www.salampnu.com

آموزش ریاضی ۲

تالیف : دکتر بیژن زاده

تهیه : دکتر بیژن روحی

مرکز ساری

محتوای آموزش ریاضیات بایستی با هدف رشد هر چه بیشتر قدرت استنتاج و یادگیری ، شناخت ساختارهای ریاضی و مبتنی بر تقویت قوای فراگیری شهودی دانش آموزان تدوین گردد.

بدین ترتیب هدفهای آموزشی ریاضیات در دبیرستان مبتنی بر چهار دسته ذیل می باشد :

1. نقش ریاضیات در شناخت طبیعت و جهان

2. نقش ریاضیات در تربیت فکر

3. نقش ریاضیات در تامین آینده فرد و جامعه

4. نقش ریاضیات در تربیت فرهنگی

اکنون به اختصار هر یک از این اهداف را در قالب اهداف جزئی

و واسطه تشریح می کنیم .

1 نقش ریاضیات در شناخت طبیعت و جهان

آشنایی با ساختارهایی از جهان عینی که در

تجربیات دانش آموزان ظاهر می شود و دسته بندی آنها

آموزش تکنیکهای لازم برای مدلسازی ریاضی و مسائل روزمره زندگی و تجزیه و تحلیل این مدلها

آموزش ریاضی مورد نیاز برای مطالعه سایر موضوعات درسی

آشنایی با نقش ریاضیات در صنعت ، تکنولوژی ، کشاورزی ، و علوم انسانی و اجتماعی .

2. نقش ریاضیات در تربیت فکر

۲-۱ : پرورش قوه تفکر ریاضی (اندیشه ، استدلال ، تخمین و استنتاج)

۲-۲ : پرورش دقت (نظری و عملی)و عادت به نظم فکری و پرورش قوه نقد و انتقاد .

۲-۳ : پرورش قوه ارائه دقیق یک فکر (شفاهی و کتبی)

۲-۴ : پرورش اعتماد به نفس در بکار بردن دانسته های ریاضی برای حل مسائل . (شک در علم جایز نیست . اینکه "من این مسأ له را حل کرده ام ولی نمی دانم درست است یا خیر " یا حل نکردن آن چندان فرقی نمی کند).

۲-۵ : پرورش قوه خلاقیت و درک شهودی

۲-۶ : پرورش قوه تصمیم و تجرید

نقش ریاضیات در تامین آینده افراد

۳-۱ : آماده سازی دانش آموزان برای تحصیلات بعدی

۳-۲ : آماده سازی دانش آموزان برای ورود به بازار کار

۴- نقش ریاضیات در ارتقا سطح فرهنگی جامعه

۴-۱ : آشنایی مقدماتی با تاریخ ریاضیات و شناخت شناسی .

۴-۲ : آشنایی مقدماتی با زیبا شناختی ریاضیات .

برای آشنایی دانش جویان نمو نه ای از تدوین اهداف عینی را

که برای وزارت آموزش و پرورش تهیه شده است درج می کنیم

قسمتی از ریز ماد ریاضی کاربردی

۱– دانش آموز مفاهیم مجموعه عضویت و جزئیت را بداند و با

- Z - Qنمادهای آن آشنا شود . مجموعه های عددی

معرفی می شوند . N

۲- دانش آموز اعمال بر مجمو عه ها (اجتماع ، اشتراک ، متمم

، تفاضل ، ضرب ، دکارتی) را بداند .

۳- قوانین دمورگان را بداند .

۴- بتواند با نمایش دیاگرام ون اعمال بر مجموعه ها را نمایش

دهد .

۵- مفاهیم مجموعه های متناهی و نا متناهی و کراندار را بداند .

۶- تعداد اعضای یک مجموعه متناهی (مرتبه یک مجموعه

متناهی) را بداند و قانون های

$$n(A - B) = n(A) - n(A) - n(B)$$

$$n(\varnothing) = 0$$

$$n(B) \quad) + n(A = \quad - n(A \cap B)$$

n (A ۷ B)

را بتواند درک کند (در صورت امکان استدلال آنها را بداند).

۷- مفاهیم رابطه ، رابطه ترتیبی و رابطه هم ارزی زا بداند .

و ریز مواد آنالیزی ترکیبی که بخشی از ریاضیات کاربردی است

.

اصول شمارشی (اصل جمع و اصل ضرب) را بداند .

مفاهیم جایگشت و ترتیب را بداند و با نماد آنها و خواص آنها

آشنا شود .

مفهوم ترکیب را بداند . در صورت امکان تعمیم آن ارائه شود) .

(متناهی) و خواص مقدماتی آن آشنا شود .$\sum$با

تابع فاکتوریل و خواص آن را بداند .

بسط دو جمله ای را بداند . مثلث خیام و رابطه آن با

بسط دو جمله ای ارائه شود .

با دنباله عددی عددی آشنا شود . در صورت امکان

تابع مولد آنها گفته می شود .

در مقابل **general aim** به معنی هدف کلی

روش تدریس فعال

روش تدریس که مناسب تحقیق این ا هداف باشد روش تدریس فعال نامیده می شود . مسأ له اساسی آموزش این است که یک کلاس درس فعال چگونه کلاسی است . یک کلاس مطلوب کلاس درسی است که محصلین از تحصیل ریاضیات لذت برده و اهداف آموزش ریاضیات در آن به منمه ظهور برسد .

جرج پو لیا برای خلق چنین کلاسی سه (۲) اصل را قائل می

شود که اصول آموزش یا یادگیری به شمار می آیند . در واقع ،

در روش تدریس فعال ، آموزش سنتی به یادگیری تحویل می

گردد . باید یاد بدهیم . یاد گیری فعال آن یادگیری است که

طبق آن متعلم در فرآیند یادگیری سهیم و دخیل است.

اینک اصول یادگیری فعال را به اختصار شرح می دهیم :

اصل اولیه : یادگیری فعال بر این اصل استوار است که بهترین طریق یادگیری هر چیز کشف آن به وسیله متعلم است . بدین لحاظ گاهی به این نوع یادگیری روش تدریس کشفی یا تدریس مکاشفه ای نیز اطلاق شده است . این همان روشی است که قدمت آن به اندازه خود تاریخ یادگیری است و غالباً به روش سقراطی نیز مشهور است .

اصل دوم : این اصل به اصل بهترین انگیزه یا تحریک مشهور است . لازمه آموزش انگیزه است . باید متعلم تحریک شود تا در آموزش سهیم باشد . فرآهم آوردن انگیزه های مناسب به مهارت معلم و محیط آموزشی (کتب درسی ، جامعه ، . . .) بستگی دارد .

اصل سوم : اصل فازهای متوالی نام دارد.

یادگیری با عمل و گمان شروع می شود . به عبارات و مفاهیم می رسد . و باید به عادتهای مطلوب خاتمه یابد . به عبارت دیگر ، برای یک یادگیری فازهای ذیل قابل تشخیص است :

۱) فاز بررسی و مشاهده

۲) فاز مکالمات و مفهوم سازی (فرمولبندی نتایج بررسی و مشاهده)

۳) هماهنگی مطالب یاد گرفته شده با مطا لب قبلی متعلم و

وحدت مطالب فرا گرفته شده با وجود متعلم .

بر اساس این اصول ، مسائل کلاسی به بهترین وجهی بررسی

می گردد .

خلاصه آنکه آموزش باید چنان باشد تا محصلین در پرتو ارائه فرصتهایی که می یابند بتوانند قدرتهای خلاقه خود را ، که خداوند بدانها امانت داده است ، از قوه به فعل درآورند .

و

هر چه آموزش به یادگیری بیشتر شبیه گردد ، آموزشی مفید تر و اساسی تر خواهد بود .

مثالی از روش تدریس فعال

هدف : یادگیری نودار ستونی (سوم یا چهارم دبیرستان)

فاز اول : بررسی و مشاهده

دانش آموزان به گروه های ۲ یا ۳ نفری تقسیم می شوند . به یک گروه مسئولیت داده می شود (به عنوان یک پروژه) در یکی از خیابانهای پپر ترافیک نزدک مدرسه خود (خیابان A) حضور یافته و تعداد وسائط نقلیه را که عبور می کنند مشخص نمایید (در زمان مشخصی مثلاً ۸ تا ۹ صبح)

نفر اول گروه تعداد اتومبیل های سواری را تعیین می کند .

نفر دوم مسئولیت شمارش تعداد کامیون ها و کامیونت ها را به عهده می گیرد .

نفر سوم مسئولیت شمارش تعداد اتو بوسها و مینی بوسها را به عهده می گیرد .

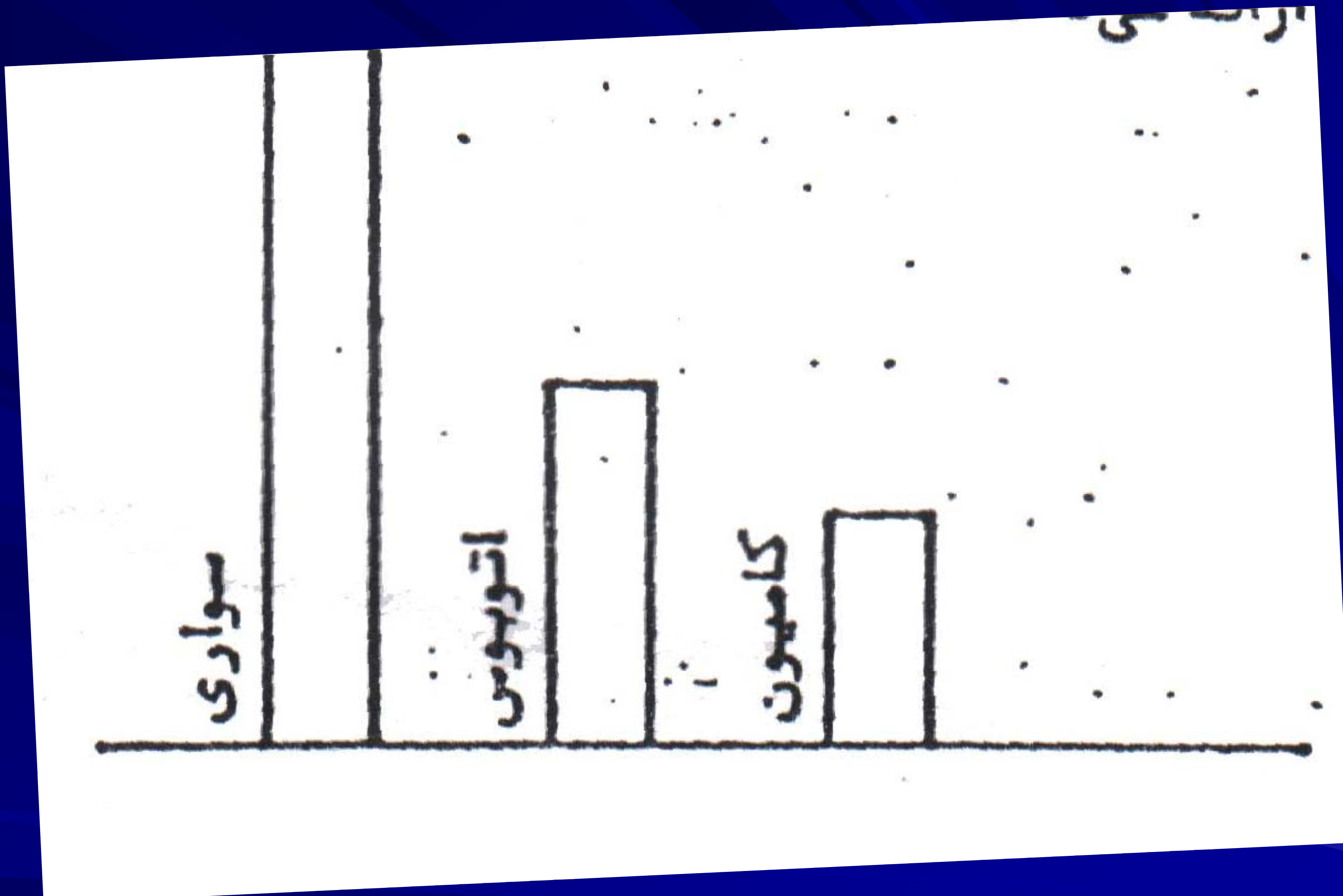
بدین گونه مثلاً ارقام زیر را به دست می آورید .

اتوبوس و مینی بوس ۴۲

سواری و تاکسی ۱۲۵

کامیون و کامیونت و وانت ۲۵

فاز دوم : در این فاز اعضای تیم به تبادل نظر و بحث پیرامون نتایج بدست آمده می پردازند و سعی می کنند این نتایج را یکجا ارائه دهند ، با راهنمایی معلم خود نتایج را به صورت ستونی ارائه می دهند .


سواری
اتوبوس
کامیون

در وهله اول برای هر فقره ممکن است مثلأ یک سانتی متر ستون در نظر بگیرند . ولی چون صفحه تابلو جای کافی برای نمایش ندارد ، خود دانش آموزان در می یابند (یا با راهنمایی معلم خود) که مثلأ برای هر ده فقره یک سانتی متر ارتفاع را در نظر بگیرند .نتایج دیگری از داده ها ، با طرح سئوالهای مناسبی از سوی معلم می توان استخراج نمود از جمله بیشترین نوع خودروهای عبور کننده در بین ساعت۸ تا ۹ صبح کدامند ؟

کمترین نوع خودروهای عبور کننده در بین ساعت۸ تا ۹ صبح کدامند ؟

میانگین خودروهای عبور کننده در هر دقیقه چقدر است ؟

تجربه را می توان توسط گروه های دیگر و در ساعات دیگر انجام داد و در این رابطه سئوالات دیگری مطرح نمود . از جمله

متراکم ترین ترافیک را تحمل Aدر کدام فاصله زمانی خیابان می کند ؟

در کدام فاصله زمانی خیابان A کم حجم ترین ترافیک را دارا است ؟

فاز سوم : دانش آموزان با استفاده از رسم نمودار های ستونی برای کمیت های متغیر دیگر مثل درجه حرارت در شهرهای مختلف ، مطالب یاد گرفته شده را با مطالب قبلی و موضوعات دیگر ارتباط می دهند .

کلیاتی درباره بررسی کتب درسی

1-1: اهداف بررسی :

اهدف از بررسی یک کتاب درسی چیست ؟ شکی نیست که یک معلم و دبیر آگاه قبل از رفتن به کلاس ، در مورد موضوع درس که می خواهد تدریس کند مطالعه می کند. غرض وی از مطالعه ، تسلط بر موضوع مورد نظر و آماده سازی خویش برای ارائه هر چه بهتر آن و تنظیم یک طرح درس جهت اجرای تدریس است .

همانند هنرپیشه ای که متناسب با یک سناریو قطعات نقش را به توالی اجرا می کند ، معلم نیز به خاطر ارائه منظم و هدفدار درس مجبور است از یک طرح درس نوشته نشده باشد ولی به هر حال در ذهن معلم است. البته معلم در مقایسه با یک هنر پیشه ، هم سناریونویس است و هم مجری و هم کارگردان در حالی که هنر پیشه الزاماً سناریو نویس یا کارگردان نیست.

در میان منابع فهم مورد مطالعه معلم کتب درسی قرار دارند.

مطالعه معلم یک مطالعه معمولی نیست. مطالعه ای نیست که برای یادگیری مطلبی و آماده سازی جهت پاسخگویی و یا شرکت در آزمونی باشد، بلکه :

مطالعه ای است جهت آماده سازی برای اجرای نقشی

مطالعه ای است جهت آشنا شدن به نکات قوت وضعف یک کتاب درسی

مطالعه ای جهت تهیه نوشته ای مکمل که برای رده خاص از محصلین تدوین می گردد.

مطالعه ای است برای تدوین سئوالاتی متنوع و طرح مسائلی احیاناً بدیع و با انگیزش .

شاید بهتر است بگوئیم که یک معلم ، دبیر و یا استاد دانشگاه یک کتاب را بررسی می کند.

۱-۲ : انواع بررسی

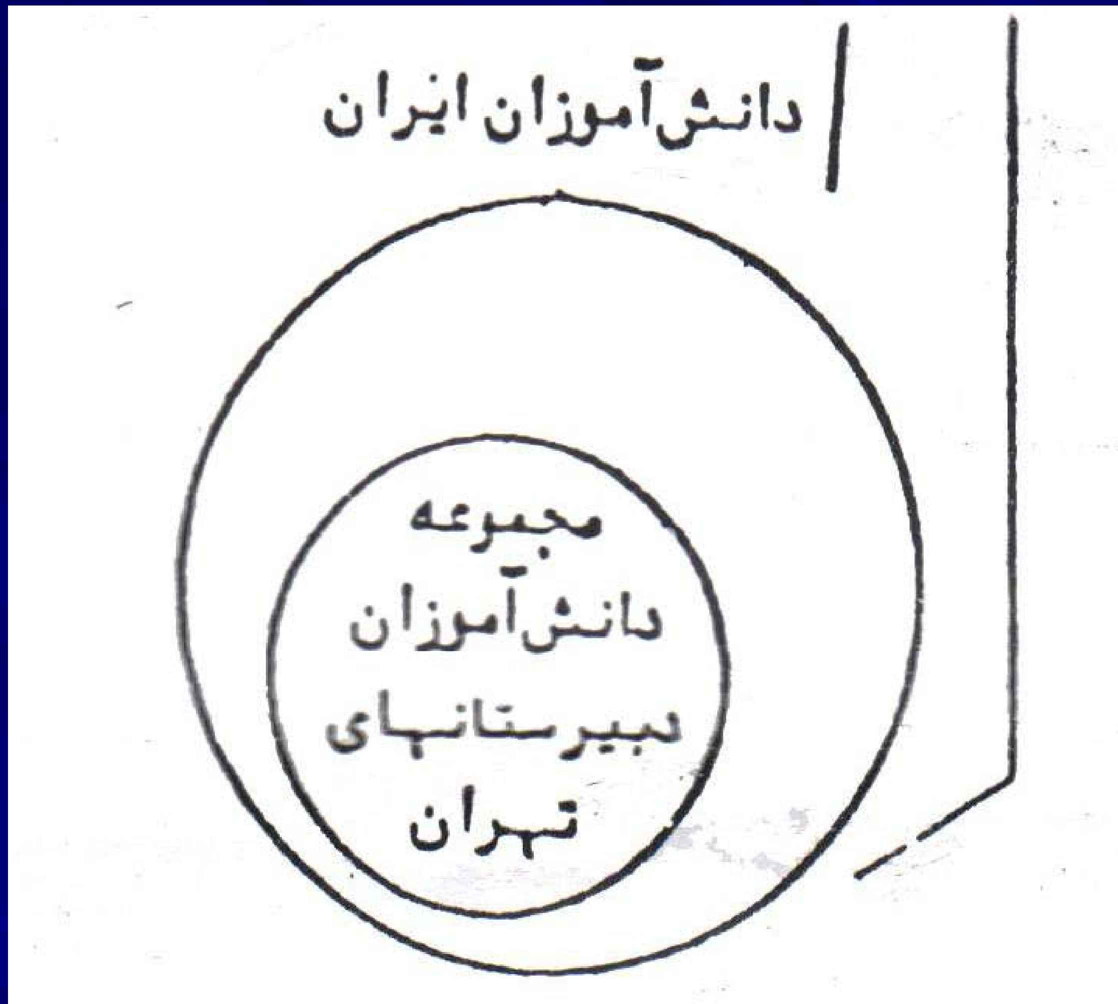
با توجه به آنچه که در فصل قبل در باب اهداف و روش تدریس ریاضیات ذکر گردید ، مهمترین انواع بررسی را به اختصار شرح می دهیم.

۱- بررسی محتوایی : در این بررسی ، هدف تشخیص اهداف جزئی موضوع مطرح شده می باشد و اینکه تا چه اندازه تحقق اهداف جزیی مربوطه در کتاب تامین شده است .

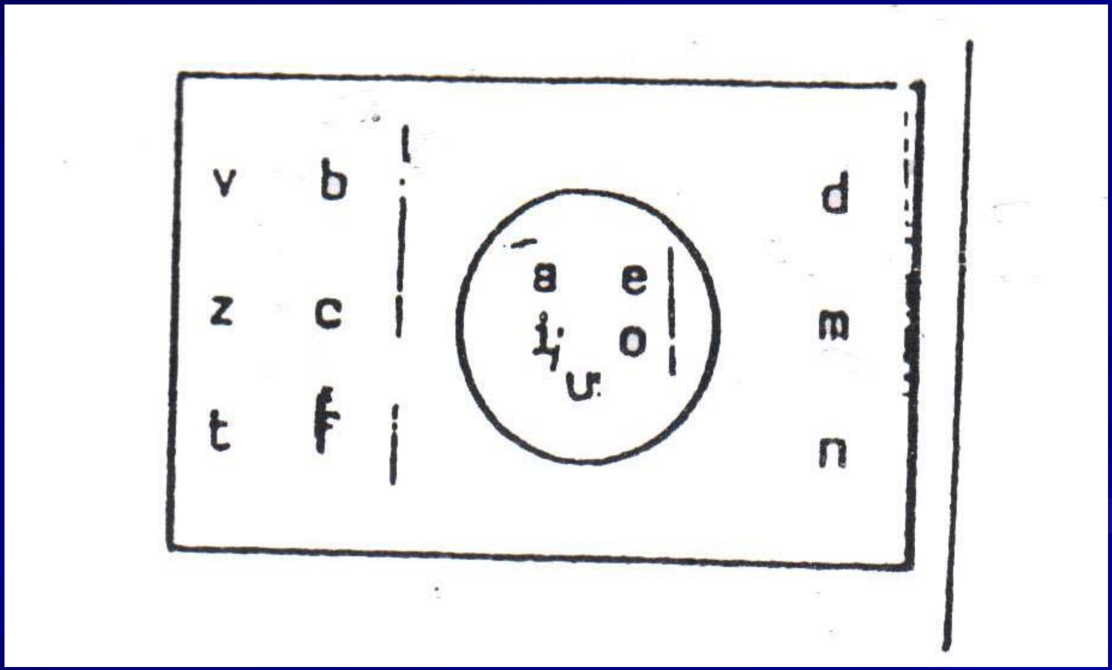
به عبارت دیگر، هدف دبیر از اینگونه بررسی آن است که دریابد ریز مواد مطرح شده در درس چیست. برای روشن تر شدن مطلب مثالی ذکر می کنیم. به متن قبل که از صفحات یک کتاب درسی دبیرستانی است توجه کنید

زیر مجموع های یک مجموعه

هر یک از دانش آموزان دبیرستانهای تهران یکی از دانش آموزان دبیرستانهای ایران نیز می باشد.


دانش‌آموزان ایران
مجموعه دانش‌آموزان دبیرستانهای تهران

هر حرف صدادار انگلیسی یکی از حروف الفبای انگلیسی نیز هست .



مثالهای زیر مفهوم زیر مجموعه را روشن تر می سازند:

{□,∆}   {□,∆,◊,O}

اگر A زیر مجموعه B نباشد می نویسند :

و این به این مفهوم است که :

لااقل یک عضو در A وجود دارد که در Bنیست .

و با زبان ریاضی :

از تعاریف فوق نتیجه می شود که :

۱-هر مجموعه زیر مجموعه خودش است.

یعنی ، اگر A مجموعه دلخواهی باشد داریم :

زیرا، اگر A زیر مجموعه A نباشد ،

در این صورت ، در A باید عضوی وجود داشته باشد که در A

نباشد و این نشدنی است.

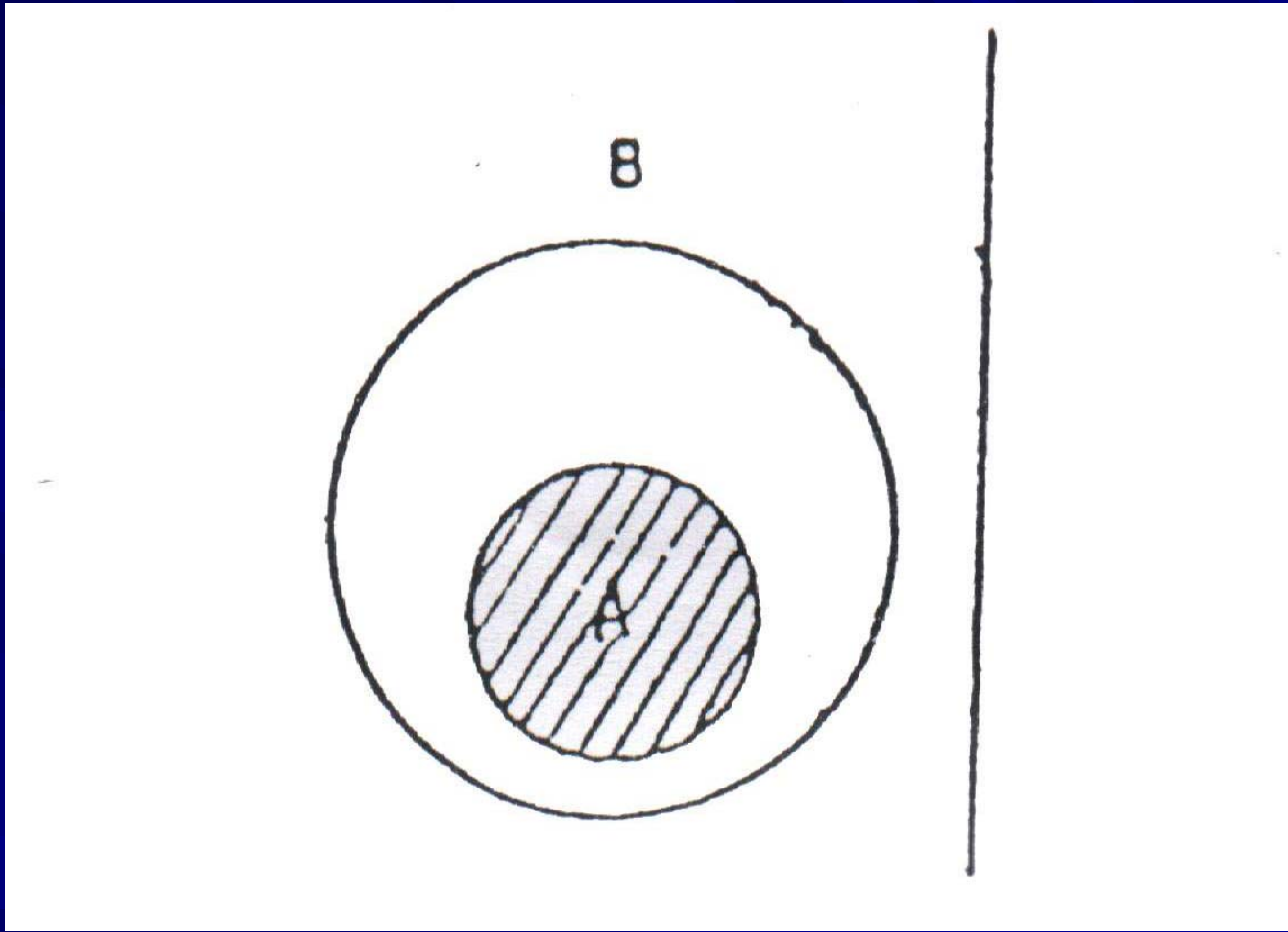
۲- مجموعه تهی زیر مجموعه هر مجموعه است.

یعنی ، اگر A مجموعه دلخواهی باشد داریم :

اگر B نمایش مجموعه ۲۲ مهره شطرنج و A نمایش مجموعه ۱۶

مهره پیاده باشد روشن است که هر یک از عضوهای مجموعه

Aیکی از عضوهای مجموعه B نیز می باشد.


B
A

تعریف : مجموعه |A را زیر مجموعه| B نامند هر گاه هر|A ،

عضو |B نیز باشد.

به عبارت دیگر :

مجموعه A زیر مجموعه B است هرگاه برای هر نتیجه شود

که

، اگر A زیر مجموعه |B باشد می نویسیم :

و نمایش هندسی آن به صورت شکل مقابل می باشد :

و تعریف آن با زبان ریاضی به صورت زیر است :

زیرا اگر زیر مجموعه| A نباشد در این صورت در باید عضوی

وجود داشته باشد که در A نباشد و چون در مجموعه تهی

عضوی وجود ندارد ، لذا این نشدنی است.

مثال ۱– دو مجموعه | A={5,6,7} , B={1,2,5,6}

را در نظر بگیرید ، آیا A زیر مجموعه B است؟

حل : A| زیر مجموعه B| نیست زیرا در A| عضو ۷ وجود دارد

که در| B نیست.

مثال : ۲- تمام زیر مجموعه های مجموعه $A=\{a,b,c\}$ را بنویسید .

حل : الف - طبق آنچه گفته شد زیر مجموعه A است.

ب - زیر مجموعه های یک عضوی عبارتند از : $\{a\},\{b\},\{c\}$.

ج- زیر مجموعه های دو عضوی عبارتند از:

$\{b,c\},\{a,b\},\{a,c\}$

د- تنها زیر مجموعه سه عضوی خود مجموعه یعنی : $\{a,b,c\}$ می باشد .

در این مثال عده عضوهای |A برابر ۳ و تعداد زیر مجموعه های آن ۸ یعنی ۲۳ می باشد.

اکنون این سئوالات را در رابطه با متن فوق مطرح می کنیم .

الف – اهداف کلی ریاضیات که در محتوای این درس نهفته است کدامند؟

ب- اهداف جزیی(ریز مواد) تشکیل دهنده این درس کدامند؟

در پاسخ به سئوال" الف "موارد قبل ذیل را می توان مطرح کرد.

- می دانیم آشنایی با نظریه مقدماتی مجموعه ها برا ی مطالعه سایر دروس ریاضی ، همانند جبر و آنالیز ضروری است . لذا یک هدف کلی این درس آموزش ریاضی مورد نیاز برای مطالعه سایر موضوعات درسی است (هدف۱-۲)

- یک هدف کلی این درس پرورش قوه تفکر ریاضی است(هدف ۲-۱)

- دانش آموزان را برای تحصیلات بعدی   آماده می سازد(هدف ۳-۱)

- دانش آموزان را با زبان ریاضی آشنا می سازد (هدف ۴-۲)

در پاسخ به سئوال "ب" اهداف جزیی این درس را می توان چنین مطرح کرد :

- ارائه مفهوم "زیر مجموعه"
- ساختن زیر مجموعه های یک مجموعه مفروض
- معرفی نماد "جزئیت مجموعه ای"
- اینکه جزء هر مجموعه ای است.
- اینکه هر مجموعه جزأ خودش است.
- آماده سازی برای بیان قاعده تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه متناهی .

تمرین : صفحات ۵۴ تا ۶۳ کتاب ریاضیات جدید سال اول را در باب "اجتماع مجموعه ها " مطالعه و بررسی محتوایی آنرا بنویسید (به سئوالات الف و ب فوق الذکر و دوباره این درس پاسخ دهید.)

۲- بررسی انتقادی

معلمین و دبیران خبره آگاه معمولاً به محتوای کتاب درسی بسنده نمی کنند . برای بهتر ارائه کردن یک درس آگاهی از اهداف آموزش ریاضی و روشهای نوین تدریس ضروری و شایان توجه است. یک بررسی انتقادی و به بررسی ای گفته می شود که به استناد اهداف آموزش ریاضیات و اصول روش تدریس فعال آگاهانه و مسئولانه انجام می گیرد .

باید متوجه بود که مولف یا مولفین کتاب درسی فرصت پاسخگویی به نقد درسی کتاب خویش را ندارد، بنابراین در ارائه اینگونه بررسیها باید محتاطانه و با صداقت عمل نمود.

یک بحث انتقادی از یک درس ریاضی می تواند بر پایه اصول ذیل انجام گیرد.

[1] متن درسی تا چه اندازه تحقق اهداف آموزش ریاضیات را تضمین می کند؟

[ب] متن درسی تا چه اندازه بر پایه روش تدریس فعال تدوین شده است؟

[ج] متن درس تا چه اندازه از حیث هنری و طراحی آموزشی مناسب است؟

به عنوان مثال متن درس قبلی را که در بخش بررسی محتوایی مورد بررسی قرار دادیم ، مورد بررسی انتقادی قرار می دهیم.

درس با مثالهایی ملموس از زیر مجموعه ها آغاز شده است.

زیر مجموعه های دانش آموزی، زیر مجموعه های حروف انگلیسی و زیر مجموعه مهره های پیادگان از مهره های شطرنج. پس از آن مفهوم تعریف زیر مجموعه ارائه و فرمولبندی شده است.

(X) در مقایسه با روش تدریس فعال، درس فاقد انگیزه کافی برای یادگیری است. درس می توانست با ارائه "سئوال" شروع شود.

به عنوان نمونه مطلب را می توان چنین آغاز نمود:

به مثالهای ذیل از مجموعه ها توجه کنید:

$A=\{a,b,c,d,...,x,y,z\}$ (حروف انگلیسی)

$A1=\{a,e,I,o,u\}$ (حروف صدادار)

B= مجموعه مهره های شطرنج

B1= مجموعه مهره های پیاده شطرنج

در مورد A و A1 چه می توان گفت ؟

در مورد B و 1 B چه می توان گفت ؟

آیا می توانید مجموعه های دیگری بسازید که اعضایشان در A باشند؟سه (۲) تا از اینگونه مجموعه ها بنویسید. حتماً متوجه شده اید که تعداد زیادی از اینگونه مجموعه ها می توان نوشت. هر یک از این مجموعه ها را یک زیر مجموعه مجموعه A می نامیم . در اینجا دو تا از آنها را می نویسیم.

$A2=\{a,b,c\}$, $A3=\{a,b,d,f\}$

تمرین کلاسی : یک مجموعه سه (۳) عضوی اختیار کنید. همه زیر مجموعه های آن را بنویسید. چند زیر مجموعه به دست می آورید . آیا اگر یک مجموعه سه (۳) عضوی دیگر انتخاب می کردید باز همین تعداد زیر مجموعه برای آن بدست می آمد؟ ملاحظه می کنید که مطلب را می توان با سوالات تحقیق گونه ای که هم ساده هستند و هم انگیزه لازم را به عنوان سرگرمی به دانش آموز می دهند آغاز نمود .

وقتی تعریف زیر مجموعه به صورت :

ارائه شده آن را تعریف مفهوم زیر مجموعه به زبان ریاضی

نامیده است. در اینکه این گزاره دو شرطی تعریف مفهوم زیر

مجموعه است بحثی نیست. اما در هیچ جای کتاب مربوطه این

مطلب که "یک تعریف ریاضی اساساً" یک گزاره دو شرطی

است ذکر نشده است.

به جای آن مولف می توانست بر مفهوم زیر مجموعه تکیه

بیشتری داشته باشد و همین که گزاره "A زیر مجموعه B

است " با نماد "" نشان داده شده است، خود باعث آشنایی

دانش آموزان با زبان ریاضی است چرا که استفاده از نماد و

علامتها به جای عبارات و جملات فارسی از زبان ریاضی است .

(X) نماد جزئیت مجموعه ای "" نامناسب است، چون جزئیت عام تعریف شده است

(که در آن ممکن است دو مجموعه مساوی نیز باشد) بهتر است از نماد "" استفاده شود.

در مورد ادامه مطلب در صفحات بعد کتاب، از جمله نقدی رابطه جزئیت مجموعه ای (از و نتیجه می شود که) نکاتی را می توان یادآور شد. که نقد این قسمت را به دانشجویان محول می کنیم .

پروژه : با راهنمایی مدرس خود یک مطلب درسی از کتب ریاضی دبیرستانی انتخاب کرده و ابتدا آن را نقد و بررسی کنید:

در صورتی که آمادگی دارید، مطلبی تدوین نموده که بتواند جایگزین مطلب نقد شده بوده و با اهداف آموزش ریاضی و روش تدریس فعال هماهنگی بیشتری داشته باشد.

مطالب پروژه ای می تواند یکی از مطالب ذیل انتخاب شود.

۱- حد و پیوستگی

۲- قوانین دمورگان (ریاضیات جدید اول)

۳- تناظر یک به یک (ریاضیات جدید اول)

۴- رابطه و تابع

۵- دستگاه معادلات جبری

بررسی آماده سازی

یکی دیگر از اهداف بررسی یک موضوع درسی آماده سازی جهت تدریس آن موضوع است. شکی نیست که دبیری که با آمادگی قبلی به کلاس می رود از توانایی بیشتری در ارائه درس و پاسخگویی به سئوالات دانش آموزان برخوردار است.

دانش آموزان ذهنی فعال و پویا دارند. باید مجال یابند تا با طرح سئوالات درسی در فرآیند یادگیری سهیم شوند . یک دبیر خوب نه تنها به سئوالات درسی دانش آموزان پاسخ می دهد بلکه آنها را تشویق به سئوال کردن می کند.

بررسی خلاصه نویسی

نوع دیگری از بررسی یک موضوع ، بررسی به منظور دوره کردن و خلاصه کردن آن است. خلاصه کردن یک درس، یک مقاله علمی و یا یک موضوع بمنظور تسریع در استفاده از آن در مراجعات و تحقیقات بعدی امری است که بویژه در تحقیقات علمی امروز نقش مهمی را ایفا می کند.

اولین هدف خلاصه نویسی آن است که به خواننده کمک کند تا بتواند تصمیم بگیرد که آیا مراجعه به ماخذ اصلی برای مقاصد وی مفید است یا نه؟ قصدمان این نیست که یک کار خلاصه نویسی جانشینی برای مقاله یا کتاب اصلی باشد . در واقع یک کار خلاصه نویسی ، گزارشی مختصر از یک مقاله یا یک کتاب می باشد. یک متن خلاصه ممکن است شامل چند خط و یا یک و یا دو صفحه تایپ شده باشد.

یک خلاصه علمی باید دارای دو خصوصیت ذیل باشد:

(آ) قصد نویسنده را از کتاب یا مقاله مشخص سازد.

(ب) چنانچه لازم باشد بتواند ارتباط محتوای کار نویسنده را با

کارهای مربوطه دیگر آشکار سازد.

به مثالهای زیر توجه نمایید:

مثال : ۱- فرض کنیم به هر یک از عناصر شیمیایی عدد اتمی آن را نسبت دهیم در این صورت تابعی خواهیم داشت که دامنه آن نام عنصر های شیمیایی و برد آن عددهای اتمی آن عنصرها یعنی مجموعه اعداد طبیعی از ۱ تا ۱۰۴ است عدد متناظر گوگرد ۱۶ است و می توان نوشت:

f (گوگرد) =۱۶

۲- فرض کنیم به هر یک از حروف الفبای فارسی تعداد نقطه های آن را نسبت دهیم در این صورت تابعی داریم که دامنه آن مجموعه حروف الفبای فارسی است و بردآن مجموعه $B=\{0,1,2,3\}$ باشد بنابراین تابعی از مجموعه حروف الفبا به عددها داریم و میتوانیم بنویسیم :

f (ر)= ۰ و f (ت) =۲ و f (ژ)= ۳ و f (ن)=۱

۳- مجموعه اعداد درست و مجموعه اعداد درست نامنفی را در نظر می گیریم و فرض می کنیم قانون f به هر یک از اعداد درست ، مربع آن را از مجموعه اعداد درست نامنفی نظیر نماید.

پس تابعی از مجموعه اعداد درست (Z) در مجموعه اعداد درست نامنفی (S) داریم و می توانیم بنویسیم .

f (-۲)= ۴ و f(۲)= ۴ و f(۰)= ۰ یا به طور کلی

f(x)=x2

می توان تابع را با شکل تعریف نمود.۱

مثلاً مجموعه های $A=\{a,b,c,d\}$ و $B=\{1,2,3\}$ را در نظر

می گیریم و تابع   را مطابق شکل زیر تعریف می کنیم .

در این صورت داریم :

$F(A) = F(B) = 1 \quad , \quad F(C) = F(D) = 3$

بنابر آنچه گفته شد در یک تابع دو مجموعهٔ A وB و یک قانون که بر طبق آن هر عضو مجموعهٔ A، تنها با یک عضو از مجموعه B متناظر می شود وجود دارد گاه ممکن است مجموعه A با مجموعه B یکی باشد. در این صورت به هر یک از عضوهای مجموعه A بر طبق تابع f عضوی از همین ، مجموعه نسبت داده می شود و می توان نوشت:

در شکل زیر قانونی که به هر عضو از A عضوی یا عضوهایی از

B نسبت می دهد یک تابع نیست . زیرا مثلاً به عدد ۳ دو حرف

ی و ن نسبت داده شده اند.

۲- تابعهای حقیقی

از این پس عموماً تابعهایی را مورد مطالعه قرا می دهیم که دامنه و برد آنها زیر مجموعه هایی از مجموعه اعداد حقیقی هستند.

اگر عضو دلخواهی از دامنه را با x نمایش دهیم و تابع f عدد

xرا به عدد y وابسته کند، می نویسیم : $y = f (x)$

قانون تابع را که در اینجا به صورت معادله $y = f (x)$ داده شده است معادله تابع می خوانیم.

هر گاه در توابع حقیقی ذکری از مجموعه دامنه به میان نیامده باشد آن رابزرگترین زیر مجموعه ای از اعداد حقیقی اختیار می کنیم که در ازای هر عضو آنها ، قانون تابع دارای معنی باشد.

مثال۱- تابع y=f(x)=x2 به هر یک از اعداد حقیقی مربع آن را نسبت می دهد.

پس دامنه f همه عددهای حقیقی است.

مثال ۲- تابع $Y = F(X) = \frac{1}{X}$ به هر یک از اعداد حقیقی غیر از صفر عکس آن عدد را نسبت میدهد یعنی مثلاً :

$$X = \sqrt{2} \Rightarrow Y = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, X = -\frac{1}{3} \Rightarrow Y = -2, X - 2 \Rightarrow Y = \frac{1}{2}$$

در این تابع صفر نمی تواند عضو داشته باشد زیرا قانون تابع بصورت در آمده که

بی معنی است بنابراین دامنه این تابع مجموعه اعداد حقیقی

بجز صفر است یعنی $R-\{0\}$.

۳- تابعهای مساوی

در تابع f و g را مساوی می گوییم و می نویسیم $f=g$ در

صورتی که دامنه آنها یکی بوده و اگر g عضو دلخواهی از این

دامنه باشد داشته باشیم :

$$f(a)=g(a)$$

مثال ۱- تابع $f(x)=x2$ که دامنه آن اعداد حقیقی است یا تابع $g(x)=x2$ که دامنه آن اعداد طبیعی است در نظر می گیریم این دو تابع مساوی نیستند زیرا دامنه آنها یکی نیست.

مثال ۲- دو تابع $f(x)=x2-1$ و در مجموعه اعداد حقیقی مساوی هستند زیرا دامنه هر دو یکی است به علاوه برای هر عدد حقیقی x داریم :

$$f(x)=g(x)$$

مثال ۳- دو تابع $f(x)=x2$ و $g(x)=x$ با دامنه $\{0,1,-1\}$ با هم برابرند.

$\forall X \in R \Rightarrow f(x) = a$

۴- تابع ثابت

اگر تابع f(x) چنان باشد که برد آن درست یک عضو داشته باشد آن را تابع ثابت می خوانیم. به ویژه تابع f را در مجموعه اعداد حقیقی ثابت می خوانیم هر گاه یک عدد ثابت a چنان باشد که :

$$\forall X \in R \Rightarrow f(x) = a$$

مثال ۱- تابع $f(x)=2$ در مجموعه اعداد حقیقی یک تابع ثابت

است.

مثال۲- تابع که در شکل روبرو نشان داده شده یک تابع ثابت

است زیرا برد آن تنها یک عضو دارد که ۴ می باشد.

روابط بین ضریبها و ریشه های معادله درجه دوم

حل نامعادله درجه دوم

۱-قضیه اصلی - اگر معادله درجه دوم **ax2+bx+c=0** دارای

ریشه متمایز یا متساوی باشد ، مجموع آنها مساوی با و حاصل

ضرب آنها مساوی با خواهد بود.

$x' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, x'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

برهان – اولاً اگر معادله درجه دوم دارای ریشه متمایز باشد،

مبین آن یعنی مثبت است داریم :

$$x' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

بنابراین :

و از آنجا :

$$x' + x'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x' + x'' = -\frac{b}{a}$$

و نیز :

$$x'x'' = \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

$$= \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2}$$

پس :

$$x'x'' = \frac{c}{a}$$

ثانیاً اگر معادله درجه دوم دارای ریشه مضاعف باشد، یعنی

داشته باشیم :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0$$

باز روابط (۱) و (۲) صحیح هستند (چرا؟)

مستقیماً نیز می توان دید که در این حالت :

پس

$$x' = x'' = -\frac{b}{2a}$$

$$x' + x'' = -\frac{b}{2a}$$

$$x'x'' = (-\frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

زیرا در این حالت

$$b^2 = 4ac$$

موارد استعمال قضیه اصلی

الف- بحث در وجود و علامت ریشه های معادله درجه دوم (بدون حل کردن معادله):

در بعضی موارد لازم است بدون محاسبه ریشه ها در اینکه معادله درجه دوم دارای ریشه است یا نه و یا اینکه علامت ریشه های آن مثبت یا منفی است تحقیق کنیم. اکنون به بررسی چگونگی این مطلب می پردازیم.

۲- همواره می توان بدون حل کردن معادله درجه دوم :

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0)$$

با استفاده از قضیه اصلی فوق در وجود و علامت ریشه های آن

بحث کرد:

اولاً – اگر $\frac{c}{a} < 0$

در این صورت a و c مختلف العلامه هستند و چنان که در شماره ۱۳ فصل دوم دیدیم معادله (۱) دارای دو ریشه متمایز است. این دو ریشه مختلف العلامه هستند زیرا حاصل ضربشان منفی است.

ثانیاً- اگر و نتیجتاً $c = 0$

در این حالت یکی از ریشه ها بنابر آنچه در شماره ۷ فصل دوم دیدیم صفر است و ریشه دیگر مساوی است با (چرا ؟)، و بنابراین علامت آن مشخص است.

ثالثاً– اگر

$$\frac{c}{a} > 0$$

در این حالت چون مشخص نیست که معادله ریشه دارد یا نه ،

باید Δ یعنی مبین معادله را تشکیل داد.

اگر $0 < \Delta$ معادله ریشه ندارد.

اگر $0 > \Delta$ معادله دارای دو ریشه است که چون حاصل

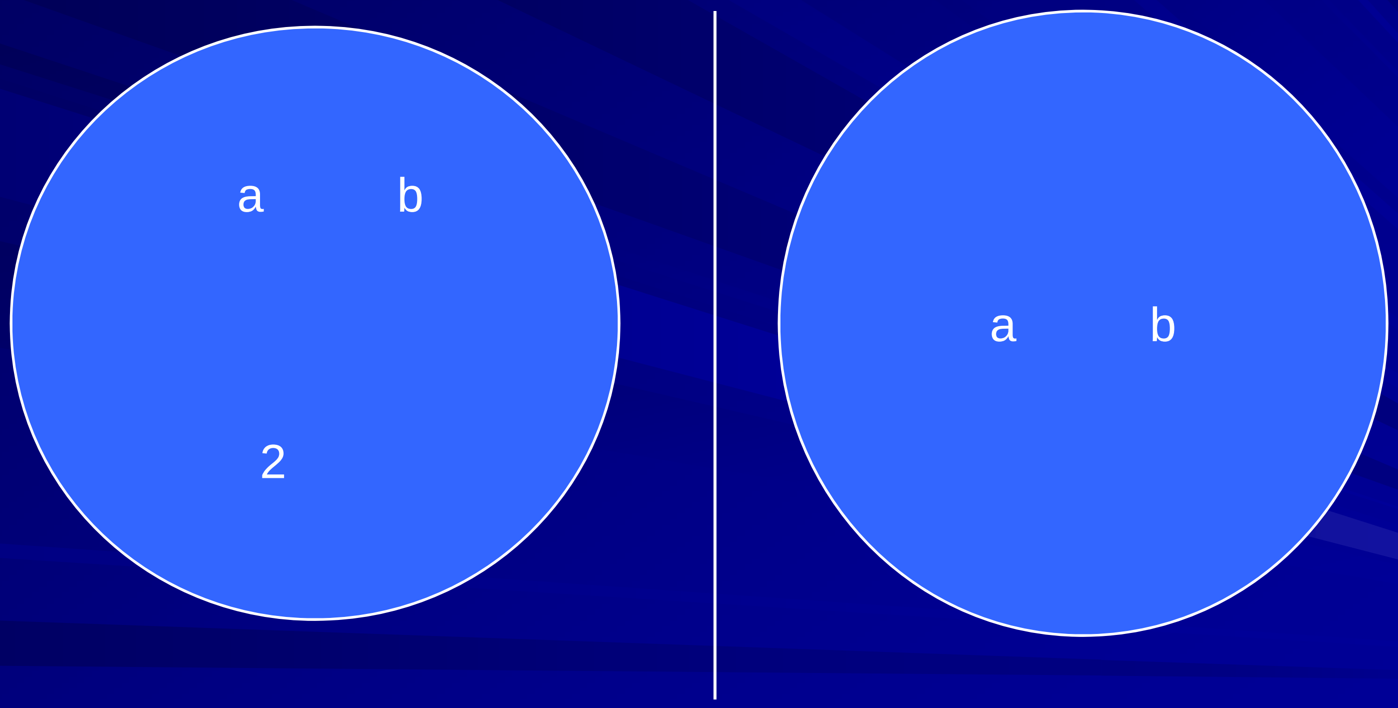
ضربشان مثبت است متحدالعلامه هستند و علامت مشترک آنها

علامت مجموعشان یعنی $\left(-\frac{b}{a}\right)$ است.

۲- خلاصه – معادله درجه دوم $ax\ 2 + bx + c = 0$ را در

نظر گرفته مبین آن را Δ و ریشه های آن را $x\ 1$ و $x\ n$ می

نامیم:


a b
2
a b

برای آن که معادله دارای دو ریشه مثبت باشد، باید:

اولاً $\Delta > 0$ تا معادله دو ریشه داشته باشد

ثانیاً $\frac{c}{a} > 0$ تا دو ریشه متحدالعلامه باشند

ثالثاً $-\frac{b}{a} > 0$ تا هر دو ریشه مثبت باشند

پس باید داشته باشیم :

(1) $\Delta' = 9 - 3(1-m) > 0$

$$\frac{c}{a} = \frac{2}{1-m} > 0$$

$$-\frac{b}{a} = \frac{6}{1-m} > 0$$

از حل نامساوی (۱) معلوم می شود که باید $m > -2$ و از حل

نامساوی (۲) معلوم می شود که باید $m < 1$ و از حل نامساوی

(۳) حاصل می شود $m < 1$ بنابراین باید داشته باشیم -2

$< m < 1$

۹- تبصره - برای سهولت درک مطلب، بهتر است جدولی تشکیل دهیم و مقادیر مهم پارامتر را به ترتیبی که از کوچکترین آنها شروع و به بزرگترین آنها ختم شود از چپ به راست در آن بنویسیم و در فاصله بین هر دو مقدار مهم متوالی، علامت Δ و $\frac{c}{a}$ و $-\frac{b}{a}$ را مشخص کرده علامت ریشه ها را از روی جدول در هر فاصله معین کنیم.

۱۰– مثال ۳– مطلوب است بحث در وجود و علامت ریشه های معادلهٔ درجه دوم:

$$(m + 1) x2 – 8x + m + 1 = 0$$

حل – مبین معادله و مجموع و حاصل ضرب ریشه ها را تشکیل می دهیم:

$$\Delta 1 = 16 – (m + 1)2 – m2 – 2m + 15 = - (m2 + 2m – 15) =$$

$$- (m+5) (m-2)$$

که به ازای $m = -5$ و $m = 3$ صفر می شود و به ازای مقادیر mمحصو ر ما بین ۳ و۵– مثبت و در غیر این موارد منفی است.

$$p=\frac{c}{a}=\frac{m+1}{m+1}=1$$ همواره مثبت است.

$$S=-\frac{b}{a}=\frac{8}{m+1}$$

که علامت آن همان عبارت **m+1** می باشد و این عبارت، به ازای **m = -1** صفر و به ازای **m < -1** منفی و در غیر این موارد مثبت است.

پس جدول زیر حاصل می شود:

m	مقادیر کوچکتر از ۵−	۵−		۱−		۲	مقادیر بزرگتر از ۲
Δ	−	•	+	نامعین	+	•	−
$\frac{c}{a}$	+		+	نامعین	+		+
$-\frac{b}{a}$	−		−	•	+		+
نتیجه	ریشه وجود ندارد		دو ریشه منفی		دو ریشه مثبت		ریشه وجود ندارد
		ریشه مضاعف ۱−		یک ریشه $x=0$		ریشه مضاعف ۱	

ج- تعیین دو عدد که مجموعشان معلوم و حاصل ضربشان نیز معلوم باشد

۱۱- مسئله – دو عدد معلوم S و P را در نظر گرفته

می خواهیم دو عدد α و β را بیابیم به قسمی که داشته باشیم:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = S \\ \alpha + \beta = P \end{cases}$$

اگر دو عدد α و β با این شرایط وجود داشته باشند، واضح است که می توان آنها را ریشه های معادله زیر دانست:

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0$$

و یا

$$x2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$

و یا در نظر گرفتن روابط (۱):

اگر دو عدد وجود داشته باشند که مجموعشان S و حاصل ضربشان P باشد، آن دو عدد ریشه های معادله، $x2 - sx + p = 0$ هستند.

$$X2-sx+p=0$$

بنابراین :

اگر دو عدد وجود داشته باشند که مجموعشان S و حاصل ضربشان P باشد، آن دو عدد ریشه های معادله، x2 – sx

بحث – اولاً اگر s2 – 4P > 0، مسئله دارای دو جواب است

که عبارتند از:

$$\beta = \frac{s - \sqrt{s^2 - 4p}}{2}$$

$$\alpha = \frac{s - \sqrt{s^2 - 4p}}{2}$$

ثانیاً اگر $s2 - 4P = 0$ ، داریم :

$$\alpha = \beta = \frac{s}{2}$$

ثالثاً اگر $s2 - 4P < 0$، مسئله جواب ندارد.

مثال ۱- تعیین دو عدد که مجموعشان و حاصل ضربشان ۱ باشد.

اگر چنین دو عددی وجود داشته باشند، ریشه های معادله زیر هستند:

مثال ۲- تعیین دو عدد که مجموعشان ۱۲ و حاصل ضربشان ۳۶ باشد.

در این حالت S=12 و P= 36. اگر چنین دو عددی وجود داشته باشند، ریشه های این معادله هستند:

$$x2 - 12x + 36 = 0 \qquad (۱)$$

داریم: $\Delta = S2 – 4P = 144 - 244 = 0$

و معادلهٔ (۱) که عددهای مطلوب ریشه های آن هستند دارای ریشهٔ مضاعف $x = x' = x'' = ۶$ است. پس دو عدد مطلوب ۶ و ۶ می باشند.

با دو معادله زیر است :

$$\begin{cases} x - \alpha = 0 \\ x - \beta = 0 \end{cases}$$

پس معادله مطلوب عبارت است از :

$$x^2 - (\alpha + \beta) x + \alpha\beta = 0$$

مثال – می خواهیم معادلۀ درجه دومی تشکیل دهیم که ریشه های آن 2m و باشند.

اگر ریشه ها را ´x و ″x بنامیم داریم :

$$x' + x'' = 2m + \frac{m}{2} = \frac{5m}{2}$$

$$x'x'' = 2m \times \frac{m}{2} = m^2$$

پس معادله مطلوب عبارت است از :

$$x^2 - \frac{5m}{2}x + m^2 = 0$$

$$-2x^2 - 5mx + 2m^2 = 0$$

ه – محاسبه عباراتی که بر حسب ریشه های معادله درجه دوم متقارن هستند:

۱۳– تعریف – یک عبارت جبری، که شامل دو حرف **a** و **b** باشد، در صورتی بر حسب **a** و **b** متقارن نامیده می شود که اگر **a** را به **b** و **b** را به **a** تبدیل کنیم، در آن عبارت تغییری حاصل نشود.

مثلاً عبارت زیر بر حسب a و b متقارن هستند:

$$(a-1)(b-1), a^2+b^2, \frac{1}{a}+\frac{1}{b}, a+b$$

سوال- کدام یک از عبارات زیر بر حسب a و b متقارن است؟

(چرا؟)

$$a^2+b^2, a^2-b^2, \frac{1}{a}-\frac{1}{b}, a-b, x^2ya^2b^2$$

ثابت می کنند که همواره می توان عباراتی را که بر حسب x' و x''

x، یعنی ریشه های معادله درجه دوم، متقارن باشند بر

حسب $s = x' + x''$ و $p = x' . x''$ حساب کرد. این مطلب را با

ذکر چند مثال نشان می دهیم:

ریشه های معادله: $ax2 + bx + c = 0$ را x' و x'' و مجموع آنها

را S و حاصل ضربشان را P می نامیم.

محاسبه $x'^2 + x''^2$ بر حسب S و P.

$$x'^2 + x''^2 = (x' + x'')^2 - 2x'x'' = s^2 - 2p$$

محاسبه بر حسب S و P

$$\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = \frac{x' + x''}{x'x''} = \frac{S}{P}$$

محاسبه $x'^2 + x''^2$ بر حسب S و P.

از اتحاد:

$$(x' + x'')^2 = x'^2 + x''^2 + 3x'x''(x' + x'')$$

نتیجه می شود :

$$x'' + x''' = (x' + x'')^3 - 3x'x''(x' + x'') = s^3 - 2ps$$

۱۲- مسئله – می خواهیم مقدار m را به قسمی معین کنیم که

معادلهٔ: $x2 + mx$

$+ m + v = 0$ (۱)

دارای دو ریشه باشد که در رابطهٔ : $x'^{2} + x''^{2} = 10$

(۲)

صدق کنند.

حل – اگر معادله (۱) دارای دو ریشهٔ x' و x'' باشد، داریم:

$$x'^{2} + x''^{2} = S2 - 2p = (-m)2 - 2(m+v)$$

و یا $x'^{2} + x''^{2} = m2-2m-14$

و چون این مقدار را در رابطهٔ (۲) قرار دهیم، حاصل می شود:

(۳) $$m^2 - 2m - 24 = 0$$

از روی این معادله دو مقدار ۴– و ۶+ برای m به دست می آید.

به ازای $m = -4$ معادله (۱) به صورت $x^2 - 4x + 3 = 0$ در می آید که ریشه های آن ۱ $= x'$ و ۳ $= x''$ هستند و در رابطه (۲) صدق می کنند.

به ازای ۶ $= m$ معادله (۱) به صورت $x^2 + 6x + 13 = 0$ در می آید که ریشه ندارد.

پس تنها جواب مسئله درمجوعه اعداد حقیقی m=-4 است.

و – حل یک مسئله نمونه

۱۵– مسئله – مقدار m را طوری معین کنید که معادلهٔ:

$$x2 -(m + 5)x - m + 6 = 0 \quad (۱)$$

دارای دو ریشه باشد که در رابطهٔ: ۳xً =۱۲

(۲) ۲xَ+

صادق :باشند.

در این گونه مسائل که رابطه مفروض بر حسب x' و x'' متقارن نیست می توان ابتدا مجموع و حاصل ضرب ریشه ها را بر حسب m حساب کرد تا دو رابطه به دست آید. این دو رابطه و رابطه مفروض سه معادلهٔ سه مجهولی بر حسب x' و x'' و m تشکیل می دهند که از حل آنها هم مقدار m و هم ریشه های معادله در صورت وجود به دست می آیند

حل – بنا به فرض باید داشته باشیم:

$$۲x' + ۳x'' = ۱۳ \qquad (۲)$$

از طرف دیگر در معادله (۱) داریم:

$$x' + x'' = m + ۵ \qquad (۳)$$

$$x' + x'' = -m + ۶ \qquad (۴)$$

اینک معادلات (۲) و (۳) را که بر حسب مجهولهای x' و x'' از

درجه اول هستند حل می کنیم حاصل می شود:

$x' = ۳m + ۲$ و $x'' = ۳ - ۲m$ (۵)

این مقادیر را در رابطهٔ (۴) قرار می دهیم نتیجه می شود:

$$(2m + 2)(3-2m) = -m + 6$$

و یا $- 6 m2 + 6m = 0$

از این معادله دو مقدار m=0 و m=1 برای m به دست می آید.

اگر این مقدار را در روابط (۵) قرار دهیم، x' و x'' حساب می شود:

به ازای $m=0$ داریم: $x'=2$ و $x''=3$

به ازای $m=1$ داریم $x'=5$ و $x''=1$

به این ترتیب معلوم می شود که مسئله دارای دو دستگاه جواب است.

(تحقیق کنید که ریشه های فوق در معادله صادق هستند)

ز – تجزیه سه جمله ای درجه دوم

۱۶– سه جمله ای درجه دوم عبارتی است به صورت :

$$f(x) = ax2 + bx + c \qquad (۱)$$ ،

تبصره – اگر b=0 یا c=0 ، عبارت فوق به یک جمله ای (یا یک جمله ای) درجه دوم تبدیل می شود اما به بحث ما خللی وارد نخواهد شد.

اکنون معادله زیر را در نظر می گیریم:

$$ax2 + bx + c = 0 \qquad (۲)$$

ریشه های معادله (۲) را ریشه های سه جمله ای (۱) یا صفر کننده های سه جمله ای (۱) می نامند: مبین معادله (۲) مبین سه جمله ای (۱) نامیده می شود.

برای تجزیه سه جمله ای درجه دوم به حاصل ضرب عاملهای درجه اول از قضیهٔ زیر استفاده می کنیم:

قضیه– اولا اگر معادله : $ax2 + bx +c = 0$

(۱)

)ً) (x-xَax2+bx+c= a(x-x

دارای دو ریشه متمایز َ xو ً xباشد، سه جمله ای + ax2

bx + cبه حاصل ضرب a و دو عبارت درجه اول تجزیه و

داریم :

ًٍ) (x-xٍَax2+bx+c= a(x-x

)2 َax2+bx+c= a(x-x

ثانیاً اگر معادله (۱) دارای یک ریشه مضاعف باشد، سه جمله

ای(f(x به حاصل ضربa در مربع

ax2+bx+c= a(x-xٍَ)2

کامل یک عبارت درجه اول تبدیل می گردد و داریم:

$\Delta = b2 - 4ac > 0$

برهان – اولاً فرض می کنیم   :

می توان نوشت :

$\Delta = b2 - 4ac > 0$ (۲)

$$ax2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$$

اما چون Δ بزرگتر از صفر فرض شده است معادله (۱) دو ریشه دارد و داریم:

$$x' + x'' = -\frac{b}{a} \quad \text{و} \quad x'x'' = \frac{c}{a}$$

پس رابطه (۲) به صورت زیر در می آید:

$$= a(x^2 - xx' - xx'' + x'x'')$$

$$= a[x(x - x') - x''(x - x')]a(x - x')(x - x'')$$

$$= a(x - x')(x - x'')$$

$$a(x - x')(x - x'')$$

و قضیه در این حالت ثابت است.

Δ= b2 – 4ac = 0

ثانیاً فرض می کنیم :

Δ= b2 – 4ac = 0

در این صورت داریم $c = \frac{b^2}{4a}$ و بنابراین رابطه (۲) چنین نوشته می شود:

$$a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2})=a(x+\frac{b}{2a})^2$$

دراین حالت معادله (۱) یک ریشه مضاعف دارد که ان را َX می

نامیم. می دانیم که ، پس رابطه اخیر چنین نوشته می شود:

$$a(x-x')^2$$

و قضیه در این حالت نیز ثابت است.

و قضیه در این حالت نیز ثابت است.

تبصره – در صورتی که $\Delta = b2 - 2ac < 0$، معادله (۱)

ریشه ندارد و نمی توان عبارت (۱) را به حاصل ضرب عاملهای

درجه اول بر حسب x تجزیه کرد (چرا؟)، اما چون در این حالت

داریم $2ac - b2 > 0$ رابطه (۲) را می توان به صورت زیر

نوشت:

داریم 2a-b2>0 ، رابطه (۲) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$$

$$= a[(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{2a^2}) + (\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2})]$$

$$= a[(x + \frac{b}{2a})^2 + (\frac{4ac - b^2}{4a^2})]$$

و به طور خلاصه :

$$a[(x + \frac{b}{2a})^2 + (\frac{4ac - b^2}{4a^2})]$$

و با توجه به این که در رابطه (۳) مقدار داخل کروشه مجموع

دو مقدار مثبت (چرا؟) و در نتیجه به ازای جمع مقادیر **x**

مثبت است ، واضح می شود که:

اگردر یک سه جمله ای درجه دوم مقدار **b2-4ac** منفی باشد،

مقدار آن سه جمله ای برابر است با حاصل ضرب **a** در یک

عبارت مثبت.

مثال ۱- تجزیه سه جمله ای : $63x2 + 25x + 2$

ریشه های معادلۀ: $63x2 + 25x + 2=0$ عبارتند از و ، پس

سه جمله ای $f(x)$ به صورت زیر تجزیه می شود:

$$63\left(x+\frac{1}{9}\right)\left(x+\frac{2}{7}\right)=(9x+1)(7x+2)$$

مثال ۲- تجزیه سه جمله ای: $g(x) = 5x2 +$

$30x +45$

مبین معادله: $5x2 + 30x +45=0$ صفر است و ریشه

مضاعف این سه جمله ای

$-3 = x'' = x'$ می باشد. پس سه جمله ای به صورت زیر تجزیه

می شود:

$5(x+3)2$

مثال ۳– سه جمله ای 3x2 + 3x +8 ریشه حقیقی ندارد (چرا؟) و نمی توان آن را به حاصل ضرب عاملهای درجه اول تجزیه کرد، اما طبق رابطه (۳) می توان آن را به صورت زیر نوشت:

ح – علامت سه جمله ای درجه دوم

۱۷– سه جمله ای درجه دوم

$$f(x) = ax2 + bx + c \qquad (۱)$$

را در نظر می گیریم. به طوری که در شماره ۱۶ همین فصل

دیدیم، برحسب آن که

در این سه جمله ای مقدار b2 – 4ac منفی یا صفر یا مثبت

باشد، سه جمله ای ریشه نداشته یا یک ریشه مضاعف و یا دو

ریشه متمایز x' و x'' خواهد داشت و می توان آن را به ترتیب به

یکی از سه صورت زیر نوشت :

$$f(x)=ax^2+bx+c=a[(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}]$$

$$f(x)=ax^2+bx+c=a(x+\frac{b}{2a})^2=a(x-x')^2$$

$$f(x)=ax^2+bx+c=a(x-x')(x-x'')$$

واضح است در حالاتی که سه جمله ای درجه دوم یک ریشه

مضاعف یا دو ریشه متمایز داشته باشد، مقدار عددی سه جمله

ای فقط به ازای این ریشه ها برابر با صفر خواهد شد و به ازای

سایر مقادیر x مخالف با صفر است.

حال بر حسب آن که b2-4ac منفی یا صفر و یا مثبت باشد،

برای تعیین علامت سه جمله ای سه حالت تمیز می دهیم.

حالت اول – $b^2-4ac < 0$

دراین حالت با توجه به تبصره مربوط به قضیه ای که ضمن شماره ۱۶ همین فصل آوردیم، گوییم چون در رابطه (۱) داریم $a\neq0$ و مقدار داخل کروشه به ازای جمع مقادیر x مثبت است، پس سه جمله ای به ازای هیچ مقدار از x صفر نمی شود و علامت سه جمله ای در این حالت همواره همان علامت a می باشد.

پس هر گاه مبین سه جمله ای درجه دوم منفی باشد، علامت

سه جمله ای به ازای جمیع مقادیر x همان علامت a است.

حالت دوم – $b^2-4ac = 0$

در این حالت با توجه به رابطه (۲)، سه جمله ای به صورت

$a(x-x')^2$ در می آید که در آن $(x-x')^2$ به ازای جمیع

مقادیر x به جز ریشه مثبت بوده و در نتیجه علامت

$a(x-x')^2$ همان علامت a است.

پس هر گاه مبین سه جمله ای درجه دوم صفر باشد، علامت سه

جمله ای به ازای جمیع مقادیر x به غیر از ریشه همان علامت

a است (به ازای ریشه برابر صفر است)

حالت سوم –   b2-4ac > 0

دراین حالت با توجه به رابطه (۳) ، سه جمله ای به صورت (ً (

c(x-x´(x-x در می آید و برای تعیین علامت آن با فرض ً >

x´ x سه حالت تمیز می دهیم.

اولاً اگر مقدار عددی x از ریشه x َ بزرگتر باشد، x-x َ و x-x ً هر دو مثبت هستند و حاصل ضرب آنها هم مثبت است و علامت سه جمله ای همان علامت a است.

ثانیاً اگر مقدار عددی x از x َ کوچکتر ولی از x ً بزرگتر باشد، x-x َ منفی ولی x-x ً مثبت است. پس حاصل ضرب آنها منفی است. اگر a منفی باشد، سه جمله ای مثبت است و اگر a مثبت باشد، سه جمله ای منفی است، پس علامت سه جمله ای درجه دوم مخالف علامت a است.

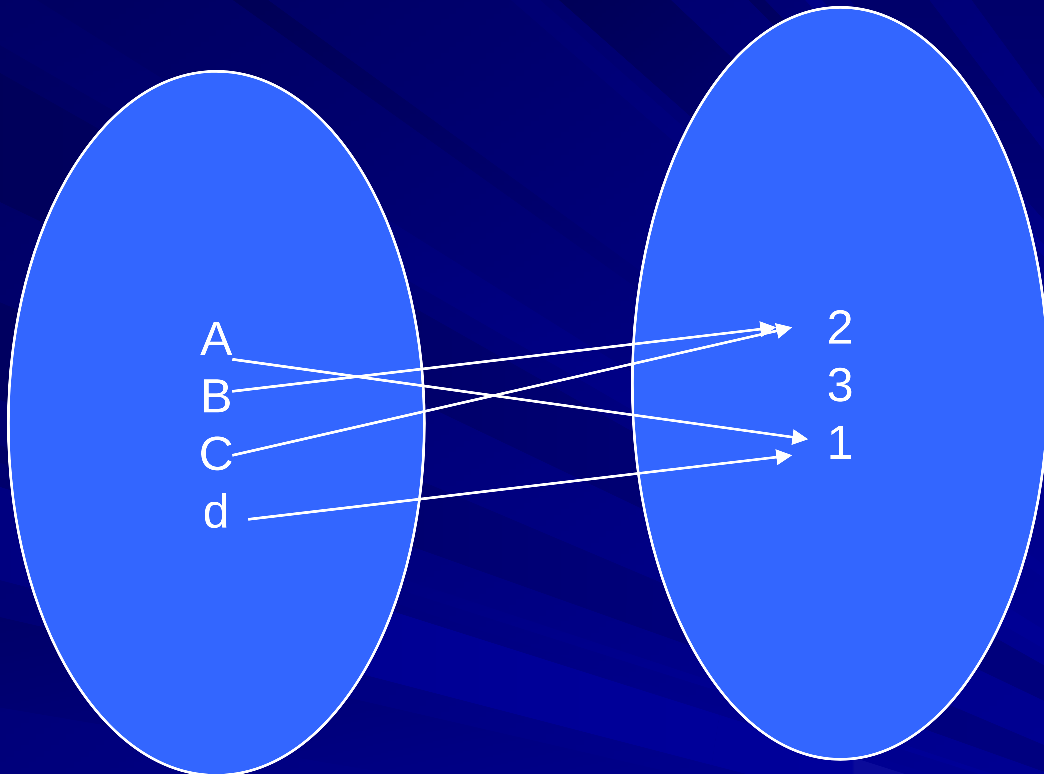
ثالثاً اگر مقدار عددی x از ًx کوچکتر باشد، َx-x و ًx-x هر دو

منفی و حاصل ضرب آنها مثبت است و علامت سه جمله ای

همان علامت a می باشد.

و بالاخره به ازای َx=x و ًx=x سه جمله ای درجه دوم صفر می

شود.

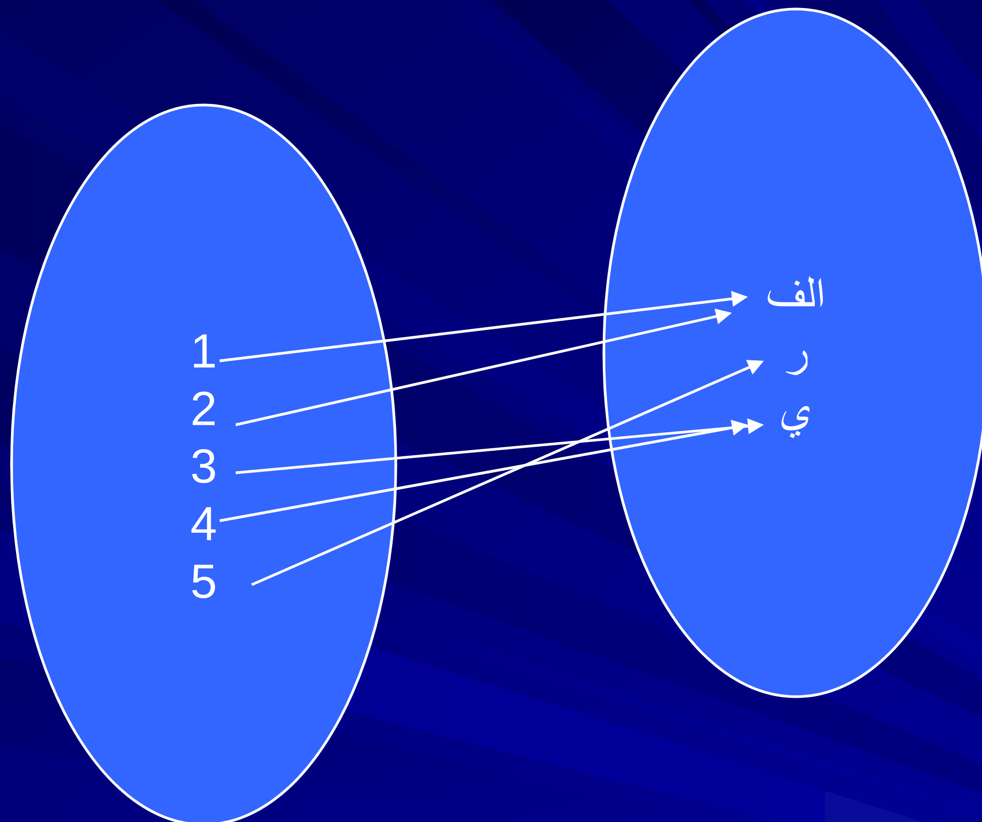

A
B
C
d
2
3
1

پس هر گاه سه جمله ای درجه دوم مثبت باشد، علامت سه جمله ای به ازای مقادیر عددی x که از هر دو ریشه بزرگتر یا از هر دو ریشه کوچکتر باشد همان علامت a است. ولی به ازای اعدادی که مابین دو ریشه هستند (از یکی کوچکتر و از دیگری بزرگترند)،

معمولاً مقادیری از x را که از هر دو ریشه بزرگتر یا از هر دو ریشه کوچکترند مقادیر خارج در ریشه و مقادیری که مابین دو ریشه هستند داخل دو ریشه گویند.

مثال۱– به ازاء مقادیر مختلفx ، علامت سه جمله ای $2x2 - 5x - 3$ را تعیین کنید

x	مقادیر کوچکتر از $-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$		2	مقادیر بزرگتر از ۲
$2x^2-5x-3$	$+$	0	$-$	0	$+$


1
2
3
4
5
الف
ر
ي

x	۳- مقادیر کوچکتر از	۳-		$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$ مقادیر بزرگتر از
$-۲x^۲-۵x+۳$	$-$	۰	$+$	۰	$-$

ط – حل نا معادلات درجه دوم

۱۸ – هر نامعادله که پس از نقل تمام جمله ها به یک طرف و اختصار به یکی از دو صورت کلی:

(۱) $ax2 + bx + c > 0$ یا (۲) $ax2 + bx + c < 0$

در آید، نامعادله درجهٔ دوم نامیده می شود.

مقصود از حل نامعادلات به صورتهای (۱) یا (۲) تعیین همه اعدادی است که چون به جای x گذارده شوند طرف اول نامعادلهٔ (۱) را مثبت یا (۲) را منفی کند. به عبارت دیگر، باید مقادیری از x را معین ساخت که به ازای آنها یک سه جمله ای درجه دوم مثبت یا منفی باشد.

۱۹- حل نامعادلاتی که یک طرف آنها حاصل ضرب چند عبارت درجه اول یا دوم است- برای حل نامعادلاتی که به صورت کلی $A \times B \times C \times D \times \ldots > 0$ باشند (A , B , C و .. چند جمله ایهای درجه اول یا دوم می باشند) علامت هر یک از عبارتهای A, B, C را جداگانه معین و همه مقادیر X را که به ازای آنها هر یک از عبارتهای مزبور مثبت یا منفی است تعیین کرده سپس از روی آنها علامت حاصل ضربشان را معین می سازیم.

برای سهولت عمل بهتر این است که جوابهای هر یک از چند جمله ایها را معین کنیم و این ریشه ها را به ترتیبی که از کوچکترین آنها شروع و به بزرگترین آنها ختم شود در جدولی از چپ به راست بنویسیم و در فاصله ما بین هر دو عدد متوالی، علامت هر عبارت و علامت حاصل ضرب را معین کنیم.

مثال – مطلوب است حل نامعادله:

$$(x+1)(3-2x)\ (2x2\ -8) > 0$$

برای حل نامعادله جدول زیر را رسم می کنیم:

x	مقادیر کوچکتر از ۲−	۲−		۱−		$\frac{3}{2}$		۲	مقادیر بزرگتر از ۲
علامت x+۱	−		−	•	+		+		+
علامت ۳−۲x	+		+		+	•	−		−
علامت ۸−۲x²	+	•	−		−		−	•	+
علامت حاصل ضرب	−		+		−		+		−

از این جدول معلوم می شود که به ازای $-2 < x < -1$ و $< x < 2$ طرف اول نامعادله مفروض مثبت می باشد.

۲۰– نامعادلات کسری – نامعادله کسری، نامعادله ای است به صورت که صورت و مخرج آن هر دو یا تنها مخرج آن شامل حرف مجهول باشد. برای حل این نامعادلات، حتی المقدور باید صورت و مخرج را به حاصل ضرب عوامل درجه اول یا درجه دوم تجزیه کرد، سپس علامت هر عبارت و علامت حاصل ضرب و در نتیجه علامت کسر را مشخص کنیم.

تبصره ۱ – هیچ وقت در حل نامعادلات کسری نباید از مخرج کسر صرف نظر کرد، زیرا این مخرج نیز تغییر علامت می دهد و علامت کسر به علامت مخرج هم بستگی دارد. مگر این که مطمئن باشیم که علامت مخرج همواره مثبت است، مثل کسری که مخرج آن مجذور کامل باشد که در این صورت علامت کسر همواره هم علامت با صورت است.

اگر مخرج کسر همواره منفی باشد آنگاه علامت کسر همواره مخالف علامت صورت کسر خواهد بود.

تبصره ۲– در حل نامعادلات کسری باید این نکته را در نظر داشت که علامت حاصل ضرب دو مقدار همیشه با علامت نسبت آنها یکی است. بنابراین بهتراست به جای تعیین علامت کسر $\frac{f(x)}{g(x)}$ علامت حاصل ضرب $g(x) \times f(x)$ را معین کنیم، البته باید متوجه بود که به ازای ریشه های معادله $g(x) = 0$ کسر فوق نامعین است.

مثال – مطلوب است حل نامعادلۀ:

$$\frac{-x^2+10x+10}{x^4-1}>0$$

حل – صورت و مخرج کسر طرف اول نامعادله را به حاصل ضرب عوامل تجزیه می کنیم:

-x2 + 3x + 10 = -(x+2)(x-5)

= (x+2) (5-x)

X2 - 1 = (x - 1) (x2 + x + 1)

علامت کسر طرف اول نامعادلۀ مفروض همان علامت حاصل ضرب

(x + 2) (1-x) (x-1)(x2 +x+1)

می باشد پس علامت عبارت هر پرانتز را جداگانه معین می

کنیم و نتایج حاصل را به ترتیب در جدولی می نویسیم و

فواصلی را که در آنها حاصل ضرب مفروض مثبت است معین

می کنیم :

x	مقادیر کوچکتر از ۲−	۲−		۱		۵	مقادیر بزرگتر از ۵
علامت $x+2$	−	•	+		+		+
علامت $5-x$	+		+		+	•	−
علامت $x-1$	−		−	•	+		+
علامت x^2+x+1	+		+		+		+
نتیجه	+ جواب	∘	−	+ نامعین	جواب	∘	

از این جدول معلوم می شود که علامت کسر مفروض به ازای تمام اعداد کوچکتر از ۲– و به ازای مقادیر $1 < x < 5$ مثبت است.

۲۱– تبصره – در بسیاری از نامعادلات کسری، حرف مجهول در هر دو طرف نامعادله وجود دارد، در این صورت قاعده این است که تمام جمله ها را به یک طرف منتقل و تمام کسرها را به یک مخرج تحویل کنیم و حل نامعادله به همان صورت کلی سابق انجام می گیرد.

سوال ۲:

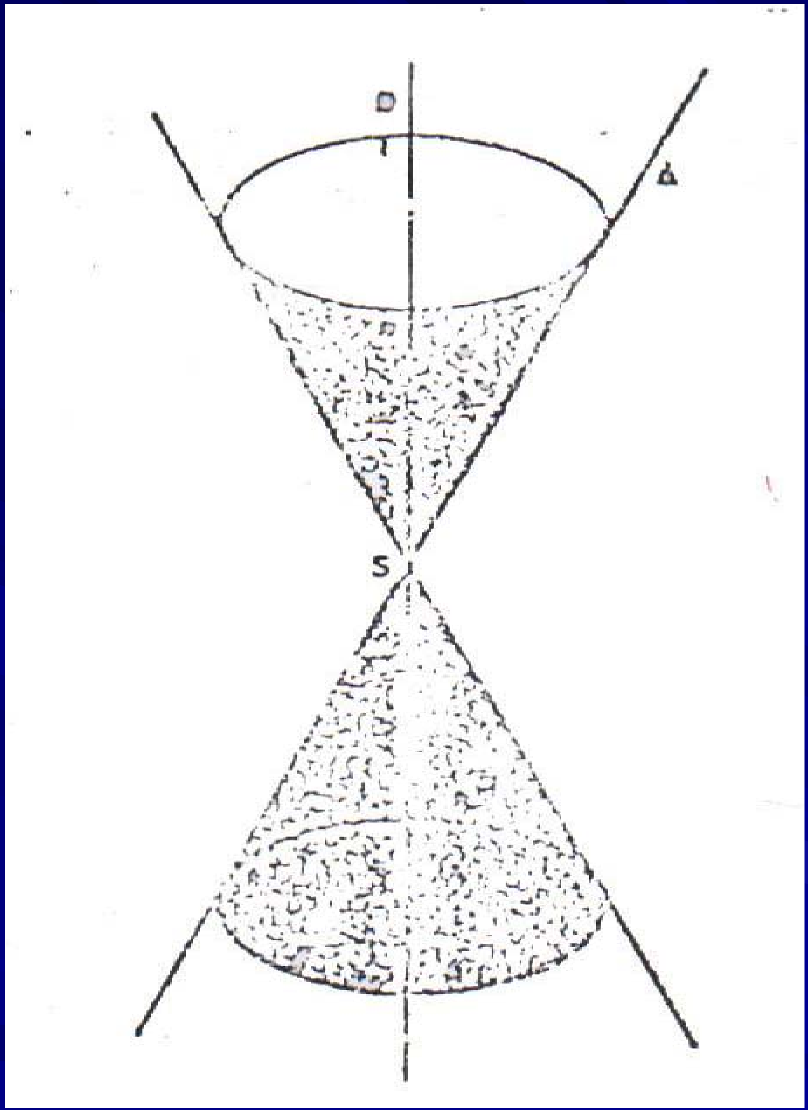
متن ذیل فصلی از یک کتاب درسی دبیرستانی است. آنرا به دقت مطالعه نموده و خلاصه ای از آن را ارائه دهید.

مقاطع مخروطی

پیشگفتار

چهار نوع منحنی مسطح با خاصیتهای بسیار مهم از زمانهای دور به مقاطع مخروطی معروف می باشند. زیرا هر یک از این منحنیها فصل مشترک صفحه با سطح مخروطی است.

می دانیم که سطح مخروطی دوار از دوران یک خط حول خط دیگری که با آن متقاطع است پدید می آید. خط ثابت محور سطح مخروطی ، خط متحرک مولد سطح مخروطی، نقطه تلاقی دو خط ، یعنی نقطه ثابت دوران، رأس سطح مخروطی و هر یک از دو بخش سطح مخروطی که در دو طرف رأس باشند یک دامنه از آن نام دارند.


D
Δ
S

در شکل بالا، خط Δ حول خط ثابت D که با آن در S متقاطع است دوران کرده است سطح مخروطی پدید آمده است که D محور آن Δ مولد آن و S رأس آن می باشد.

هر گاه صفحه ای عمود بر محور سطح مخروطی آن را قطع کند، فصل مشترک آنها منحنی دایره است که خواص مهم آن را می شناسیم.

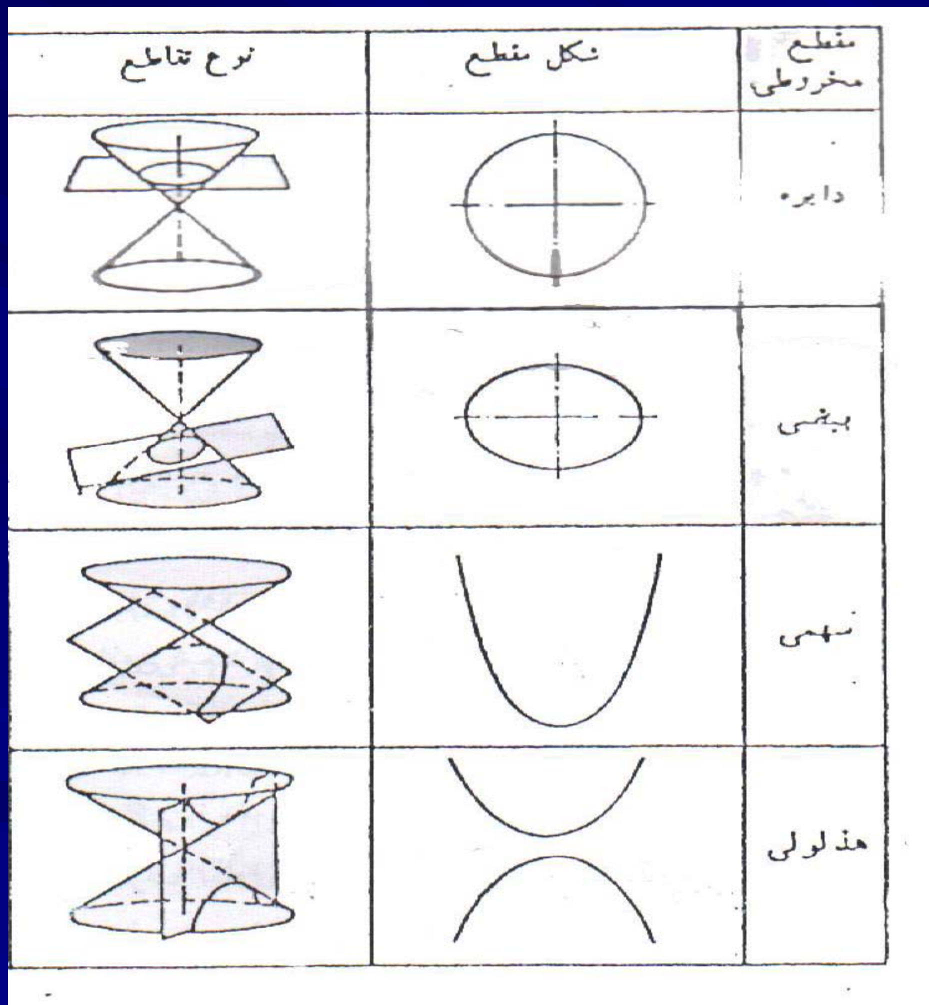
هر گاه صفحه ای غیر عمود بر محور و غیر موازی با مولد یک دامنه از سطح مخروطی را قطع کند، مقطع حاصل منحنی است به نام بیضی که با آن نیز آشنایی داریم.

اگر صفحه ای دو دامنه از سطح مخروطی را قطع کند فصل مشترک منحنی است که از دو قسمت جدا از هم تشکیل شده است و هذلولی نام دارد. منحنی نمودار تابع هموگرافیک نوعی هذلولی است.

هر گاه صفحه ای با یک مولد سطح مخروطی موازی باشد و آن را قطع کند (فقط یک دامنه را قطع می کند) مقطع حاصل منحنی است به نام سهمی. منحنی نمودار تابع درجه دوم نیز سهمی است.

در شکل زیر هر یک از منحنیها و چگونگی تقاطع صفحه با

سطح مخروطی نشان داده شده است.



هر یک از منحنی های مقطع مخروطی مجموعه ای از نقاط

واقع در یک صفحه و دارای خاصیت معین می باشند. در

بررسیهای هندسی یا تحلیلی نیز این منحنی ها به صورت

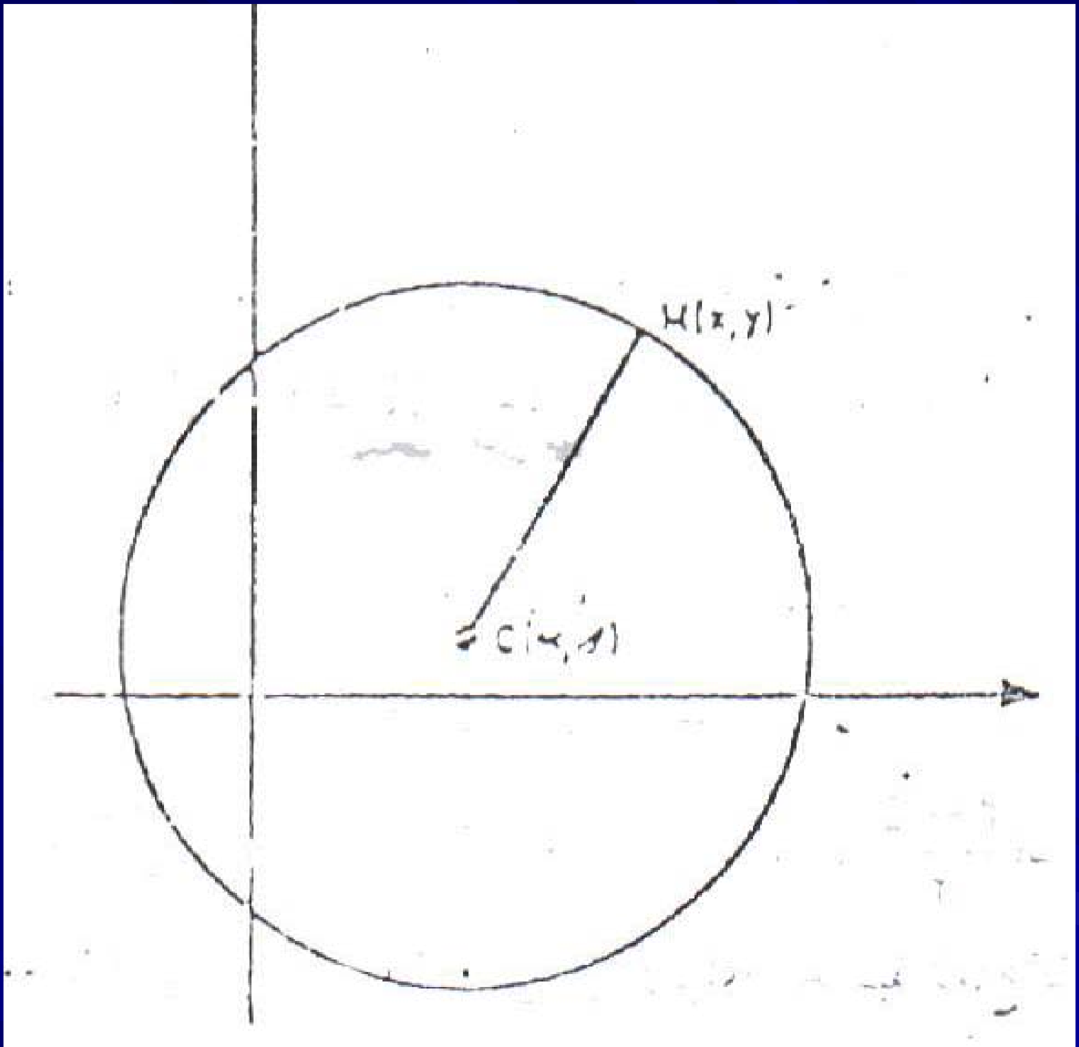
مجموعه ای از نقاط منظور می شوند. تعیین معادله های این

منحنی ها در دستگاه مختصات قائم مورد بحث این کتاب است

که در زیر به ترتیب ذکر می شود.

دایره

دایره مجموعۀ نقاطی است از صفحه که اندازۀ فاصله هر یک از آنها از یک نقطۀ ثابت برابر عدد ثابتی باشد. نقطه ثابت، مرکز دایره و پاره خطی که مرکز دایره را به یکی از نقاط آن وصل می کند شعاع دایره نامیده می شود. طول شعاع دایره را معمولاً با R نشان می دهند.


M(x, y)
C(α, β)

معادله دایره – اگر نقطه $C(\alpha,\beta)$ مرکز دایره ای به شعاع **R** و

نقطه **m(x,y)** نقطه دلخواهی از دایره باشد **CM=R** است

طول پاره خط **CM** را بر حسب مختصات نقطه های دو سر آن

حساب می کنیم:

$$CM = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}$$

و چون CM=R است از اینرو:

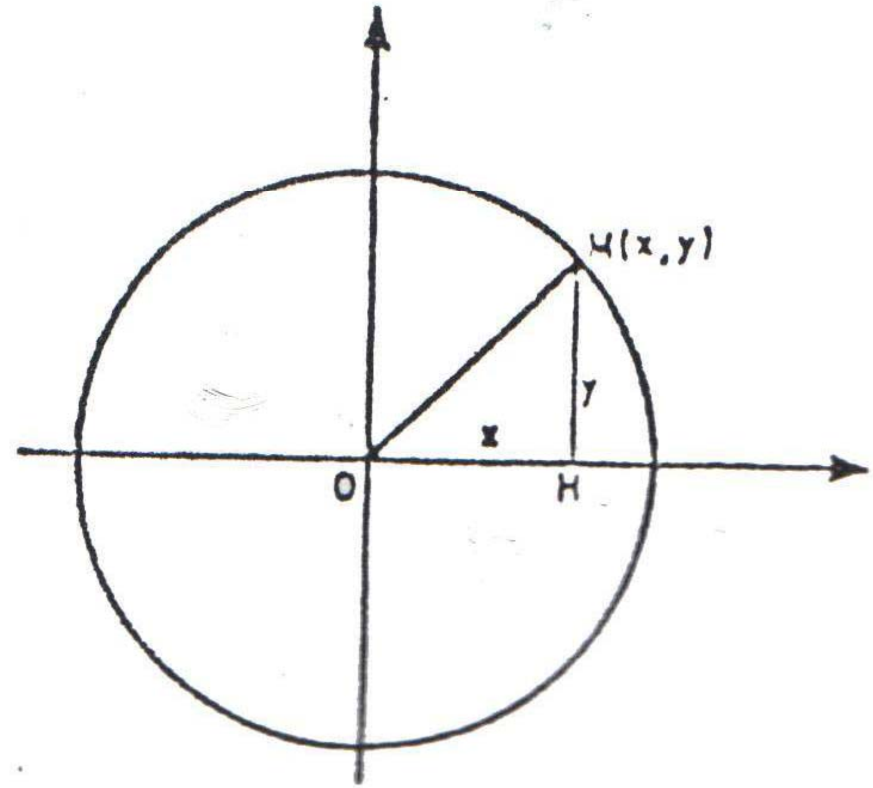
$$\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} = R$$

و اگر دو طرف تساوی را به توان ۲ برسانیم خواهیم داشت:

$$(x-\alpha)2+ (y-\beta)2=R2$$

معادله بالا معادله دایره ای است که شعاع آن R و مرکزش C (α , β) می باشد. از معادله بالا نتیجه می شود که دایره وقتی مشخص است که مختصات مرکز (α , β) و شعاع آن R معلوم باشد.

در حالت خاصی که مرکز دایره بر مبدأ مختصات منطبق باشد $(\alpha , \beta) = (0 ,0)$ خواهد بود و معادله دایره به صورت $x2 + y2 = R2$ درمی آید.


M(x,y)
y
x
O
H

مثال ۱– معادله دایره ای که شعاع آن ۴ واحد و مرکزش C(2 , -1) باشد با توجه به این که α = 2 و β= -1 و R = 4 است به صورت (x-2)2 + (y+1)2 = 16 می باشد.

مثال ۲– برای تعیین معادله دایره ای که نقاط A(3,-5) و B(-5 ,1) دو سر قطری از آن باشد، چون وسط پاره خط A B نقطه C مرکز دایره است از این رو:

$$x_c = a = \frac{3-5}{2} = -1 \qquad \text{و} \qquad y_c = \beta = \frac{1-5}{2} = -2$$

پس C(-1, -2) مرکز دایره معلوم می شود و برای محاسبه شعاع کافی است طول CA را حساب کنیم.

$$R = CA = \sqrt{(-1-3)^2 + (-2+5)^{-2}} = 5$$

پس معادله دایره به صورت (x+1)2 + (y+2)2 =25 نوشته می شود.

مثال ۳- برای نوشتن معادلهٔ دایره ای که ازنقطه $A(-2,1)$ گذشته و بر محورهای مختصات مماس باشد، چون دایره از نقطه A که در ربع دوم محورهای مختصات قرار دارد می گذرد از این رو دایره مطلوب در همین ربع بر محورهای مختصات مماس می شود و بنابراین $\alpha=-R$ و $\beta=R$ خواهد شد و معادلهٔ دایره به صورت

$(x + R)2 + (y-R)2=R2$ درمی آید و چون دایره از $A(-2$ $,1)$ می گذرد بنابراین:

$(-2+R)2 +(1-R)2= R2$

و یا $R2 - 6R + 5 = 0$ در این صورت $R= 5$ و $R=1$ خواهد

شد و معادله زیر به یکی از دو صورت زیر مشخص می شود:

$$(x + 1)2 + (y - 1)2 = 1$$

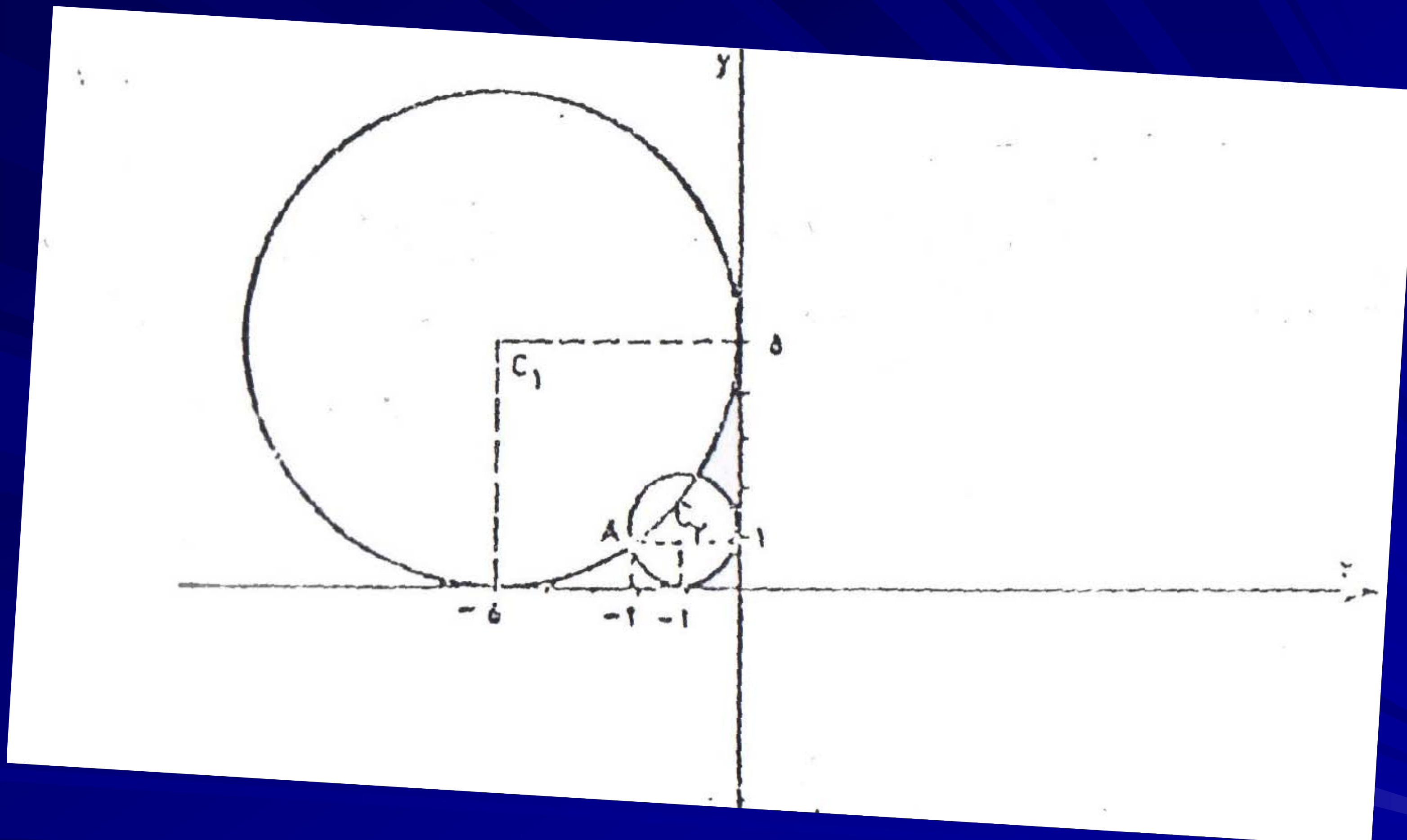
$$(x + 5)2 + (y - 5)2 = 25$$

ملاحظه می شود که مسئله دو جواب دارد، یعنی ما می توانیم

دو دایره را بر نقطه

$A(-2,1)$ مرور دهیم که بر محورهای مختصات مماس باشند.

(مطابق شکل)



y
8
C1
A
C2
1
x
-6
-2
-1

صورت دیگر معادله دایره – همانطور که دیدیم معادله دایره به صورت:

$(x-\alpha)2 + (y -\beta)2 = R2$ می باشد.این معادله را به صورت زیر می نویسیم:

$$X2 + y2 - 2\alpha x - 2\beta y - R2 + \alpha 2 + \beta 2 =0$$

$$X2 + y2 + ax + by +c = 0$$

حال اگر $-2\alpha = a$ و $-2\beta = b$ و $\alpha 2 +\beta 2 - R2 = c$ قرار دهیم معادله دایره به صورت زیر نوشته می شود :

$$X2 + y2 + ax + by +c = 0$$

اگر به این صورت معادله دایره توجه داشته باشیم ملاحظه می کنیم:

معادله دایره نسبت به x و y از درجه دوم است.

درمعادله دایره ضریبهای $x2$ و $y2$ با هم برابرند و مساوی یک می باشند (هرگاه این ضرایب برابر باشند اما یک نباشد از تقسیم طرفین معادله بر ضریب مشترک ضرایب جدید برابر یک خواهند شد.)

معادله دایره شامل جمله به صورت xy نیست.

اگر $R = 0$ باشد دایره به یک نقطه تبدیل می شود واگر $R < 0$ باشد دایره ای وجود ندارد.

مثال ۴- معادله زیر را در نظر می گیریم:

این معادله را به ترتیب زیر عمل می کنیم:

$$(x2 \ -4x+\ldots) + (y2+6y+\ldots)=12$$

مجذور نصف ضریب درجه اول را اضافه و کم می کنیم:

$$(x2 - 4x + 4 - 4) + (y2 + 6y + 9 -9) = 12$$

$$(x-2)2 - 4 + (y + 3)2 - 9 = 12$$

بالاخره خواهیم داشت:

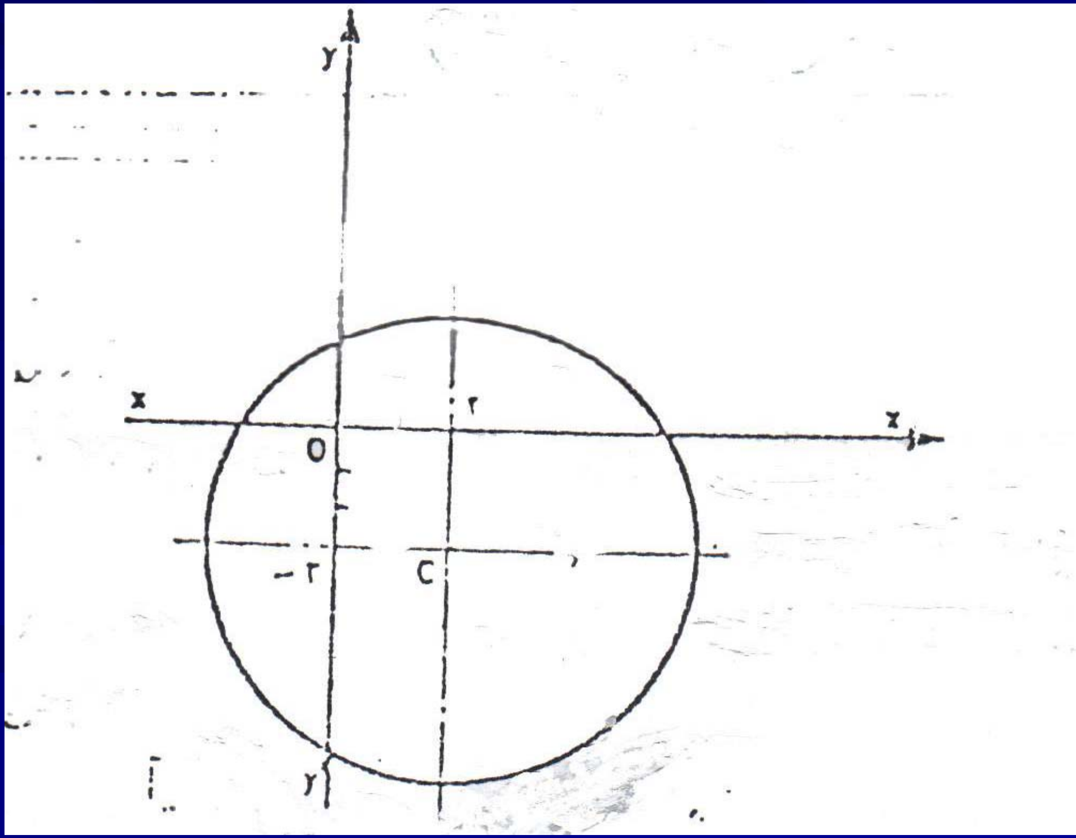
$$(x - 2)2+ (y + 3)2=25$$

که معادله دایره ای است که نقطه $C(2,-3)$ مرکز و $R = 5$

شعاع آن است.

برای رسم این دایره نخست دردستگاه مختصات مرکز آن را

مشخص میکنیم، آنگاه با توجه به این که شعاع آن معلوم است



آن را رسم می کنیم.

مثال ۵– رسم نمودار منحنی به معادله $4x2 + 4y2- 4x + 8$
$0 = 11 – y$ چون ضرایب $x2$ و $y2$ مساوی اند طرفین معادله
را بر ۴ یعنی ضریب مشترک آنها تقسیم می کنیم:

$$X^2 + y^2 - x + 2y - \frac{11}{2} = 0$$

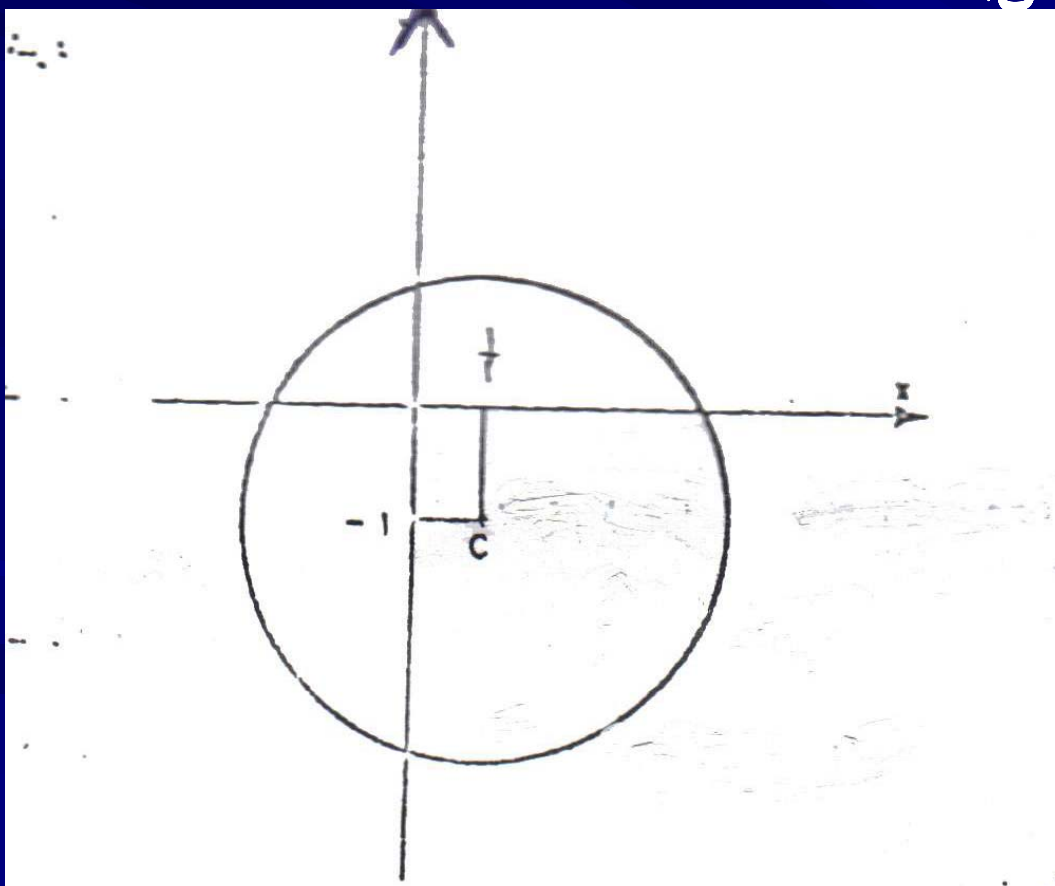
$$X^2 - x + y^2 + 2y = \frac{11}{2}$$

$$x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + y^2 + 2y + 1 - 1 = \frac{11}{4}$$

$$(x - \frac{1}{2})^2 + (y + 1)^2 - \frac{5}{4} = \frac{11}{4}$$

$$(x - \frac{1}{2})^2 + (y + 1)^2 = 4$$

منحنی مطلوب دایره ای است که مرکز آن (1- و) C و شعاع آن ۲ می باشد. این دایره را پس از مشخص کردن مرکز آن رسم می کنیم. (مطابق شکل)



مبدأ مختصات و به Oمعادله مماس بر دایره – دایره به مرکز

را در نظر می گیریم ، معادله این دایره می شود: Rشعاع

X2 + y2 = R2

خطی باشد که ∆ نقطه ای از این دایره و P(x1 , y1)هر گاه

∆بر این دایره مماس است، ضریب زاویه ای خط Pدرنقطه

، که از معادله بالا به دست می x نسبت به yبرابر است با مشتق

را حساب می y. بنابراین ازمعادله بالا َPآید، به ازاء مختصات

کنیم:

$$2x + 2y'y = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}$$

اگر m ضریب زاویه ای مماس Δ باشد داریم: $m = -\dfrac{x_1}{y_1}$

از طرف دیگر هر گاه M(x,y) نقطه غیر مشخص خط Δ باشد داریم:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

بنابراین داریم:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = -\frac{x_1}{y_1} \Rightarrow x_1 x + y_1 y = x_1^{\,2} y_1^{\,2}$$

چون $P(x1,y1)$ روی دایره است پس $x12 + y12 = R2$

معادله Δ می شود:

$$x1x + y1y = R2$$

اگر دایره به مرکز $C(\alpha , \beta)$ و به شعاع R اختیار شده باشد

معادله آن می شود :

$$(x-\alpha)2 + (y-\beta)2 = R2$$

چنانچه محورهای مختصات را به موازات خود انتقال دهیم تا

مرکز این دایره مبدأ

جدید باشد، نسبت به دستگاه جدید معادله دایره $x2 + y2 =$

$R2$ و معادله مماس در

نقطه $(x1 , y1)$ بر آن عبارت است از: $x1x + y1y = R2$

اما داریم $x = x-\alpha$ و

$y = y-\beta$ بنابراین در دستگاه مختصات مفروض معادله خطی

که بر دایره درنقطه $(x1,y1)$ مماس است چنین خواهد بود.

$$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - \beta)(y - \beta) = R^2$$

مثال ۱- معادله خطی که در نقطه $P\ (3,-2)$ بر دایره $x2 + y2 = 25$ مماس است

عبارت است از :

$$3x - 4y = 25$$

مثال ۲- برای نوشتن معادله خط ماس در مبدأ مختصات بر دایره (مبدأ مختصات روی دایره است).

$$X2 + y2 - 2x + 4y = 0$$

نخست معادله دایره را چنین می نویسیم:

$$x2-2x+1-1+y2+4y+4-4=0$$

$$(x-1)2 + (y+2)2=5$$

چون $O(x1=0\ ,\ y1=0)$ نقطه تماس است پس معادله خط

مماس می شود: $(0-1)(x-1)+(0+2)(y+2)=5 \Rightarrow y=\frac{1}{2}x$

مسئله – معادله خطی را بنویسید که از نقطه $I(-2,-4)$ میگذرد

و بر دایرهٔ به معادله زیر مماس است:

$$X2 + y2 + 2x - 6y - 15 = 0$$

برای حل این مسئله سه روش می توانیم به کار ببریم:

روش اول – معادله دایره می شود:

$$(x + 1)2 + (y - 3)2 = 25$$

(۱) نقطه تماس را $(x1+1)(x+1) + (y1-3)(y-3) = 25$

می گیریم پس معادله مماس می شود: $P(x\ l,y1)$

می گذرد پس: $(-2,-4)$اچون این خط بر نقطه

$$(x1+1)(-2+1) + (y1-3)(-4-3) = 25$$

پس از ساده کردن می شود:

(۲) $(x1+1) + 7(y1-3) = - 25$

بر دایره است داریم: Pو چون

(۳) $(x1 + 1)2+(y1-3)2 = 25$

به y 1 و x 1از حل دو معادله دو مجهولی (۲) و (۳) مقادیر

+ x1دست می آید. برای حل این دستگاه از معادله (۲) داریم

و در معادله (۳) منظور می کنیم: $1 = -7\ (y1-3)\ -25$

$$[-7(y1-3)\ -25]2 + (y1 – 3)2 = 25$$

$(y – 3)2\ -7(y1 – 3)\ -12 = 0 \Rightarrow y1-3 = -3$ یا -4

سر انجام خواهیم داشت:

$$P2\ (x1 = -5\ ,\ y1 = 0)$$ یا $$P1(x1= +2\ ,\ y1=-1)$$

با قرار دادن مقادیر بالا در معادله (۱) معادله خط مماس مطلوب به یکی از دو صورت زیر بدست می آید:

$$4x + 3y + 20 = 0$$ یا $$3x - 4y - 10 = 0$$

روش دوم – ضریب زاویه ای خط مماس را m میگیریم، پس معادله خط مماس می شود:

$$y+4 = m(x+2) \Rightarrow y = mx + 2m - 4 \quad (۱)$$

این خط وقتی بر دایره مماس است که اگر معادله ان را با معادله دایره با هم حل کنیم، معادله حاصل ریشه مضاعف داشته باشد .

مقدار y از معادله (۱) را درمعادله دایره قرار می دهیم و ساده می کنیم:

$$x^2 + (mx + 2m - 4)^2 + 2x - 6(mx + 2m - 4) - 15 = 0$$

$$(1 + m^2)x^2 + 2(2m^2 - 7m + 1)x + 4m^2 - 28m + 25 = 0$$

این معادله وقتی ریشه مضاعف دارد که داشته باشیم:

$$\Delta = (2m^2 - 7m + 1)^2 - (1 + m^2)(4m^2 - 28m + 25) = 0$$

پس از ساده کردن:

$$12m^2 + 7m - 12 = 0 \Rightarrow m = \frac{4}{3}$$ یا

با قرار دادن این مقادیر درمعادله (۱) معادله مماس به دست می آید:

$$y = -\frac{2}{3}x - \frac{8}{3} - 4 \Rightarrow 4x + 3y + 20 = 0$$

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2} - 4 \Rightarrow 3x - 4y - 10 = 0$$

روش سوم – معادله دایره را چنین می نویسیم:

(x+1)2 + (y-3)2 = 25

مرکز دایره **C(-1 , 3)** و شعاع آن **R = 5** است. ضریب زاویه ای خط مماس را **m** می گیریم، پس معادله خط مماس می شود:

mx – y + 2m – 4 = 0 (۱)

یک خط وقتی بر دایره ماس است که فاصله مرکز دایره تا آن خط برابر با شعاع دایره باشد.

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$5 = \frac{|-m - 3 + 2m - 4|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{|m - 7|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

از این معادله مقدار m به دست می آید و آن را درمعادله (۱) منظور می کنیم معادله خط مماس مشخص می شود.

قائم بر دایره – می دانیم که قائم بر یک منحنی در یک نقطه M واقع بر منحنی، خطی است که در نقطهM بر خطی که درM مماس بر منحنی است عمود باشد. نیز می دانیم که مماس بر دایره بر شعاع نقطه تماس عمود است .

بنابراین قائم بر دایره درهر نقطه آن از مرکز آن دایره می گذرد.

برای تعیین معادله قائم بر دایره از یک نقطه معین (بر دایره واقع باشد یا نباشد) کافی است معادله خطی را بنویسیم که از آن نقطه و از مرکز دایره می گذرد.

مثال – برای تعیین معادله خطی که از نقطه **I(4,-1)** می گذرد و قائم بر دایرهٔ به معادلهٔ زیر است:

$$x2 + y2 + x + 3y - 1 = 0$$

نخست مرکز دایره را مشخص می کنیم:

$$x2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+y^2+2y+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}-1=0$$

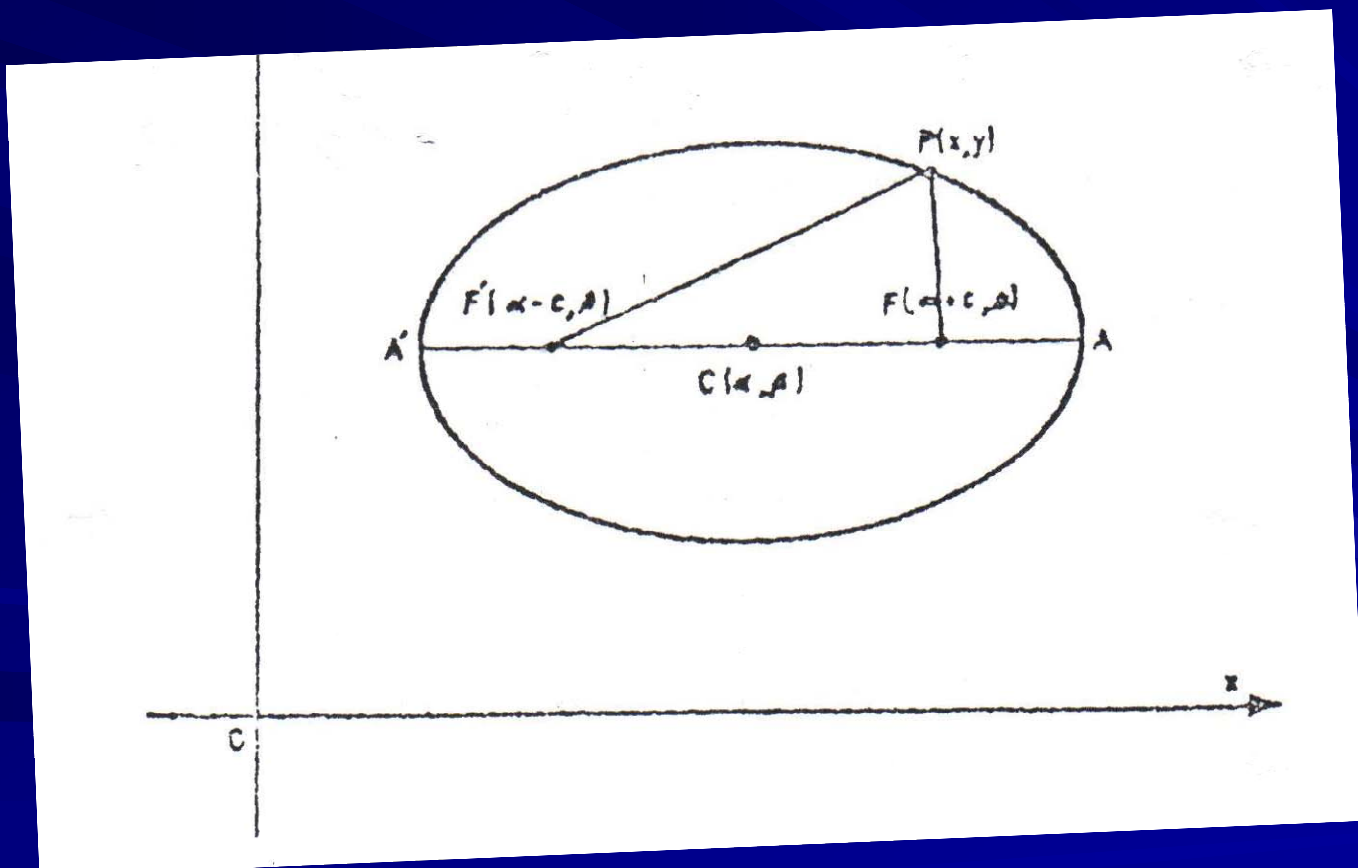
$$(x+\frac{1}{2})^2+(y+\frac{3}{2})^2=\frac{14}{4}\Rightarrow C(\alpha=-\frac{1}{2} \text{ و } \beta=-\frac{3}{2})$$

اکنون معادله خط IC را می نویسیم:

$$\frac{y+1}{x-4}=\frac{-\frac{3}{2}+1}{-\frac{1}{2}-4}\Rightarrow y=\frac{1}{9}x-\frac{13}{9}$$

بیضی

بیضی مجموعه نقاطی از صفحه است که مجموع فاصله های هر یک از آنها از دو نقطه ثابت واقع در همین صفحه برابر مقدار ثابتی باشد.



این دو نقطه ثابت را کانونهای بیضی می نامند.کانونها را با F و F' نشان می دهیم و فرض می کنیم ۲c = FF' باشد. در این فصل حالتی را مورد مطالعه قرار میدهیم که FF' یا یکی از محورهای مختصات موازی باشد.

اگر FF' را موازی محور x ها فرض کنیم و وسط FF' را C بنامیم و فرض کنیم $C(\alpha,\beta)$ باشد در این صورت: $F(\alpha+c,\beta)$ و $F'(\alpha-c,\beta)$ می شود.

اگر $P(x,y)$ نقطه دلخواهی از مجموعه نقاط تشکیل دهنده بیضی باشد بنابر تعریف $PF+PF'$ مقدار ثابتی خواهدبود که این مقدار ثابت را 2a می نامیم:

$$PF+PF'=2a$$

حال فاصله ها ی PF و PF َ را بر حسب مختصات P و F و F َ حساب می کنیم:

$$PF = \sqrt{[x-(\alpha+c)]^2+(y-\beta)^2}$$

$$PF' = \sqrt{[x-(\alpha-c)]^2+(y-\beta)^2}$$

این مقادیر را در رابطه (۱) منظور می کنیم:

$$\sqrt{[x-(\alpha+c)]^2+(y-\beta)^2}+\sqrt{[x-(\alpha-c)]^2+(y-\beta)^2}=2a$$

$$\sqrt{[x-(\alpha+c)]^2+(y-\beta)^2}=2a-\sqrt{[x-(\alpha-c)]^2+(y-\beta)^2}$$

دو طرف را به توان ۲ می رسانیم پس از ساده کردن خواهیم داشت:

$$a^2+cx-c\alpha=a\sqrt{[x-(\alpha-c)]^2+(y-\beta)^2}$$

باز دو طرف را به توان دو می رسانیم که پس از ساده کردن خواهیم داشت:

$$a^2(y-\beta)^2+(a^2-c^2)(x^2+\alpha^2-2ax)=a^2(a^2-c^2)$$

$$a^2(y-\beta)^2+(a^2-c^2)(x-\alpha)^2=a^2(a^2-c^2)$$

در مثلث ´PFF داریم: PF + PF´ > FF´

یا 2a > 2c که a > c

می گردد بنابراین می توانیم a2 –c2 را مساوی b2 قرار دهیم.

در نتیجه رابطه فوق به صورت = a2(y-β)2 + b2(x-α)2 a2b2 در می آید.

دو طرف رابطه اخیر را بر **a2b2** تقسیم می کنیم درنتیجه معادله به صورت زیر به دست می آید :

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$$

اگر نقطه $C(\alpha,\beta)$ بر مبدأ مختصات منطبق شود، $(\alpha,\beta) =$ $(0,0)$می شود و از اینرو معادله بیضی که مرکز آن بر مبدأ مختصات منطبق بوده و َFFروی محور x ها قرار دارد چنین می شود :

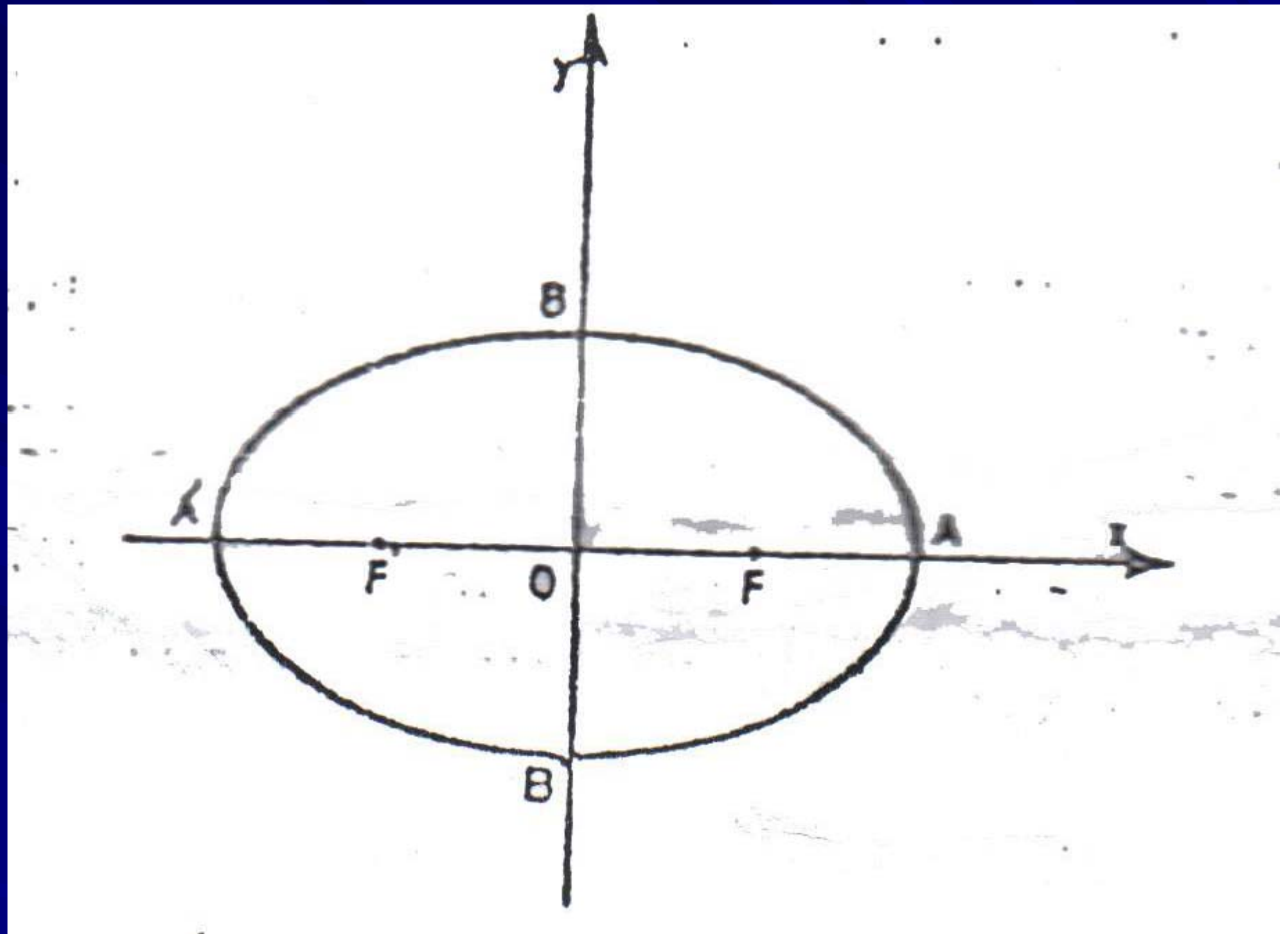
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

از معادله $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ نتیجه می شود:

اگرنقطه $P(x,y)$ روی بیضی باشد نقطه $P1(x,-y)$ هم روی بیضی است یعنی محور xها تقارن بیضی است.

اگر نقطه $P(x,y)$ روی بیضی باشد نقطه $P2(-x,y)$ هم روی بیضی است یعنی محور y ها محور تقارن بیضی است.

اگر نقطه $P(x,y)$ روی بیضی باشد نقطه $P2(-x,-y)$ هم روی بیضی است یعنی مبدأ مختصات مرکز تقارن بیضی است. در این حالت بیضی به شکل زیر است .


y
B
A'
A
x
F
O
F
B'

با توجه به اینکه a2-c2 = b2 نتیجه می شود a2 = b2 + c2 و از این رو a > b است.

اگر درمعادله بالا بیضی به صورت بالا y را برابر صفر قرار دهیم طولهای نقاط تقاطع بیضی با محور x ها به دست می آید.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{0}{b^2}=1 \Rightarrow x^2=a^2 \Rightarrow (x=a) \quad (x=-a)$$

دو نقطه A(a,0) و A´(-a,0)، یعنی نقاط تقاطع بیضی با محور x ها ، در رأس بیضی نام دارند و AA´=2a می باشد.

اگر در معادله بیضی x را مساوی صفر قرار دهیم عرضهای نقاط تقاطع بیضی با محور عرضها به دست می آید:

$$\frac{0}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow y^2=b^2 \Rightarrow (y=b) \quad (y=-b)$$

دو نقطه B(0,b) و(0,-b) ´Bکه نقاط تقاطع بیضی با محور y ها است نیز دو راس بیضی می باشد و2b = ´BBمی باشد. ´AAرا قطر بزرگ بیضی و ´BBرا قطر کوچک بیضی می نامند .

اگر قطر بزرگ بیضی موازی محورy ها باشد معادله بیضی به صورت زیر خواهد بود :

$$\frac{(y-\beta)^2}{a^2}+\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}=1$$

در این صورت کانونها عبارتند از $F(\alpha,\beta,c)$ و $F'(\alpha,\beta-c)$ که

اگر مرکز بیضی دراین حالت بر مبدأ مختصات منطبق باشد

معادله بیضی به صورت زیر نوشته می شود:

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$$

نسبت را که در مورد بیضی کوچکتر از یک است خروج از مرکز

بیضی می نامند و آن را با حرف C نشان می دهند: $0 <$

c=

نسبت $\frac{c}{a}$ را که در مورد بیضی کوچکتر از یک است خروج از مرکز بیضی می نامند و آن را با حرف C نشان می دهند:

c= < 0

مثال ۱ – معادله بیضی را بنویسید $F(\sqrt{2},0)$ که و $F'(-\sqrt{2},0)$

کانونهای آن بوده و طول قطر ۱ طول آن ۴ باشد.

مرکز بیضی وسط کانونها است بنابراین O(0,0) مرکز بیضی

است و قطر بزرگ بیضی روی محور x ها است و و یا و چون

قطر ۱ و طول بیضی ۴

است از اینرو 2a=4 و یا a=2 می شود و می دانیم b2 = a2

c2 –پس و b=1 می شود و معادله بیضی می شود :

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$$

مثال ۲ – معادله بیضی را بنویسید که C(-2, 3) مرکز آن بوده

و قطر ۱ طول آن به طول ۱۰ و موازی محور x ها و خروج از مرکز

آن c= باشد.

معادله بیضی در این حالت به صورت $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ می باشد و داریم :

α=-2 و β=3 و a=5 و با توجه به این که

$$c=\frac{c}{a}=\frac{2}{5}$$

است می توان b را نیز محاسبه کرد.

$$\frac{c}{5}=\frac{2}{5}\Rightarrow c=2$$

a2-b2=c2

یا **25 – b2 = 16 $\Rightarrow$ b=3**

پس معادله بیضی می شود:

$$\frac{(x+2)^2}{25}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$$

معادله مماس و قائم بر بیضی- برای تعیین ضریب زاویه ای مماس یا قائم بر بیضی در نقطه ای از آن، با توجه به تغییر هندسی مشتق، از معادله بیضی مشتق y ها نسبت به x به دست می آوریم و با قرار دادن مختصات نقطه تماس در آن ضریب زاویه ای خط مماس مشخص می شود و از روی آن ضریب زاویه ای خط قائم نیز به دست می آید. معادله خط مماس با قائم با معلوم بودن ضریب زاویه ای و مختصات یک نقطه مشخص می شود.

مثال- بیضی با معادله زیر داده شده است:

$$\frac{(x+1)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{16}=1$$

در نقطه Δf به طول ۳ واقع بر بیضی و واقع در ربع اول محورها مماس و قائم بر بیضی را رسم می کنیم. مطلوبست تعیین معادله های این دو خط:

نخست عرض نقطه M را به دست می آوریم:

$$x=3\Rightarrow\frac{(y-1)^2}{16}=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25}$$

$$(y-1)^2=\frac{124}{25} \text{ و } y>0\Rightarrow y=\frac{17}{5}$$

اکنون y' را حساب می کنیم: $$\frac{2(x+1)}{25}+\frac{2y'(y-1)}{16}=0\Rightarrow y'=-\frac{16(x+1)}{25(y-1)}$$

ضریب زاویه ای مماس می شود: $$m=-\frac{16(3+1)}{25(\frac{17}{5}-1)}=-\frac{16}{15}$$

ضریب زاویه ای قائم: $$m'=\frac{15}{16}$$

معادله مماس: $$y-\frac{17}{5}=-\frac{16}{15}(x-3)\Rightarrow y=-\frac{16}{15}x+\frac{23}{5}$$

معادله قائم: $$y-\frac{17}{5}=-\frac{15}{16}(x-3)\Rightarrow y=\frac{15}{16}x+\frac{47}{80}$$

مسئله – از نقطه P به طول ۴ واقع بر محور $x'x$ خطی بر بیضی

به معادلهٔ:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

مماس می شود. معادله این مماس را بنویسید:

نقطه $P(4,0)$ بر بیضی واقع نیست. ضریب زاویه ای خط

مماس را m فرض می کنیم. پس معادله خط مماس می شود

$y=mx - 4m$. این خط وقتی بر بیضی مماس می شود که

اگر معادله های آنها را با هم حل کنیم معادله حاصل ریشه

مضاعف داشته باشد .

از حذف y بین دو معادله داریم:

$$4x^2+9(mx-4m)^2-36=0$$

$$(4+9m^2)x^2-72m^2x+142m^4-36=0$$

$$\Delta'=-252m^2144=0 \Rightarrow m=\pm\frac{2\sqrt{2}}{7}$$

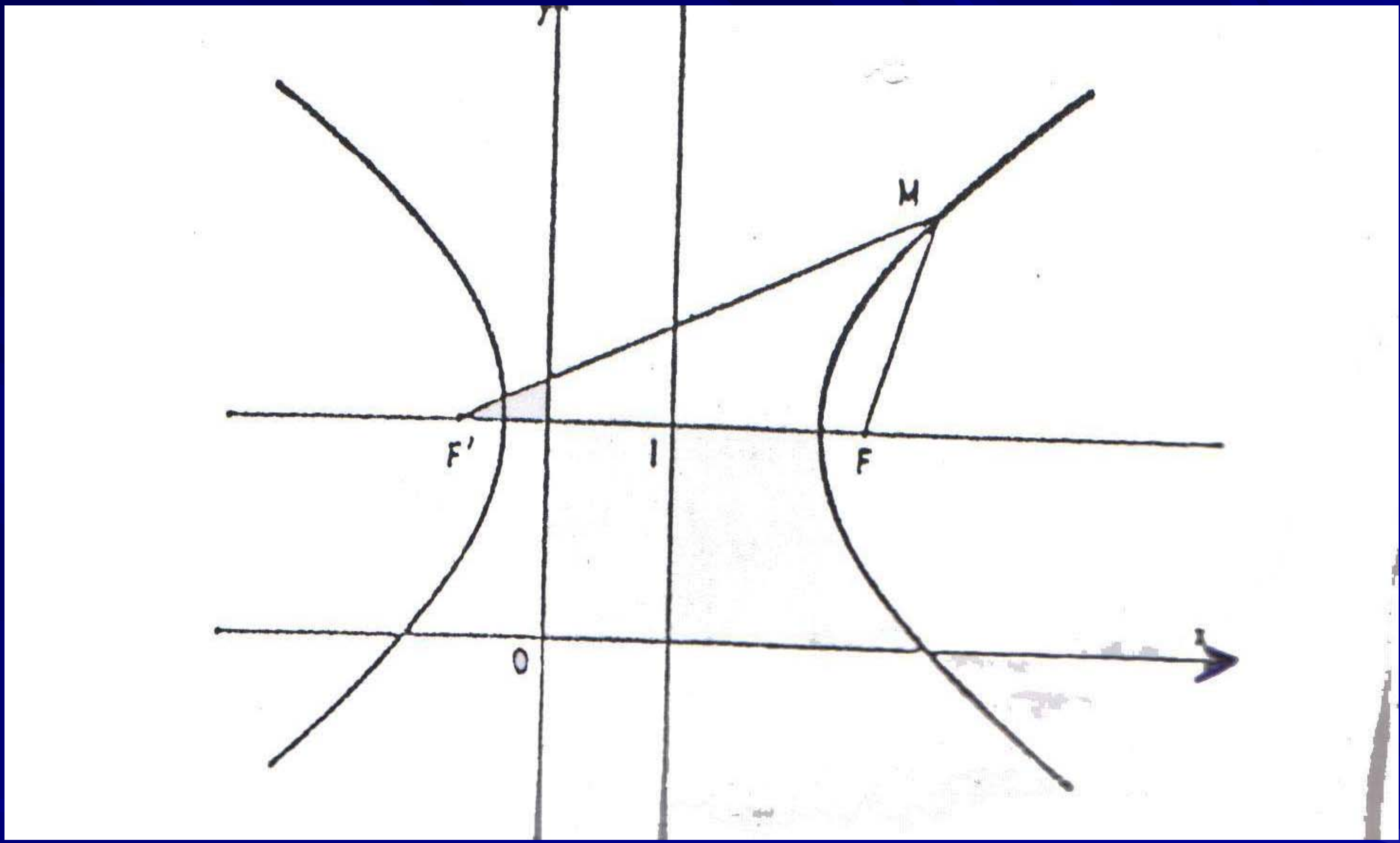
پس دو مماس می توان رسم کرد با معادله های :

$$y=\frac{2\sqrt{2}}{2}\times-\frac{-8\sqrt{7}}{7} \text{ و } y=\frac{-2\sqrt{7}}{7}+\frac{8\sqrt{7}}{7}$$

هذلولی

هذلولی مجموعه نقاطی است از صفحه که تفاضل فاصله های آنها از دو نقطه ثابت واقع در همین صفحه مقدار ثابتی باشد. دو نقطه ثابت را کانونها می نامیم و آنها را با F و َF نمایش می دهیم و مقدار ثابت را برابر با 2a می گیریم.

در این فصل فقط حالاتی از هذلولی را مورد بررسی قرار می دهیم که خط َFF با یکی از محورهای مختصات موازی باشد.


M
F'
I
F
O

اگر $M(x,y)$ نقطه ای از هذلولی و $C(\alpha,\beta)$ وسط FF' و FF' با محور x ها موازی باشد با فرض $FF'=2c$ خواهیم داشت:

$F(\alpha+C,\beta)$ و $F'(\alpha-c,\beta)$ و چون نقطه M روی هذلولی فرض شده است بنا به تعریف هذلولی $|MF'-MF|=2a$ یعنی ($MF'-MF=2a$ یا $MF-MF'=2a$) است. حال با فرض $MF'-MF=2a$ طولهای MF و MF' را بر حسب مختصات دو سر پاره خط حساب می کنیم:

$$mf'=\sqrt{[x-(\alpha-c)^2]+(y-\beta)^2}$$

و

$$mf=\sqrt{[x-(\alpha+c)^2]+(y-\beta)^2}$$

طرفین را به توان ۲ می رسانیم پس از ساده کردن حاصل می

شود: $$\sqrt{[x-(\alpha-c)^2]+(y-\beta)^2} = 2a+\sqrt{[x-(\alpha+c)^2]+(y-\beta)^2}$$

که چون طرفین را مجدداً به توان ۲ برسانیم و ساده کنیم

خواهیم داشت: $$c(x-\alpha)-a^2 = a\sqrt{[x-(\alpha+c)^2]+(y-\beta)^2}$$

$(c2-a2)\ (x2 + \alpha 2 - 2\alpha x) - a2\ (c2 - a2) = a2(y-\beta)$

$(c2-a2)\ (x2 - \alpha 2) - a2(y-\beta)2 = a2\ (c2 - a2)$

حال اگر طرفین را بر (c2-a2)a2 تقسیم کنیم نتیجه می شود:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{c^2-a^2}=1$$

در مثلث ' MFF می توانیم بنویسیم ' |MF - ' FF ' > MF|و یا 2c > 2a و C > a بنابراین c2-a2 > 0

است و فرض می کنیم c2 – a2 = b2 باشد از این رو معادله

هذلولی به صورت زیر نوشته می شود : $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$

(اگر رابطه MF-MF' = 2a هم استفاده کنیم باز به همین

نتیجه خواهیم رسید)

(اگر رابطه $MF-MF' = 2a$ هم استفاده کنیم باز به همین

نتیجه خواهیم رسید)

بنابراین معادله بالا معادله هذلولی است که مرکز آن $c(\alpha\ ,$

$\beta)$ و FF' با محور x ها موازی بوده و دو نقطه $F(\alpha + c, \beta)$ و

$F\ '(\alpha - x, \beta)$ کانونهای آن می باشد.

درحالی که مبدأ مختصات بر نقطه c وسط ' FF یعنی مرکز هذلولی منطبق گردد $(\alpha,\beta) = (0,0)$ و معادله هذلولی به صورت زیر در می آید :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

اگر خط ' FF با محور y ها موازی باشد معادله های بالا به صورتهای زیر خواهد بود

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{و} \quad \frac{(y-\beta)^2}{a^2} - \frac{(x-\alpha)^2}{b^2} = 1$$

از معادله یعنی معادله هذلولی که مرکزش مبدأ مختصات و 'FF با محور x ها موازی است نتیجه می شود که :

از معادله $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ یعنی معادله هذلولی که

مرکزش مبدأ مختصات و 'FF با محور x ها موازی است نتیجه

می شود که :

اگر (M(x,y روی هذلولی باشد (M1(x,-y هم روی هذلولی

است یعنی محور x ها (خط 'FF) محور تقارن هذلولی است

خط ' FF را محور کانونی هذلولی می نامیم.

اگر (M(x,y روی هذلولی باشد (M2(-x,y هم روی هذلولی

است یعنی محور y ها (عمود منصف 'FF) محور تقارن هذلولی

است این محور تقارن را محور غیرکانونی هذلولی می نامیم.

اگر $M(x,y)$ روی هذلولی باشد $M3(-x,-y)$ هم روی هذلولی است یعنی مبدأ مختصات (وسط FF') مرکز تقارن هذلولی است که آن را مرکز هذلولی می نامیم.

اگر در معادله مقدار x را صفر قرار دهیم برای y عددی حقیقی به دست نمی آید. یعنی هذلولی با عمود نصف FF' که محور y ها است متقاطع نیست. یعنی هذلولی با محور غیر کانونی خود تقاطع ندارد.

اگر در معادله $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ مقدار y را صفر قرار دهیم خواهیم داشت:

$x2 = a2 \Rightarrow x = \pm a$

یعنی هذلولی محور x ها یعنی محور کانونی خود را در نقاط A(a,0) و A'(-a,0) قطع می کند. این دو نقطه را رأسهای هذلولی و پاره خط AA' را قطر هذلولی می نامند. محور کانونی هذلولی محور قاطع آن نیز نام دارد.

۶-معادله $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ را می توان به صورت

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$$

نوشت و لازم است که $x2 - a2 \geq 0$ یعنی $x2 \geq a2$ باشد . به این ترتیب حوزه تعریف و یا دامنه متغیر فاصله های $x \geq a$ یا $x \leq -a$ می باشند.

مقدار را که درهذلولی برزگتر از یک است خروج از مرکز هذلولی می نامند و آنرا با e نشان می دهند: $e = \frac{c}{a} > 1$

تعریف: هذلولی که در آن a=b باشد متساوی القطرین نامیده می شود.

مثال ۱- معادله هذلولی را بنویسید که مرکز C(-3 , 1) و F (1 , 2) یک کانون و خروج از مرکز آن $e = \frac{5}{4}$ باشد.

چون CF با محور x ها موازی است محور کانونی موازی محور x ها است و معادله هذلولی به صورت کلی $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(x-\beta)^2}{b^2} = 1$ خواهد بود که در آن CF=c= 5 و درنتیجه a=4 و چون b2 = c2 – a2 پس b2 =9 می شود و معادله هذلولی می شود:

$$\frac{(x+3)^2}{16} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$

مثال ۲- معادله هذلولی را بنویسید که F(2,5) و F'(-4 , 5)
کانونهای آن بوده و قطرش برابر ۴ باشد.
FF' موازی محور x ها است و وسط FF ' مرکز هذلولی C(-1
(5 , می باشد FF'=2c=6 و 2a = 4 و a =2 و چون b2 =
c2 –a2 پس b2 = 5 می شود و معادله هذلولی مورد نظر می
شود:

$$\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-5)^2}{5} = 1$$

مجانبهای هذلولی- معادله هذلولی می گیریم. می توانیم
بنویسم:

$$-\frac{y}{\pm\frac{b}{a}x} = \sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$$

هر گاه $x \to \pm\infty$ در این صورت حد نسبتهای $\frac{y}{b}$ برابر است $\pm\frac{-}{a}x$ با ۱ بنابراین می توان نتیجه گرفت که خطهای به معادله های مجانبهای هذلولی می باشند. این معادله ها را چنین می نویسیم:

$$\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$$

هر گاه معادله هذلولی به صورت کلی :

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$

اختیار شود معادله های مجانبهای آن می شود:

$$\frac{x-\alpha}{a} \pm \frac{y-\beta}{b} = 0$$

هر گاه معادله هذلولی عبارت باشد از:

$$\frac{(y-\beta)^2}{a^2} - \frac{(x-\alpha)^2}{b^2} = 1$$

دراین صورت مجانبهای آن به معادله های زیر می باشند که در حالت خاص معادله های مجانبها می شود:

$$\frac{y-\beta}{a} \pm \frac{x-\alpha}{b} = 0$$

که در حالت خاص $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ معادله های مجانبها می شود:

$$\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$$

اگر محور کانونی هذلولی موازی با محور x ها باشد ضریب زاویه ای مجانبهای آن $\pm \frac{b}{a}$ است و اگر محور کانون هذلولی با محور y ها موازی باشد ضریب زاویه ای مجانبهای آن $\pm \frac{a}{b}$ می باشد.

در هر حال مجانبهای هذلولی از مرکز آن می گذرند. در هذلولی متساوی القطرین مجانبها بر هم عمودند.

رسم هذلولی - برای رسم هذلولی نخست مرکز آن را مشخص کرده محورهای آن را رسم می کنیم. آنگاه روی محور کانونی دو نقطه A و A' در دو طرف مرکز به فاصلهٔ a از مرکز تعیین می کنیم و روی محور غیر کانونی دو نقطه B و B' را به فاصله b از مرکز بر می گزینیم. از چهار نقطه A و B و A' و B' خطهایی موازی با محورهای هذلولی رسم می کنیم که از برخورد آنها با هم یک مستطیل تشکیل می شود .

قطرهای این مستطیل را که رسم کنیم و امتداد دهیم مجانبهای

هذلولی مشخص می شود. اکنون هذلولی را با معلوم بودن

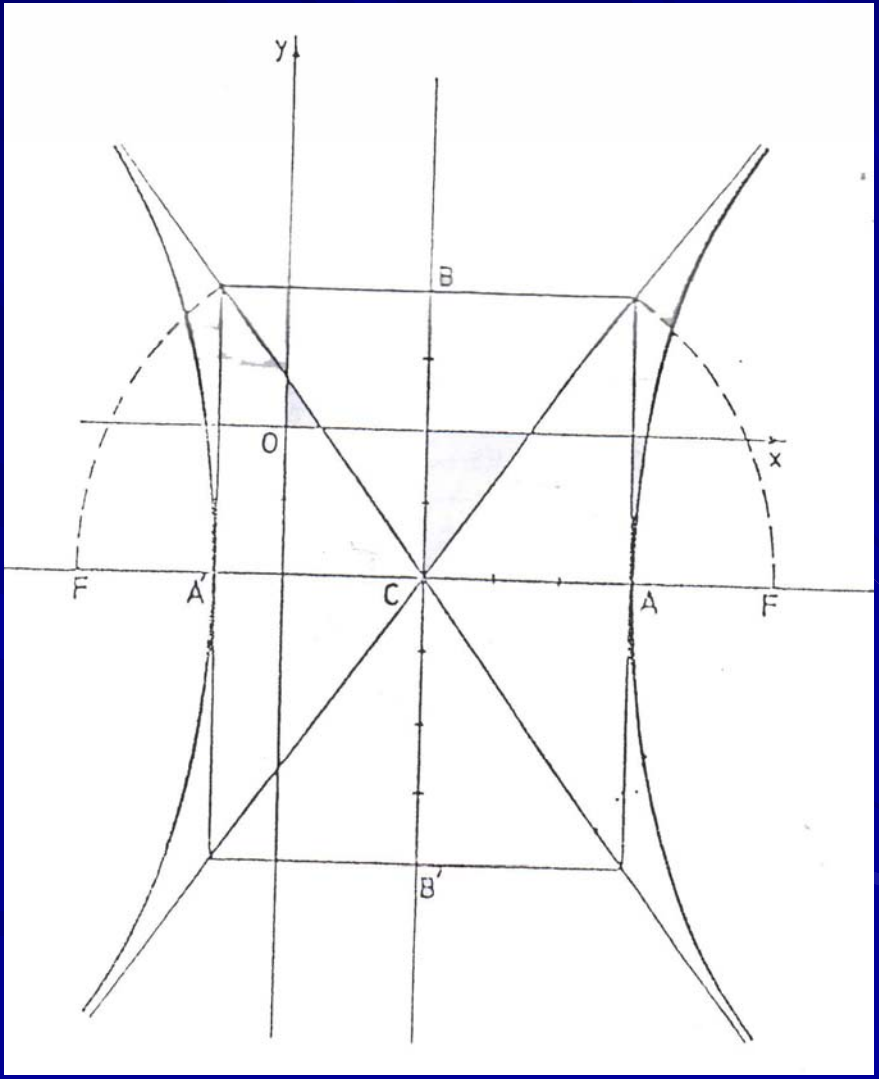
رأسهای A و 'A و به کمک مجانبهای آن رسم می کنیم. برای

تعیین کانونها کافی است که نقطه های برخورد دایره محیطی

مستطیل بالا را با محور کانونی هذلولی به دست آوریم (چرا؟)

مثال ۱- رسم هذلولی به معادله:

$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{16} = 1$$



محور کانونی هذلولی با محور طولها موازی است و داریم:

$$c(\alpha = 2 \ \text{و}\ \beta = -2)$$

$$a^2 = 9 \ \text{و}\ a = 3$$

$$b^2 = 16 \ \text{و}\ b = 2$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = 25 \ \text{و}\ c = 5$$

$$F(\alpha + c = 7 \ \text{و}\ \beta = -2)$$

$$F'(\alpha - c = -2 \ \text{و}\ \beta = -2)$$

معادله مجانبها:

$$\frac{x-2}{3} \pm \frac{y+2}{4} = 0$$

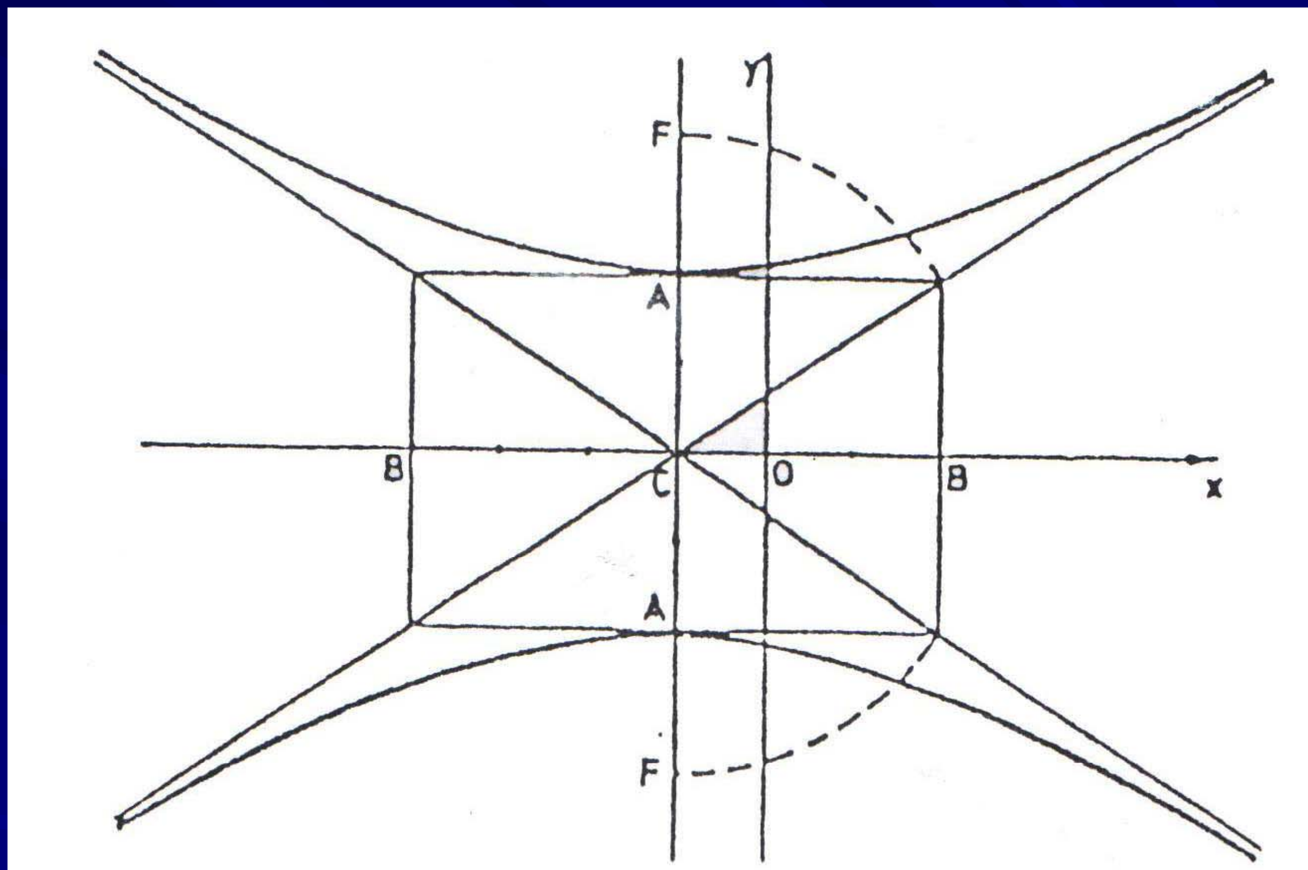
$$y = \frac{2}{3}x - \frac{12}{3}$$

معادله مجانبها:

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$$

$$\frac{y}{2} \pm \frac{x+1}{3} = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \qquad -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$$

یادآوری – برای تعیین مختصات نقطه های برخورد هذلولی با محورهای مختصات معادله هذلولی یک بار **x=0** و یک بار **y=0** می گیریم و معادله های حاصل را حل می کنیم.


Y
F
A
B
C
O
B
x
A
F

مثال ۳- تعیین مشخصات هذلولی به معادله:

$$25x^2 - 9y^2 - 100x - 72y - 269 = 0$$

به ترتیب داریم:

$$25(x^2 - 4x) - 9(y^2 + 8y) - 269 = 0$$

$$25(x^2 - 4x + 4 - 4) - 9(y^2 + 8y + 16 - 16) - 269 = 0$$

$$25(x-2)^2 - 9(y+4)^2 = 225$$

از تقسیم دو طرف بر ۲۲۵ داریم:

$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+4)^2}{25} = 1$$

محور کانونی هذلولی با محور x ها موازی و مرکز آن C(2,-4)

است و داریم:

$$a = 3 \text{ و } b = 5 \Rightarrow c\sqrt{9+25} = \sqrt{32}$$

$$F(2+\sqrt{32} \text{ و } -2) \text{ و } F'(2-\sqrt{32} \text{ و } -4)$$

معادله مجانبها:

$$\frac{x-2}{2}\pm\frac{y+2}{5}\Rightarrow y=\frac{5}{3}x-\frac{22}{3} \quad y=-\frac{5}{3}x-\frac{2}{3}$$

یادآوری – منحنی نمودار تابع $y=\frac{k}{x}$ (و به طور کلی منحنی نمودار تابع هموگرافیک) هذلولی متساوی القطرین است که مجانبهایش با محورهای مختصات موازیند.

مماس و قائم بر هذلولی – برای تعیین ضریب زاویه ای مماس یا قائم بر هذلولی درنقطه ای از آن ، از معادله هذلولی مشتق y را نسبت به x به دست می آوریم و مقدار آن را به ازاء مختصات آن نقطه تعیین می کنیم.

مثال – تعیین ضریب زاویه ای مماس و قائم بر هذلولی به معادله زیر در نقطه های برخورد آن با محور طولها:

(x+2)2 –(y+1)2 = 1

در ازاء **y=0** داریم:

$$(x+2)^2 = 2 \Rightarrow x = -2 \pm \sqrt{2}$$

هذلولی با محور طولها در دو نقطه برخورد می کند:

$$M(-2+\sqrt{2},0) \text{ و } N(-2-\sqrt{2},0)$$

اکنون **'y** را حساب می کنیم:

$$2(x+2) - 2y'(y+1) = 0 \Rightarrow y' = \frac{x+2}{y+1}$$

ضریب زاویه ای مماس بر هذلولی در نقطه M:

$$m_1 = \frac{-2+\sqrt{2}+2}{0+1} = \sqrt{2}$$

ضریب زاویه ای قائم بر هذلولی در نقطه M:

$$m_1' = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ضریب زاویه ای مماس و قائم بر هذلولی در نقطه N:

$$m_2 = -\sqrt{2} \text{ و } m_2' = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

مسئله– معادله خطی را به دست آورید که بر هذلولی به معادله:

$$\frac{x^2}{2}-\frac{(y-1)^2}{1}=1$$

مماس و بر خط Δ به معادله **5y +6x + 1 = 0** عمود باشد.

یک راه حل این مسئله آن است که **T(x1,y1)** را نقطه تماس

می گیریم و **y'** را حساب می کنیم:

$$\frac{2x}{2}-\frac{2(y-1)y'}{1}=0 \Rightarrow y'=\frac{x}{2(y-1)}$$

با توجه به اینکه مماس بر خط Δ عمود است خواهیم داشت:

$$\frac{x_1}{2(y_1-1)}=\frac{5}{6}$$

ازاین رابطه مثلاً x1را بر حسب y1 به دست می آوریم و درمعادله هذلولی منظور می کنیم که در نتیجه y1و از روی آن x1به دست می آید واز آنجا معادله خط مماس مشخص میشود.

یک راه دیگر نیز آن است که چون ماس بر Δ عمود است پس ضریب زاویه ای مماس می شود $\frac{5}{6}$ و معادله مماس را $y = \frac{5}{6}x + h$ میگیریم . بین این معادله و معادله هذلولی y را حذف می کنیم و شرطی را تعیین می کنیم تا معادله حاصل ریشه

مضاعف داشته باشد:

$$\frac{x^2}{4}-(\frac{5}{6}x+h-1)^2=1$$

$$16x^2+60(h-1)x+36(h^2-2h+2)=0$$

$$\Delta=900(h-1)^2-576(h^2-2h+2)$$

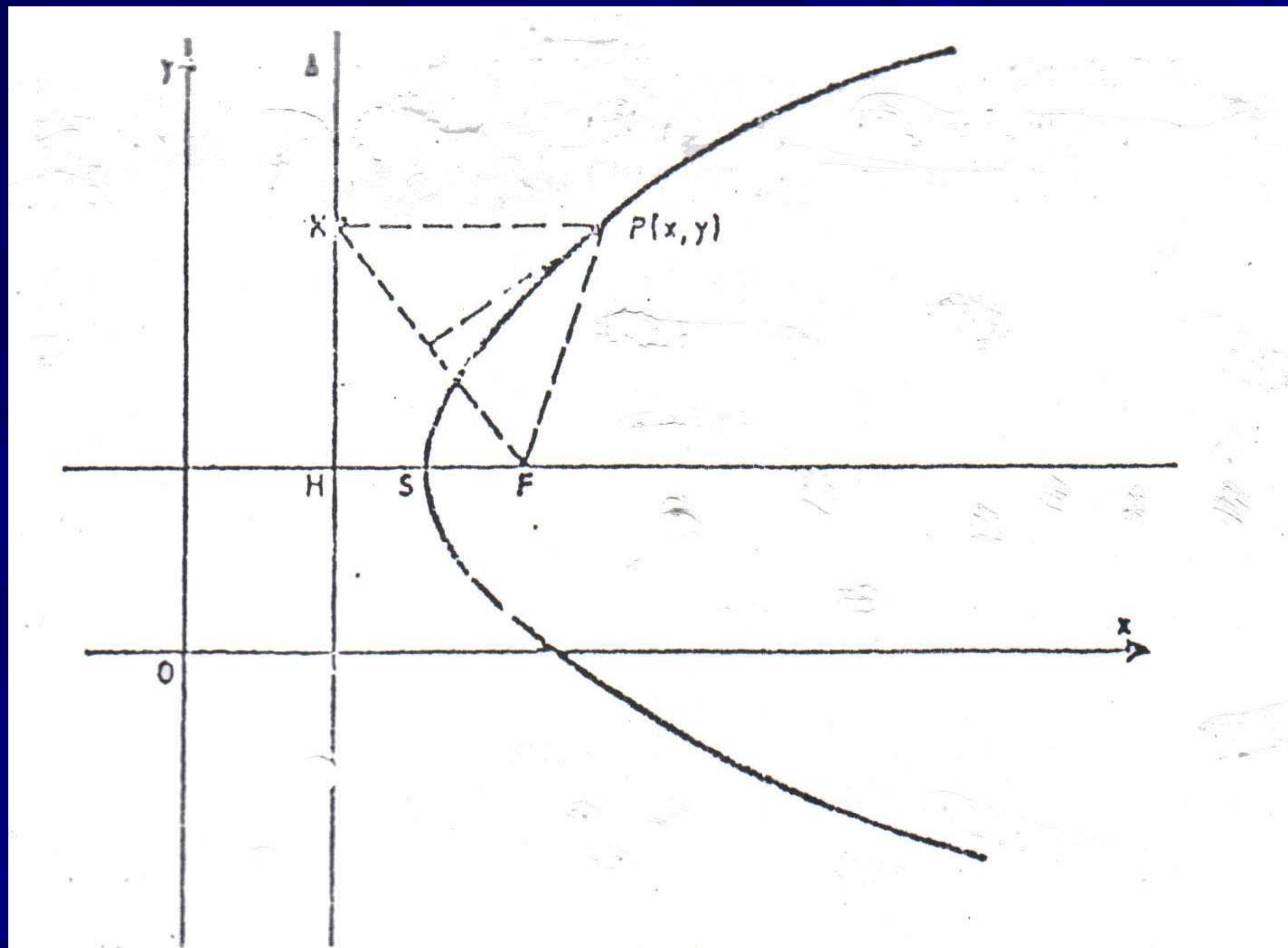
$$\Delta=36(9h^2-18h-7)=0\Rightarrow h=\frac{7}{3}\quad -\frac{1}{3}$$

پس مسئله دو جواب دارد به شرح زیر:

$$y=\frac{5}{6}x-\frac{1}{3}$$ یا $$y=\frac{5}{6}x+\frac{7}{3}$$

سهمی

سهمی مجموعه نقطه هایی از صفحه است که هر کدام از آنها از یک نقطه ثابت و یک خط ثابت از همان صفحه به یک فاصله باشند.. نقطه ثابت را کانون سهمی می نامیم و معمولاً با F نشان می دهیم، خط ثابت را خطهای سهمی می نامیم و معمولاً با Δ می نمائیم. فاصله کانون تا خط هادی را پارامتر سهمی می نامیم. نقطه وسط پاره خطی که از کانون بر خط هادی عمود شود نیز یک نقطه از سهمی است که آن را رأس سهمی می نامیم.



y
Δ
K
P(x, y)
H
S
F
x
O

دراین مبحث حالتهایی از سهمی را بررسی می کنیم که خط هادی آن با یکی از محورهای مختصات موازی باشد و نخست حالتی را درنظر می گیریم که خط هادی سهمی با محور y ها موازی است. برای تعیین معادله سهمی دراین حالت عود FH را بر Δ رسم می کنیم که S وسط آن رأس سهمی است. فرض می کنیم $S(\alpha ,\beta)$ و در این صورت داریم و معادله خط هادی می شود .

نقطه دلخواه $p(x,y)$ از سهمی را در نظر می گیریمPF . و عمودPk برΔ را رسم می کنیم .

بنا به تعریف سهمی PF=PK پس $\overline{PK}^2=\overline{PK}^2$ اما

$K(\alpha-\frac{p}{2},y)$ است و داریم:

$$\overline{PF}^2=[x-(\alpha+\frac{p}{2})]^2+(y-\beta)^2$$

$$\overline{Pk}^2=[x-(\alpha-\frac{p}{2})]^2+(y-y)^2$$

از برابر قرار دادن دو مقدار اخیر و پس از ساده کردن نتیجه

خواهد شد : $(y-\beta)^2=2p(x-\alpha)$

هر گاه S بر مبدأ مختصات واقع باشد $(\alpha,\beta)=(0,0)$ و درنتیجه

معادله سهمی می شود:

y2=2px

$(x-\alpha)2 = 2p\ (y - \beta)$

برای تعیین معادله سهمی در حالتی که خط هادی آن با محور x ها موازی باشد کافی است که درمعادله بالا جای x و y را عوض کنیم. در این صورت در حالت کلی که $s(\alpha,\beta)$ رأس سهمی باشد معادله سهمی می شود :

$(x-\alpha)2 = 2p\ (y - \beta)$

که $F(\alpha, \beta + \frac{p}{2})$ کانون و $y = \beta - \frac{p}{2}$ معادله خط هادی است.

$x2 = 2py$

و در حالتی که راس سهمی بر مبدا مختصات واقع باشد معادله آن می شود : $x2 = 2py$

از معادله $x2 = 2py$ نتیجه می شود که اگر $P(x,y)$ بر سهمی واقع باشد ، $P'(x,-y)$ نیز بر سهمی واقع است پس محور x ها محور تقارن سهمی به معادله مزبور است. همچنین از معادله $x2 = 2py$ نتیجه می شود که محور y ها محور تقارن این سهمی است. بنابراین:

خطی که از کانون سهمی می گذرد و بر خط هادی آن عمود است محور تقارن سهمی می باشد. این محور تقارن را به اختصار محور سهمی می نامیم.

رسم سهمی – برای رسم سهمی نخست S رأس آن را مشخص کرده و محور آن را رسم می کنیم. آنگاه روی محور سهمی ابتدا از S به اندازه $\frac{P}{2}$ (درجهت علامت P) جدا می کنیم که کانون F معین می شود، همچنین روی محور سهمی ابتدا از S به اندازه $-\frac{P}{2}$ (درجهت مخالف علامت P) جدا می کنیم که H پای خط هادی بدست می آید و از H عمودی بر محور سهمی رسم می کنیم که خط هادی سهمی مشخص می شود. سپس دو نقطه دیگر از سهمی را تعیین میکنیم؛ برای این کار می توانیم در F عمودی بر محور سهمی رسم کنیم و روی آن در دو طرف F طولهایی به اندازه |P| جدا کنیم .

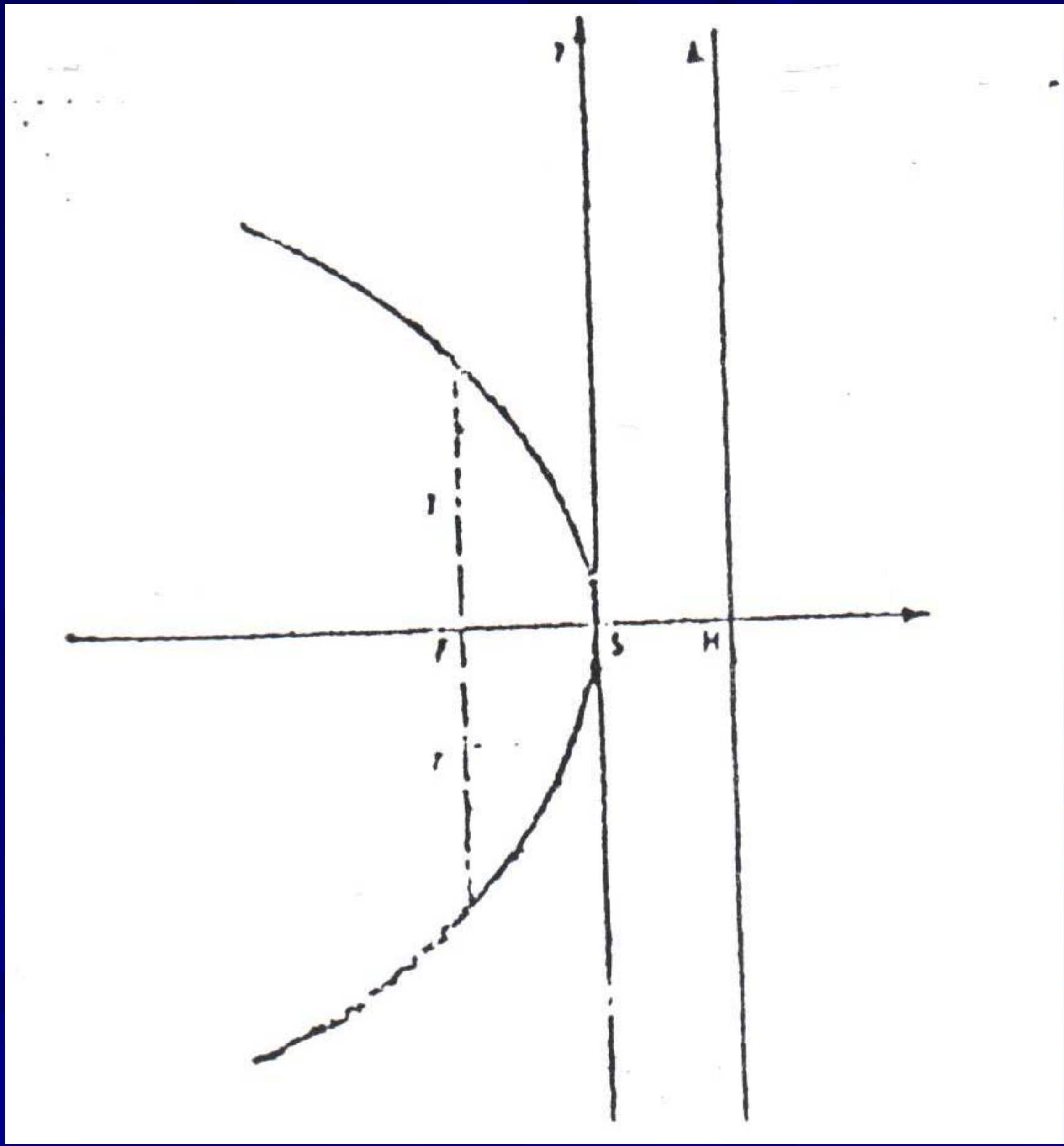
سهمی مورد نظر را با معلوم بودن رأس S و به کمک دو نقطه تعیین شده رسم می کنیم.

مثال ۱- رسم سهمی y2 = 6x و تعیین مشخصات آن.

رأس این سهمی S(α=0 , β=0) است و محور x ها محور تقارن آن است و داریم: پس :

P = -6 ⇒ P= -2

$$F(\alpha + \frac{p}{2} = -\frac{3}{2}, \beta = 0)$$



F
S
H

معادله خط هادی:

$$x = \alpha - \frac{p}{2} = \frac{3}{2}$$

مثال ۲- تعیین مشخصان و رسم سهمی به معادلهٔ :

(x-2)2 = 4(y+3)

رأس این سهمی عبارت است از:

S(α=2 و β=-3)

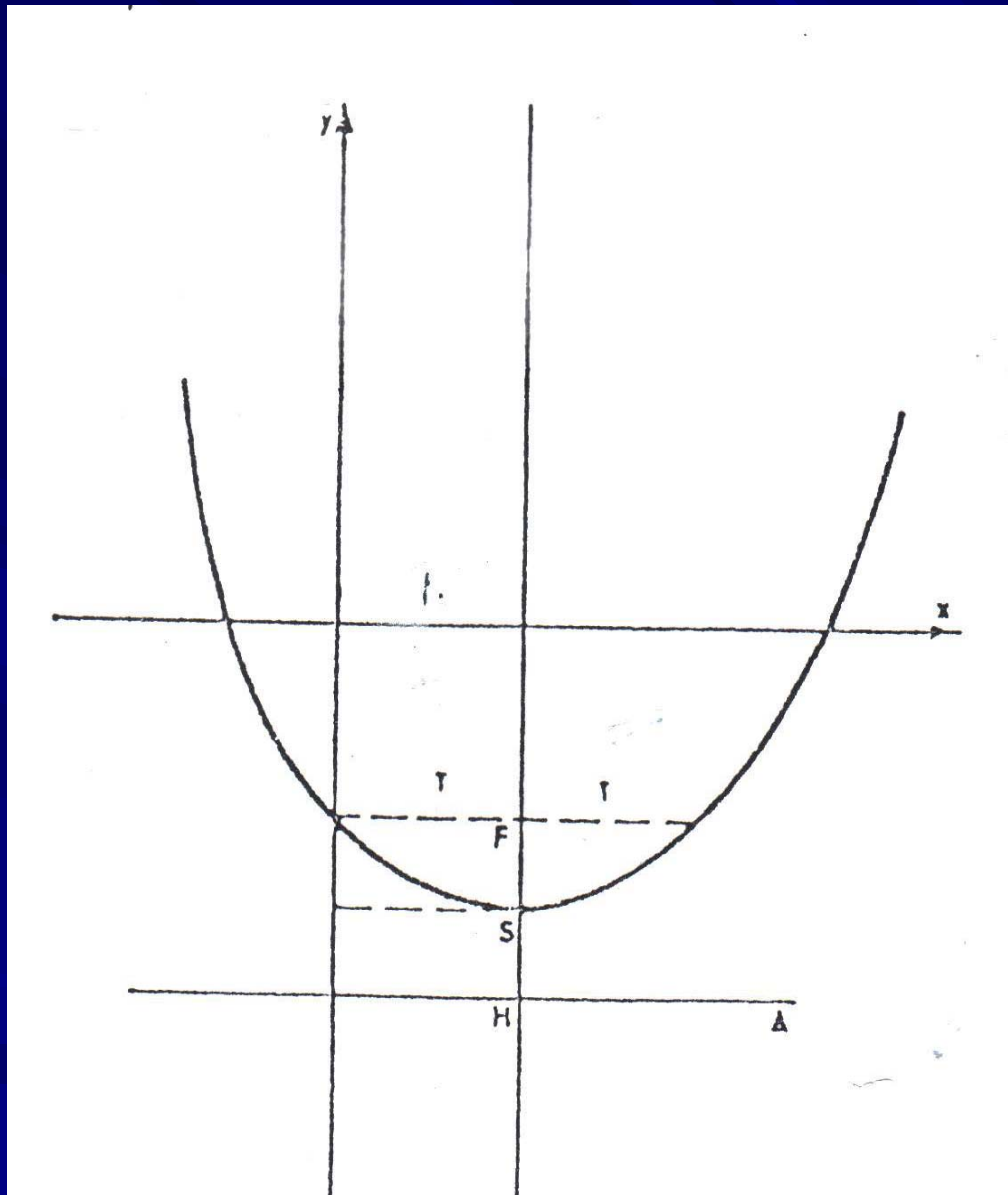
محور سهمی با محور y ها موازی است و داریم:

$$2p = 4 \Rightarrow p = 2$$

$$F(\alpha = 2 \text{ و } \beta + \frac{p}{2} = -2)$$

معادله خط هادی:

$$y = \beta + \frac{p}{2} = -4$$


y
x
F
S
H
Δ

یادآوری – نمودار تابع درجه دوم **y=ax2 + bx +c** نیز سهمی است زیرا می توانیم بنویسیم:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \frac{1}{a}y$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} == \frac{1}{a}y + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{1}{a}(y - \frac{4ac - b^2}{4a}$$

با این معادله یک سهمی مشخص می شود که محور آن با محور **y** ها موازی است و در آن و رأس آن عبارتست از:

$$S'\alpha = \frac{-b}{2a} \text{ و } \beta = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

2y + 10 = 0

به ترتیب چنین عمل می کنیم:

x2 – 2x = -2y – 10

x2 – 2x +4 = -2y – 10 + 4

(x – 2)2 = -2 (y + 2)

محور سهمی با محور y ها موازی است ، رأس آن S(2,-3) و در آن P = -1 می باشد ، کانون این سهمی

$$F(\alpha = 2, \beta + \frac{p}{2} = -\frac{7}{2}$$

و معادله خط هادی آن $y = \beta - \frac{p}{2} = -\frac{5}{2}$ است.

مماس و قائم بر سهمی – در حل مسئله های مربوط به مماس و قائم بر سهمی به همان ترتیب که درمورد بیضی و هذلولی عمل شد عمل می کنیم.

مثال ۱– معادلهٔ مماس و قائم بر سهمی 4 – 2x + 36 – 2y2 = 0 را در نقطه به عرض -۲ از آن به دست آورید.

از معادله سهمی در ازاء y = -2 نتیجه می شود x = -5 و همچنین:

$$4yy' - 3y' + 2 = 0 \Rightarrow y' = \frac{-2}{4y-3}$$

برای مماس داریم:

$$m = \frac{-2}{4(-2)-3} = \frac{2}{11}$$

$$y + 2 = \frac{2}{11}(x+5) \Rightarrow y = \frac{2}{11}x - \frac{12}{11}$$

برای قائم:

$$m' = -\frac{11}{2} \text{ و } y + 2 = -\frac{11}{2}(x+5) \Rightarrow y = -\frac{11}{2}x - \frac{59}{2}$$

مثال ۲- در چه نقطه از سهمی y2 = 2x + 4 مماس بر سهمی

با خط 2y + x = 1 موازی است؟

از معادله این خط نتیجه می شود که ضریب زاویه مماس برابر

$-\frac{1}{2}$ است و از معادله سهمی داریم:

$$2y'y = 2 \Rightarrow y' = \frac{1}{y}$$

$$\frac{1}{y} = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = -2, x = 0 \quad M(0,-2)$$

۱- نقطه به طول

۲ نقطه به عرض

۲) $2x^2 - 7x + 5y - 11 = 0$

۳) $2y2 + 4x - 3y - 11 = 0$

۴-از کانون سهمی خطی عمود بر محور سهمی رسم می کنیم تا سهمی را در A و b قطع کند و در این نقطه مماسهاییی بر سهمی رسم می کنیم .معادله های این مماسها را بنویسید .

۵- نقطه ای از سهمی را بیابید که مماس بر سهمی در آن نقطه با ox زاویه ۴۵ درجه بسازد.

۶- از نقطه A به عرض ۲ واقع بر خط هادی سهمی در مماس بر این سهمی رسم می شود . معادله های این مماسها را بنویسید و تحقیق کنید که بر هم عمودند .

www.salampnu.com