 2Dx - x + Dy + 4y = 1 \\ Dx - Dy = t - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2D - 1)x + (D + 4)y = 1 \\ Dx - Dy = t - 1 \end{cases}$$

با ضرب معادله اول در D و معادله دوم در $D + 4$ و جمع طرفین دستگاه داریم:

$$D(2D - 1)x + (D + 4)Dx = D(1) + (D + 4)(t - 1)$$

$$(2D^2 - D + D^2 + 4D)x = 0 + D(t) + 4t - D(1) - 4$$

$$(3D^2 + 3D)x = 4t - 3$$

این معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت غیر همگن می باشد پس:

$$3D^2 + 3D = 0 \Rightarrow 3D(D + 1) = 0 \Rightarrow D = 0, D = -1$$

بنابراین $x_c = c_1 + c_2 e^{-t}$ و برای پیدا کردن x_p جواب خاص غیر همگن آنرا به روش ضرایب ثابت حل می کنیم.

چون صفر ریشه معادله کمکی است پس:

$$x_p = t(A_0 t + A_1)$$

$$x_p = A_0 t^2 + A_1 t \Rightarrow x'_p = 2A_0 t + A_1 \Rightarrow x''_p = 2A_0$$

با جایگذاری در معادله نتیجه می شود:

$$3x_p'' + 3x_p' = 4t - 3$$

$$6A_0 + 6A_0t + 3A_1 = 4t - 3 \Rightarrow A_0 = \frac{2}{3}, \quad A_1 = -\frac{7}{3}$$

پس $x_p = \frac{2}{3}t^2 - \frac{7}{3}t$ ، بنابراین $x = c_1 + c_2e^{-t} + \frac{2}{3}t^2 - \frac{7}{3}t$

بنابراین با جایگذاری معادله داریم:

$$\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = t - 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} - t + 1$$

$$\frac{dy}{dt} = -c_2 e^{-t} + \frac{4}{3}t - \frac{7}{3} - t + 1$$

$$\frac{dy}{dt} = -c_2 e^{-t} + \frac{1}{3}t - \frac{4}{3}$$

$$\int dy = \int \left(-c_2 e^{-t} + \frac{1}{3}t - \frac{4}{3} \right) dt$$

$$y = c_2 e^{-t} + \frac{1}{6}t^2 - \frac{4}{3}t + c_3$$

جواب دستگاہ می باشد.

$$\begin{cases} x = c_1 + c_2 e^{-t} + \frac{2}{3}t^2 - \frac{7}{3}t \\ y = c_2 e^{-t} + \frac{1}{6}t^2 - \frac{4}{3}t + c_3 \end{cases}$$

پس

تذکر : روشهای اول و سوم چنانکه ملاحظه می شود از حل

$$\begin{cases} 2x + 3 = 7 \\ x + y = 3 \end{cases} \quad \text{دستگاه معمولی}$$

نتیجه گیری شده است. مثلاً دستگاه معمولی را می توان
بسادگی حل کرد که یکی از معادلات دستگاه مستقلاً قابل حل
می باشد و روش سوم نیز همان روش حذفی گاوس می باشد
که در حل دستگاه

$$\begin{cases} 2x + 3 = 7 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

استفاده می شود.

تذکر: روشهای بالا را برای حل دستگاه دو معادلات خطی استفاده کردیم می توان آنرا برای حل دستگاه سه معادلات خطی نیز استفاده کرد و همچنین می توان آن را تعمیم داد و برای دستگاههایی با معادلات دیفرانسیل خطی بیشتر نیز استفاده کرد.

تذکر: همانطوری که در دستگاه معمولی ممکن است دستگاه دارای جواب منحصر بفرد و یا بی نهایت جواب و یا جواب نداشته باشند در دستگاه معادلات دیفرانسیل نیز چنین می باشد. مثلاً دستگاه

$$\begin{cases} Dx_1 - Dx_2 = t \\ 4Dx_1 - 4Dx_2 = 4t \end{cases}$$

دارای بی نهایت جواب می باشد.

$$\text{جوابهایی} \begin{cases} x_1 = \frac{t^2}{2} + c_1 \\ x_2 = \frac{t}{2} - \frac{t^2}{2} + c_2 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{t^2}{2} + c \\ x_2 = 5c \end{cases} \quad \text{مثلاً}$$

از دستگاه است.

در هر کدام از جوابها $x_1 = x_1(t)$ را به دلخواه انتخاب کرده و دستگاه را بر حسب $x_2 = x_2(t)$ حل می کنیم. ولی دستگاه

$$\begin{cases} Dx_1 - Dx_2 = t \\ Dx_1 - Dx_2 = t^2 \end{cases}$$

دارای جواب نیست.

تذکر: ملاحظه شد که دستگاه معادلات دیفرانسیل در
 روش سوم بصورت کلی: $f_1(D)x + f_2(D)y = g(t)$
 $f_3(D)x + f_4(D)y = h(t)$

می باشد که دترمینال ضرایب یعنی:

$$W(D) = \begin{vmatrix} f_1(D) & f_2(D) \\ f_3(D) & f_4(D) \end{vmatrix}$$

را دترمینان دستگاه معادلات دیفرانسیل نامیم.

قضیه زیر را بدون اثبات می پذیریم.

قضیه: تعداد پارامتر در جواب عمومی $x = x(t)$

و $y = y(t)$ دستگاه بالا برابر با توان

$W(D)$ است مشروط بر اینکه $W(D) \neq 0$ باشد.

بنابراین در جوابهایی از دستگاههایی که تعداد

پارامتر بیشتر از توان $W(D)$ است، می

توان پارامترهای اضافی را با جایگذاری در

دستگاه معادلات حذف کرد.

در این فصل ملاحظه خواهیم کرد چگونه با به کار بردن تبدیل لاپلاس در مورد يك معادله دیفرانسیل با شرایط اولیه ، می توان آن را به مسئله ساده تری تبدیل کرده بطوری که با وارون تبدیل لاپلاس جواب مسئله ابتدائی بدست می آید و همچنین ملاحظه خواهد شد که روش های تغییر پارامتر و ضرایب ثابت را در مورد حل معادلات دیفرانسیل غیر همگن که تابع طرف دوم ناپیوسته باشد نمی توان بکار برد که در این حالت می توان از تبدیل لاپلاس استفاده کرد.

تبدیل لاپلاس

تبدیل مفهوم تعمیم یافته تابع می باشد ، یعنی رابطه ای که به هر تابع ، تابع دیگری را نسبت دهد، يك تبدیل نامیم. از جمله تبدیلات مشهور تبدیل مشتق و انتگرال و ضرب در عبارتی می باشد که معمولاً با نماد زیر بترتیب نشان می دهیم.

$$D(f(x)) = F'(x) \quad (1)$$

$$\int f(x)dx = F(x) + c \quad (2)$$

$$M(f(x)) = e^{\alpha x} f(x) \quad (3) \text{ ضرب در } e^{\alpha x}$$

تعریف: فرض کنیم تابع f بر بازه $[0, \infty)$ تعریف شده باشد ،
 انتگرال ناسره

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx$$

را که S عدد حقیقی است به ازای مقادیر S از $A \subseteq R$ همگرا باشد آنرا تبدیل لاپلاس تابع f نامیم و با نماد $F(s)$ نشان می دهیم یعنی :

$$\forall s \in A \quad F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx$$

برای بیان رابطه بین تابع F و تبدیل لاپلاس تابع f

$$F(s) = L(f)(x) \quad \text{می نویسیم:}$$

شرایط وجود تبدیل لاپلاس را بعداً مطالعه خواهیم کرد.
 اینک تبدیل لاپلاس چند تابع خاص را پیدا می کنیم .
 تبدیل لاپلاس تابع $f(x) = 1$ را پیدا می کنیم. یعنی:

$$L(1) = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-sx} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{s} e^{-sx} \right]_0^b =$$

$$= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{s} e^{-sb} + \frac{1}{s} e^0 \right)$$

به ازای $s > 0$ انتگرال همگراست پس:

$$L(1) = \frac{1}{s}$$

تبدیل لاپلاس تابع $f(x) = x$ را پیدا می کنیم :

$$\begin{aligned}
 L(x) = F(s) &= \int_0^{\infty} e^{-sx} \cdot x dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b x e^{-sx} dx = \\
 &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{s} x e^{-sx} \Big|_0^b + \int_0^{\infty} \frac{1}{s} e^{-sx} dx \right] = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{s} x e^{-sx} - \frac{1}{s^2} e^{-sx} \right]_0^b \\
 &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{s} b e^{-sb} - \frac{1}{s^2} e^{-sb} + \frac{1}{s} x e + \frac{1}{s^2} e^0 \right]
 \end{aligned}$$

به ازای $s > 0$ انتگرال همگراست پس $L(x) = \frac{1}{s^2}$

تبدیل لاپلاس تابع $f(x) = x^n$ را پیدا می کنیم

$$L(x^n) = \int_0^{\infty} e^{-sx} \cdot x^n dx = -\frac{x^n e^{-sx}}{s} + \frac{n}{s} \int_0^{\infty} e^{-sx} \cdot x^{n-1} dx$$

$$= \frac{n}{s} L(x^{n-1}) = \frac{n}{s} \left(\frac{n-1}{s}\right) L(x^{n-2}) = \dots = \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s} \dots \frac{1}{s} L(1)$$

به ازای $s > 0$ انتگرال همگراست پس :

$$L(x^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

در تمرینات نشان داده می شود:

اگر $s > \alpha$ ، آنگاه

$$L(e^{\alpha x}) = \frac{1}{s - \alpha}$$

خواص تبدیل لاپلاس

با توجه به اینکه تبدیل لاپلاس توسط انتگرال تعریف شده

است لاقلاً دارای خواص خطی انتگرال را می باشد.

قضیه: نشان دهید که :

$$L(\alpha f(x) + g(x)) = \alpha L(f(x)) + L(g(x))$$

اثبات : چون α عدد ثابت می باشد پس

$$\begin{aligned} L(\alpha f(x) + g(x)) &= \int_0^{\infty} e^{-sx} (\alpha f(x) + g(x)) dx = \\ &= \alpha \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx + \int_0^{\infty} e^{-sx} g(x) dx = \alpha L(f(x)) + L(g(x)) \end{aligned}$$

گرچه این خاصیت اثبات کوتاهی دارد ولی خواص خیلی قوی می باشد و می توان بسیاری از تبدیل لاپلاس توابع را پیدا کرد.

مثال:

$$\begin{aligned}L(f(x)) &= L(5x^2 + 12) = 5L(x^2) + 12L(1) \\ &= 5 \times \frac{2!}{s^3} + 12 \times \frac{1}{s} = \frac{10}{s^3} + \frac{12}{s}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L(g(x)) &= L(3e^{2x} + 3x) = 3L(e^{2x}) + 3L(x) \\ &= 3 \times \frac{1}{s-2} + 3 \times \frac{1}{s^2} = \frac{3}{s-2} + \frac{3}{s^2}\end{aligned}$$

حال تبدیل لاپلاس تابع $f(x) = e^{i\alpha x}$ عبارت است از

$$L(e^{i\alpha x}) = \frac{1}{s-i\alpha} = \frac{1}{s-i\alpha} \times \frac{s+i\alpha}{s+i\alpha} = \frac{s+i\alpha}{s^2 + \alpha^2} = \frac{s}{s^2 + \alpha^2} + i \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}$$

و از طرفی

$$L(e^{i\alpha x}) = L(\cos \alpha x + i \sin \alpha x) = L(\cos \alpha x) + iL(\sin \alpha x)$$

بنابر تساوی دو طرف اول تساویها داریم:

$$L(\sin \alpha x) = \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2} \quad L(\cos \alpha x) = \frac{s}{s^2 + \alpha^2}$$

مثال:

$$\begin{aligned}L(f(x)) &= L(\sinh x) = L\left(\frac{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}}{2}\right) \\&= \frac{1}{2} [L(e^{\alpha x}) - L(e^{-\alpha x})] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s - \alpha} - \frac{1}{s + \alpha}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{s + \alpha - s + \alpha}{s^2 - \alpha^2}\right) = \frac{\alpha}{s^2 - \alpha^2} \\L(g(x)) &= L(\cosh \alpha x) = L\left(\frac{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}}{2}\right) = (L(e^{\alpha x}) + L(e^{-\alpha x})) \\&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s - \alpha} + \frac{1}{s + \alpha}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{s + \alpha + s - \alpha}{s^2 - \alpha^2}\right) = \frac{s}{s^2 - \alpha^2}\end{aligned}$$

با شرط $|s| > \alpha$

به عنوان دومین خاصیت از تبدیل لاپلاس خاصیت انتقال می باشد.

قضیه: فرض کنید $F(s) = L(f(x))$ آنگاه

$$L(e^{\alpha x} f(x)) = F(s - \alpha)$$

اثبات:

$$L(e^{\alpha x} f(x)) = \int_0^{\infty} e^{-sx} \cdot e^{\alpha x} f(x) dx =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-(s-\alpha)x} f(x) dx = F(s - \alpha)$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx$$

چون

$$L(e^{7x} \sin 5x) = \frac{5}{(s-7)^2 + 25}$$

مثلا:
(الف)

$$L(e^{3x} \cos 4x) = \frac{s-3}{(s-3)^2 + 16}$$

(ب)

$$L(e^{-2x} x^5) = \frac{5!}{(s+2)^6}$$

(ج)

به عنوان سومین خاصیت از تبدیل لاپلاس خاصیت مضرب می باشد .

قضیه: فرض کنید $F(s) = L(f(x))$ آنگاه

$$L(xf(x)) = -\frac{d}{ds} F(s)$$

اثبات:

$$\begin{aligned} -\frac{d}{ds} F(s) &= -\frac{d}{ds} \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx = -\int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial s} e^{-sx} f(x) dx \\ &= -\int_0^{\infty} (-x) e^{-sx} f(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-sx} (xf(x)) dx = L(xf(x)) \end{aligned}$$

$$L(x^2 f(x)) = (-1)^2 \frac{d^2}{ds} F(s) \quad \text{نتیجه :}$$

اثبات:

$$L(x^2 f(x)) = L(x \cdot xf(x)) = (-1) \frac{d}{ds} L(xf(x)) =$$

$$= (-1) \frac{d}{ds} \frac{d}{ds} L(f(x)) = (-1)^n \frac{d^2}{ds^2} F(s)$$

به استقراء نتیجه می شود که

$$L(x^n f(x)) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} L(f(x))$$

مثال:

(الف)

$$L(x \sin x) = -\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s^2 + 1} \right) = -\frac{-2s}{(s^2 + 1)^2} = \frac{2s}{(s^2 + 1)^2}$$

(ب)

$$L(x \cos x) = -\frac{d}{ds} \left(\frac{s}{s^2 + 1} \right) = -\frac{s^2 + 1 - 2s^2}{(s^2 + 1)^2} = \frac{s^2 - 1}{(s^2 + 1)^2}$$

(ج)

$$L(x^2 \sin x) = -\frac{d}{ds} \left(\frac{2s}{(s^2 + 1)^2} \right) = -\frac{2(s^2 + 1)^2 - 8s^2(s^2 + 1)}{(s^2 + 1)^4} = \frac{-6s^4 - 4s^2 + 2}{(s^2 + 1)^4}$$

از آنجائیکه معادله دیفرانسیل از ترکیباتی
از \mathcal{X} یعنی $f(x)$ و مشتق یعنی y'
و مشتقات مراتب بالا تشکیل شده است
بنابراین در این قسمت تبدیل لاپلاس
مشتق را بررسی می‌کنیم .

قضیه: نشان دهید $L(y') = sL(y) - y(0)$

اثبات: چون $L(y') = \int_0^{\infty} e^{-sx} \cdot y' dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-sx} \cdot y' dx$

با استفاده از روشی جز به جز داریم:

$y' dx = dv$ و $e^{-sx} = u$

$y = v$ و $-se^{-sx} dx = du$

پس $L(y') = \lim_{b \rightarrow +\infty} (ye^{-sx} \Big|_0^b + \int_0^b Se^{-sx} y dx)$

$= \lim_{b \rightarrow +\infty} (y(b)e^{-sb} - y(0)e^0 + s \int_0^b e^{-sx} y dx)$

اگر $s > 0$ آنگاه: $L(y') = -y(0) + sL(y) = sL(y) - y(0)$ ۲۲۲

نتیجه: نشان دهید. $L(y'') = s^2 L(y) - sy(0) - y'(0)$.
اثبات:

$$\begin{aligned} L(y'') &= L((y'))' = sL(y') - y'(0) = s(sL(y) - y(0)) - y'(0) = \\ &= s^2 L(y) - sy(0) - y'(0) \end{aligned}$$

به استقراء نتیجه می شود که:

$$L(y^{(n)}) = s^n L(y) - s^{n-1} y(0) - s^{n-2} y'(0) - \dots - sy^{(n-2)}(0) - y^{(n-1)}(0)$$

معکوس تبدیل لاپلاس

فرض کنیم تبدیل لاپلاس تابع $f(x)$ وجود داشته باشد. در این صورت واضح است که تابع منحصر بفردی مانند $F(s)$

$$F(s) = L(f(x)) \quad \text{وجود دارد که}$$

اینک عکس این حالت را در نظر می گیریم. فرض کنید تابعی مانند $F(s)$ داده شده باشد. آیا تابع منحصر بفردی مانند $f(x)$ وجود دارد به گونه ای که داشته باشیم:

$$F(s) = L(f(x))$$

اگر پاسخ سؤال مثبت باشد می نویسیم:

$$f(x) = L^{-1}(F(s))$$

$f(x)$ را وارون یا معکوس تبدیل لاپلاس تابع $F(s)$ نامیم.

اینک برخی خواص معکوس تبدیل
لاپلاس را بررسی می کنیم.

قضیه: نشان دهید:

$$L^{-1}(\alpha F(s) + G(s)) = \alpha L^{-1}(F(s)) + L^{-1}(G(s))$$

اثبات: قضیه قبلی ملاحظه شود.

مثال:

$$L^{-1}\left(\frac{5}{s}\right) = 5L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) = 5 \times 1 = 5$$

(الف)

$$L^{-1}\left(\frac{4}{s^3} + \frac{6}{s^2 + 4}\right) = 2L^{-1}\left(\frac{2!}{s^3}\right) + 3L^{-1}\left(\frac{2}{s^2 + 4}\right) = 2x^2 + 3 \sin 2x \quad (\text{ب})$$

$$L^{-1}\left(\frac{2}{s + 3}\right) = 2L^{-1}\left(\frac{1}{s - (-3)}\right) = 2e^{-3x}$$

(ج)

$$\begin{aligned}
L^{-1}\left(\frac{1}{s^2 + s}\right) &= L^{-1}\left(\frac{1}{s(s+1)}\right) = L^{-1}\left(\frac{1}{s} + \frac{-1}{s+1}\right) \quad (\text{a}) \\
&= L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) - L^{-1}\left(\frac{1}{s - (-1)}\right) = 1 - e^{-x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L^{-1}\left(\frac{1}{s^4 + s^2}\right) &= L^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s^2 + 1)}\right) = L^{-1}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{-1}{s^2 + 1}\right) \quad (\text{b}) \\
&= L^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) - L^{-1}\left(\frac{1}{s^2 + 1}\right) = x - \sin x
\end{aligned}$$

خواص معکوس تبدیل لاپلاس

قضیه: نشان دهید:

$$L^{-1}(F(s - \alpha)) = e^{\alpha x} f(x)$$

اثبات قضیه قبلی ملاحظه شود.

مثال:

(الف)

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2 + 4s + 5}\right) = L^{-1}\left(\frac{1}{(s - 2)^2 + 1^2}\right) = e^{2x} \cdot \sin x$$

(ب)

$$L^{-1}\left(\frac{6}{(s + 2)^2 + 9}\right) = 2L^{-1}\left(\frac{3}{(s + 2)^2 + 3^2}\right) = 2e^{-2x} \cdot \sin 3x$$

بقیه مثال:

(ج)

$$L^{-1}\left(\frac{12}{(s+3)^4}\right) = 2L^{-1}\left(\frac{3!}{(s+3)^4}\right) = 2e^{-3x} \cdot x^3$$

(د)

$$L^{-1}\left(\frac{s+3}{s^2+2s+5}\right) = L^{-1}\left(\frac{s+1+2}{(s-1)^2+2^2}\right) = L^{-1}\left(\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2}\right) + L^{-1}\left(\frac{2}{(s+1)^2+2^2}\right)$$

$$= e^{-x} \cos 2x + e^{-x} \sin 2x$$

حل معادله دیفرانسیل بروش لاپلاس
اینک آماده هستیم نشان دهیم که چگونه می توان
جواب يك مسئله با مقدار اولیه دشوار را به كمك
تبدیلات لاپلاس ، به مسئله دیگری با شرایط ساده تر
تبدیل کرده و سپس با استفاده از وارون تبدیل لاپلاس
جواب معادله دیفرانسیل را بدست آورد. با يك مثال
ساده در مورد معادله دیفرانسیل مرتبه اول توضیح
می دهیم.

مثال : معادله $y' + y = e^x$ را با شرط $y(0) = 1$ حل می کنیم :

حل: ابتدا تبدیل لاپلاس را روی معادله اثر می دهیم :

$$L(y' + y) = L(e^x) \Rightarrow L(y') + L(y) = L(e^x)$$

$$sL(y) - y(0) + L(y) = L(e^x)$$

$$sL(y) - 1 + L(y) = \frac{1}{s-1}$$

$$(s+1)L(y) = \frac{1}{s-1} + 1 = \frac{1+s-1}{s-1} = \frac{s}{s-1}$$

$$L(y) = \frac{s}{(s-1)(s+1)}$$

حال وارون تبدیل لاپلاس را محاسبه می کنیم:

$$y = L^{-1}\left(\frac{s}{(s-1)(s+1)}\right) = L^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}}{s-1} + \frac{\frac{1}{2}}{s+1}\right)$$

$$y = \frac{1}{2}L^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) + \frac{1}{2}L^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right)$$

$$y = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} = \cosh x$$

مثال : معادله $y' + 2y = e^{-x}$ را با شرط $y(0) = 2$ حل می کنیم.

حل : ابتدا تبدیل لاپلاس را روی معادله اثر می دهیم:

$$L(y' + 2y) = L(e^{-x}) \Rightarrow L(y') + 2L(y) = L(e^{-x})$$

$$\Rightarrow sL(y) - y(0) + 2L(y) = L(e^{-x})$$

$$\Rightarrow (s + 2)L(y) = \frac{1}{s + 1} + 2 = \frac{2s + 3}{s + 1} \Rightarrow L(y) = \frac{2s + 3}{(s + 1)(s + 2)}$$

حال وارون تبدیل لاپلاس را محاسبه می کنیم:

$$y = L^{-1}\left(\frac{2s + 3}{(s + 1)(s + 2)}\right)$$

$$y = L^{-1}\left(\frac{1}{s + 1} + \frac{1}{s + 2}\right)$$

$$y = L^{-1}\left(\frac{1}{s + 1}\right) + L^{-1}\left(\frac{1}{s + 2}\right) \Rightarrow y = e^{-x} + e^{-2x}$$

مثال : مطلوب است جواب معادله $y'' + 4y = 4x$ با شرایط $y(0) = 1$ و $y'(0) = 5$
حل:

$$L(y'' + 4y) = L(4x) \Rightarrow L(y'') + 4L(y) = 4L(x)$$

$$s^2 L(y) - sy(0) - y'(0) + 4L(y) = 4L(x)$$

$$(s^2 + 4)L(y) = \frac{4}{s^2} + s + 5 = \frac{4 + s^3 + 5s^2}{s^2}$$

$$L(y) = \frac{s^3 + 5s^2 + 4}{s^2(s^2 + 4)} \quad y = L^{-1}\left(\frac{s^3 + 5s^2 + 4}{s^2(s^2 + 4)}\right)$$

$$y = L^{-1}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{s+4}{s^2+4}\right) = L^{-1}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+4} + \frac{4}{s^2+4}\right)$$

$$y = L^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) + L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4}\right) + 2L^{-1}\left(\frac{2}{s^2+4}\right)$$

تبدیل لاپلاس برخی توابع

قبل از آنکه به تبدیل لاپلاس برخی توابع دیگر پردازیم خوب است شرایطی را که تابع باید دارا باشد تا تبدیل لاپلاس داشته باشد، دقیقتر مورد توجه قرار دهیم. برای تضمین وجود تبدیل لاپلاس، کافی است فرض کنیم که پیوسته و یا لاقط قطعه به قطعه پیوسته است. مقصود از عبارت اخیر آن است که تابع $f(x)$ در هر فاصله متناهی $0 \leq x \leq b$ پیوسته است، مگر احتمالاً در تعدادی متناهی نقطه که دارای نا پیوستگی جهشی است،

یعنی تابع در آن نقاط حد های چپ و راست متفاوتی دارد.

این شرط لازم نیست مثلاً تابع $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ در $x=0$ دارای یک نا پیوستگی از نوع بینهایت است و بنابر این قطعه به قطعه پیوسته نیست، با این وجود انتگرالش از 0 تا b

وجود دارد و از آنجا که برای های بزرگ کراندار نیز هست، تبدیل لاپلاس آن وجود دارد. در واقع، برای،

$$L(x^{-\frac{1}{2}}) = \int_0^{\infty} e^{-sx} x^{-\frac{1}{2}} dx \quad \text{داریم:}$$

و تغییر متغیر $sx = t$ نتیجه می دهد

$$L(x^{-\frac{1}{2}}) = s^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt$$

یک تغییر متغیر $t = s^2$ بدست می دهد

$$L(x^{-\frac{1}{2}}) = 2s^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} e^{-s^2} ds$$

در درس حساب دیفرانسیل و انتگرال نشان داده می شود که

انتگرال اخیر برابر با $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ است، لذا داریم:

$$L(x^{-\frac{1}{2}}) = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

تعریف: تابع

$$u_c(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < c \\ 1 & x \geq c \end{cases}$$

که $c \geq 0$ می باشد را تابع پله ای واحد نامیم و تبدیل لاپلاس آن را پیدا می کنیم:

$$L(u_c(x)) = \int_0^{\infty} e^{-sx} \cdot u_c(x) dx = \int_0^c e^{-sx} \cdot 0 dx + \int_c^{\infty} e^{-sx} \cdot 1 dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b e^{-sx} dx$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{s} e^{-sx} \right)_c^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{s} e^{-sb} + \frac{1}{s} e^{-cs} \right) = \frac{e^{-cs}}{s}$$

با شرط $s > 0$

مثال: تابع زیر را بر حسب توابع پله ای واحد می نویسیم؟

$$f(x) = \begin{cases} f_0(x) & 0 \leq x < x_0 \\ f_1(x) & x_0 \leq x < x_1 \\ f_2(x) & x_1 \leq x < x_2 \\ f_3(x) & x_2 \leq x < x_3 \\ f_4(x) & x \geq x_3 \end{cases}$$

حل:

$$f(x) = f_0(x) + [f_1(x) - f_0(x)]u_{x_0}(x) + [f_2(x) - f_1(x)]u_{x_1}(x) + [f_3(x) - f_2(x)]u_{x_2}(x) + [f_4(x) - f_3(x)]u_{x_3}(x)$$

مثال: تابع

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 4 \\ 5 & 4 \leq x < 5 \\ x^2 & x \geq 5 \end{cases}$$

را بصورت تابع پله ای واحد می نویسیم؟

$$f(x) = x + (5 - x)u_4(x) + (x^2 - 5)u_5(x)$$

تذکر: از تابع پله ای واحد می توان برای انتقال تابع داده شده f ، که دامنه تعریف آن $x \geq 0$ به اندازه C واحد در جهت راست استفاده کرد. برای مثال تابع تعریف

$$y = u_c(x) f(x - c) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < c \\ f(x - c) & x \geq c \end{cases}$$

شده توسط

نمایش انتقالی از تابع به اندازه C واحد در جهت مثبت x می باشد .

قضیه: نشان دهید: $s > 0$ $L(u_c(x)f(x-c)) = e^{-cx}F(s)$

اثبات:

$$L(u_c(x)f(x-c)) = \int_0^{\infty} e^{-sx} u_c(x) f(x-c) dx = \int_c^{\infty} e^{-sx} f(x-c) dx$$

با تغییر متغیر $u = x - c$ داریم:

$$L(u_c(x)f(x-c)) = \int_0^{\infty} e^{-s(u+c)} f(u) du =$$

$$e^{-cs} \int_0^{\infty} e^{-su} f(u) du = e^{-cs} F(s) \quad s > 0$$

مثال: تبدیل لاپلاس تابع

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & 0 \leq x < 2\pi \\ \sin x + \cos x & x \geq 2\pi \end{cases}$$

را پیدا می کنیم.

حل: با استفاده از مثال قبل تابع f را می توان بر حسب تابع پله ای $u_{2\pi}(x)$ به صورت
 $f(x) = \sin x + u_{2\pi}(x) \cos x$ نوشت.

چون $\cos t = \cos(x - 2\pi)$ پس

$$f(x) = \sin x + u_{2\pi}(x) \cos(x - 2\pi)$$

بنابر خواص و فرمول های تبدیل لاپلاس

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + 1} + e^{-2\pi s} \frac{s}{s^2 + 1} = \frac{1 + se^{-2\pi s}}{s^2 + 1} \quad s > 0$$

قضیه: اگر $F(s) = L(f(x))$ و $G(s) = L(g(x))$ هر دو به ازای $s \geq 0$ موجود باشد آنگاه

$$H(x) = F(s)G(s) = L(h(x))$$

$$h(x) = \int_0^x f(x-u)g(u)du \quad \text{که در آن}$$

تابع h به کنولوسیون f و g معروف است و آن را با

$$h = f * g$$

نشان می دهیم .

نشان می دهیم که $f * g(x) = g * f(x)$ زیرا

$$f * g(x) = \int_0^x f(x-u)g(u)du$$

با بکار بردن تغییر متغیر $x-u=v$ انتگرال بالا

را می توان به صورت زیر نوشت:

$$f * g(x) = \int_x^0 f(v)g(x-v)(-dv)$$

$$= \int_0^x g(x-v)f(v)dv$$

$$= g * f(x)$$

مثال: با بکار بردن کنولوسیون تبدیل معکوس تابع

$$H(s) = \frac{a}{s^2(s^2 + a^2)}$$

را پیدا می کنیم؟

حل: با فرض $F(s) = \frac{1}{s^2}$ و $G(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}$ تبدیل لاپلاس

$$L(\sin ax) = \frac{a}{s^2 + a^2} \quad \text{و} \quad L(x) = \frac{1}{s^2}$$

$$h(x) = f * g(x) = \int_0^x (x-u) \sin audu$$

با بکار بردن روش جزبه جز داریم:

$$h(x) = \frac{ax - \sin ax}{a^2}$$

تذکر: مثال بالا را می توان با بکار بردن کسرهای جزئی
بصورت زیر محاسبه کرد :

$$H(s) = \frac{1}{a^2} \left(\frac{a}{s^2} - \frac{a}{s^2 + a^2} \right)$$

بنابر این

$$h(x) = \frac{1}{a^2} (ax - \sin ax)$$

قضیه: نشان دهید که اگر C یک عدد مثبت باشد آنگاه

$$L(f(cx)) = \frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right)$$

$$L(f(cx)) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(cx) dx \quad \text{اثبات:}$$

با به کار بردن تغییر متغیر $CX = u$ انتگرال بالا به صورت

$$L(f(cx)) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{s}{c}u} f(u) \frac{1}{c} du =$$

$$\frac{1}{c} \int_0^{\infty} e^{-\frac{s}{c}u} f(u) du = \frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right) \quad \frac{s}{c} > a, s > ca$$

پایان

موفق باشید

www.salampnu.com

سایت مرجع دانشجوی پیام نور

- ✓ نمونه سوالات پیام نور : بیش از ۱۱۰ هزار نمونه سوال همراه با پاسخنامه
- تستی و تشریحی
- ✓ کتاب ، جزوه و خلاصه دروس
- ✓ برنامه امتحانات
- ✓ منابع و لیست دروس هر ترم
- ✓ دانلود کاملاً رایگان بیش از ۱۴۰ هزار فایل مختص دانشجویان پیام نور

www.salampnu.com