آمار و احتمال (۱)

رشته جغرافیا

۲ واحد درسی

نام منبع و مولف: آمار و احتمال در جغرافیا (۱)، دکتر محمد قاسم وحیدی اصل، انتشارات دانشگاه پیام نور

دکتر مجید جاوری، استادیار گروه جغرافیا ی دانشگاه پیام نور

طرح درس

- مقدمه
- سازماندهی داده ها
- توصیف عددی داده ها
- احتمال
- توزیعهای احتمال
- چند توزیع احتمال خاص

اهداف درس

- متغیرها و مقیاسهای اندازه گیری آنها
- روشهای توصیف و سازماندهی داده ها
- نظریه احتمال واصول و قواعد آن
- متغیرهای تصادفی
- امید ریاضی و واریانس متغیرهای تصادفی
- بررسی و کاربرد و خواص چند توزیع احتمال

جایگاه درس

- درس آمار و احتمال (۱) از دروس اجباری دوره کارشناسی جغرافیا است.

فصل اول

مقدمه

دكتر مجيد جاوری، استاديار گروه جغرافياي دانشگاه پيام نور

فصل اول: مقدمه

- هدف کلی:

آشنایی کلی با نقش اعداد در تجزیه و تحلیل پدیده ها، علم آمار، انواع مقیاسهای عددی

هدفهای رفتاری

- مفهوم داده های آماری و مقیاسهای اندازه گیری آنها
- تعریف علم آمار، آمار توصیفی و آمار استنباطی، عنصر و جامعه
- دلایل نمونه گیری و مزایای آنها
- انواع داده های مهم در تحلیلهای جغرافیا و تفاوت آنها با دیگر داده ها در سایر علوم

مفاهیم

الف) داده های آماری

ب) علم آمار

ج) آمار توصیفی

د) آمار استنباطی

ه) عنصر و جامعه

و) نمونه گیری

متغیر

1. متغیرهای کیفی
2. متغیرهای کمی

(الف) متغیر کمی پیوسته

(ب) متغیر کمی گسسته

مقیاسهای اندازه گیری متغیرها

1. مقیاس اسمی
2. مقیاس ترتیبی(رتبه ای)
3. مقیاس فاصله ای
4. مقیاس نسبتی(نسبی)

داده های آماری

1. داده های اولیه (داده های خام)
2. داده های ثانویه

فصل دوم

سازماندهی داده ها

دکتر مجید جاوری، استادیار گروه جغرافیای دانشگاه پیام نور

فصل دوم: سازماندهی داده ها

- هدف کلی:

آشنایی مقدماتی با شیوه های تنظیم و تلخیص داده ها و تشکیل جدول فراوانی

هدفهای رفتاری

- نحوه مرتب کردن داده ها(کمی و رسته ای)
- تنظیم جداول فروانی و معیارهای مربوطه
- نمودارهای آماری و کاربرد آنها در توصیف داده ها

دکتر مجید جاوری، استادیار گروه جغرافیا ی دانشگاه پیام نور

دانشگاه پیام نور

جداول فراوانی

الف) فراوانی مطلق هر رده

ب) فراوانی نسبی هر رده

ج) فراوانی تجمعی هر رده

د) فراوانی تجمعی نسبی

ه) نماینده طبقات (وسط طبقات)

و) خط و نشان(چوب وخط)

مثال(۱)(داده های گسسته)

داده های زیر میزان کیفیت ۲۰ کالا را براساس کیفیت خوب(کد۳) و کیفیت متوسط (کد۲) و کیفیت ضعیف (کد۱) نشان می دهد. یک جدول فراوانی مناسب برای این داده ها تشکیل دهید.

۳ ۲ ۲ ۲ ۲ ۱ ۳ ۲ ۱ ۱ ۲ ۳ ۱ ۳ ۲ ۱ ۱ ۲ ۳ ۲

دانشگاه پیام نور

ادامه مثال(۱)

فروانی نسبی تجمعی	فراوانی تجمعی	فراوانی نسبی	فراوانی مطلق	کیفیت کالا
۳/۰	۶	۳/۰	۶	۱
۷۵/۰	۱۵	۴۵/۰	۹	۲
۱	۲۰	۲۵/۰	۵	۳
-	-	۱	۲۰	جمع

مثال (۲)

گروه خونی ۲۰ فرد ورزشکار را به صورت زیر جمع آوری کرده ایم.

یک جدول فراوانی مناسب برای این داده ها تشکیل دهید.

$$B\ ,\ A\ ,\ AB\ \ ,\ B\ ,\ O\ ,\ O\ ,\ AB\ \ ,\ O\ ,\ O\ ,\ O$$

$$AB\ \ ,\ B\ ,\ B\ ,\ A\ ,\ B\ ,\ A\ ,\ O\ ,\ O\ ,\ O\ ,\ A$$

ادامه مثال (۲)

گره خونی	فراوانی مطلق	فراوانی نسبی	فراوانی تجمعی	فروانی نسبی تجمعی
A	4	2/0	4	2/0
B	5	25/0	9	45/0
AB	3	15/0	12	6/0
O	8	4/0	20	1
جمع	20	1	-	-

چگونگی تشکیل جدول فراوانی داده های پیوسته

1. محاسبه دامنه تغییرات:

$R=$ کوچکترین مشاهده - بزرگترین مشاهده

2. محاسبه تعداد رده ها :

الف) روش دلخواه

ب) $k = ۱ + ۳/۳ \log n$

ج) $n = ۲^k$

3. محاسبه طول(حدود) رده ها:

$$c = \frac{R}{k}$$

مثال(۳)

داده های زیر میزان اکسید سولفور منتشر شده در هوا را در ۸۰ روز (بر حسب تن) نشان می دهند.

۴/۱۳ ۰/۹ ۱۳/۹ ۱۸/۷ ۲۴/۸ ۹/۲۳ ۲/۱۱ ۱۷/۳ ۴/۲۶ ۱۵/۸

۷/۲۳ ۶/۱۷ ۶/۲۸ ۸/۱۲ ۱/۲۶ ۵/۱۷ ۷/۱۴ ۲/۶ ۸/۹ ۷/۲۲

۷/۱۰ ۷/۱۶ ۴/۱۹ ۵/۱۵ ۹/۲۰ ۰/۱۱ ۵/۲۰ ۰/۱۸ ۷/۲۲ ۸/۲۶

۰/۱۹ ۹/۱۶ ۶/۲۱ ۲/۱۹ ۴/۲۱ ۴/۲۰ ۶/۲۶ ۹/۲۲ ۲/۱۵ ۱/۱۹

۵/۱۴ ۵/۲۳ ۵/۱۳ ۷/۷ ۰/۱۸ ۲/۱۶ ۱/۲۰ ۶/۲۴ ۰/۲۳ ۵/۱۸

۱/۱۸ ۴/۱۸ ۶/۲۴ ۵/۲۲ ۳/۲۴ ۸/۲۰ ۱/۱۷ ۴/۱۹ ۰/۲۹ ۴/۱۴

۸/۳۱ ۷/۲۵ ۰/۲۰ ۴/۱۹ ۸/۱۱ ۳/۱۳ ۳/۲۲ ۳/۱۲ ۲۱/۹ ۳/۸

۵/۲۸ ۱/۲۰ ۱/۲۴ ۴/۹ ۹/۱۷ ۱/۱۸ ۵/۲۷ ۹/۱۵ ۵/۱۰ ۹/۲۵

ادامه مثال(۳)

$$R = ۳۱/۸ - ۶/۲ + ۰/۱ = ۲۵/۷$$

$$K = ۶$$

$$C = \frac{R}{K} = \frac{۲۵/۷}{۶} = ۴/۳$$

ادامه مثال(۳)

نماینده طبقات	فروانی نسبی تجمعی	فراوانی تجمعی	فراوانی نسبی	فراوانی مطلق	حدود رده ها
۳/۸	۰۷۵/۰	۶	۰۷۵/۰	۶	۱۵/۶-۴۵/۱۰
۶/۱۲	۲۵۰/۰	۲۰	۱۷۵/۰	۱۴	۴۵/۱۰-۷۵/۱۴
۹/۱۶	۵۰/۰	۴۰	۲۵/۰	۲۰	۷۵/۱۴-۰۵/۱۹
۲/۲۱	۷۶۲۵/۰	۶۱	۲۶۲۵/۰	۲۱	۰۵/۱۹-۳۵/۲۳
۵/۲۵	۹۵/۰	۷۶	۱۸۷۵/۰	۱۵	۳۵/۲۳-۶۵/۲۷
۸/۲۹	۱	۸۰	۰۵/۰	۴	۶۵/۲۷-۱۵/۳۱
-	-	-	۱	۸۰	جمع

نمودارهای آماری

- بافت نگار(هیستوگرام)
- چند بر فراوانی(چند ضلعی)
- شاخه و برگ(ساقه و برگ)
- دایره ای(کلوچه ای)
- میله ای

نمودار بافت نگار

- نمودار بافت نگار برای داده های کمی پیوسته بکار برده می شود.
- روی محور افقی حدود رده ها و روی محور عمودی فراوانی مطلق یا فراوانی نسبی تعریف می شود.

مثال(۴)

برای داده های میزان اکسید سولفور نمودار بافت نگار به صورت زیر است.

نمودار چند بر فراوانی

- نمودار چند بر فراوانی نیز برای داده های کمی پیوسته بکار برده می شود.
- روی محور افقی حدود رده ها و روی محور عمودی فراوانی مطلق یا فراوانی نسبی تعریف می شود.

مثال(۵)

برای داده های میزان اکسید سولفور نمودار چند بر فراوانی به صورت زیر است.

نمودار شاخه و برگ

- نمودار شاخه و برگ نیز برای داده های کمی پیوسته بکار برده می شود.

مثال (۶)

فرض کنید عددهای زیر تعداد شعب یک بانک بزرگ در ۲۰ ناحیه شهری باشد.

۸۸ ۶۳ ۶۵ ۷۹ ۷۴ ۶۱ ۹۳ ۵۲ ۸۴ ۶۹

۶۸ ۷۷ ۶۱ ۸۲ ۵۵ ۷۴ ۷۲ ۶۷ ۶۴ ۵۷

شاخه	برگ							
5	2	5	7					
6	1	1	3	4	5	7	8	9
7	2	4	4	7	9			
8	2	4	8					
9	3							

نمودار دایره ای

- نمودار دایره ای برای داده های رسته ای(کیفی) بکار برده می شود.

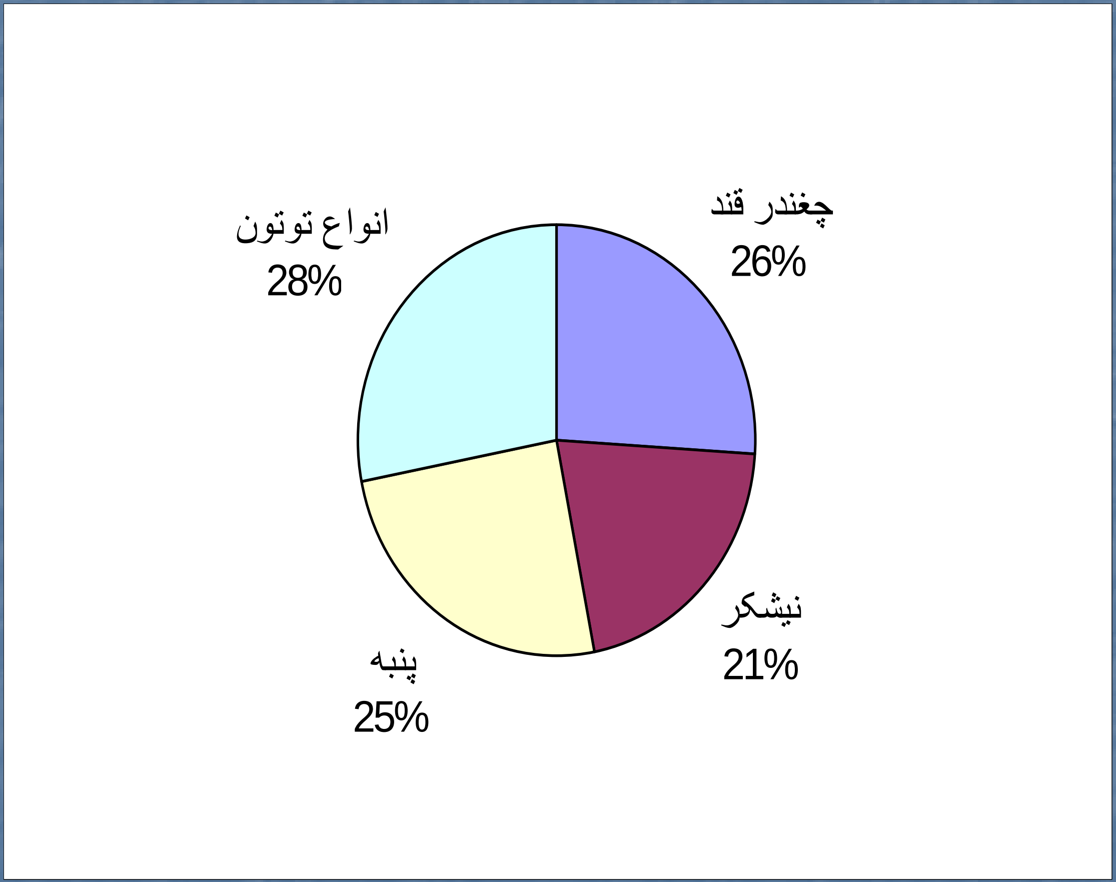
۳۶۰ × فراوانی نسبی هر رده = قطاع دایره برای هر رده

مثال(۷)

جدول زیر کاشت برخی از نباتات صنعتی را در سال ۱۳۷۳ نشان می دهد. (بر حسب هزار هکتار)

نوع محصول	سطح زیر کاشت	فراوانی نسبی	قطاع دایره
چغندر قند	۱۷۰	۲۶/۰	۶/۹۳
نیشکر	۱۴۰	۲۱/۰	۶/۷۵
پنبه	۱۶۰	۲۵/۰	۹۰
انواع توتون	۱۸۰	۲۸/۰	۸/۱۰۰
جمع	۶۵۰	۱	۳۶۰

ادامه مثال(۷)

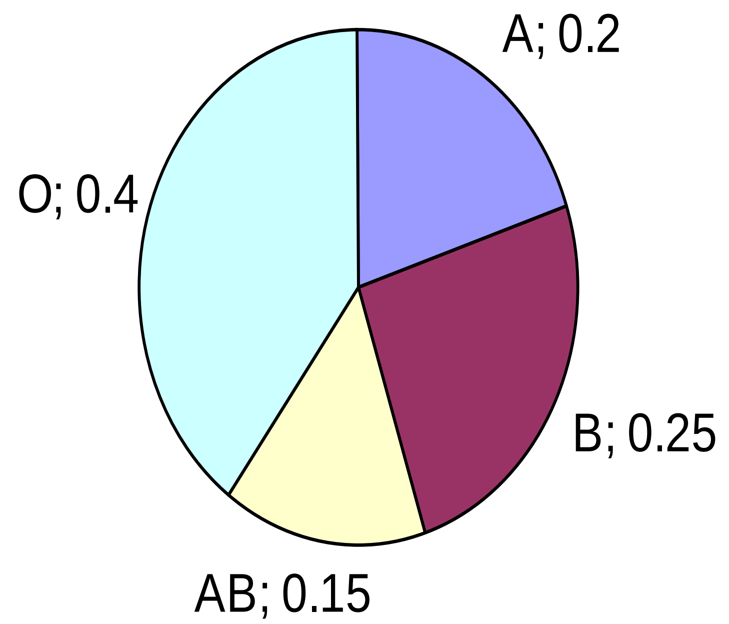


مثال (۸)

برای میزان گروه خونی ۲۰ فرد ورزشکار نمودار دایره ای را رسم کنید.

قطاع دایره	فراوانی نسبی	فراوانی مطلق	گره خونی
72	2/0	4	A
90	25/0	5	B
54	15/0	3	AB
144	4/0	8	O
360	1	20	جمع

ادامه مثال(۸)



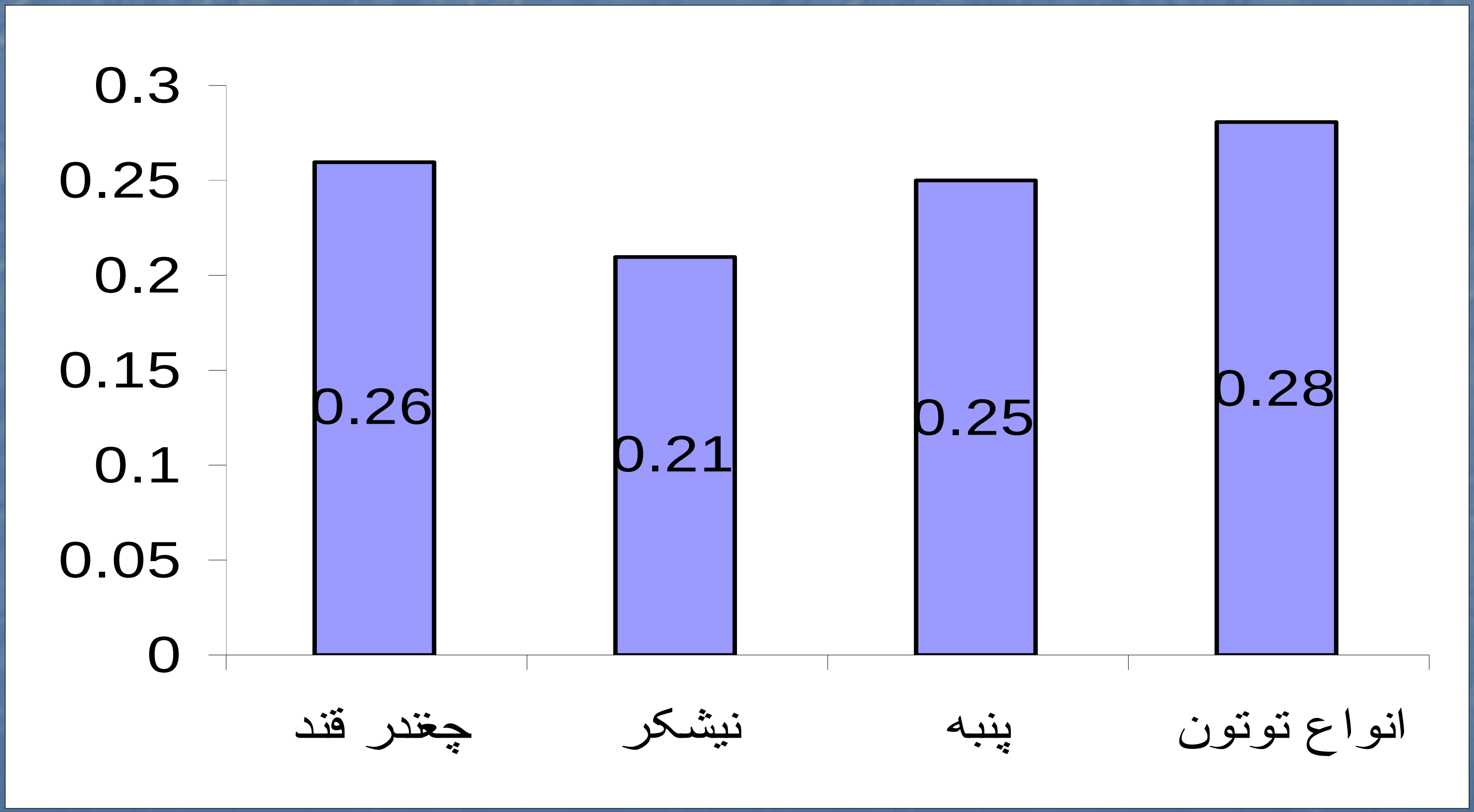
نمودار میله ای

- نمودار میله ای برای داده های رسته ای(کیفی) و داده های کمی گسسته بکار برده می شود.

- روی محور افقی رده ها و روی محور عمودی فراوانی نسبی را تعریف می کنیم.

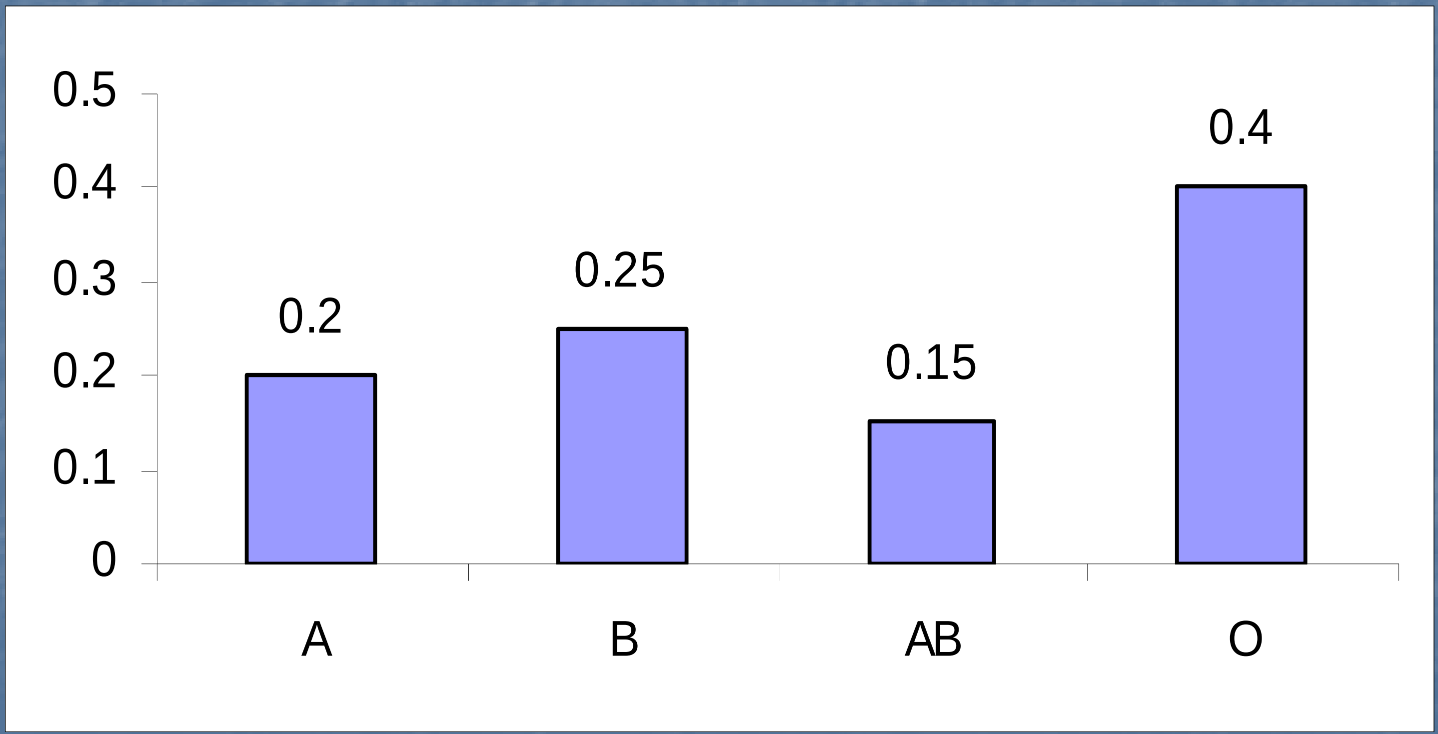
مثال (۹)

نمودار میله ای برای داده های مثال (۷) به صورت زیر است.



مثال (۹)

برای میزان گروه خونی ۲۰ فرد ورزشکار نمودار میله ای را رسم کنید.



فصل سوم

توصیف عددی داده ها

دکتر مجید جاوری، استادیار گروه جغرافیا ی دانشگاه پیام نور

فصل سوم: توصیف عددی داده ها

- هدف کلی:

آشنائی با راههای گوناگون بیان ویژگیهای داده ها به کمک اندازه های گرایش مرکزی و پراکندگی

هدفهای رفتاری

- دلایل نیاز به توصیف هندسی و عددی داده ها
- گرایشهای مرکزی و پراکندگی و تفاوتها و کاربرد آنها
- مشخصه های شکلی در توصیف داده ها

گرایشهای مرکزی

1. میانگین
2. میانه
3. مد(نما)

۱- میانگین

الف) هنگامی که تعداد داده ها معمولی یا کم باشد.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

ب) هنگامی که داده ها به صورت جدول فراوانی مرتب شده باشند.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i m_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$$

مثال (۱)

حجم حاصل از ریزش در دریای خزر در پنج سال آبی با شروع از سال آبی ۱۳۶۸-۱۳۶۹ به قرار زیر بوده است.

۷۶/۷۹ ۸۸/۸۱ ۸۷/۹۱ ۲۳/۶۵ ۹۱/۶۶

میانگین حجم آب از ریزش در این پنج سال چقدر است؟

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=۱}^{n} X_i}{n} = \frac{۷۹/۷۶+۸۱/۸۸+۹۱/۸۷+۶۵/۲۳+۶۶/۹۱}{۵} = ۷۷/۱۳$$

مثال (۲)

نمرات دانش آموزی در دروس جغرافیا، ریاضی، شیمی، زبان فارسی در جدول زیر آمده است. میانگین نمرات این دانش آموز را محاسبه کنید.

جغرافیا	۱۴
ریاضی	۱۲
شیمی	۱۳
زبان فارسی	۱۳

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=۱}^{n} X_i}{n} = \frac{۱۴+۱۲+۱۳+۱۳}{۴} = ۱۳$$

مثال (۳)

برای داده های میزان کیفیت کالاها ، میانگین برابر است با :

حدود رده ها (m_i)	f_i	$f_i m_i$
۱	۶	۶
۲	۹	۱۸
۳	۵	۱۵
جمع	۲۰	۳۹

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i m_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$$

$$= \frac{39}{20} = 1/95$$

مثال (۴)

برای داده های اکسید سولفور، میانگین برابر است با :

حدود رده ها	f_i	m_i	$f_i m_i$
۱۵/۶-۴۵/۱۰	۶	۳/۸	۴۹.۸
۴۵/۱۰-۷۵/۱۴	۱۴	۶/۱۲	۱۷۶.۴
۷۵/۱۴-۰۵/۱۹	۲۰	۹/۱۶	۳۳۸
۰۵/۱۹-۳۵/۲۳	۲۱	۲/۲۱	۴۴۵.۲
۳۵/۲۳-۶۵/۲۷	۱۵	۵/۲۵	۳۸۲.۵
۶۵/۲۷-۱۵/۳۱	۴	۸/۲۹	۱۱۹.۲
جمع	۸۰		۱۵۱۱.۱

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=۱}^{k} f_i m_i}{\sum_{i=۱}^{k} f_i}$$

$$= \frac{۱۵۱۱/۱}{۸۰} = ۱۸/۹$$

میانگین های دیگر

۱) میانگین همساز(هارمونیک یا توافقی)

هنگامی که مشاهدات بر حسب واحد مانند، کیلومتر بر ساعت، لیتر بر ثانیه،... تعریف شوند از میانگین هارمونیک استفاده می شود.

الف) هنگامی که تعداد داده ها معمولی یا کم باشد.

$$\bar{X}_H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$$

ب) هنگامی که داده ها به صورت جدول فراوانی مرتب شده باشد.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i}{\sum_{i=1}^{k} \frac{f_i}{m_i}}$$

میانگین های دیگر

(۲) میانگین هندسی

هنگامی که مشاهدات به صورت، نرخ رشد، نرخ تورم، نسبت،... تعریف شوند از میانگین هندسی استفاده می شود.

الف) هنگامی که تعداد داده ها معمولی یا کم باشد.

$$\bar{X}_G = (x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_n)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_n}$$

ب) هنگامی که داده ها به صورت جدول فراوانی مرتب شده باشند.

$$\bar{X}_G = \sqrt[\sum_{i=1}^{k} f_i]{m_1^{f_1} \times m_2^{f_2} \times \ldots \times m_k^{f_k}}$$

مثال (۵)

راننده ای مسیر ۱۰۰ کیلومتری بین دو شهر را با سرعت ۶۰ کیلومتر بر ساعت رفته و با سرعت ۶۵ کیلومتر بر ساعت برگشته است.

متوسط سرعت رفت و برگشت این راننده را محاسبه کنید؟

$$\bar{X}=\frac{\sum_{i=۱}^{k} f_i}{\sum_{i=۱}^{k} \frac{f_i}{m_i}}=\frac{۱۰۰+۱۰۰}{\frac{۱۰۰}{۶۰}+\frac{۱۰۰}{۶۵}}=۶۲/۴$$

مثال (۶)

نرخ رشد جمعیت در سالهای ۱۳۵۵، ۱۳۶۵، ۱۳۷۵ در ایران به ترتیب ۰۸/۰، ۱۳/۰، ۱۷/۰ می باشد.

متوسط نرخ رشد جمعیت در این سالها چقدر بوده است؟

$$\bar{X}_G = \sqrt[n]{x_۱ \times x_۲ \times \ldots \times x_n} = \sqrt[۳]{۰/۰۸ \times ۰/۱۳ \times ۰/۱۷} = ۰/۱۲$$

روابط بین میانگینها

میانگین حسابی > میانگین هندسی > میانگین هارمونیک

$$\bar{X}_H \prec \bar{X}_G \prec \bar{X}$$

۲- میانه

حالت(۱): هنگامی که تعداد مشاهدات معمولی یا کم است.

الف) تعداد مشاهدات فرد باشد: میانه برابر است با عددی که در وسط مشاهدات قرار می گیرد.

ب) تعداد مشاهدات زوج باشد: میانه برابر است با میانگین دو مشاهده ای که در وسط داده ها قرار می گیرد.

۲- میانه

حالت(۲):هنگامی که مشاهدات به صورت جدول فراوانی مرتب شده باشند.

$$m = L + \frac{\frac{n}{۲} - F_{i-۱}}{f_i} \times C$$

L:حد پایین طبقه ای که میانه در آن قرار می گیرد.

$F_{i-۱}$:فراوانی تجمعی طبقه قبل از طبقه ای که میانه در آن قرار دارد.

f_i:فراونی مطلق طبقه ای که میانه در آن قرار دارد.

مثال (۷)

اعداد زیر حقوق ماهانه اعضای شرکتی را که ۵ عضو دارد نشان می دهد.

۲۱ ۱۹ ۲۴ ۱۸ ۹۸

میانه این اعداد برابر است با:

ابتدا مشاهدات را مرتب می کنیم، ۱۸ ۱۹ ۲۱ ۲۴ ۹۸

تعداد مشاهدات فرد می باشد( )، پس:

$$n = ۵$$

$$\Rightarrow m = ۲۱$$

مثال (۸)

نمرات دانش آموزی در دروس جغرافیا، ریاضی، شیمی، زبان فارسی در جدول زیر آمده است. میانه نمرات این دانش آموز را محاسبه کنید.

جغرافیا	۱۴
ریاضی	۱۲
شیمی	۱۳
زبان فارسی	۱۳

ابتدا مشاهدات را مرتب می کنیم،

۱۲ ۱۳ ۱۳ ۱۴

تعداد مشاهدات فرد می باشد($n=۴$)، پس:

$$\Rightarrow m = \frac{۱۳ + ۱۳}{۲} = ۱۳$$

مثال (۹)

جمعیت شهرهای یک استان را به نزدیکترین ده هزار گرد و حاصل را بر ده هزار تقسیم کرده ایم. اعداد زیر حاصل شده اند.

۷ ۱۲۰ ۵/۴ ۶۱ ۸/۷ ۲/۳ ۳۶ ۸۱ ۳ ۵/۲

میانه این اعداد را بدست آورید؟

ابتدا مشاهدات را مرتب می کنیم،

۵/۲ ۳ ۲/۳ ۵/۴ ۸/۷ ۴۶ ۶۱ ۸۱ ۱۲۰

تعداد مشاهدات فرد می باشد($n = ۱۰$)، پس:

$$\Rightarrow m = \frac{۷ + ۷/۸}{۲} = ۷/۴$$

مثال (۱۰)

برای داده های میزان کیفیت کالاها ، میانه برابر است با :

فراوانی نسبی تجمعی	فراوانی تجمعی	فراوانی مطلق	حدود رده ها
۳/۰	۶	۶	۱
۷۵/۰	۱۵	۹	۲
۱	۲۰	۵	۳
-	-	۲۰	جمع

$$\Rightarrow m = ۲$$

مثال (۱۱)

برای داده های اکسید سولفور میانه را بدست آورید؟

حدود رده ها	فراوانی مطلق	فراوانی تجمعی	فروانی نسبی تجمعی
۱۵/۶–۴۵/۱۰	۶	۶	۰۷۵/۰
۴۵/۱۰–۷۵/۱۴	۱۴	۲۰	۲۵۰/۰
۷۵/۱۴–۰۵/۱۹	۲۰	۴۰	۵۰/۰
۰۵/۱۹–۳۵/۲۳	۲۱	۶۱	۷۲۵/۰
۳۵/۲۳–۶۵/۲۷	۱۵	۷۶	۹۵/۰
۶۵/۲۷–۱۵/۳۱	۴	۸۰	۱
جمع	۸۰	-	-

$$m = L + \frac{\frac{n}{۲} - F_{i-۱}}{f_i} \times C$$

$$= ۱۴/۷۵ + \frac{۴۰ - ۲۰}{۲۰} \times ۴/۳ = ۱۹/۰۵$$

چارکها

حالت(۱): هنگامی که تعداد مشاهدات معمولی باشد:

$$Q_a = x_{(\frac{a\times n}{۴})}, a = ۱,۲,۳$$

(۱) چارک اول ($Q_۱$)

(۲) چارک دوم ($Q_۲$)

(۳) چارک سوم ($Q_۳$)

چارکها

حالت(۲):هنگامی که مشاهدات به صورت جدول فراوانی مرتب شده باشند.

$$Q_a = L + \frac{\frac{a \times n}{۲} - F_{i-۱}}{f_i} \times C$$

L: حد پایین طبقه ای که چارک a ام در آن قرار می گیرد.

$F_{i-۱}$: فراوانی تجمعی طبقه قبل از طبقه ای که چارک a ام در آن قرار دارد.

f_i: فراوانی مطلق طبقه ای که چارک a ام در آن قرار دارد.

مثال (۱۲)

داده های زیر متوسط رشد سالانه (در هزار) جمعیت ایران را در دوره های ۱۲ساله نشان می دهد. چارک اول و دوم و سوم داده ها را محاسبه کنید.

۶ ۱۴ ۱۴ ۶ ۲۰ ۱۴ ۶ ۲۸ ۲۹ ۲۹ ۶ ۲۶

حل: ابتدا مشاهدات را مرتب می کنیم:

۲۹ ۲۹ ۲۸ ۲۶ ۲۰ ۱۴ ۱۴ ۱۴ ۶ ۶ ۶ ۶

$$Q_{۱} = x_{(\frac{۱\times ۱۲}{۴})} = x_{(۳)} = ۶$$

$$Q_{۳} = x_{(\frac{۳\times ۱۲}{۴})} = x_{(۹)} = ۲۶$$

$$Q_{۲} = x_{(\frac{۲\times ۱۲}{۴})} = x_{(۶)} = ۱۴$$

مثال (۱۳)

داده های زیر سن ۱۰۰ دانشجو را نشان می دهد. چارک اول و دوم و سوم را بدست آورید؟

موقعیت چارکها	فروانی نسبی تجمعی	فراوانی تجمعی	فراوانی مطلق	حدود رده ها
	۱۵/۰	۱۵	۱۵	۲۱
۲۲= چارک اول	۳۰/۰	۳۰	۱۵	۲۲
۲۳= چارک دوم	۶۰/۰	۶۰	۳۰	۲۳
	۶۵/۰	۶۵	۵	۲۴
۲۵= چارک سوم	۹۰/۰	۹۰	۲۵	۲۵
	۱	۱۰	۱۰	۲۶
	-	-	۱۰۰	جمع

مثال (۱۴)

برای داده های اکسید سولفور چارک اول و دوم و سوم را بدست آورید؟

موقعیت چارکها	فروانی نسبی تجمعی	فراوانی تجمعی	فراوانی مطلق	حدود رده ها
	۰۷۵/۰	۶	۶	۱۵/۶–۴۵/۱۰
چارک اول	۲۵۰/۰	۲۰	۱۴	۴۵/۱۰–۷۵/۱۴
چارک دوم	۵۰/۰	۴۰	۲۰	۷۵/۱۴–۰۵/۱۹
چارک سوم	۷۶۲۵/۰	۶۱	۲۱	۰۵/۱۹–۳۵/۲۳
	۹۵/۰	۷۶	۱۵	۳۵/۲۳–۶۵/۲۷
	۱	۸۰	۴	۶۵/۲۷–۱۵/۳۱
	-	-	۸۰	جمع

ادامه مثال (۱۴)

$$Q_{۱} = ۱۰/۴۵ + \frac{\frac{۱\times ۸۰}{۴} - ۶}{۱۴} \times ۴/۳ = ۱۴/۷۵$$

$$Q_{۱} = ۱۴/۷۵ + \frac{\frac{۲\times ۸۰}{۴} - ۲۰}{۲۰} \times ۴/۳ = ۱۹/۰۵$$

$$Q_{۱} = ۱۹/۰۵ + \frac{\frac{۳\times ۸۰}{۴} - ۴۰}{۲۱} \times ۴/۳ = ۲۳/۱۵$$

۳- مد

داده ای که بیشترین فراوانی یا تکرار را داشته باشد مد نامیده می شود.

-- هنگامی که مشاهدات به صورت جدول فراوانی مرتب شده باشند.
مد عبارتست از:

$$M = L + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \times C$$

مثال (۱۵)

نمرات دانش آموزی در دروس جغرافیا، ریاضی، شیمی، زبان فارسی در جدول زیر آمده است. مد نمرات این دانش آموز را محاسبه کنید.

جغرافیا	۱۴
ریاضی	۱۲
شیمی	۱۳
زبان فارسی	۱۳

$$\Rightarrow M = ۱۳$$

مثال (۱۶)

نمره نهائی ۲۰ دانشجو در درس ریاضیات پایه و مقدمات آمار به شرح زیر است. مد این داده را بدست آورید؟

۳ ۵/۱۶ ۱۲ ۷ ۵/۵ ۱۴ ۹ ۸ ۱۲ ۱۲ ۵/۷

۵ ۱۴ ۱۲ ۱۲ ۱۵ ۱۱ ۵/۱۴ ۱۲ ۵/۸ ۱۷ ۷

$$\Rightarrow M = ۱۲$$

مثال (۱۷)

یک کارشناس محیط زیست داده های زیر از میزان آلودگی آب نهری (بر حسب یک میلیونم واحد) را با انتخاب نمونه هایی در ۱۰ مکان مختلف در امتداد نهر به دست آورده است. مد این داده ها را محاسبه کنید.

۰۶۲/۰ ۰۷۱/۰ ۰۶۷/۰ ۰۶۸/۰ ۰۶۶/۰ ۰۶۸/۰ ۰۶۷/۰ ۰۶۰/۰ ۰۶۵/۰

$$\Rightarrow M = ۰/۰۶۷ , ۰/۰۶۸$$

مثال (۱۸)

برای داده های میزان کیفیت کالاها ، مد برابر است با :

فراوانی مطلق	حدود رده ها
۶	۱
۹	۲
۵	۳
۲۰	جمع

$$\Rightarrow M = ۲$$

مثال (۱۹)

گروه خونی ۲۰ فرد ورزشکار را به صورت زیر جمع آوری کرده ایم.
مد این داده ها برابر است:

$$B\ ,\ A\ ,\ AB\ \ ,\ B\ ,\ O\ \ ,\ O\ \ ,\ AB\ \ ,\ O\ ,\ O\ ,\ O$$

$$AB\ \ ,\ B\ ,\ B\ ,\ A\ ,\ B\ ,\ A\ ,\ O\ \ ,\ O\ \ ,\ O\ \ ,\ A$$

ادامه مثال (۲۰)

گروه خونی	فراوانی مطلق
A	۴
B	۵
AB	۳
O	۸
جمع	۲۰

$$\Rightarrow M = O$$

مثال (۲۱)

برای داده های اکسید سولفور مد را بدست آورید؟

فراوانی مطلق	حدود رده ها
۶	۱۵/۶–۴۵/۱۰
۱۴	۴۵/۱۰–۷۵/۱۴
۲۰	۷۵/۱۴–۰۵/۱۹
۲۱	۰۵/۱۹–۳۵/۲۳
۱۵	۳۵/۲۳–۶۵/۲۷
۴	۶۵/۲۷–۱۵/۳۱
۸۰	جمع

$$d_{۱} = ۲۱ - ۲۰ = ۱$$

$$d_{۲} = ۲۱ - ۱۵ = ۶$$

$$M = L + \frac{d_{۱}}{d_{۱} + d_{۲}} \times C$$

$$= ۱۹/۰۵ + \frac{۱}{۱ + ۶} \times ۴/۳ = ۱۹/۶۶$$

کاربردها و مزیتهای گرایشهای مرکزی

1. میانگین
2. میانه
3. مد(نما)

گرایشهای پراکندگی

1. دامنه تغییرات
2. انحراف از میانگین
3. واریانس
4. انحراف معیار

تعریف و محاسبه گرایشهای پراکندگی

(۱) دامنه تغییرات:

$R =$ کوچکترین مشاهده - بزرگترین مشاهده

مثال (۲۲)

نمرات دانش آموزی در دروس جغرافیا، ریاضی، شیمی، زبان فارسی در جدول زیر آمده است. دامنه تغییرات این نمرات را محاسبه کنید.

جغرافیا	۱۴
ریاضی	۱۲
شیمی	۱۳
زبان فارسی	۱۳

$$R = ۱۴ - ۱۲ = ۲$$

مثال (۲۳)

یک کارشناس محیط زیست داده های زیر از میزان آلودگی آب نهری (بر حسب یک میلیونم واحد) را با انتخاب نمونه هایی در ۱۰ مکان مختلف در امتداد نهر به دست آورده است. دامنه تغییرات این داده ها را محاسبه کنید.

۰۶۵/۰ ۰۶۰/۰ ۰۶۷/۰ ۰۶۸/۰ ۰۶۶/۰ ۰۶۸/۰ ۰۶۷/۰ ۰۷۱/۰ ۰۶۲/۰

$$R = ۰/۰۷۱ - ۰/۰۶۰ = ۰/۰۱۱$$

تعریف و محاسبه گرایشهای پراکندگی

(۲) انحراف از میانگین:

$$A.D. = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\left|x_i - \bar{x}\right|$$

مثال(۲۴)

نمرات دانش آموزی در دروس جغرافیا، ریاضی، شیمی، زبان فارسی در جدول زیر آمده است. انحراف از میانگین این نمرات را محاسبه کنید.

جغرافیا	۱۴
ریاضی	۱۲
شیمی	۱۳
زبان فارسی	۱۳

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=۱}^{n} x_i}{n} = \frac{۱۴+۱۲+۱۳+۱۳}{۴} = ۱۳$$

$$A.D. = \frac{۱}{n} \sum_{i=۱}^{n} \left| x_i - \bar{x} \right|$$

$$= \frac{۱}{۴} \left(|۱۴ - ۱۳| + |۱۲ - ۱۳| + |۱۳ - ۱۳| + |۱۳ - ۱۳| \right)$$

$$= ۰/۵$$

تعریف و محاسبه گرایشهای پراکندگی

(۳) واریانس:

حالت اول: تعداد مشاهدات معمولی باشد.

$$s^{۲} = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^{۲}$$

حالت دوم: مشاهدات به صورت جدول فراوانی مرتب شده باشند.

$$s^{۲} = \frac{۱}{\sum_{i=۱}^{k} f_i}\sum_{i=۱}^{k} f_i\left(x_i - \overline{x}\right)^{۲}$$

مثال (۲۵)

نمرات دانش آموزی در دروس جغرافیا، ریاضی، شیمی، زبان فارسی در جدول زیر آمده است. واریانس این نمرات را محاسبه کنید.

جغرافیا	۱۴
ریاضی	۱۲
شیمی	۱۳
زبان فارسی	۱۳

$$s^{۲} = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^{۲}$$

$$= \frac{۱}{۴}\left((۱۴-۱۳)^{۲} + (۱۲-۱۳)^{۲} + (۱۳-۱۳)^{۲} + (۱۳-۱۳)^{۲}\right) = ۰/۵$$

مثال(۲۶)

برای داده های اکسید سولفور واریانس را بدست آورید؟

حدود رده ها	f_i	m_i	$f_i m_i$	$(m_i - \bar{x})^۲$	$f_i(m_i - \bar{x})^۲$
۱۵/۶-۴۵/۱۰	۶	۳/۸	۸/۴۹	۳۶/۱۱۲	۱۶/۶۷۴
۴۵/۱۰-۷۵/۱۴	۱۴	۶/۱۲	۴/۱۷۶	۶۹/۳۹	۶۶/۵۵۵
۷۵/۱۴-۰۵/۱۹	۲۰	۹/۱۶	۳۳۸	۴	۸۰
۰۵/۱۹-۳۵/۲۳	۲۱	۲/۲۱	۲/۴۴۵	۲۹/۵	۰۹/۱۱۱
۳۵/۲۳-۶۵/۲۷	۱۵	۵/۲۵	۵/۳۸۲	۸۹/۴۴	۳۵/۶۷۳
۶۵/۲۷-۱۵/۳۱	۴	۸/۲۹	۲/۱۱۹	۸۴/۱۱۸	۲۴/۴۷۵
جمع	۸۰	-	1511/1		5/2569

ادامه مثال(۲۶)

$$\overline{X}=\frac{\sum_{i=۱}^{k} f_i m_i}{\sum_{i=۱}^{k} f_i}=\frac{۱۵۱۱/۱}{۸۰}=۱۸/۹$$

$$s^{۲}=\frac{۱}{\sum_{i=۱}^{k} f_i}\sum_{i=۱}^{k} f_i\left(x_i-\overline{x}\right)^{۲}=\frac{۲۵۶۹/۵}{۸۰}=۳۲/۱۲$$

دانشگاه پیام نور

مثال (۲۷)

برای داده های میزان کیفیت کالاها ، واریانس برابر است با :

m_i حدود رده ها	f_i	$f_i m_i$	$(m_i - \bar{x})^۲$	$f_i(m_i - \bar{x})^۲$
۱	۶	۶	۹۰۲۵/۰	۴۱۵/۵
۲	۹	۱۸	۰۰۲۵/۰	۰۲۲۵/۰
۳	۵	۱۵	۱۰۲۵/۱	۵۱۲۵/۵
جمع	۲۰	۳۹	–	۹۵/۱۰

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=۱}^{k} f_i m_i}{\sum_{i=۱}^{k} f_i} = \frac{۳۹}{۲۰} = ۱/۹۵$$

$$s^۲ = \frac{۱}{\sum_{i=۱}^{k} f_i} \sum_{i=۱}^{k} f_i (x_i - \bar{x})^۲ = \frac{۱۰/۹۵}{۲۰} = ۰/۵۴۷۵$$

دکتر مجید جاوری، استادیار گروه جغرافیا ی دانشگاه پیام نور

تعریف و محاسبه گرایشهای پراکندگی

(۴) انحراف معیار:

$$s = \sqrt{s^{۲}}$$

مثال(۲۸)

نمرات دانش آموزی در دروس جغرافیا، ریاضی، شیمی، زبان فارسی در جدول زیر آمده است. انحراف معیار این نمرات را محاسبه کنید.

۱۴	جغرافیا
۱۲	ریاضی
۱۳	شیمی
۱۳	زبان فارسی

$$S^{۲} = ۰/۵$$

$$S = \sqrt{S^{۲}} = \sqrt{۰/۵} = ۰/۷۰۷$$

مثال(۲۹)

برای داده های اکسید سولفور انحراف معیار را بدست آورید؟

$$s^۲ = ۳۲/۱۲$$

$$s = \sqrt{s^۲} = \sqrt{۳۲/۱۲} = ۵/۶۶۷$$

مثال (۳۰)

برای داده های میزان کیفیت کالاها ، انحراف معیار برابر است با :

$$s^{۲} = ۰/۵۴۷۵$$

$$s = \sqrt{s^{۲}} = \sqrt{۰/۵۴۷۵} = ۰/۷۳۹۹$$

کاربردها و مزیتهای گرایشهای پراکندگی

1. دامنه تغییرات
2. واریانس
3. انحراف معیار

گرایشهای دیگر پراکندگی

- برد میان چارکی :

$$Q_{۳} - Q_{۱}$$

- نیم برد چارکی:

$$\frac{Q_{۳} - Q_{۱}}{۲}$$

- ضریب تغییر چارکی:

$$\frac{Q_{۳} - Q_{۱}}{Q_{۳} + Q_{۱}} \times ۱۰۰$$

مثال (۳۱)

داده های زیر متوسط رشد سالانه (در هزار) جمعیت ایران را در دوره های ۱۲ساله نشان می دهد. برد میان چارکی و نیم برد چارکی و ضریب تغییر چارکی را محاسبه کنید.

۲۶ ۶ ۲۹ ۲۹ ۲۸ ۶ ۱۴ ۲۰ ۶ ۱۴ ۱۴ ۶

حل: بعد از مرتب کردن مشاهدات:

$Q_{۱} = ۶$ $\qquad Q_{۳} = ۲۶$

$$Q_{۳} - Q_{۱} = ۲۶ - ۶ = ۲۰ \qquad \frac{Q_{۳} - Q_{۱}}{۲} = \frac{۲۶ - ۶}{۲} = ۱۰$$

$$\frac{Q_{۳} - Q_{۱}}{Q_{۳} + Q_{۱}} \times ۱۰۰ = \frac{۲۶ - ۶}{۲۶ + ۶} \times ۱۰۰ = ۶۲/۵$$

مثال (۳۲)

برای داده های سن ۱۰۰ دانشجو برد میان چارکی و نیم برد چارکی و ضریب تغییر چارکی را بدست آورید؟

$$Q_{۱} = ۲۲ \qquad Q_{۳} = ۲۵$$

$$Q_{۳} - Q_{۱} = ۲۵ - ۲۲ = ۳$$

$$\frac{Q_{۳} - Q_{۱}}{۲} = \frac{۲۵ - ۲۲}{۲} = ۱/۵$$

$$\frac{Q_{۳} - Q_{۱}}{Q_{۳} + Q_{۱}} \times ۱۰۰ = \frac{۲۵ - ۲۲}{۲۵ + ۲۲} \times ۱۰۰ = ۶/۳۸$$

مثال (۳۳)

برای داده های اکسید سولفور برد میان چارکی و نیم برد چارکی و ضریب تغییر چارکی را بدست آورید؟

$Q_{۱} = ۱۴/۷۵ \quad Q_{۳} = ۲۳/۱۵$

$$Q_{۳} - Q_{۱} = ۲۳/۱۵ - ۱۴/۷۵ = ۸/۴$$

$$\frac{Q_{۳} - Q_{۱}}{۲} = \frac{۲۳/۱۵ - ۱۴/۷۵}{۲} = ۴/۲$$

$$\frac{Q_{۳} - Q_{۱}}{Q_{۳} + Q_{۱}} \times ۱۰۰ = \frac{۲۳/۱۵ - ۱۴/۷۵}{۲۳/۱۵ + ۱۴/۷۵} \times ۱۰۰ = ۲۲/۱۶$$

ضریب چولگی

- رابطه پیرسن:

$$\bar{X} - M = ۳(\bar{X} - m)$$

- ضریب چولگی پیرسن:

$$s.k. = \frac{۳(\bar{X} - m)}{s} = \frac{\bar{X} - M}{S}$$

مثال(۳۳)

برای داده های میزان کیفیت کالاها، ضریب چولگی را بدست آورید؟

$$\overline{X} = ۱/۹۵$$

$$s = ۰/۷۳۹۹$$

$$m = ۲$$

$$\Rightarrow \quad s.k. = \frac{۳\left(\overline{X} - m\right)}{s} = \frac{۳\left(۱/۹۵ - ۲\right)}{۰/۷۳۹۹} = -۰/۲۰۳$$

مثال(۳۴)

نمرات دانش آموزی در دروس جغرافیا، ریاضی، شیمی، زبان فارسی در جدول زیر آمده است. ضریب چولگی این نمرات را محاسبه کنید.

جغرافیا	۱۴
ریاضی	۱۲
شیمی	۱۳
زبان فارسی	۱۳

$$\bar{X} = ۱۳$$

$$s = ۰/۷۰۷$$

$$m = ۱۳$$

$$\Rightarrow s.k. = \frac{۳\left(\bar{X} - m\right)}{s} = \frac{۳\left(۱۳ - ۱۳\right)}{۰/۷۰۷} = ۰$$

مثال(۳۵)

برای داده های اکسید سولفور ضریب چولگی را بدست آورید؟

$$\bar{X} = ۱۸/۹$$

$$s = ۵/۶۷$$

$$m = ۱۹/۰۵$$

$$\Rightarrow \quad s.k. = \frac{۳\left(\bar{X} - m\right)}{s} = \frac{۳\left(۱۸/۹ - ۱۹/۰۵\right)}{۵/۶۷} = -۰/۰۷۹$$

دانشگاه پیام نور

فصل چهارم

احتمال

دکتر مجید جاوری، استادیار گروه جغرافیا ی دانشگاه پیام نور

فصل چهارم: احتمال

- هدف کلی:

آشنائی مقدماتی با نظریه احتمال و روشهای شمارش

هدفهای رفتاری

آشنائی با مفاهیم :

- فضای نمونه و پیشامد
- احتمال و اصول آن
- روشهای شمارش

مفاهیم اولیه

1. آزمایش تصادفی
2. فضای نمونه (S)
3. پیشامد (E)

مثال (۱)

آزمایش تصادفی	فضای نمونه
پرتاب یک سکه	{ خ ، ش }
پرتاب دو سکه	{خ خ ، ش خ ،خ ش ، ش ش}
پرتاب سه سکه	{خ خ خ ، ش خ خ ، خ ش خ ، ش خ خ ، ش ش خ ، ش خ ش ، خ ش ش ، ش ش ش}
۲^n	تعداد عضوهای پرتاب n سکه

مثال (۲)

آزمایش تصادفی	فضای نمونه
پرتاب یک تاس	{۱،۲،۳،۴،۵،۶}
پرتاب دو تاس	{(۱و۱)،(۱و۲)،(۱و۳)،(۱و۴)،(۱و۵)،(۱و۶) ،(۲و۱)،...،(۲و۶)،...،(۶و۱)،...،(۶و۶) }
۶^n	تعداد عضوهای پرتاب n تاس

تعریف احتمال

احتمال یک پیشامد عبارتست از تعداد عضوهای آن پیشامد بروی تعداد عضوهای فضای نمونه.

به عبارتی:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

مثال (۳)

در پرتاب دو سکه، احتمال اینکه یک بار شیر ظاهر شود، چقدر است؟

$S=$ {خ خ ، ش خ، خ ش ، ش ش}

$E=$ {ش خ، خ ش}

$$\Rightarrow P(E)=\frac{n(E)}{n(S)}=\frac{۲}{۴}=۰/۵$$

مثال (۴)

در پرتاب دو سکه، احتمال اینکه حداقل یک بار شیر ظاهر شود، چقدر است؟

$S=$ {خ خ ، ش خ ،خ ش ، ش ش}

$E=$ {ش خ ،خ ش ، ش ش}

$$\Rightarrow \quad P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{۳}{۴} = ۰/۷۵$$

دکتر مجید جاوری، استادیار گروه جغرافیا ی دانشگاه پیام نور

مثال (۵)

در پرتاب سه سکه، احتمال اینکه دو بار شیر ظاهر شود، چقدر است؟

$S=$ {خ خ خ ،خ خ ش ،خ ش خ ، ش خ خ، ش ش خ ، ش خ ش ،خ ش ش ، ش ش ش}

$E=$ {ش ش خ ، ش خ ش ،خ ش ش }

$$\Rightarrow \quad P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{۳}{۸} = ۰/۳۷۵$$

مثال (۶)

در پرتاب یک تاس، احتمال اینکه عدد ظاهر شده فرد باشد، چقدر است؟

$$S = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$$

$$E = \{۱,۳,۵\}$$

$$\Rightarrow P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{۳}{۶} = ۰/۵$$

مثال (۷)

در پرتاب دو تاس، احتمال اینکه مجموع دو عدد ظاهر شده ۹ باشد، چقدر است؟

S= {(۱و۱)،(۱و۲)،(۱و۳)،(۱و۴)،(۱و۵)،(۱و۶)،(۲و۱)،....،(۲و۶)،....،(۶و۱)،....،(۶و۶)}

E= {(۳و۶)،(۴و۵)،(۵و۴)،(۶و۳)}

$$\Rightarrow \quad P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{۴}{۳۶} = ۰/۱۱$$

اصول احتمال

اصل (۱): اگر (E) پیشامدی از فضای نمونه (S) باشد، آنگاه:

$$\cdot \leq P(E) \leq ۱$$

اصل (۲): $P(\Phi) = \cdot, P(S) = ۱$

یا به عبارتی، اگر $E_۱, E_۲, \ldots, E_k$ پیشامدهای از فضای نمونه (S) باشد، آنگاه:

$$\sum_{i=۱}^{k} P(E_i) = ۱$$

دکتر مجید جاوری، استادیار گروه جغرافیا ی دانشگاه پیام نور

تعاریف

- متمم احتمال E برابر است با :

$$P(E')=۱-P(E)$$

- $E_۱, E_۲$ دو پیشامد مستقل اند، اگر:

$$P(E_۱ \cap E_۲)=P(E_۱)\times P(E_۲)$$

- $E_۱, E_۲$ دو پیشامد ناسازگاراند، اگر:

$$P(E_۱ \cap E_۲)=۰$$

مثال (۸)

در پرتاب یک تاس، احتمال اینکه عدد ظاهر شده کمتر از ۳ نباشد، چقدر است؟

$$S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$$

$$E=\{۱,۲\}\quad\Rightarrow P(E)=\frac{n(E)}{n(S)}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow P(E')=۱-P(E)=۱-\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۳}$$

مثال (۹)

یک تاس سالم دو بار پرتاب می شود. مطلوبست احتمال اینکه مجموع شماره هایی که در دو بار پرتاب ظاهر می شوند، کمتر از ۵ و بیشتر از ۱۰ باشد.

$$S=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۱,۵),(۱,۶),(۲,۱),\ldots,(۲,۲),(۳,۱),\ldots,(۶,۶)\}$$

$$E_۱=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۲,۱),(۲,۲),(۳,۱)\}\Rightarrow P(E_۱)=\frac{۶}{۳۶}$$

$$E_۲=\{(۵,۶),(۶,۵),(۶,۶)\}\Rightarrow P(E_۲)=\frac{۳}{۳۶}$$

$$E_۱\bigcap E_۲=\{\phi\}\Rightarrow P\left(E_۱\cap E_۲\right)=۰$$

ناسازگارند

دکتر مجید جاوری، استادیار گروه جغرافیا ی دانشگاه پیام نور

قضیه

- اگر $E_{۱}, E_{۲}$ دو پیشامد مستقل باشند، آنگاه:

1. $E_{۱}^{'}, E_{۲}$ دو پیشامد مستقل اند.
2. $E_{۱}, E_{۲}^{'}$ دو پیشامد مستقل اند.
3. $E_{۱}^{'}, E_{۲}^{'}$ دو پیشامد مستقل اند

دانشگاه پیام نور

قواعد احتمال

- جمع احتمال

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

- احتمال شرطی

$$P\langle E_1 | E_2 \rangle = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)}$$

- ضرب احتمال

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_2) \times P\langle E_1 | E_2 \rangle$$

مثال (۱۰)

یک تاس سالم دو بار پرتاب می شود. مطلوبست احتمال اینکه مجموع شماره هایی که در دو بار پرتاب ظاهر می شوند، کمتر از ۵ یا بیشتر از ۱۰ باشد.

$$S=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۱,۵),(۱,۶),(۲,۱),\ldots,(۲,۲),(۳,۱),\ldots,(۶,۶)\}$$

$$E_{۱}=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۲,۱),(۲,۲),(۳,۱)\}\Rightarrow P(E_{۱})=\frac{۶}{۳۶}$$

$$E_{۲}=\{(۵,۶),(۶,۵),(۶,۶)\}\Rightarrow P(E_{۲})=\frac{۳}{۳۶}$$

$$P(E_{۱}\cup E_{۲})=P(E_{۱})+P(E_{۲})-P(E_{۱}\cap E_{۲})=\frac{۶}{۳۶}+\frac{۳}{۳۶}+۰=\frac{۹}{۳۶}=۰/۲۵$$

$$E_{۱}\bigcap E_{۲}=\{\phi\}\Rightarrow P(E_{۱}\cap E_{۲})=۰$$

مثال (۱۱)

تاس سالمی را پرتاب می کنیم. اگر بدانیم عدد ظاهر شده فرد می باشد، احتمال اینکه عدد ظاهر شده کمتر از ۴ باشد، چقدر است؟

$$S = \{۱و۲و۳و۴و۵و۶\}$$

$$E_۱ = \{۱و۳و۵\} \Rightarrow P(E_۱) = \frac{۱}{۲}$$

$$E_۲ = \{۱و۲و۳\}$$

$$E_۱ \cap E_۲ = \{۱,۳\} \Rightarrow P(E_۱ \cap E_۲) = \frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow P\langle E_۱ \mid E_۲ \rangle = \frac{P(E_۱ \cap E_۲)}{P(E_۲)} = \frac{\frac{۱}{۳}}{\frac{۱}{۲}} = \frac{۲}{۳}$$

روشهای شمارش

- جایگشت n شیء متمایز برابر است با:

$$n! = n \times (n-۱) \times \ldots \times ۳ \times ۲ \times ۱$$

- جایگشت r از n شیء متمایز برابر است با:

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

- جایگشت r از n شیء نامتمایز برابر است با:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال (۱۲)

تعداد جایگشتهای که می توان با حروف $a\ ,\ b\ ,\ c\ ,\ d\ \ ,\ e$ ساخت؟

$$۵! = ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۱۲۰$$

مثال(۱۳)

چند عدد دو رقمی وجود دارد؟

$$۹ \times ۱۰ = ۹۰$$

مثال(۱۴)

چند کلمه سه حرفی با حروف a, b, c, d, e می توان ساخت؟

$$۵ \times ۵ \times ۵ = ۱۲۵$$

مثال(۱۵)

از بین ۷ عضو هیات مدیره شرکتی به چند طریق می توان یک نفر مدیر عامل، یک نفر خزانه دار، یک نفر منشی انتخاب کرد؟

$$_{۷}P_{۳} = \frac{۷!}{(۷-۳)!} = ۷ \times ۶ \times ۵ = ۲۱۰$$

مثال(۱۶)

از ۷ کتاب ریاضی به چند طریق می توان ۳ کتاب انتخاب کرد؟

$$\binom{۷}{۳} = \frac{۷!}{۳!(۷-۳)!} = ۳۵$$

مثال(۱۷)

به چند طریق ۳ دانشجوی سال اول و ۴ دانشجوی سال دوم می توانند بر روی ۷ صندلی در یک ردیف کنار هم قرار گیرند.؟

$$\frac{۷!}{۳!۴!} = ۳۵$$

فصل پنجم

توزیعهای احتمال

دکتر مجید جاوری، استادیار گروه جغرافیا ی دانشگاه پیام نور

فصل پنجم: توزیعهای احتمال

- هدف کلی:

آشنائی با مفهوم متغیرهای تصادفی و توزیع احتمال آنها

دکتر مجید جاوری، استادیار گروه جغرافیا ی دانشگاه پیام نور

هدفهای رفتاری

آشنائی با مفاهیم :

- متغیرهای تصادفی گسسته و پیوسته
- تابع چگالی متغیر تصادفی
- امید ریاضی و واریانس متغیر تصادفی
- توزیع نمونه
- توزیع احتمال

متغیر تصادفی

تابعی از فضای نمونه را به مجموعه اعداد حقیقی، متغیر تصادفی می نامند (X).

1. متغیر تصادفی گسسته
2. متغیر تصادفی پیوسته

تابع احتمال متغیر تصادفی

هر متغیر تصادفی X دارای یک تابع احتمال است که در اصول زیر صدق می کند:

$$\forall x; ۰ \leq f(x) \leq ۱ \qquad (۱)$$

$$\forall x; \sum_{x} f(x) = ۱ \qquad (۲)$$

مثال (۱)

در پرتاب یک سکه، فرض کنید متغیر تصادفی X تعداد شیرهای ظاهر شده باشد. در این صورت:

$S=\{$ش ، خ$\}$

$X = $ ۱ ، ۰

فضای نمونه	ش	خ
احتمال	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$

X	۰	۱
$f(x)$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$

مثال (۲)

در پرتاب دو سکه، فرض کنید متغیر تصادفی X تعداد شیرهای ظاهر شده باشد. در این صورت:

$S =$ { ش ش ، ش خ، خ ش ، خ خ}

X = ۲ ،۱ ،۱ ،۰

فضای نمونه	ش ش	خ ش	ش خ	خ خ
احتمال	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$

X	۰	۱	۲
$f(x)$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۲}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$

دکتر مجید جاوری، استادیار گروه جغرافیا ی دانشگاه پیام نور

مثال (۳)

در پرتاب سه سکه، فرض کنید متغیر تصادفی X تعداد شیرهای ظاهر شده باشد. در این صورت:

$S =$ {خ خ خ، خ خ ش، خ ش خ ، ش خ خ، ش ش خ ، ش خ ش، خ ش ش ، ش ش ش}

$$X = ۳ , ۲ , ۲ , ۲ , ۱ , ۱ , ۱ , ۰$$

X	۰	۱	۲	۳
$f(x)$	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۳}{۸}$	$\frac{۳}{۸}$	$\frac{۱}{۸}$

مثال (۴)

در پرتاب یک تاس سالم ، فرض کنید متغیر تصادفی X عدد ظاهر شده باشد. در این صورت:

$$S = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$$

$$X = ۱,۲,۳,۴,۵,۶$$

X	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$f(x)$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$

مثال (۵)

به ازای چه مقداری از c تابع زیر، یک تابع چگالی احتمال است؟

X	۰	۲	۵	۶	۸
$f(x)$	$\frac{۳}{۲۴}$	$\frac{۶}{۲۴}$	c	$\frac{۵}{۲۴}$	$\frac{۷}{۲۴}$

$$\forall x; \sum_{x} f(x) = ۱$$

$$\frac{۳}{۲۴} + \frac{۶}{۲۴} + c + \frac{۵}{۲۴} + \frac{۷}{۲۴} = c + \frac{۲۱}{۲۴} = ۱ \Rightarrow c = \frac{۳}{۲۴}$$

مثال (۶)

به ازای چه مقداری از c تابع زیر، یک تابع چگالی احتمال است؟

$$f(x) = cx\ ,\ x = ۱,۲,۳$$

$$\forall x; \sum_{x} f(x) = ۱$$

$$c \times ۱ + c \times ۲ + c \times ۳ = ۱ \Rightarrow ۶c = ۱ \Rightarrow c = \frac{۱}{۶}$$

امید ریاضی متغیر تصادفی

امید ریاضی :

$$E(X)=\sum_{x} x\times f(x)$$

نتیجه:

برای هر تابعی از متغیر تصادفی مثل $g(x)$ امید ریاضی $g(x)$ عبارت است از:

$$E(g(X))=\sum_{x} g(x)\times f(x)$$

واریانس متغیر تصادفی

واریانس:

$$V(X) = E(X^{2}) - (E(X))^{2}$$

مثال (۷)

در پرتاب یک سکه، فرض کنید متغیر تصادفی X تعداد شیرهای ظاهر شده باشد. در این صورت امید ریاضی و واریانس متغیر تصادفی X بدست آورید؟

X	۰	۱
$f(x)$	۰/۵	۰/۵

$$E(X)=\sum_{x} x\times f(x)=۰\times ۰/۵+۱\times ۰/۵=۰/۵$$

$$E(X^{۲})=\sum_{x} x^{۲}\times f(x)=۰^{۲}\times ۰/۵+۱^{۲}\times ۰/۵+۲^{۲}\times ۰/۲۵=۰/۵$$

$$V(X)=E(X^{۲})-(E(X))^{۲}=۰/۵-۰/۵^{۲}=۰/۲۵$$

دانشگاه پیام نور

مثال (۸)

در پرتاب دو سکه، فرض کنید متغیر تصادفی X تعداد شیرهای ظاهر شده باشد.
در این صورت امید ریاضی و واریانس متغیر تصادفی X بدست آورید؟

X	۰	۱	۲
$f(x)$	۲۵/۰	۵/۰	۲۵/۰

$$E(X)=\sum_{x} x\times f(x)=۰\times ۰/۲۵+۱\times ۰/۵+۲\times ۰/۲۵=۱$$

$$E(X^{۲})=\sum_{x} x^{۲}\times f(x)=۰^{۲}\times ۰/۲۵+۱^{۲}\times ۰/۵+۲^{۲}\times ۰/۲۵=۱/۵$$

$$V(X)=E(X^{۲})-(E(X))^{۲}=۱/۵-۱^{۲}=۰/۵$$

مثال (۹)

در پرتاب یک تاس سالم ، فرض کنید متغیر تصادفی X عدد ظاهر شده باشد. در این صورت امید ریاضی و واریانس متغیر تصادفی X بدست آورید؟

X	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$f(x)$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$

$$E(X) = \sum_{x} x \times f(x)$$

$$= ۱ \times \frac{۱}{۶} + ۲ \times \frac{۱}{۶} + ۳ \times \frac{۱}{۶} + ۴ \times \frac{۱}{۶} + ۵ \times \frac{۱}{۶} + ۶ \times \frac{۱}{۶} = \frac{۲۱}{۶} = ۳/۵$$

ادامه مثال (۹)

$$E(X^{۲}) = \sum_{x} x^{۲} \times f(x)$$

$$= ۱^{۲} \times \frac{۱}{۶} + ۲^{۲} \times \frac{۱}{۶} + ۳^{۲} \times \frac{۱}{۶} + ۴^{۲} \times \frac{۱}{۶} + ۵^{۲} \times \frac{۱}{۶} + ۶^{۲} \times \frac{۱}{۶} = \frac{۹۱}{۶} = ۱۵/۱$$

$$V(X) = E(X^{۲}) - (E(X))^{۲} = ۱۵/۱ - ۳/۵^{۲} = ۲/۸۵$$

فصل ششم

چند توزیع احتمال خاص

دکتر مجید جاوری، استادیار گروه جغرافیا ی دانشگاه پیام نور

فصل ششم: چند توزیع احتمال خاص

- هدف کلی:

آشنائی با چند توزیع احتمال مهم

دکتر مجید جاوری، استادیار گروه جغرافیا ی دانشگاه پیام نور

هدفهای رفتاری

آشنائی با توزیعهای:

- برنولی
- دوجمله ای
- پواسن
- نرمال

توزیع برنولی

- تابع چگالی

$$f(x) = p^{x}(١ - p)^{١-x}, x = ٠,١$$

- امید ریاضی

$$E(x) = p$$

- واریانس

$$V(x) = p(1 - p)$$

توزیع دوجمله ای

- تابع چگالی

$$f(x)=\binom{n}{x}p^{x}(۱-p)^{n-x}, x=۰,۱,\ldots,n$$

- امید ریاضی

$$E(x)=np$$

- واریانس

$$V(x)=np(1-p)$$

مثال(۱)

احتمال اینکه تیری به هدف اصابت کند، ۶/۰ است.

الف) احتمال اینکه در ۴ تیر شلیک شده ۲ تیر به هدف بخورد، چقدر است؟

$$n = ۴ , p = ۰/۶$$

$$f(x=۲) = \binom{۴}{۲} ۰/۶^{۲} (۱ - ۰/۶)^{۴-۲} = ۰/۳۴۵۶$$

ادامه مثال(۱)

ب) احتمال اینکه در ۴ تیر شلیک شده حداقل۲ تیر به هدف بخورد، چقدر است؟

$$n = ۴ , p = ۰/۶$$

$$f(x \geq ۲) = f(x = ۲) + f(x = ۳) + f(x = ۴)$$

$$= \binom{۴}{۲} ۰/۶^{۲} (۱ - ۰/۶)^{۴-۲} + \binom{۴}{۳} ۰/۶^{۳} (۱ - ۰/۶)^{۴-۳} + \binom{۴}{۴} ۰/۶^{۴} (۱ - ۰/۶)^{۴-۴}$$

$$= ۰/۸۲۰۵$$

ادامه مثال(۱)

ج) احتمال اینکه در ۴ تیر شلیک شده حداکثر ۲ تیر به هدف بخورد، چقدر است؟

$$n = ۴ , p = ۰/۶$$

$$f(x \leq ۲) = f(x=۰) + f(x=۱) + f(x=۲)$$

$$= \binom{۴}{۰} ۰/۶^{۰} (۱-۰/۶)^{۴-۰} + \binom{۴}{۱} ۰/۶^{۱} (۱-۰/۶)^{۴-۱} + \binom{۴}{۲} ۰/۶^{۲} (۱-۰/۶)^{۴-۲}$$

$$= ۰/۵۲۴۸$$

ادامه مثال(۱)

د) احتمال اینکه در ۴ تیر شلیک شده تیری به هدف نخورد، چقدر است؟

$$n = ۴, p = ۰/۶$$

$$f(x=۰) = \binom{۴}{۰} ۰/۶^{۰} (۱-۰/۶)^{۴-۰} = ۰/۴^{۴} = ۰/۰۲۵۶$$

ادامه مثال(۱)

ه) انتظار داریم به طور متوسط از ۲۰ تیر شلیک شده چند تیر به هدف بخورد؟

$$n = ۲۰, p = ۰/۶$$

$$E(x) = np = ۲۰ \times ۰/۶ = ۱۲$$

مثال(۲)

احتمال اینکه حسن در یک آزمون چهارگزینه ای از ۲۰ سوال مطرح شده ۵ سوال را درست پاسخ دهد، چقدر است؟

$$n = ۲۰ \; , \; p = ۰/۲۵$$

$$f(x=۵) = \binom{۲۰}{۵} ۰/۲۵^{۵} (۱ - ۰/۲۵)^{۲۰-۵} = ۰/۲۰۲$$

مثال(۳)

احتمال به دنیا آمدن فرزند پسر و دختر یکسان است. احتمال اینکه در چهار تولد، ۲ فرزند دختر چقدر است، چقدر است؟

$$n = ۲۰ , p = ۰/۵$$

$$f(x=۲) = \binom{۴}{۲} ۰/۵^{۲}(۱-۰/۵)^{۴-۲} = ۰/۳۷۵$$

توزیع پواسن

- تابع چگالی

$$f(x) = \frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!}, x = ۰,۱,...$$

- امید ریاضی

$$E(x) = \mu$$

- واریانس

$$V(x) = \mu$$

مثال(۴)

تعداد گردبادها در مناطق مرکزی یک کشور دارای توزیع پواسن با میانگین ۵/۲ است. اگر تعداد گردبادها را با X نشان دهیم. مطلوبست:

الف: $f(x \leq ۱) = ?$

$$f(x \leq ۱) = f(x = ۰) + f(x = ۱)$$

$$= \frac{e^{-۲/۵}\,۲/۵^{۰}}{۰!} + \frac{e^{-۲/۵}\,۲/۵^{۱}}{۱!} = ۳/۵e^{-۲/۵} = ۰/۲۸۷$$

ادامه مثال(۴)

ب: $f(x \geq ۴) = ؟$

$$f(x \geq ۴) = ۱ - f(x \leq ۳) = ۱ - (f(x = ۰) + f(x = ۱) + f(x = ۲) + f(x = ۳))$$

$$= ۱ - \left(\frac{e^{-۲/۵}\, ۲/۵^{۰}}{۰!} + \frac{e^{-۲/۵}\, ۲/۵^{۱}}{۱!} + \frac{e^{-۲/۵}\, ۲/۵^{۲}}{۲!} + \frac{e^{-۲/۵}\, ۲/۵^{۳}}{۳!}\right) =$$

تقریب دوجمله ای از روی پواسن

الف) n بزرگ و p کوچک

ب) $\mu = np$

مثال (۲)

فرض کنید،

$$p=۰/۰۱, n=۳۰۰$$

$$\mu=np=۳۰۰\times ۰/۰۱=۳$$

در این صورت:

$$p(x=۵)=\frac{e^{-۳}۳^{۵}}{۵!}=۰/۱۰۰۸۵$$

توزیع نرمال

- تابع چگالی

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{\sigma^2}(x-\mu)^2},-\infty \prec x \prec +\infty$$

- امید ریاضی

$$E(x)=\mu$$

- واریانس

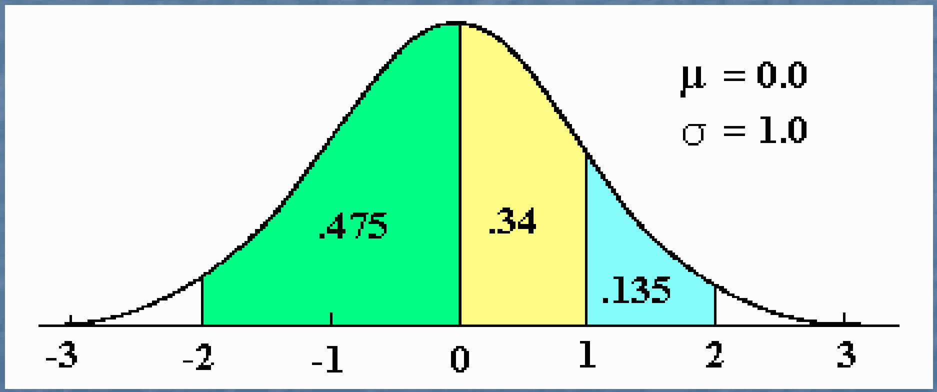
$$V(x)=\sigma^2$$

نرمال استاندارد

- استاندارد کردن مشاهدات

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

- نمودار نرمال استاندارد



مثال (۳)

فرض کنید، $\sigma = ۸, \mu = ۱۰۰$ مطلوبست احتمالهای زیر:

الف) $$p(x \prec ۱۰۷) = p(\frac{x-\mu}{\sigma} \prec \frac{۱۰۷-۱۰۰}{۸}) = p(Z \prec ۰/۸۷) = ۰/۸۰۷۸$$

ب) $$p(x \succ ۱۱۰) = p(\frac{x-\mu}{\sigma} \succ \frac{۱۱۰-۱۰۰}{۸}) = p(Z \succ ۱/۲۵)$$

$$= ۱ - p(Z \leq ۱/۲۵) = ۱ - ۰/۸۹۴۴ = ۰/۱۰۵۶$$

ادامه مثال (۳)

ج)
$$p(۱۰۳ \prec x \prec ۱۱۴) = p(\frac{۱۰۳-۱۰۰}{۸} \prec \frac{x-\mu}{\sigma} \prec \frac{۱۱۴-۱۰۰}{۸})$$
$$= p(۰/۳۷۵ \prec Z \prec ۱/۷۵) = p(Z \prec ۱/۷۵) - p(Z \prec ۰/۳۷۵)$$
$$= ۰/۹۵۹۹ - ۰/۶۳۶۸ = ۰/۳۲۳۱$$

د)
$$p(x \prec ۱۰۷) = p(\frac{x-\mu}{\sigma} \prec \frac{۹۷-۱۰۰}{۸}) = p(Z \prec -۰/۳۷۵) =$$
$$۱ - ۰/۸۰۷۸ = ۰/۱۹۲۲$$

ادامه مثال (۳)

ه)
$$p(x \succ ۱۱۴) = p(\frac{x-\mu}{\sigma} \succ \frac{۱۱۴-۱۰۰}{۸}) = p(Z \succ ۱/۷۵)$$
$$= ۱ - p(Z \prec ۱/۷۵) = ۱ - ۰/۹۵۹۹ = ۰/۰۴۰۱$$

سخن آخر

با آرزوی موفقیت برای شما در تمام مراحل زندگی

با تشكر را از حكيم بكري زاده جهت همكاري ايشان

پایان

دکتر مجید جاوری، استادیار گروه جغرافیا ی دانشگاه پیام نور