
بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه پیام نور

ریاضی عمومی (۱)

چهار واحد درسی برای

رشتهٔ شیمی

مطابق با منبع درسی ریاضی عمومی(۱) نوشتهٔ جلیل واعظی

تهیه کنندهٔ اسلاید : نادر دسترنج

فهرست مطالب

ادامهٔ فهرست

فهرست فصل اول (دستگاه مختصات دکارتی)

فهرست فصل دوم (مختصات قطبی)

فهرست فصل سوم (اعداد مختلط)

فهرست فصل چهارم (رابطه و تابع)

فهرست فصل پنجم (حد و پیوستگی توابع)

ادامهٔ فهرست فصل پنجم (حد و پیوستگی توابع)

فهرست فصل ششم (مشتق)

ادامهٔ فهرست فصل ششم (مشتق)

فهرست فصل هفتم (کاربردهای مشتق)

ادامهٔ فهرست فصل هفتم (کاربردهای مشتق)

بخش هفتم : صورتهای مبهم

فهرست فصل هشتم (انتگرال)

فهرست فصل نهم (انتگرال معین)

فهرست فصل دهم (کاربردهای انتگرال معین)

ادامهٔ فهرست فصل دهم (کاربردهای انتگرال معین)

بخش هفتم : گشتاورها و مرکز جرم

فهرست فصل یازدهم (روشهای عددی)

- بخش اول : روش ذوذنقه
- بخش دوم : روش سیمپسون

فهرست فصل دوازدهم (انتگرالهای ناسره)

فصل اول

دستگاه مختصات دکارتی

فصل اول

بخش اول

۱.۱ محورهای مختصات

دستگاه مختصات دکارتی

در صفحهٔ هندسی یک محور افقی $x'ox$ بنام **محور طولها** و یک محور عمودی $y'oy$ بنام **محور عرضها** رسم کرده و آنها را **محورهای مختصات** می نامیم . نقطهٔ O محل تلاقی دو محور را **مبدا مختصات** می نامیم . محورهای مختصات صفحه را به چهار ناحیه تقسیم می کنند که هر یک از آنها را یک **ربع** می نامند .

۱.۱ محورهای مختصات

دستگاه مختصات دکارتی

محورها را با واحدهای دلخواهی مدرج می کنیم . به هر نقطهٔ P از صفحه زوج مرتبی مثل (a,b) نسبت می دهیم که در آن a فاصلهٔ تصویر قائم P از مبدا مختصات و b فاصلهٔ تصویر افقی P از مبدا مختصات است .

a را **طول** و b را **عرض** و زوج مرتب (a,b) را **مختصات** P می نامند . معمولاً می نویسیم $x_A = a$ و $x_B = b$.

۱.۱ محورهای مختصات

دستگاه مختصات دکارتی

نظیر هر زوج مرتب (a,b) از اعداد حقیقی یک و فقط یک نقطه مانند P از صفحهٔ مختصات یافت می شود که طول آن a و عرض آن b باشد . در نتیجه بین مجموعهٔ نقاط صفحهٔ مختصات و مجموعهٔ زوجهای مرتب از اعداد حقیقی یک تناظر یک به یک وجود دارد . یعنی می توان xoy صفحهٔ $\mathbf{R}^2$ را با یکی گرفت .

فصل اول

بخش دوم

۲.۱ یادآوری هندسهٔ تحلیلی

یاد آوری

فرض کنیم A و B دو نقطه از صفحهٔ xoy و C وسط پاره خط AB باشد در این صورت :

طول پاره خط AB $\quad \overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

مختصات وسط پاره خط AB $\quad C \left| \begin{array}{l} x_C = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_C = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{array} \right.$

۲.۱ یادآوری هندسهٔ تحلیلی

یاد آوری مطالبی در مورد خط

معادلهٔ خط راست : $y = a\,x + b$

شیب

عرض از مبداء

حالتهای خاص

معادلهٔ خط افقی : $y = h$

معادلهٔ خط قائم : $x = k$

معادلهٔ نیمساز ربع اول و سوم : $y = x$

معادلهٔ نیمساز ربع دوم و چهارم : $y = -x$

۲.۱ یادآوری هندسهٔ تحلیلی

یاد آوری مطالبی در مورد خط

شیب خطی که از دو نقطهٔ A و B می گذرد : $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

شرط این که سه نقطهٔ A و B و C بر یک استقامت باشند : $m_{AB} = m_{BC}$

معادلهٔ خطی که از نقطهٔ A با شیب m می گذرد : $y - y_A = m(x - x_A)$

معادلهٔ خطی که از دو نقطهٔ A و B می گذرد : $\dfrac{y - y_A}{x - x_A} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

شرط توازی دو خط شرط تعامد دو خط : $m_1 = m_2$

۲.۱ یادآوری هندسهٔ تحلیلی

یاد آوری مطالبی در مورد خط

فاصلهٔ نقطهٔ A از خط $ax + by + c = 0$ $= \dfrac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

فاصلهٔ دو خط موازی $ax + by + c = 0$ و $a'x + b'y + c' = 0$ $= \dfrac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

مختصات نقاط تلاقی دو خط $ax + by + c = 0$ $a'x + b'y + c' = 0$ = جواب دستگاه زیر

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

فصل دوم

دستگاه مختصات قطبی

هدفهای رفتاری

دانشجو پس از مطالعه این فصل باید بتواند :

۱ . دستگاه مختصات قطبی را توضیح داده و موضع هر نقطه از صفحه که مختصات قطبی آن داده شده است را تعیین کند .

۲ . رابطه بین دستگاههای مختصات قطبی و دکارتی را بیان کرده و به کار برد .

۳ . معادله منحنیهایی را که در دستگاه دکارتی داده شده است ، در دستگاه قطبی به دست آورد .

ادامهٔ هدفهای رفتاری

۴ . معادلهٔ منحنیهایی را که در دستگاه قطبی داده شده است ، در دستگاه دکارتی به دست آورد .

۵ . نمودار معادله های قطبی داده شده را در دستگاه مختصات قطبی رسم کند .

۶ . زاویه بین شعاع حامل و خط مماس بر منحنی در یک نقطه را محاسبه کند .

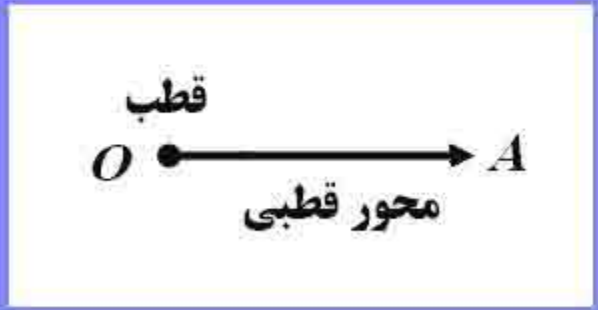
فصل دوم

بخش اول

۱.۲ دستگاه مختصات قطبی

تعریف دستگاه مختصات قطبی

دستگاه مختصات قطبی از یک نقطه و از یک محور تشکیل شده است . محور OA را **محور قطبی** و نقطهٔ ثابت O را **قطب** می نامیم .



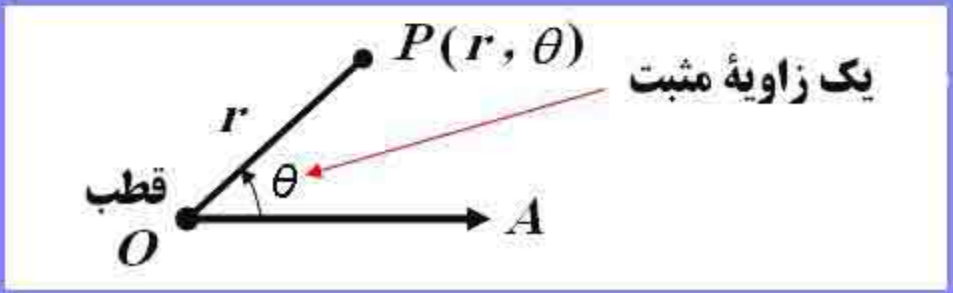
۱.۲ دستگاه مختصات قطبی

تعریف دستگاه مختصات قطبی

نقطهٔ P که منطبق بر قطب نباشد در صفحهٔ مختصات قطبی در نظر می گیریم . فرض کنیم θ زاویهٔ جهت دار AOP باشد

OA. **ضلع ابتدایی** و **ضلع پایانی** این زاویه نام دارد ،

پس θ اگر در خلاف حرکت عقربه های ساعت اندازه گیری شود مثبت خواهد بود



۱.۲ دستگاه مختصات قطبی

تعریف دستگاه مختصات قطبی

اگر r فاصلهٔ O تا P باشد $(r=\overline{OP})$ ، زوج مرتب (r,θ) را

مختصات قطبی نقطهٔ P می نامیم .

در این صورت می نویسیم :

$$P=(r,\theta)$$

۱.۲ دستگاه مختصات قطبی

مثال

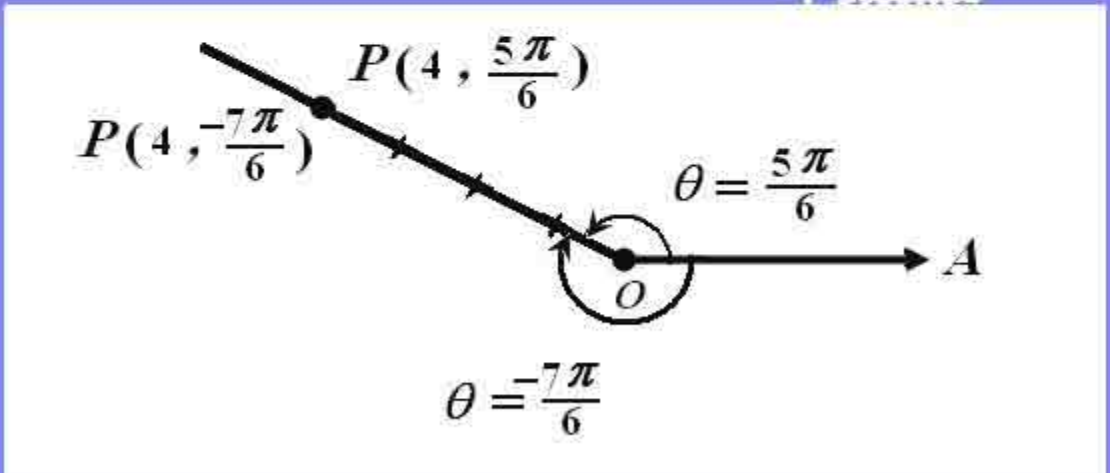
تصویر نقطهٔ $P(4, \frac{5\pi}{6})$ را بر صفحهٔ مختصات قطبی مشخص کنید .

برای معین کردن این نقطه ، ابتدا نیم خطی از O رسم می کنیم به طوری که AOP برابر $\frac{5\pi}{6}$ رادیان باشد . نقطه ای که روی ضلع پایانی این زاویه قرار دارد و فاصله اش از O برابر ۴ واحد است نقطهٔ P می باشد .

۱.۲ دستگاه مختصات قطبی

مثال

در دستگاه مختصات قطبی همهٔ نقاط $(4,2\pi+\frac{5\pi}{6})$ ، $(4,-\frac{7\pi}{6})$ ، $(4,2\pi-\frac{7\pi}{6})$ بر نقطهٔ P منطبق هستند.



۱.۲ دستگاه مختصات قطبی

سؤال

از دو مثال قبل چه نتیجه ای می گیرید ؟

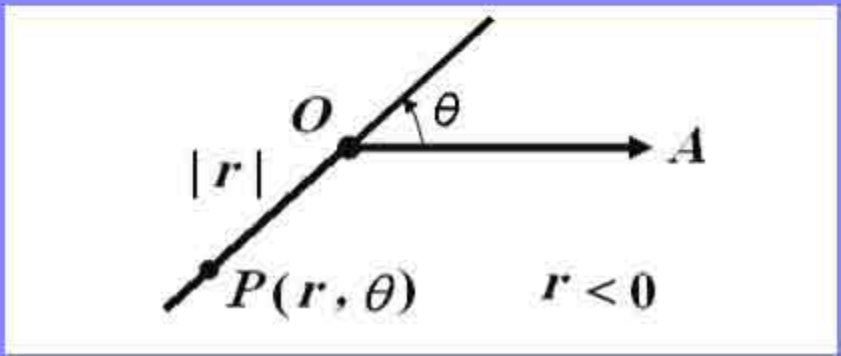
نتیجه می گیریم که یک نقطه در مختصات قطبی بیش از یک مختصات دارد . در حقیقت بیشمار مختصات دارد :

$$P=(r,\theta)\Rightarrow p=(r,2k\pi+\theta)\quad k\in Z$$

۱.۲ دستگاه مختصات قطبی

مختصات قطبی تعمیم یافته

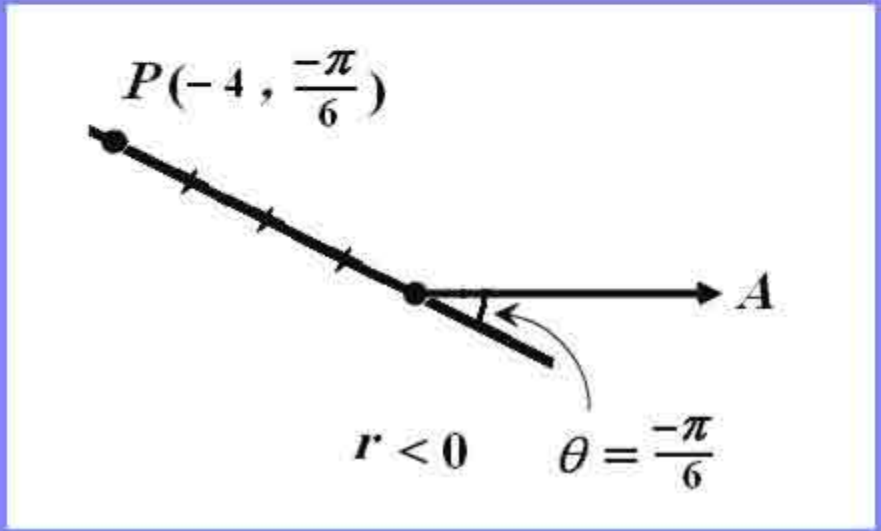
در مختصات قطبی r می تواند منفی نیز باشد در این صورت ، به جای آنکه نقطه را بر روی ضلع پایانی زاویه انتخاب کنیم ، قرینهٔ آن نقطه را نسبت به O روی امتداد این ضلع به دست می آوریم .



۱.۲ دستگاه مختصات قطبی

مختصات قطبی تعمیم یافته

نقطهٔ $(-4,-\frac{\pi}{6})$ را رسم کنید . مختصات دیگری ازاین نقطه را بنویسید که مختص اول آن مثبت باشد .



این نقطه بر نقطهٔ $P(4,\frac{5\pi}{6})$ منطبق است .

۱.۲ دستگاه مختصات قطبی

مختصات قطب

نقطهٔ (r,θ) مشخص کنندهٔ قطب است اگر و تنها اگر $r=0$.

مثلاً مختصات $(0,-\frac{\pi}{2})$ ، $(0,\frac{\pi}{6})$ ، $(0,-\pi)$ و $(0,1)$

همه مشخص کنندهٔ قطب هستند .

۱.۲ دستگاه مختصات قطبی

تذکر

مختصات قطبی هر نقطه زوج مرتبی از اعداد حقیقی تشکیل می دهند . به ازای هر زوج مرتب از اعداد حقیقی مانند (r,θ) نقطهٔ منحصر به فردی مانند P در مختصات قطبی به دست می آید . اما دیدیم که یک نقطه را می توان با بی شمار زوج مرتب از اعداد حقیقی مشخص کرد .

۱.۲ دستگاه مختصات قطبی

ادامهٔ تذکر

فرض کنیم P قطب نباشد ، اگر r و θ را در دو شرط :

$$0 \leq \theta < 2\pi \quad \text{و} \quad r > 0$$

محدود کنیم مختصات P منحصر بفرد خواهد بود .

۱.۲ دستگاه مختصات قطبی

تمرین

نقطهٔ $(3,-\frac{2\pi}{3})$ را در دستگاه مختصات قطبی مشخص کنید .

زوج مرتب دیگری را که نمایش آن منطبق بر P باشد در هر یک از حالات زیر به دست آورید .

الف . $r>0$, $0<\theta<2\pi$

ب . $r<0$, $0<\theta<2\pi$

ج . $r<0$, $-2\pi<\theta<0$

۱.۲ دستگاه مختصات قطبی

تمرین

در تمرین های زیر مختصات قطبی چند نقطه داده شده است آنها را مشخص کرده سپس مختصات قطبی دیگری برای آنها پیدا کنید .

الف . $(3,\frac{\pi}{4})$

ب . $(4,\frac{2\pi}{3})$

ج . $(-2,\frac{\pi}{4})$

د . $(3,-\frac{\pi}{4})$

هـ . $(-4,-\frac{\pi}{3})$

و . $(2,0)$

۱.۲ دستگاه مختصات قطبی

تمرین

نقاط زیر را که مختصات آنها در دستگاه قطبی داده شده است معین کنید . کدامیک از این نقاط بر نقطهٔ $P(2, \frac{5\pi}{6})$ منطبق است ؟

$B(-2, -\frac{\pi}{6})$ $C(-2, \frac{11\pi}{6})$ $D(-2, \frac{5\pi}{6})$

$E(2, \frac{-7\pi}{6})$ $F(2, \frac{25\pi}{6})$

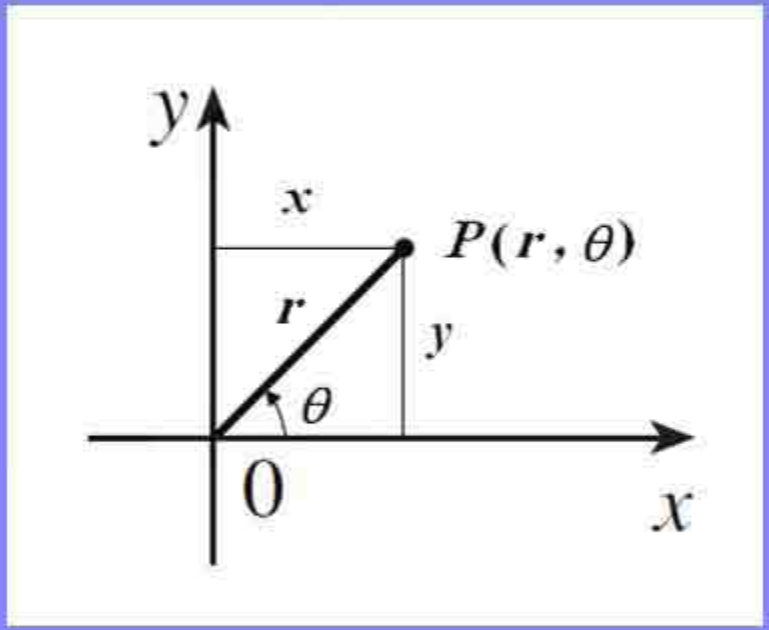
فصل دوم

بخش دوم

۲ . ۲ رابطهٔ بین دستگاه مختصات قطبی و دکارتی

رابطهٔ بین دستگاه مختصات قطبی و دکارتی

با توجه به شکل زیر داریم :



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\theta = \frac{y}{x} \end{cases}$$

به کمک این معادلات می توان مختصات یا معادلات دکارتی

را به قطبی و قطبی را به دکارتی تبدیل کرد .

۲ . ۲ رابطهٔ بین دستگاه مختصات قطبی و دکارتی

مثال

مختصات قطبی نقطهٔ P برابر $(-2,\frac{\pi}{3})$ است ، مختصات دکارتی آن را به دست آورید .

$$x = r\cos\theta = -2\cos\frac{\pi}{3} = -2(\frac{1}{2}) = -1$$

$$y = r\sin\theta = -2\sin\frac{\pi}{3} = -2(\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\sqrt{3}$$

در نتیجه مختصات دکارتی نقطه عبارت است از $(-1,-\sqrt{3})$.

۲ . ۲ رابطهٔ بین دستگاه مختصات قطبی و دکارتی

مثال

مختصات قطبی نقطهٔ $(2,-2\sqrt{3})$ را باشرط زیر پیدا کنید .

$$0 \le \theta < 2\pi \quad \text{و} \quad r > 0$$

داریم :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(2)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = 4$$

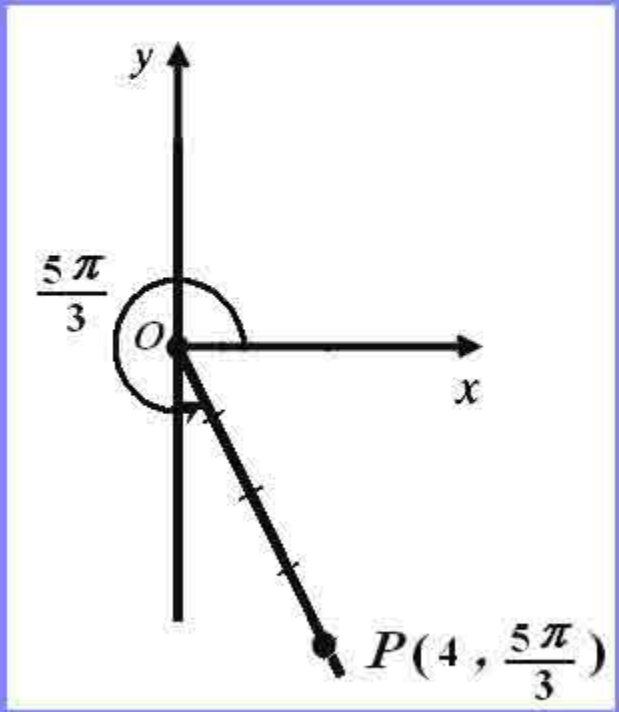
$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$$

ادامهٔ مثال

چون نقطه در ربع چهارم است پس

$\theta = \frac{5\pi}{6}$ در نتیجه مختصات

قطبی عبارت است از $(4, \frac{5\pi}{3})$.



۲ . ۲ رابطهٔ بین دستگاه مختصات قطبی و دکارتی

مثال

معادلهٔ دکارتی یک نمودار به صورت $x^2+y^2+2x=0$ است ، معادلهٔ قطبی آن را به دست آورید .

قرار می دهیم $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$

پس $r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta+2r\cos\theta=0$

یا $r^2+2r\cos\theta=0$ در نتیجه $r=0$ یا $r+2ros\theta=0$.

۲ . ۲ رابطهٔ بین دستگاه مختصات قطبی و دکارتی

مثال

معادلهٔ قطبی یک نمودار $r^2 = 4\sin 2\theta$ است ، معادلهٔ دکارتی آن را به دست آورید .

با شرط $r \neq 0$ قرار می دهیم :

$$r^2 = x^2 + y^2 \text{ و } \sin\theta = \frac{y}{r} \text{ و } \cos\theta = \frac{x}{r}$$

جواب نهایی عبارت است از $(x^2 + y^2)^2 = 8xy$.

فصل دوم

بخش سوم

۳ . ۲ نمودار معادلات قطبی

تعریف

فرض کنیم (r,θ) مختصات قطبی یک نقطه باشد معادله ای به صورت $r=f(\theta)$ را یک **معادله قطبی** می نامیم .

تعریف

مجموعه همه نقاطی از صفحه که مختصات آنها در معادلهٔ $r=f(\theta)$ صدق می کند شکلی را به وجود می آورند که آن را **نمودار معادله** $r=f(\theta)$ می نامیم .

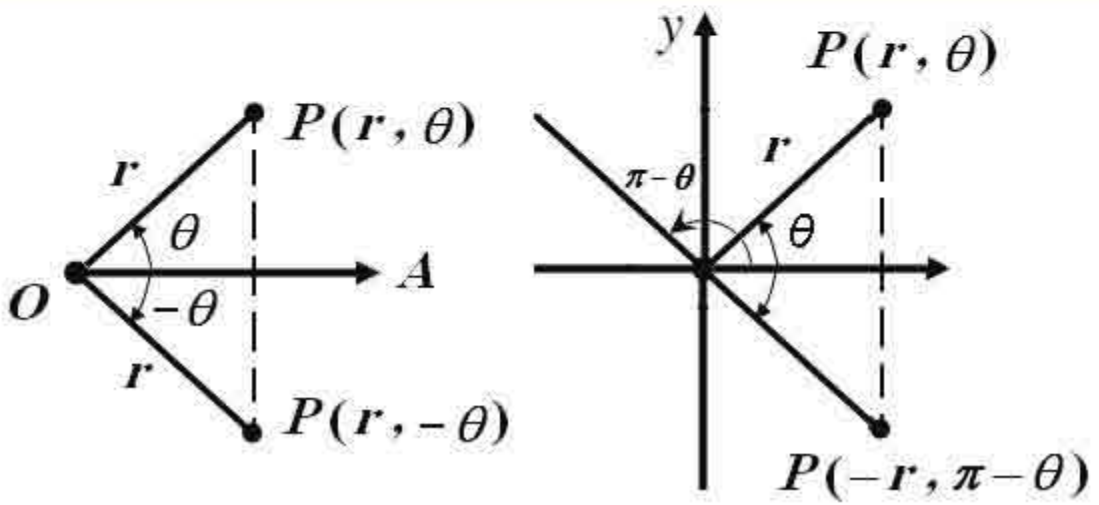
۳ . ۲ نمودار معادلات قطبی

تقارن

معادلهٔ $r = f(\theta)$ را در نظر می گیریم :

(الف) اگر $(r, -\theta)$ یا $(-r, \pi - \theta)$ در معادله صدق کند

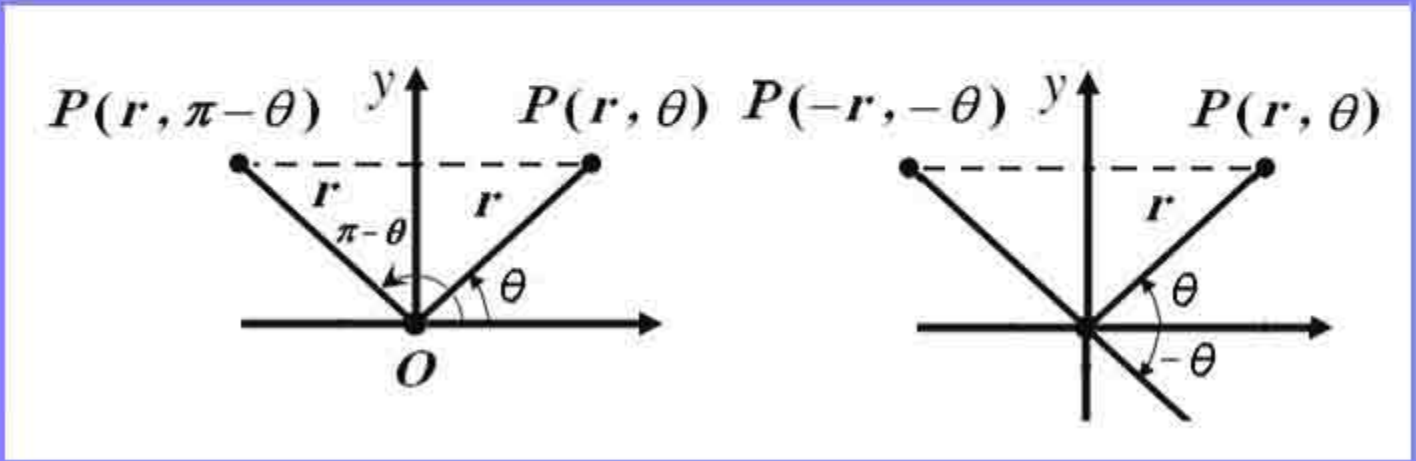
آنگاه ، منحنی نسبت به محور xها متقارن است .



۲ . ۳ نمودار معادلات قطبی

تقارن

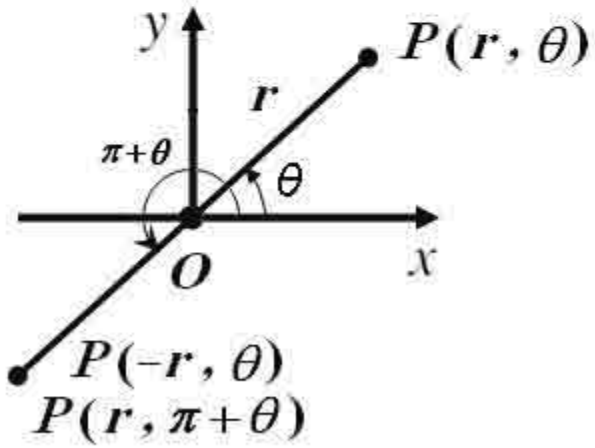
(ب) اگر $(-r,-\theta)$ یا $(r,\pi-\theta)$ در معادله صدق کند آنگاه نمودار منحنی نسبت به محور y ها متقارن است .



۳ . ۲ نمودار معادلات قطبی

تقارن

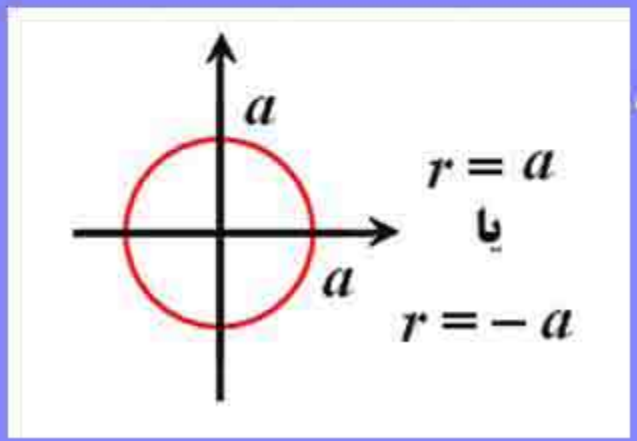
(ج) اگر $(-r,\theta)$ یا $(r,\pi+\theta)$ در معادلهٔ منحنی صدق کند آنگاه نمودار منحنی نسبت به مبدا مختصات (قطب) متقارن است .



۲ . ۳ نمودار معادلات قطبی

معادلهٔ دایره

می دانیم در دستگاه مختصات دکارتی $x^2+y^2=a^2$ معادلهٔ دایره ای به مرکز مبدا مختصات و شعاع a ، $(a>0)$ در دستگاه دکارتی است چون $x^2+y^2=r^2$ بنا براین معادلهٔ این دایره در دستگاه مختصات قطبی به صورت $r^2=a^2$ یا $r=a$ خواهد بود . توجه کنید که $r=-a$ نیز همان دایره را مشخص می کند .



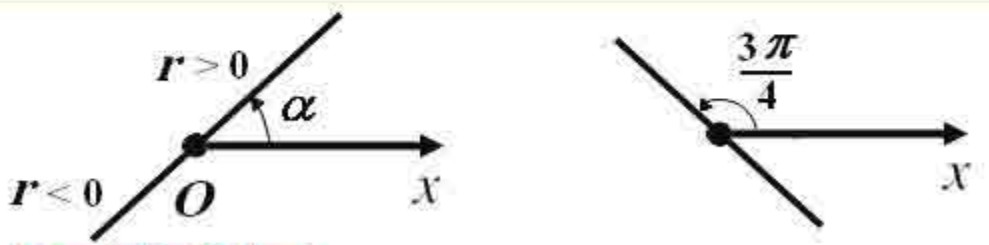
۳ . ۲ نمودار معادلات قطبی

معادلهٔ خطی که از مبداء می گذرد

می دانیم در دستگاه مختصات دکارتی $y = mx$ معادلهٔ خطی است که از مبدا مختصات با شیب m می گذرد .

چون $\tan\theta = \frac{y}{x}$ و $\frac{y}{x} = m = \tan\alpha$ بنابراین $\theta = \alpha$

معادلهٔ خطی است که با شیب m (زاویهٔ α) از مبدا مختصات می گذ



معادلهٔ دکارتی خط : $y = mx$

معادلهٔ قطبی خط : $\theta = \alpha$

نمودار خط : $\theta = \frac{3\pi}{4}$

۳ . ۲ نمودار معادلات قطبی

مثال

نمودار $r = 3\cos 2\theta$ را در دستگاه مختصات قطبی رسم کنید .

با تبدیل θ به $-\theta$ ، r تغییر نمی کند . پس منحنی نسبت به محور x ها (محور قطبی) متقارن است .

همچنین با تبدیل θ به $\pi - \theta$ ، r تغییر نمی کند . پس منحنی نسبت به محور y ها (خط $\theta = \frac{\pi}{2}$) متقارن است .

منحنی را در فاصلهٔ $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ رسم می کنیم .

۳.۲ نمودار معادلات قطبی

ادامهٔ مثال

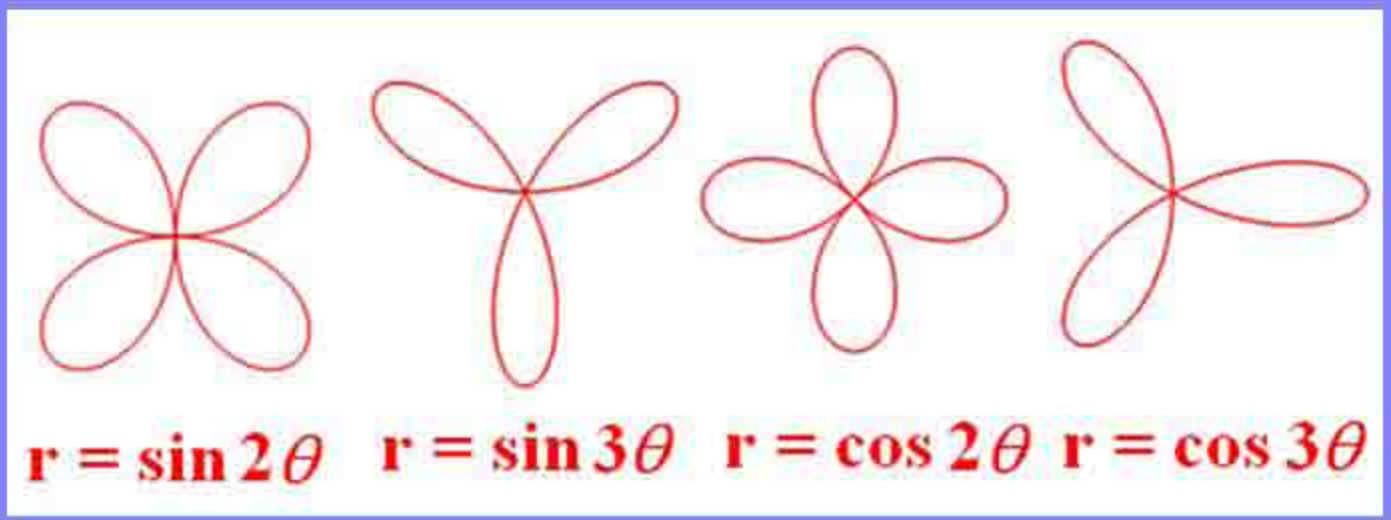
θ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$
$r = 3\text{coc}\,2\theta$	3	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{-3}{2}$	$\frac{-3\sqrt{3}}{2}$	-3

با توجه به محورهای تقارن منحنی را کامل می کنیم .

۳ . ۲ نمودار معادلات قطبی

معادلهٔ رز

هر منحنی به صورت $r = a\cos n\theta$ یا $r = a\sin n\theta$ ، **رز** نام دارد اگر n فرد باشد n پر دارد و اگر n زوج باشد $2n$ پر دارد .



۲ . ۳ نمودار معادلات قطبی

مثال

نمودار $r = a(1-\cos\theta)$ را که درآن a عددی ثابت و مثبت است رسم کنید .

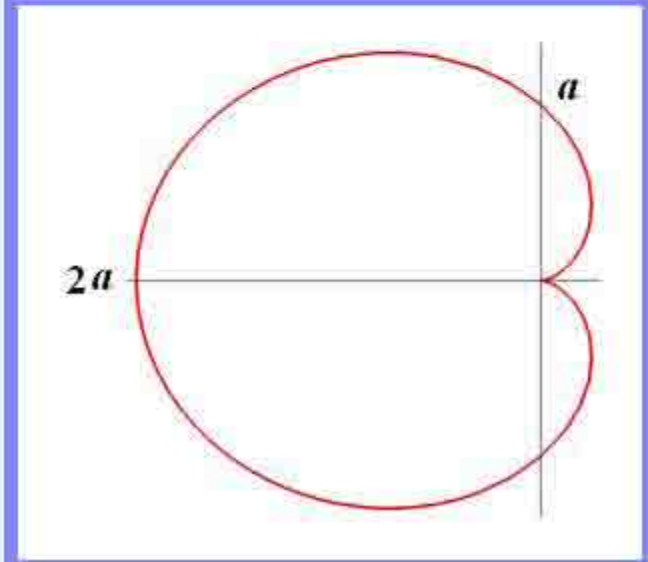
با تبدیل θ به $-\theta$ ، r تغییر نمی کند . پس منحنی نسبت به محور x ها متقارن است .

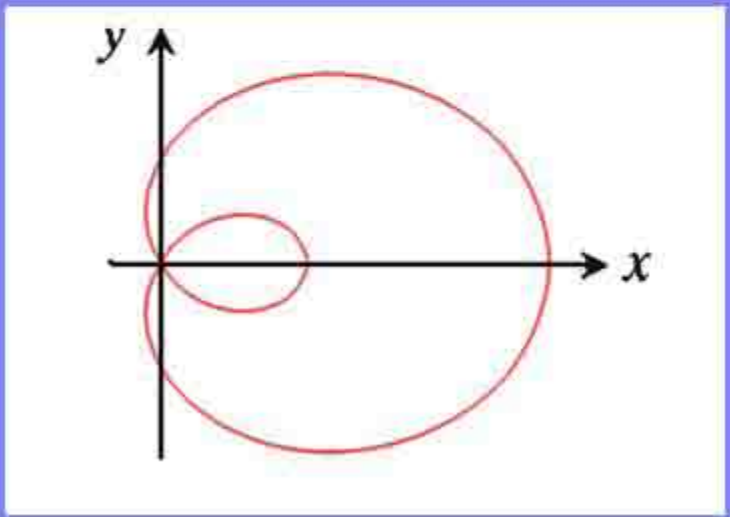
منحنی را درفاصلهٔ $0 \le \theta \le \pi$ رسم کرده با توجه به تقارن آن را کامل می کنیم .

۳ . ۲ نمودار معادلات قطبی

ادامهٔ مثال

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$r = 3\cos 2\theta$	0	$a\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$a\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\frac{a}{2}$	a	$\frac{3a}{2}$	$a\left(1+\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$	$2a$





۲ . ۳ نمودار معادلات قطبی

پیدا کردن محل تلاقی دو منحنی

برای پیدا کردن دو منحنی قطبی با معادلات $r = f(\theta)$ و $r = g(\theta)$ به ترتیب زیر عمل می کنیم .

۱ . معادلات آنها را در یک دستگاه دو معادله دو مجهولی حل می کینم . جواب این دستگاه تعدادی از نقاط تلاقی است .

۲ . دستگاههای زیر را نیز حل می کنیم .

$$\begin{cases} r = f(\theta) \\ r = g(\theta + 2k\pi) \end{cases} \qquad \begin{cases} r = f(\theta) \\ r = g(\theta + (2K+1)\pi) \end{cases}$$

۲ . ۳ نمودار معادلات قطبی

پیدا کردن محل تلاقی دو منحنی

جواب این دستگاهها نیز تعدادی از نقاط تلاقی دو منحنی را به دست می دهد . اگر قطب در میان این جوابها نباشد آنگاه :

۳ . تحقیق می کنیم که آیا منحنی ها از قطب می گذرند یا نه ؟

۳ . ۲ نمودار معادلات قطبی

مثال

نقاط تلاقی دو منحنی $r=\sin\theta$ و $r=\cos\theta$ را به دست آورید .

$$\begin{cases} r=\sin\theta \\ r=\cos\theta \end{cases}$$

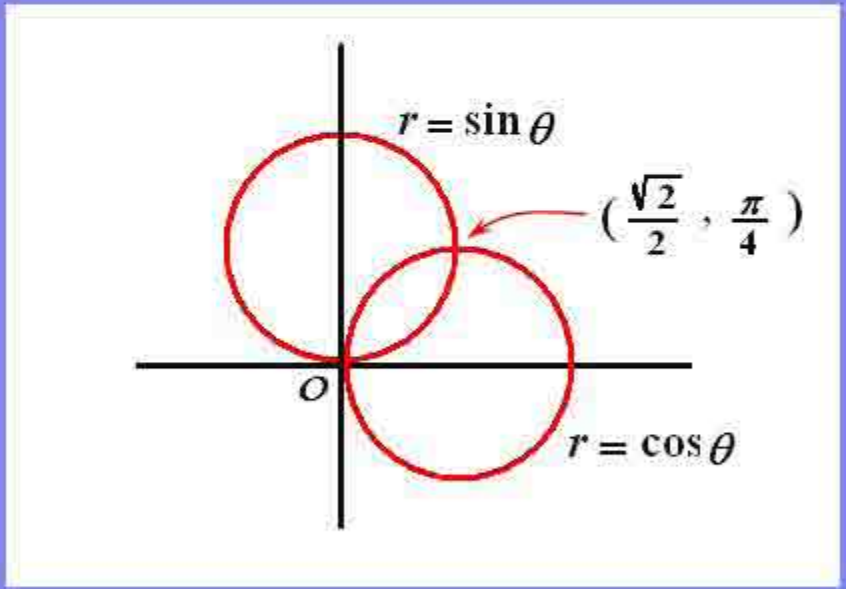
از حل دستگاه داریم $\sin\theta=\cos\theta$ پس $\tan\theta=1$ در نتیجه نقطهٔ $(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\pi}{4})$ محل تلاقی این دو منحنی است .

چون $(0,0)$ روی منحنی اول و $(0,\frac{\pi}{2})$ روی منحنی دوم قرار دارد پس قطب هم یکی از نقاط تلاقی دو منحنی است .

۳ . ۲ نمودار معادلات قطبی

مثال

نمودار منحنیهای $r = \sin\theta$ و $r = \cos\theta$ با دو نقطهٔ تلاقی .



فصل سوم

اعداد مختلط

هدفهای رفتاری

دانشجو پس از مطالعه این فصل باید بتواند :

۱ . عدد مختلط را تعریف کرده و نمایش هندسی آن را توضیح دهد .

۲ . اعمال جبری روی مجموعهٔ اعداد مختلط را تعریف کرده و بر ای اعداد داده شده اعمال جبری مورد نظر را انجام دهد .

ادامهٔ هدفهای رفتاری

۳ . قرینه ، عکس و مزدوج یک عدد مختلط را تعریف کرده و محاسبه کند .

۴ . ویژگیهای اعمال جبری روی مجموعه اعداد مختلط را بیان کرده و به کار برد .

۵ . نمایش برداری یک عدد مختلط را شرح دهد .

۶ . قدر مطلق و آرگومان عدد مختلط را تعریف کرده و برای هر عدد داده شده محاسبه کند .

ادامهٔ هدفهای رفتاری

۷ . نمایش مثلثاتی عدد مختلط را توضیح داده و نمایش مثلثاتی هرعدد داده شده را بنویسد .

۸ . دستور « دموآور» را بیان کرده و به کار برد .

۹ . ریشه های n ام یک عدد مختلط را حساب کند .

۱۰ . معادله خط و دایره را در صفحه مختلط بنویسد .

مقدمه

معادلات زیر را در نظر بگیرید :

(1) $2x-8=0 \Rightarrow x=4 \in \mathbf{N}$

(2) $2x+8=0 \Rightarrow x=-4 \in \mathbf{Z} \wedge -4 \notin \mathbf{N}$

(3) $2x+9=0 \Rightarrow x=\frac{-9}{2} \notin \mathbf{Z} \wedge \frac{-9}{2} \in \Theta$

(4) $x^2-7=0 \Rightarrow x=\sqrt{7} \in \mathbf{P} \wedge \sqrt{7} \notin \Theta$

(5) $x^2+1=0$

مقدمه

معادلهٔ (۱) در $\mathbf{N}$ ریشه دارد .

معادلهٔ (۲) در $\mathbf{N}$ ریشه ندارد ولی در $\mathbf{Z}$ ریشه دارد .

معادلهٔ (۳) در $\mathbf{Z}$ ریشه ندارد ولی در Θ ریشه دارد .

معادلهٔ (۴) در Θ ریشه ندارد ولی در $\mathbf{P}$ ریشه دارد .

معادلهٔ (۵) در $\mathbf{P}$ ریشه ندارد .

حال می خواهیم مجموعه ای بسازیم که معادلهٔ (۵) در آن مجموعه ریشه ای مثل i داشته باشد ، یعنی $i^2+1=0 \Rightarrow i^2=-1$.

فصل سوم

بخش اول

۳ . ۱ تعریف اعداد مختلط

تعریف

عبارتی به صورت $z=a+ib$ را که در $a,b\in \mathbf{P}$ و i

آن $i^2=-1$ ، عددی است که $\mathbf{X}$ یک **عدد**

مختلط می نامیم ، مجموعهٔ تمام اعداد مختلط را با

نمایش می دهیم ، پس $\mathbf{X}=\{a+ib|a,b\in \mathbf{P}\ i^2=-1\}$.

۳ . ۱ تعریف اعداد مختلط

تعریف

a **قسمت حقیقی** و b **قسمت موهومی** عدد $a+ib$

مختلط $z=a+ib$ است . را **شکل جبری**

عدد مختلط می نامند . z $R_e z$

معمولاً قسمت حقیقی $I_m z$ را با و قسمت موهومی آن را

با -1 نشان i^2 می دهند $i \notin P$.

چون $N \subset Z \subset \Theta \subset P \subset X$ پس

۳ . ۱ تعریف اعداد مختلط

تعریف

دو عدد مختلط z_2 و z_1 را **مساوی** می نامیم هرگاه

$$R_e z_1 = R_e z_2 \text{ و } I_m z_1 = I_m z_2$$

به بیان دیگر $z_1 = a + ib$ و $z_2 = c + id$ مساویند اگر و تنها اگر

$$a = c \text{ و } b = d$$

در این صورت می نویسم $z_1 = z_2$.

۳ . ۱ تعریف اعداد مختلط

قرارداد

عدد مختلط $z = a + ib$ را که قسمت موهومی آن یعنی b مساوی صفر باشد با عدد حقیقی a یکی می گیریم $(\mathbf{P} \subseteq \mathbf{X})$.

اگر قسمت حقیقی $z = a + ib$ یعنی a مساوی صفر باشد آن را به صورت $z = ib$ نشان می دهیم .

اگر هم قسمت حقیقی وهم قسمت موهومی یک عدد برابر صفر باشد آن عدد را به شکل 0 نشان می دهیم .

۳ . ۱ تعریف اعداد مختلط

تعریف

عدد مختلطی را که قسمت موهومی آن صفر باشد ، یک عدد **حقیقی** و عدد مختلطی را که قسمت حقیقی آن صفر باشد ، یک عدد **موهومی محض** می نامیم .

واضح است که

$$N \subset Z \subset \Theta \subset P \subset X$$

فصل سوم

بخش دوم

۳ . ۲ اعمال جبری روی اعداد مختلط

تعریف

فرض کنید $z_1 = a + ib$ و $z_2 = c + id$ دو عد مختلط دلخواه باشد .

$$w_1 = (a+c) + i(b+d)$$

و

$$w_2 = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

w_1 را **مجموع** عدد z_1 با عدد z_2 و w_2 را **حاصلضرب** عدد z_1 در عدد z_2 می نامیم و به صورت زیر نشان می دهیم :

$$w_1 = z_1 + z_2 \text{ و } w_2 = z_1 z_2$$

۳ . ۲ اعمال جبری روی اعداد مختلط

تمرین

نشان دهید $z_1 = 0 + 0i = 0$ عضو خنثی جمع

و $z_2 = 1 + 0i = 1$ عضو خنثی

ضرب است . $z = a + ib$

$$z + z_1 = (a+ib) + (0+0i) = a+ib = z$$

فرض کنیم یک عدد مختلط دلخواه باشد داریم :

$$zz_1 = (a+ib)(1+0i) = a+ib = z$$

۳ . ۲ اعمال جبری روی اعداد مختلط

قضیه

الف . جمع و ضرب اعداد مختلط جابجایی است .

ب . جمع و ضرب اعداد مختلط شرکتپذیر است .

ج . ضرب نسبت به جمع توزیعپذیر است .

۳ . ۲ اعمال جبری روی اعداد مختلط

تعریف

عدد مختلط $-a+i(-b)$ را **قرینه** عدد z می نامیم و آن را به $-z$ نشان می دهیم .

مثال

نشان دهید مجموع هرعدد با قرینه اش برابر صفر است .

$$z+(-z)=(a+ib)+(-a+i(-b))$$
$$=(a-a)+i(b-b)=0$$

۳ . ۲ اعمال جبری روی اعداد مختلط

تعریف

دو عدد مختلط $z_1 = a + ib$ و $z_2 = c + id$ را در نظر می گیریم . عدد $z_1 + (-z_2)$ را **تفاضل** عدد z_2 از عدد z_1 می نامیم و آن را به صورت $z_1 - z_2$ نشان می دهیم .

بنابراین

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (a + ib) + (-c - id)$$
$$= (a - c) + i(b - d)$$

۳ . ۲ اعمال جبری روی اعداد مختلط

تعریف

عدد مختلط $z = a + ib$ مفروض است اگر عدد $z_1 = c + id$ مختلط $z z_1 = 1$ در رابطهٔ z صدق کند ، آن را **عکس** می نامیم و می نویسیم

$$z_1 = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} \ , \ z \neq 0$$

۳ . ۲ اعمال جبری روی اعداد مختلط

تمرین

عکس عدد مختلط $z = a + ib \neq 0$ را به صورت جبری بنویسید .

$$\frac{1}{z} = \overbrace{x + iy}^{\text{مجهول}} \Rightarrow (x + iy)(a + ib) = 1$$

$$\begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a}{a^2 + b^2} \\ y = \dfrac{-b}{a^2 + b^2} \end{cases}$$

۳ . ۲ اعمال جبری روی اعداد مختلط

تمرین

عکس عدد مختلط $z=2-3\sqrt{2}\,i$ را به دست آورید .

در عمل بهتر است صورت ومخرج کسر را به مزدوج مخرج ضرب کنیم

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{2-3\sqrt{2}\,i}=\frac{1}{2-3\sqrt{2}\,i}\times\frac{2+3\sqrt{2}\,i}{2+3\sqrt{2}\,i}$$

$$=\frac{2+3\sqrt{2}\,i}{(2)^2+(3\sqrt{2})^2}=\frac{2}{22}+i\frac{3\sqrt{2}}{22}$$

۳ . ۲ اعمال جبری روی اعداد مختلط

تعریف

اعداد مختلط $z_1 = a + ib$ و $z_2 = c + id$ را در نظر می گیریم . **خارج قسمت** عدد z_1 بر z_2 را که با علامت $\frac{z_1}{z_2}$ نشان می دهیم به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2}$$

۳ . ۲ اعمال جبری روی اعداد مختلط

تمرین

با فرض $z_1 = a + ib$ و $z_2 = c + id$ نشان دهید

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

۳ . ۲ اعمال جبری روی اعداد مختلط

تمرین

خارج قسمت $z_1 = -3 + 2i$ بر $z_2 = 5 - 3i$ محاسبه کنید .

$$\frac{-3+2i}{5-3i} = \frac{-3+2i}{5-3i} \times \frac{5+3i}{5+3i}$$

$$= \frac{-15-9i+10i+6i^2}{25+9}$$

$$= \frac{-21+i}{34} = \frac{-21}{34} + i\frac{1}{34}$$

۳ . ۲ اعمال جبری روی اعداد مختلط

تمرین

عبارت زیر را ساده کنید . $\frac{(1+2i)(3-i)^2}{i(2i+1)}+5-4i$

$$\frac{(1+2i)(3-i)^2}{i(2i+1)}+5-4i=\frac{(1+2i)(9-1-6i)}{-2+i}+5-4i$$

$$=\frac{20+10i}{-2+i}+5-4i$$

$$=\frac{(20+10i)(-2-i)}{(-2)^2+1}+5-4i$$

$$=\frac{-30-40i}{5}=5-4i$$

$$=-1-12i$$

۳ . ۲ اعمال جبری روی اعداد مختلط

تعریف مزدوج

عدد مختلط $z=a+ib$ را در نظر می گیریم . عدد $a-ib$ را **مزدوج** عدد z می نامیم و آن را با $\bar{z}$ نمایش می دهیم .

تمرین

نشان دهید برای هرعدد مختلط z ، $z\bar{z}$ عددی حقیقی است

$$z\bar{z}=(a+ib)(a-ib)=a^2+b^2\in \mathbf{P}$$

۳ . ۲ اعمال جبری روی اعداد مختلط

تمرین

اگر z ، z_1 و z_2 اعدادی مختلط باشند ، درستی روابط زیر را نشان دهید .

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

2. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$

3. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

4. $\overline{\overline{z}} = z$

۳ . ۲ اعمال جبری روی اعداد مختلط

تمرین

جواب های معادلات زیر را به دست آورید .

1. $x^2+x+1=0$

2. $ix^2+(4+i)x+(2-3i)=0$

۳ . ۲ اعمال جبری روی اعداد مختلط

حل تمرین

داریم :

$$x^2+x+1=(x+\tfrac{1}{2})^2-\tfrac{1}{4}+1=(x+\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{3}{4}=0$$

$$\tfrac{4}{3}(x+\tfrac{1}{2})^2+1=0\Rightarrow\tfrac{1}{3}(2x+1)^2+1=0$$

با فرض

$$z=\tfrac{1}{\sqrt{3}}(2x+1)$$

$$z^2+1=0\Rightarrow z=\pm i\Rightarrow\tfrac{1}{\sqrt{3}}(2x+1)=\pm i$$

$$\Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

۳ . ۲ اعمال جبری روی اعداد مختلط

حل تمرین

داریم :

$$\Delta = (4+i)^2 - 4i(2-3i) = 15 + 8i - 8i - 12 = 3$$

بنابراین

$$x = \frac{-(4+i) \pm \sqrt{3}}{2i} = \frac{1 + (-4 \pm \sqrt{3})i}{-2} = \frac{-1}{2} + \frac{4 \pm \sqrt{3}}{2} i$$

فصل سوم

بخش سوم

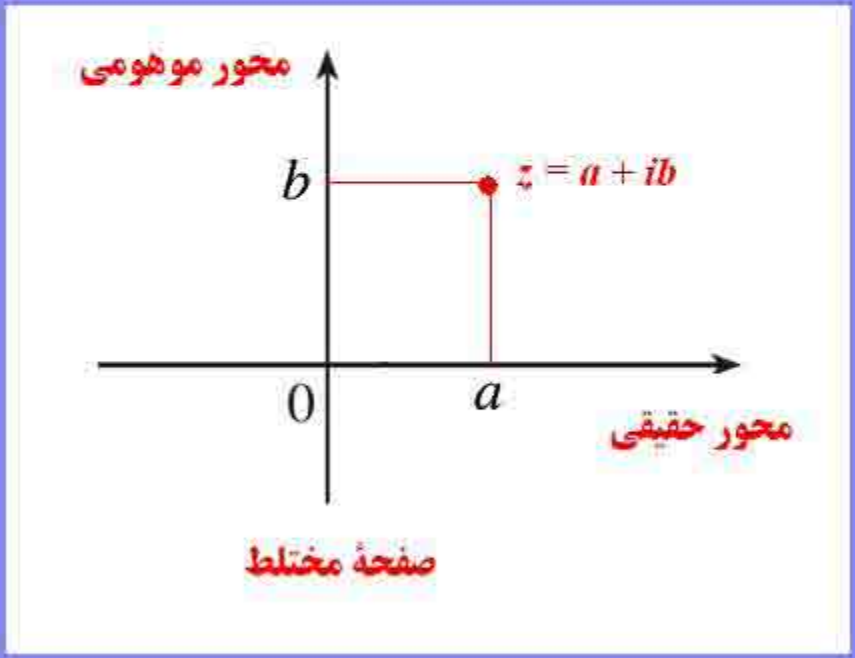
۳ . ۳ نمایش برداری اعداد مختلط

تعریف

دو محور عمود برهم شبیه دستگاه مختصات دکارتی رسم $z = a + ib$ ، می کنیم محور افقی را **محور حقیقی** و محور قائم را **محور موهومی** می نامیم این صفحه را **صفحه اعداد مختلط** می خوانیم برای نمایش هندسی عدد قسمت حقیقی آن یعنی a را روی محور افقی و قسمت موهومی آن b را روی محور قائم جدا می کنیم .

۳ . ۳ نمایش برداری اعداد مختلط

تعریف



۳ . ۳ نمایش برداری اعداد مختلط

تعریف

یعنی نقطه با مختصات دکارتی (a,b) نمایش **هندسی** عدد مختلط $z=a+ib$ است برعکس اگر w با مختصات (u,v) روی صفحه باشد این نقطه نمایش هندسی عدد مختلط $w=u+iv$ است .

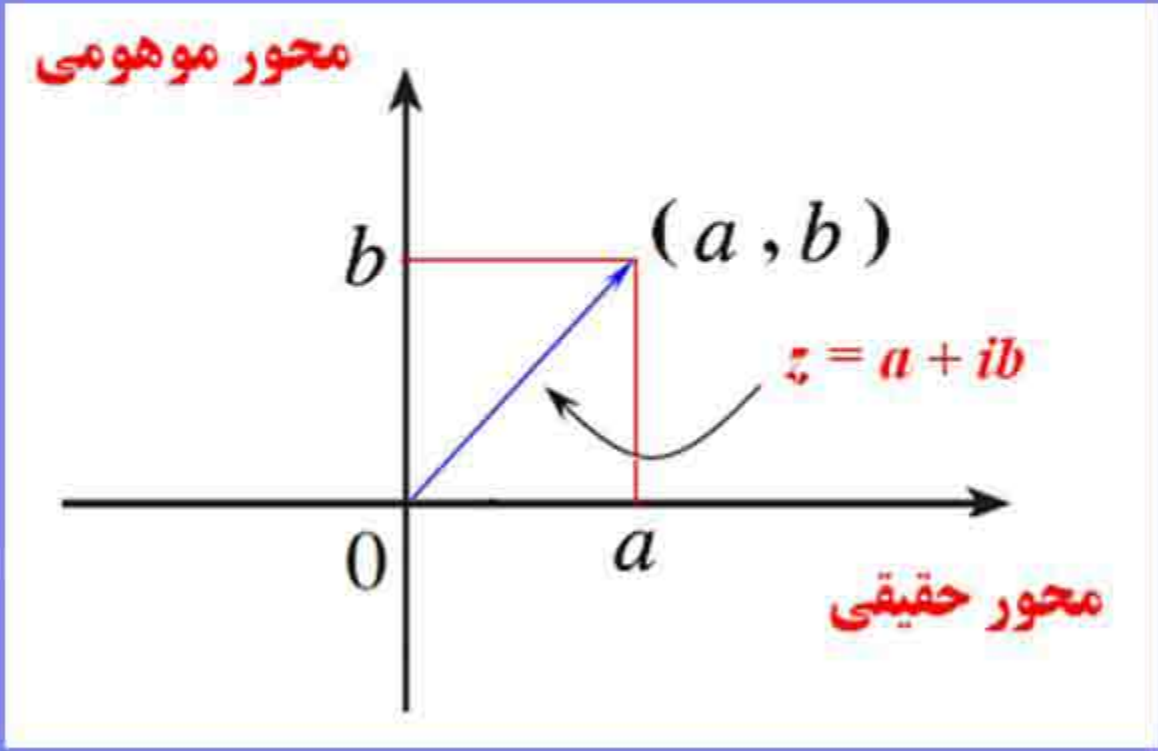
۳ . ۳ نمایش برداری اعداد مختلط

تعریف

نقطه ای به مختصات (a,b) از صفحه مختصات را می توان به عنوان برداری که مبدا آن نقطهٔ O و انتهای آن (a,b) است در نظر گرفت به عبارت دیگر هرعدد مختلط برداری است که مبدا آن مبدا مختصات و انتهای آن نقطهٔ (a,b) است .

۳ . ۳ نمایش برداری اعداد مختلط

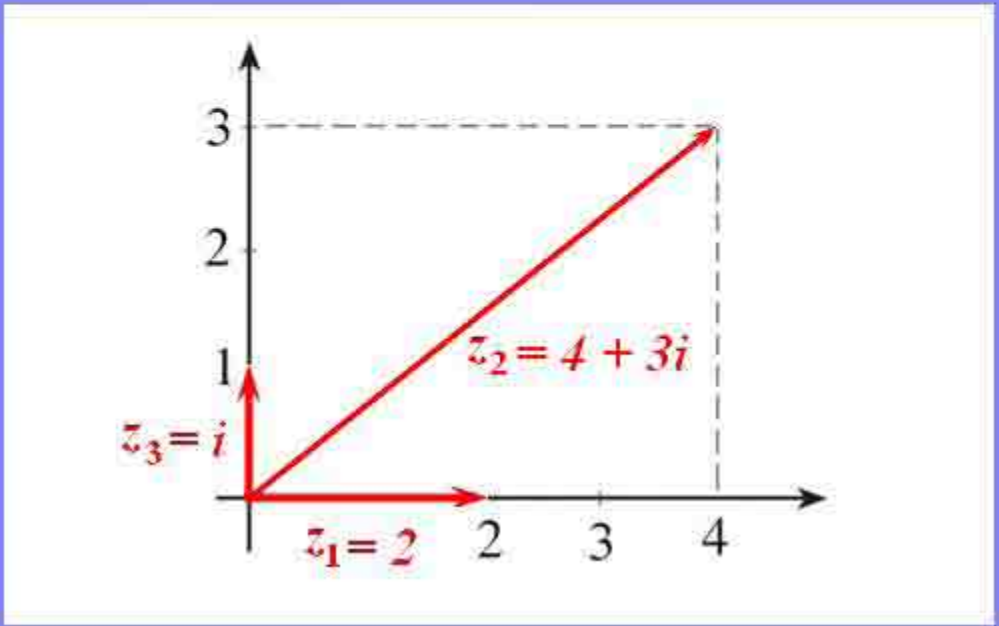
تعریف



۳ . ۳ نمایش برداری اعداد مختلط

مثال

اعداد $z_1 = 2$ ، $z_2 = 4 + 3i$ و $z_3 = i$ را با بردار نشان دهید .



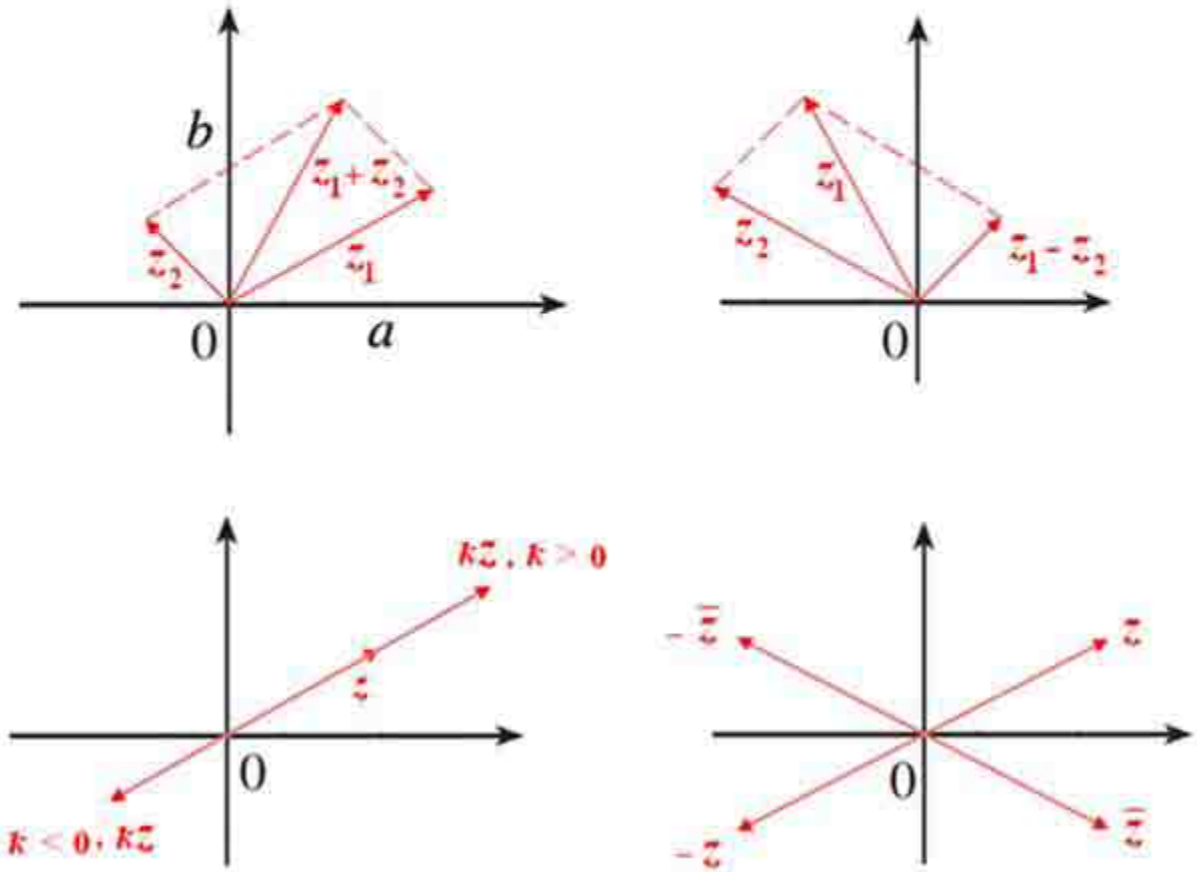
۳ . ۳ نمایش برداری اعداد مختلط

نمایش برداری مجموع ، تفاضل و . . .

با استفاده از نمایش برداری می توان مجموع ، تفاضل ، حاصل ضرب و خارج قسمت دو عدد مختلط همچنین قرینه و مزدوج یک عدد مختلط را نمایش داد .

۳ . ۳ نمایش برداری اعداد مختلط

چند نمایش برداری



۳ . ۳ نمایش برداری اعداد مختلط

تمرین

فرض کنید $z_1 = 2 + i$ و $z_2 = 1 + 4i$ نمایش برداری

$z_1 + z_2$ و $z_1 - z_2$ را رسم کنید .

۳ . ۳ نمایش برداری اعداد مختلط

تعریف

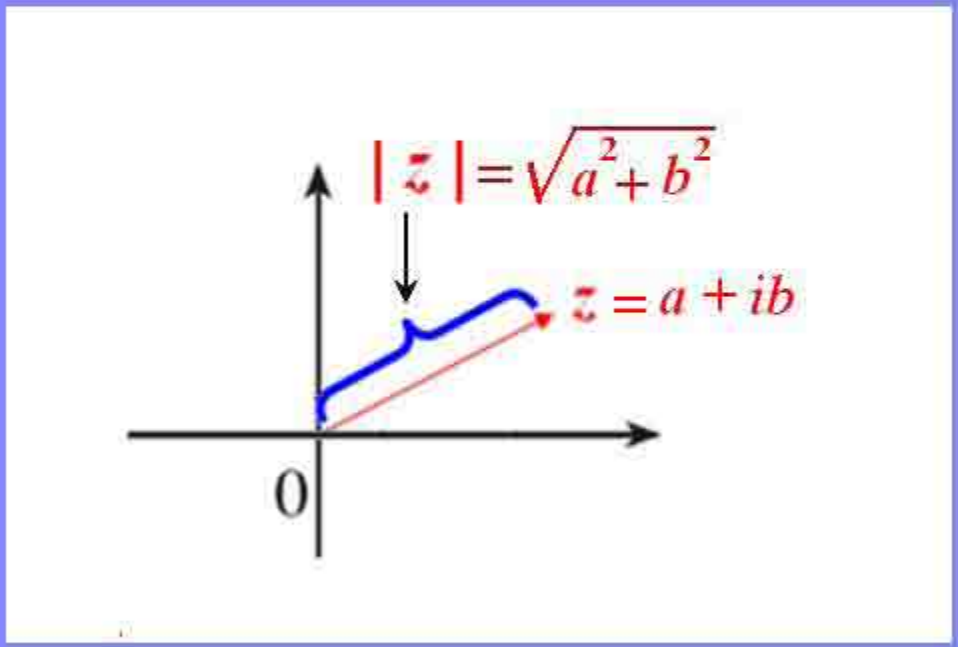
عدد مختلط $z = a + ib$ را در نظر می گیریم عدد حقیقی و نا منفی $\sqrt{a^2 + b^2}$ را **قدر مطلق** یا **مدول** z می نامیم و آن را با $|z|$ نشان می دهیم . پس

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$|z|$ برابر با فاصلهٔ نقطهٔ z از مبدا مختصات است .

۳ . ۳ نمایش برداری اعداد مختلط

نمودار مربوط به | z |



۳ . ۳ نمایش برداری اعداد مختلط

تمرین

فرض کنید $z = a + ib$ نشان دهید $|a| \leq |z|$ و $|b| \leq |z|$.

$$|a| = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$$

$$|b| = \sqrt{b^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$$

فصل سوم

بخش چهارم

۳ . ۴ نمایش مثلثاتی اعداد مختلط

تعریف

عدد مختلط $z = a + ib \neq 0$ در نظر می گیریم . فرض کنیم زاویهٔ بردار z با محور xها برابر θ باشد . در مثلث قائم الزاویهٔ OAB داریم :

$$\begin{cases} \sin\theta = \frac{b}{|z|} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \cos\theta = \frac{a}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = |z|\cos\theta \\ b = |z|\sin\theta \end{cases}$$

بنا براین

$$z = |z|\cos\theta + i|z|\sin\theta = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

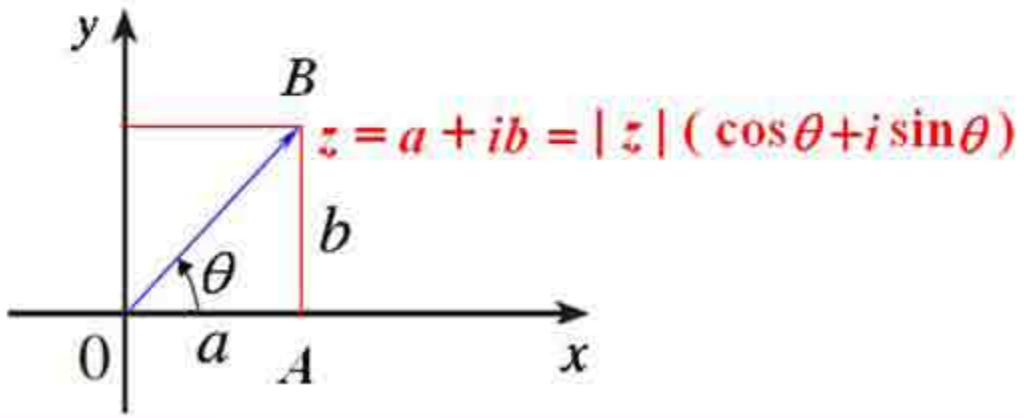
۴ . ۳ نمایش مثلثاتی اعداد مختلط

تعریف

نمایش عدد مختلط $z = a + ib$ به صورت :

$$z = |z|\cos\theta + i|z|\sin\theta = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

را نمایش **مثلثاتی یا قطبی** عدد z می نامند .



۳ . ۴ نمایش مثلثاتی اعداد مختلط

نکته

توجه کنید زاویه ای که بردار با جهت مثبت محور می سازد منحصر به فرد نیست ، زیرا به ازای هر عدد صحیح k هر یک از زوایای $2k\pi+\theta$ زاویهٔ z با جهت مثبت محور هاست .

$$z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$$
$$=|z|(\cos(2k\pi+\theta)+i\sin(2k\pi+\theta))$$

۴.۳ نمایش مثلثاتی اعداد مختلط

تعریف

فرض کنید یکی از زوایایی که عدد مختلط $z \neq 0$ با جهت مثبت محور x ها می سازد برابر با θ باشد در این صورت هریک از زوایای را یک **آرگومان** عدد می نامیم و آن را به صورت $(k \in Z)2k\pi + \theta$ نشان می دهیم .

$z \neq 0$ $\arg z$

آرگومان صفر تعریف نشده است .

۴ . ۳ نمایش مثلثاتی اعداد مختلط

مثال

عدد $z = i$ را به شکل مثلثاتی بنویسید .

داریم

$$\begin{cases} |z| = \sqrt{0+1^2} = 1 \\ \begin{cases} \cos\theta = 0 \\ \sin\theta = 1 \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

بنابراین

$$z = i = 1(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$$

۳ . ۴ نمایش مثلثاتی اعداد مختلط

آرگمان اصلی

فرض کنید $z \neq 0$ عددی مختلط باشد ، آنگاه عددی

ماx ، $0 \leq \alpha < 2\pi$ وجود دارد به طوری که

$$z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

α را **آرگومان اصلی** z می نامیم و آن را با $\operatorname{Arg} z$

نشان می دهیم .

۳ . ۴ نمایش مثلثاتی اعداد مختلط

مثال

آرگومانهای اصلی هر یک از اعداد i ، $1+i$ ، $1-i$ و -2

عبارتند از :

$$\mathrm{Arg}\, i = \frac{\pi}{2}$$

$$\mathrm{Arg}(1+i) = \frac{\pi}{4}$$

$$\mathrm{Arg}(1-i) = \frac{7\pi}{4}$$

$$\mathrm{Arg}(1) = 0$$

$$\mathrm{Arg}(-2) = \pi$$

۴.۳ نمایش مثلثاتی اعداد مختلط

قضیه

اگر

$z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ و $z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

آنگاه

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))$$

یعنی در ضرب اعداد مختلط مدولها در هم ضرب و آرگمانها با هم جمع می شوند .

۳ . ۴ نمایش مثلثاتی اعداد مختلط

تمرین

اعداد زیر را به صورت مثلثاتی نوشته و حاصلضرب آنها را محاسبه کنید .

1. $z_1 = 1+i$ و $z_2 = 1-i$
2. $z_1 = 1+i$ و $z_2 = \sqrt{3}-i$

۴ . ۳ نمایش مثلثاتی اعداد مختلط

تمرین

n عدد مختلط $z_k = |z_k|(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)$ ، $k = 1, 2, \ldots, n$

را در نظر می گیریم .حاصل ضرب $z_1 z_2 \ldots z_n$ را محاسبه کنید .

با توجه به حاصلضرب دو عدد مختلط به استقراء ثابت می شود

$$z_1 z_2 \ldots z_n$$

$$= |z_1||z_2|\ldots|z_n| = (\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n))$$

۴ . ۳ نمایش مثلثاتی اعداد مختلط

دستور دموآور

اگردر حاصل ضرب تمرین فوق فرض کنیم

$$z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z = |z|\,(\cos\theta + i\sin\theta)$$

آنگاه $z^n = |z|^n\,(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ با جاگذاری

$z^n = |z|^n\,(\cos\theta + i\sin\theta)^n$ نتیجه می گیریم

فعلاً $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos n\theta + i\sin n\theta)\,,\ n \in \mathrm{N}$

این رابطه را **دستور دموآر** می نامند .

۳ . ۴ نمایش مثلثاتی اعداد مختلط

دستور دموآور

۱ . اعدد مختلط $(1+i\sqrt{3})^{24}$ و $(1+i)^{1385}$ را به شکل جبری بنویسید .

۲ . برای چه مقادیر حقیقی از a و b عدد $1+i$ یک جواب معادلهٔ $z^5+az^3+b=0$ است ؟

۴.۳ نمایش مثلثاتی اعداد مختلط

صورت مثلثاتی خارج قسمت دو عدد

فرض می کنیم

$z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ و $z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

دو عدد مختلط باشندخارج قسمت $\frac{z_1}{z_2}$ عبارت است از

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

یعنی در تقسیم اعداد مختلط مدولها بر هم ضرب و آرگمانها از هم کم می شوند .

۴.۳ نمایش مثلثاتی اعداد مختلط

صورت مثلثاتی وارون یک عدد

در فرمول فوق اگر فرض شود

$$z_2 = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) \text{ و } z_1 = 1$$

آنگاه

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{|z|}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$$

۳ . ۴ نمایش مثلثاتی اعداد مختلط

دستور موآور

$$z^{-n} = (z^{-1})^n = [\frac{1}{|z|}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))]^n$$

$$= \frac{1}{|z|^n}(\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta))$$

واز آنجا

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{-n} = (\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta))$$

۳ . ۴ نمایش مثلثاتی اعداد مختلط

دستور موآور

مشاهده می شود دستور دموآور برای هر عدد صحیح $n \in \mathbb{Z}$ نیز برقرار است یعنی :

دستور دِ موآور :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta),\ n \in \mathbb{Z}$$

فصل سوم

بخش پنجم

۳ . ۵ ریشه های اعداد مختلط

تعریف

اگر z یک عدد مختلط و n یک عدد صحیح مثبت باشد w را یک **ریشه** nام z می نامیم هرگاه $w^n = z$. یک ریشهٔ n ام z را به صورت $z^{1/n}$ یا $\sqrt[n]{z}$ نشان می دهیم .

۳ . ۵ ریشه های اعداد مختلط

قضیه

اگر z یک عدد مختلط و n یک عدد صحیح باشد آنگاه معادلهٔ $w^n = z$ دارای n ریشه است . به عبارت دیگر هر عدد مختلط z دارای n ریشهٔ nام است .

۳ . ۵ ریشه های اعداد مختلط

تذکر

به نکات زیر در مورد ریشه های nام عدد z توجه کنید اگر w_0 ، w_1 ، ... و w_{n-1} ریشه های n ام عدد z باشند آنگاه

الف . $|w_0|=|w_1|=\cdots=|w_{n-1}|$

ب . تفاوت آرگومانهای اصلی دو ریشه متوالی w_j و w_{j+1} برابر است با $\left(\frac{2(j+1)\pi}{n}+\frac{\theta}{n}\right)-\left(\frac{2j\pi}{n}+\frac{\theta}{n}\right)=\frac{2\pi}{n}$

ج . به ازای هر $k=0,1,2,\ldots,(n-1)$ داریم $w_k^n=z$.

۳ . ۵ ریشه های اعداد مختلط

مثال

ریشه های سوم عدد $z=1$ را محاسبه کنید .

آرگومان اصلی عدد $z=1$ برابر با $\theta=0$ است ، بنابراین

$$z=\cos 0+i\sin 0=\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi$$

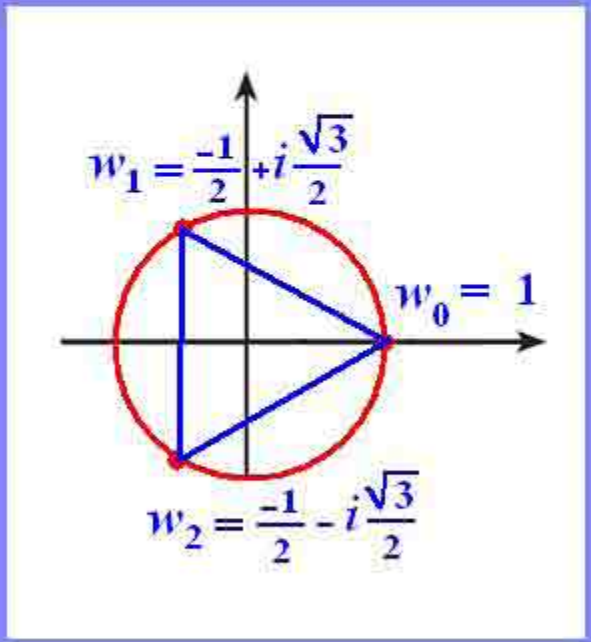
اگر ریشه های سوم w_0 ، w_1 و w_2 باشند ، داریم

$$w_k=\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}\ ,\ k=0,1,2$$

۳ . ۵ ریشه های اعداد مختلط

مثال

بنابراین ریشه های سوم عبارتند از



$$w_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$

$$w_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$w_1 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۳ . ۵ ریشه های اعداد مختلط

معادلهٔ خط در صفحه

فرض کنیم $ax+by+c=0$ معادلهٔ یک خط راست در مختصات دکارتی باشد . با فرض $z=x_1+iy_1$ خواهیم داشت

$$x_1=\frac{z+\bar{z}}{2}\ ,\ y_1=\frac{z-\bar{z}}{2}$$

که با جاگذاری این مقادیر درمعادلهٔ خط خواهیم داشت

$$\frac{a}{2}(z+\bar{z})+\frac{b}{2i}(z-\bar{z})+c=0$$

$$ia(z+\bar{z})+b(z-\bar{z})+2ic=0$$

$$z(b+ia)-\bar{z}(b-ia)+2ic=0$$

۳ . ۵ ریشه های اعداد مختلط

معادلهٔ خط در صفحه

با فرض $A = b + ia$ و $B = 2ic$ معادلهٔ خط $ax + by + c = 0$

به صورت زیر نوشته می شود

$$Az - \overline{Az} + B = 0$$

که در آن B یک عدد موهومی محض و A یک عدد مختلط

ثابت و غیر صفر است .

۳ . ۵ ریشه های اعداد مختلط

معادلهٔ خط در صفحه

معادله مختلط خط $3x+2y+5=0$ را بنویسید .

به جای x و y مقادیر $y=\frac{z-\bar{z}}{2}$, $x=\frac{z+\bar{z}}{2}$ را قرار می دهیم .

و در نهایت به دست می آوریم .

$$z(2+3i)-(2-3i)\bar{z}+10i=0$$

که در اینجا $A=2+3i$ و $B=10i$ است .

۳ . ۵ ریشه های اعداد مختلط

تمرین

۱ . A و B را طوری تعیین کنید که خط $Az-\overline{Az}+B=0$ از نقاط $1+i$ و $2+3i$ بگذرد .

۲ . نشان دهید اگر $z_1 \neq z_2$ آنگاه معادلهٔ $\frac{z-z_1}{z-z_2}=1$ معادلهٔ یک خط مستقیم است .

۳ . ۵ ریشه های اعداد مختلط

معادلهٔ دایره در صفحهٔ مختلط

۱ .

۳ . ۵ ریشه های اعداد مختلط

تمرین

۱ . معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن مبداء مختصات و شعاع آن برابر یک باشد .

۲ . معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن نقطهٔ $z_0 = i$ و شعاع آن ۳ باشد .

۳ . معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن نقطهٔ $z_0 = 1 + i$ و شعاع آن ۲ باشد .

۳ . ۵ ریشه های اعداد مختلط

تعبیر هندسی ریشه های یک عدد مختلط

فرض کنید z_1 یک عدد مختلط و $|z_1|=r$ باشد . اگر θ آرگومان اصلی z_1 و اعداد w_0 ، w_1 ، ... و w_{n-1} ریشه های n ام آن باشند ، داریم

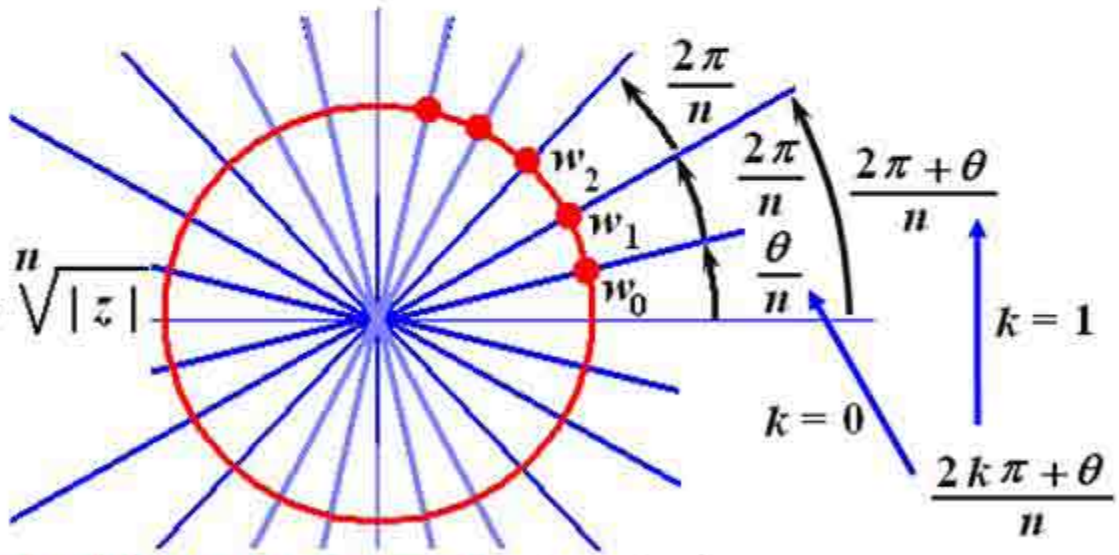
$$z_0 = i$$

$$|w_0|=|w_1|=\cdots=|w_{n-1}|=\sqrt[n]{r}$$

یعنی اعداد w_0 ، w_1 ، ... و w_{n-1} همگی روی دایره ای به مرکز مبداء مختصات و به شعاع $\sqrt[n]{r}$ واقع هستند .

۳ . ۵ ریشه های اعداد مختلط

تعبیر هندسی ریشه های یک عدد مختلط



شعاع دایره $= \sqrt[n]{|z|}$

w_0 ، w_1 ، w_2 و ... ریشه های n ام $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$

۳ . ۵ ریشه های اعداد مختلط

مثال

ریشه های دوم $1+i$ را به دست آورید .

هر دو ریشه روی دایره ای به شعاع $\sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2}$ قرار دارد .

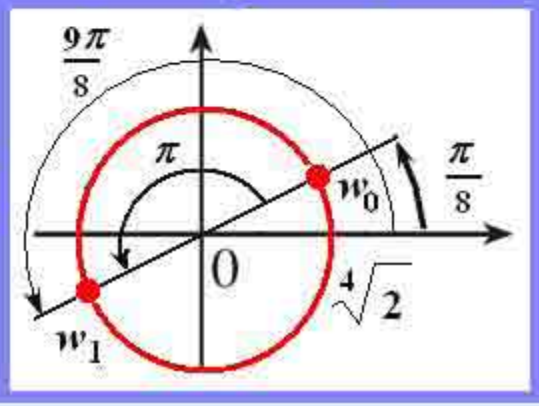
چون $\operatorname{Arg}(1+i) = \frac{\pi}{4}$ پس $\operatorname{Arg} w_0 = (\frac{\pi}{4})/2 = \frac{\pi}{8}$ و آرگمان

w_1 به اندازه $\frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ از آرگمان w_0 بیشتر است پس

$$w_0 = \sqrt[4]{2}(\cos\tfrac{\pi}{8} + \sin\tfrac{\pi}{8})$$

$$w_1 = \sqrt[4]{2}[\cos(\tfrac{\pi}{8}+\pi) + \sin(\tfrac{\pi}{8}+\pi)]$$

$$= \sqrt[4]{2}(\cos\tfrac{9\pi}{8} + \sin\tfrac{9\pi}{8})$$



۳ . ۵ ریشه های اعداد مختلط

تمرین

۱ . نمایش هندسی زیر مجموعهٔ $\{z \mid |z-z_0|<r\}$ از اعداد مختلط را تعیین کنید .

۲ . مجموعه نقاط واقع بین دو دایره به شعاع های ۱و۲ به مرکز مبدا را به صورت مجموعه ای از اعدادمختلط تعریف کنید .

فصل چهارم

رابطه و تابع

هدفهای رفتاری

دانشجو پس از مطالعه این فصل باید بتواند :

۱ . مفه

یادآوری بازه ها

بازهٔ باز (a,b) به صورت زیر تعریف می شود .

$$(a,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x<b\}$$

بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ به صورت زیر تعریف می شود .

$$[a,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x\le b\}$$

یادآوری بازه ها

بازهٔ نیم باز $[a,b)$ به صورت زیر تعریف می شود .

$$[a,b)=\{x|\ a\le x<b\}$$

بازهٔ نیم باز $(a,b]$ به صورت زیر تعریف می شود .

$$(a,b]=\{x|\ a<x\le b\}$$

مقدمه

یادآوری بازه ها

بازهٔ نامتناهی $(a,+\infty)$ به صورت زیر تعریف می شود .

$$(a,+\infty)=\{x|\ x>a\}$$

بازهٔ نیم باز $(a,b]$ به صورت زیر تعریف می شود .

$$[a,+\infty)=\{x|\ x\geq a\}$$

یادآوری بازه ها

بازهٔ نامتناهی $(-\infty, b)$ به صورت زیر تعریف می شود .

$$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$$

بازهٔ نامتناهی $(-\infty, b]$ به صورت زیر تعریف می شود .

$$(-\infty, b] = \{x \mid x \le b\}$$

فصل چهارم

بخش اول

۱.۴ مفهوم زوج مرتب

تعریف

دسته ای متشکل از دو شی با ترتیب معین را **زوج مرتب** می گوییم . در زوج مرتب (x,y) x را **مختص** (**مولفهٔ**) **اول** و y را **مختص** (**مولفهٔ**) **دوم** این زوج مرتب می نامیم .

تعریف

دو زوج مرتب (a,b) و (c,d) را **برابر** می گوییم اگر و تنها اگر $a=c$ و $b=d$.

فصل چهارم

بخش دوم

۴ . ۲ مفهوم رابطه

تعریف

هرمجموعه از زوجهای مرتب را یک **رابطهٔ دوتایی** یا یک **رابطه** می نامیم . اگر R یک رابطه باشد و $(x, y) \in R$ ، آنگاه می نویسیم xRy و می خوانیم x رابطهٔ R با y دارد .

۴ . ۲ مفهوم رابطه

مثال

مجموعهٔ

$R = \{$ (آنکارا ، ترکیه) ، (پاریس ، فرانسه) ، (تهران ، ایران) $\}$

یک رابطهٔ سه عضوی است مثلاً (پاریس ، فرانسه) $\in R$ و یا

فرانسه رابطهٔ R با پاریس دارد .

۴ . ۲ مفهوم رابطه

تعریف

اگر R یک رابطه باشد آنگاه :

الف . مجموعهٔ همهٔ مختصات اول عناصر R را **حوزهٔ تعریف** ، **قلمرو** یا **دامنهٔ** R گفته و آن را با $\mathrm{dom}\ R$ نشان می دهیم .

ب . مجموعهٔ همهٔ مختصات دوم عناصر R را **حوزهٔ مقادیر** یا **برد** R گفته و آن را با $\mathrm{rang}\ R$ نشان می دهیم .

ج . مجموعهٔ همهٔ مختصات اول و دوم R را **میدان** R گفته و آن را با $\mathrm{fld}\ R$ نشان می دهیم .

فصل چهارم

بخش سوم

۴.۳ تابع

تعریف

رابطهٔ f را یک **تابع** می گوییم :

اگر $(x,y)\in f$ و $(x,z)\in f$ آنگاه $y=z$.

۴.۳ تابع

تعریف

مجموعهٔ همهٔ مختصات اول عناصر تابع f را **دامنهٔ** f نامیده و آن را با D_f نشان می دهیم .

مجموعهٔ همهٔ مختصات دوم عناصر تابع f را **برد** f نامیده و آن را با R_f نشان می دهیم .

اگر $(x,y) \in f$ گوییم y **تصویر** x است .

۴ . ۳ تابع

تعریف

فرض کنیم f تابعی باشد که $D_f = A$ و $R_f \subseteq B$

گوییم f یک **تابع از** A **به** B است هرگاه :

الف . برای هر $x \in A$ عنصری مانند $y \in B$ وجود داشته باشد به طوری که $(x, y) \in f$.

یعنی هر عنصر از A حداقل یک تصویر در B دارد .

۴ . ۳ تابع

ادامهٔ تعریف

ب . اگر $(x,y)\in f$ و $(x,z)\in f$ آنگاه $y=z$.

یعنی هر عنصر از A حداکثر یک تصویر در B دارد .

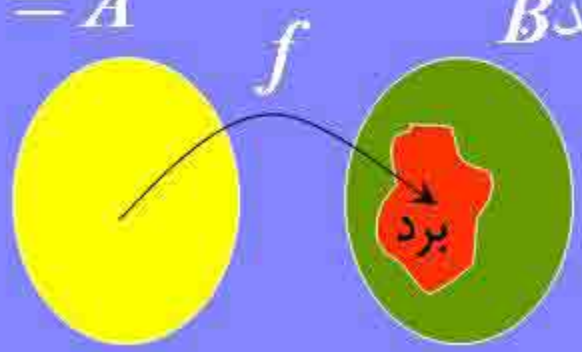
اگر f تابعی از A به B باشد می نویسیم $f:A\to B$.

۴.۳ تابع

تذکر

دقت کنید وقتی می نویسیم $f : A \to B$ لازم نیست B برد تابع برابر B باشد بلکه می تواند هر مجموعهٔ شامل برد باشد . اما الزاماً باید B مجموعهٔ $D_f = A$.

را **هم دامنه** f می نامند B دامنهٔ تابع $= A$



۴.۳ تابع

مثال

فرض کنید ضابطهٔ تابع $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ به صورت $f(x)=2x$ باشد در این صورت

دامنهٔ تابع = N

هم دامنهٔ تابع = N

برد تابع = اعداد طبیعی زوج

۴ . ۳ تابع

تعیین دامنهٔ توابع جبری

اگر دامنهٔ یک تابع در مقابل آن ذکر نشده باشد در این صورت دامنهٔ آن بزرگترین زیر مجموعهٔ اعداد حقیقی است که به ازای آنها ضابطهٔ $f(x)$ بامعنی باشد . دقت کنید که

۱ . تقسیم بر صفر مجاز نیست .

۲ . اعداد منفی ریشهٔ زوج ندارند .

۴ . ۳ تابع

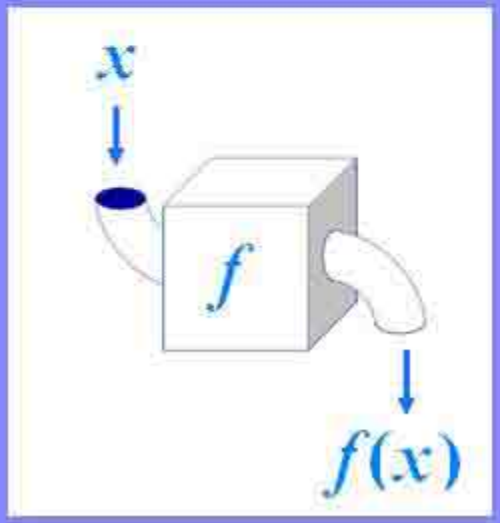
تذکر

۱. از تعریف تابع معلوم می شود که به ازای هر $x \in D_f$ تنها یک عنصر مانند y از R_f موجود است که $(x, y) \in f$

معمولاً f را **مقدار** x در y می نامیم

و می نویسیم $y = f(x)$.

x را **متغیر مستقل** و y را **متغیر وابسته** می نامیم .



۴ . ۳ تابع

تذکر

۲ . معمولاً y توسط ضابطه ای بر حسب x بیان می شود

مثلاً تابع

$$f=\{(x,y)\,|\,x\in \mathrm{R}, y=2x+1\}$$

را که قلمرو و برد آن اعداد حقیقی است به صورت

$$f(x)=2x+1 \quad x\in R$$

نشان می دهیم .

۴.۳ تابع

تعریف

فرض کنیم $f : A \subseteq \mathbf{P} \to B \subseteq \mathbf{P}$ یک تابع باشد

نمودار f زیر مجموعه ای از $\mathbf{P}^2$ است که با

$$\{(x, y) | y = f(x) \text{ و } x \in A\}$$

تعریف می شود .

۴.۳ تابع

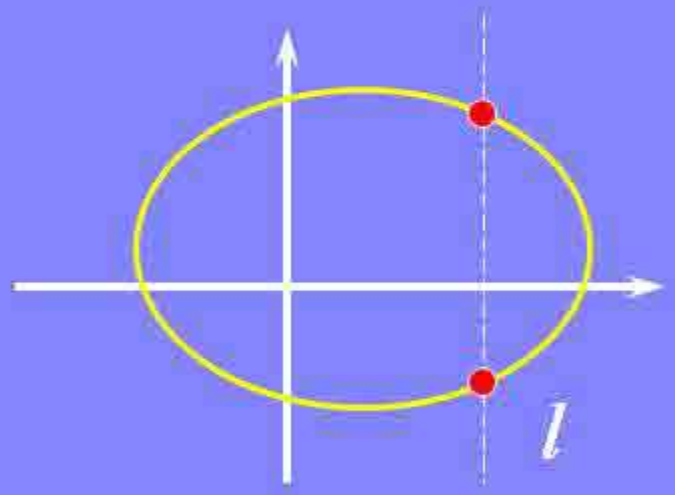
تذکر

با توجه به تعریف تابع هر خط قائم نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع می کند . به عبارت دیگر اگر خط قائمی نموداری را در بیش از یک نقطه قطع کند آن نمودار ، نمودار یک تابع نیست .

۴.۳ تابع

مثال

آیا نمودار زیر مربوط به یک تابع است ؟

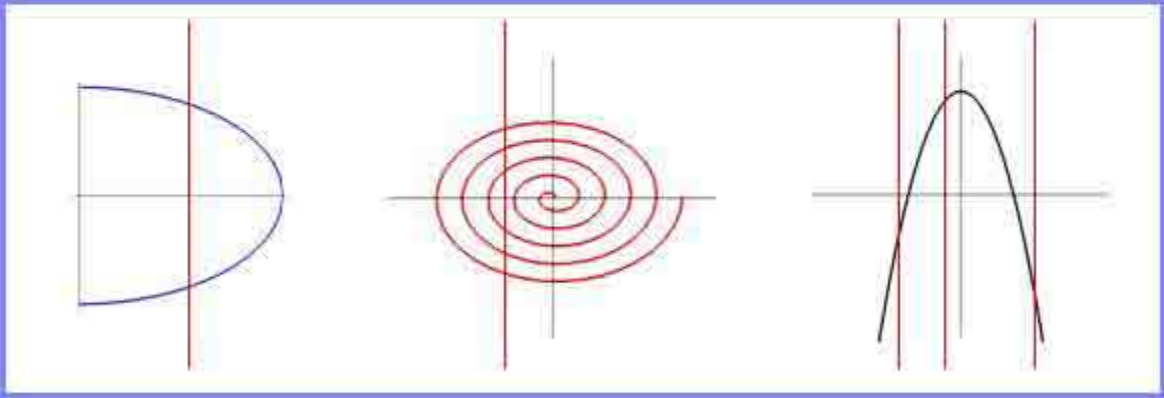


چون خط قائم l نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کرده است پس این نمودار ، نمودار یک تابع نیست .

۴.۳ تابع

مثال

کدام نمودار مربوط به یک تابع است ؟



۴.۳ تابع

مثال

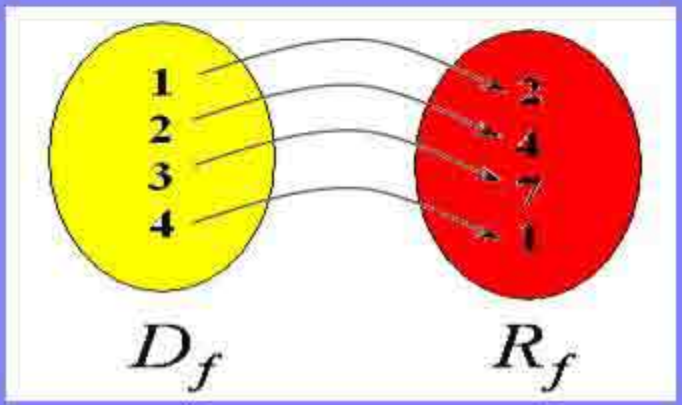
چون مولفهٔ هیچ دو زوج مرتب از رابطهٔ

$$f=\{(1,2),(2,4),(3,7),(4,1)\}$$

برابر نیست پس f یک تابع است و داریم

$$D_f=\{1,2,3,4\} \qquad R_f=\{2,4,7,1\}$$

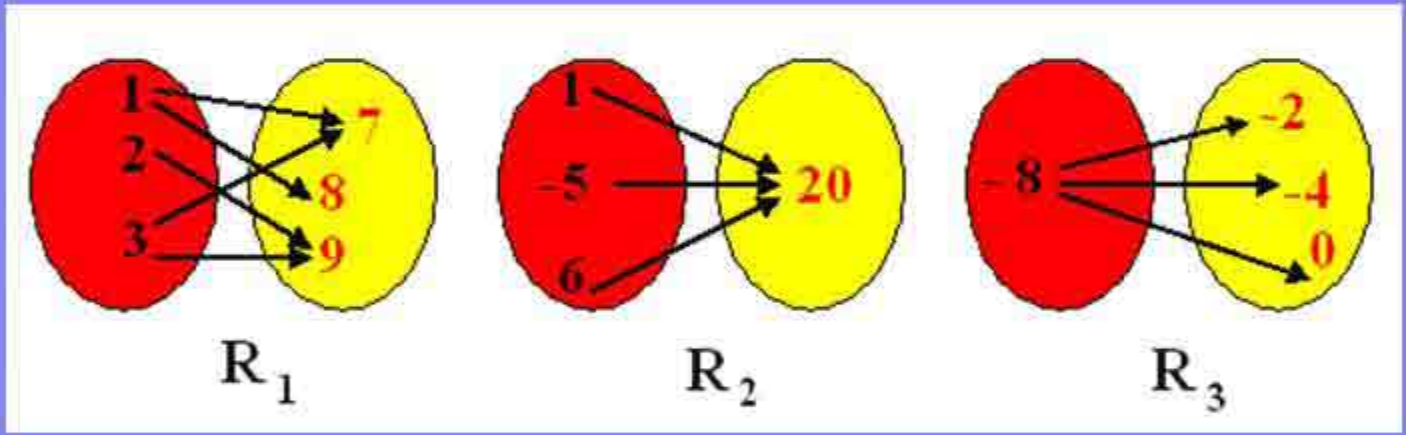
$$f(1)=2,\quad f(2)=4$$
$$f(3)=7,\quad f(4)=1$$



۴ . ۳ تابع

تمرین

کدام یک از نمودارهای زیر نشانگر یک تابع است ؟



$$\begin{cases}(1,7)\in R_1\\(1,8)\in R_1\end{cases}\Rightarrow ?$$

$$\begin{cases}(-8,-2)\in R_3\\(-8,-4)\in R_3\end{cases}\Rightarrow ?$$

۴ . ۳ تابع

مثال

آیا رابطهٔ $f=\{(x,y)|\, x,y\in \mathbf{P}\,, 5x+4y=7\}$

یک تابع از $\mathbf{P}$ به $\mathbf{P}$ است ؟

شرط (الف) تعریف تابع برقرار است (چرا؟) ، شرط (ب) را

بررسی می کنیم :

$$(x,y)\in f \Rightarrow 5x+4y=7$$

$$(x,z)\in f \Rightarrow 5x+4z=7$$

پس $5x+4y=5x+4z$ در نتیجه $y=z$ یعنی f

یک تابع از $\mathbf{P}$ به $\mathbf{P}$ است ؟

۴ . ۳ تابع

تمرین

کدامیک از روابط زیر یک تابع است ؟ دلیل آن را بیان کنید .

$f=\{(2,3),(3,4),(2,5)\}$ تابع نیست

$g=\{(x,y)|\, x,y\in \mathbf{N}, x<y\}$ تابع نیست

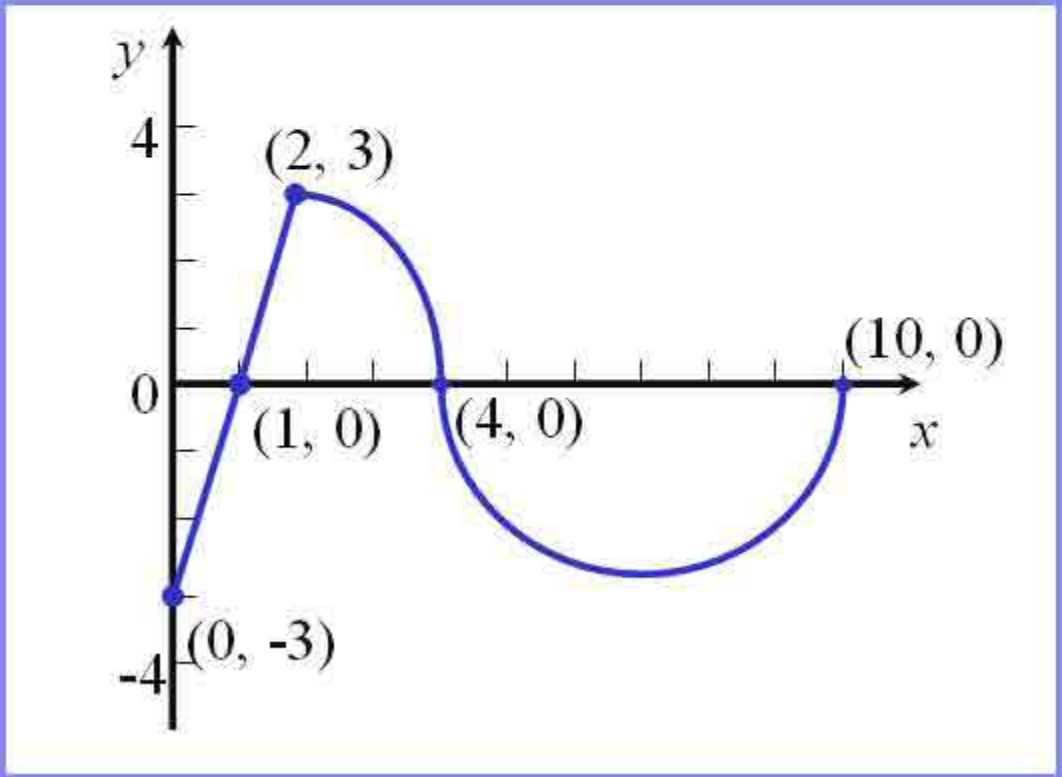
$h=\{(x,y)|\, x,y\in \mathbf{P}, x^2+y^2=4\}$ تابع نیست

$k=\{(x,y)|\, x,y\in \mathbf{P}, y=\frac{5}{x^2+1}\}$ تابع است

۴.۳ تابع

تمرین

آیا نمودار زیر یک تابع است ؟ دامنه وبرد آن را مشخص نمایید .



۴.۳ تابع

مثال

دامنهٔ توابع زیر را به دست آورید .

$$a.\ f(x) = x^2 - 7x \qquad b.\ g(x) = \frac{6x}{x^2 - 9} \qquad c.\ h(x) = \sqrt{3x + 12}$$

$$D_f = \mathbf{P} \qquad D_g = \mathbf{P} - \{-3, 3\} \qquad D_h = \{x \mid x \geq 0\}$$

۴.۳ تابع

تذکر

گاهی پیش می آید که در تابع $y=f(x)$ نقش x را به متغیر دیگری محول می کنیم ، مثلاً وقتی می گوییم $f(5x)$ یعنی $5x$ در نقش x است .

مثال

فرض کنیم $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$ ، مقادیر $f(0)$ ، $f(-x)$ ، $f(x+1)$ را تعیین کنید .

۴ . ۳ تابع

ادامهٔ مثال

$$f(x)=\frac{1-x}{1+x}$$

$$f(0)=\frac{1-0}{1+0}=1$$

$$f(-x)=\frac{1-(-x)}{1+(-x)}=\frac{1+x}{1-x}$$

$$f(x+1)=\frac{1-(x+1)}{1+(x+1)}=\frac{-x}{x+2}$$

۴.۳ تابع

مثال

دامنهٔ توابع زیر را تعیین کنید .

فصل چهارم

بخش چهارم

۴ . ۴ برابری دو تابع

تعریف

دو تابع f و g را **برابر** گوییم اگر :

۱ . قلمرو آنها برابر باشد $D_f = D_g$.

۲ . به ازای هر x از قلمرو مشترک آنها مقدار دو تابع برابر باشد . یعنی $f(x) = g(x)$.

۴ . ۴ برابری دو تابع

مثال

توابع $f(x)=\frac{x^2+2x}{x}$ و $g(x)=x+2$ برابر نیستند

زیرا

$$D_f = \mathbf{P} - \{0\}$$

$$D_g = \mathbf{P}$$

پس شرط اول بر قرار نیست .

۴ . ۴ برابری دو تابع

مثال

توابع $f(x)=\frac{x^4-1}{2(x^2+1)}$ و $g(x)=\frac{1}{2}(x^2-1)$ برابرند

زیرا

۱ . $D_f = D_g = \mathbf{P}$

۲ . به ازای هر x از $\mathbf{P}$ ،

$$f(x)=g(x)=\frac{1}{2}(x^2-1)$$

۴ . ۴ برابری دو تابع

تمرین

بررسی کنید که آیا توابع f و g داده شده مساویند یا نه .

1. $f(x)=\frac{x-3}{x-3}$ $\quad g(x)=1$

2. $\begin{cases} f(x)=\frac{x^2-1}{x+1} \\ x\in(1,3) \end{cases}$ $\quad \begin{cases} g(x)=x-1 \\ x\in(1,3) \end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases} x^2-3x & x\geq 3 \\ -x^2+3x & x<3 \end{cases}$ $\quad g(x)=x|x-3|$

فصل چهارم

بخش پنجم

۴. ۵ جبر توابع و انواع آن

تعریف

فرض کنیم f و g توابعی با قلمروهای D_f و D_g باشند

توابع جدید $f+g$ ، $f-g$ ، $f.g$ و $\frac{f}{g}$ را به ترتیب

مجموع ، **تفاضل** ، **حاصلضرب** و **خارج قسمت** f و g

می نامیم و آنها را به صورت زیر تعریف می کنیم :

۴ . ۵ جبر توابع و انواع آن

ادامهٔ تعریف

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \qquad x\in D_f\cap D_g$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x) \qquad x\in D_f\cap D_g$$

$$(f.g)(x)=f(x).g(x) \qquad x\in D_f\cap D_g$$

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \qquad x\in D_f\cap D_g\,,g(x)\notin 0$$

۴ . ۵ جبر توابع و انواع آن

مثال

فرض کنیم $f(x)=\sqrt{x-1}$ و $g(x)=\sqrt{2-x}$

مجموع ، تفاضل ، حاصلضرب و خارج قسمت f و g را

به دست آورید .

داریم :

$$D_f=\{x\,|\,x-1\geq 0\}=[1,+\infty)$$

$$D_g=\{x\,|\,2-x\geq 0\}=(-\infty,2]$$

ادامهٔ مثال

بنابراین $D_f \cap D_g = [1,+\infty) \cap (-\infty,2] = [1,2]$

$$D_f \cap D_g - \{x \mid \sqrt{2-x} = 0\} = [1,2] - \{2\} = [1,2)$$

و

$$(f \pm g)(x) = \sqrt{x-1} \pm \sqrt{2-x} \qquad x \in [1,2]$$

$$(f.g)(x) = \sqrt{(x-1)(2-x)} \qquad x \in [1,2]$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \sqrt{\frac{x-1}{2-x}} \qquad x \in [1,2)$$

۴. ۵ جبر توابع و انواع آن

تعریف

برای دو تابع f و g تابع **مرکب** fog به صورت :

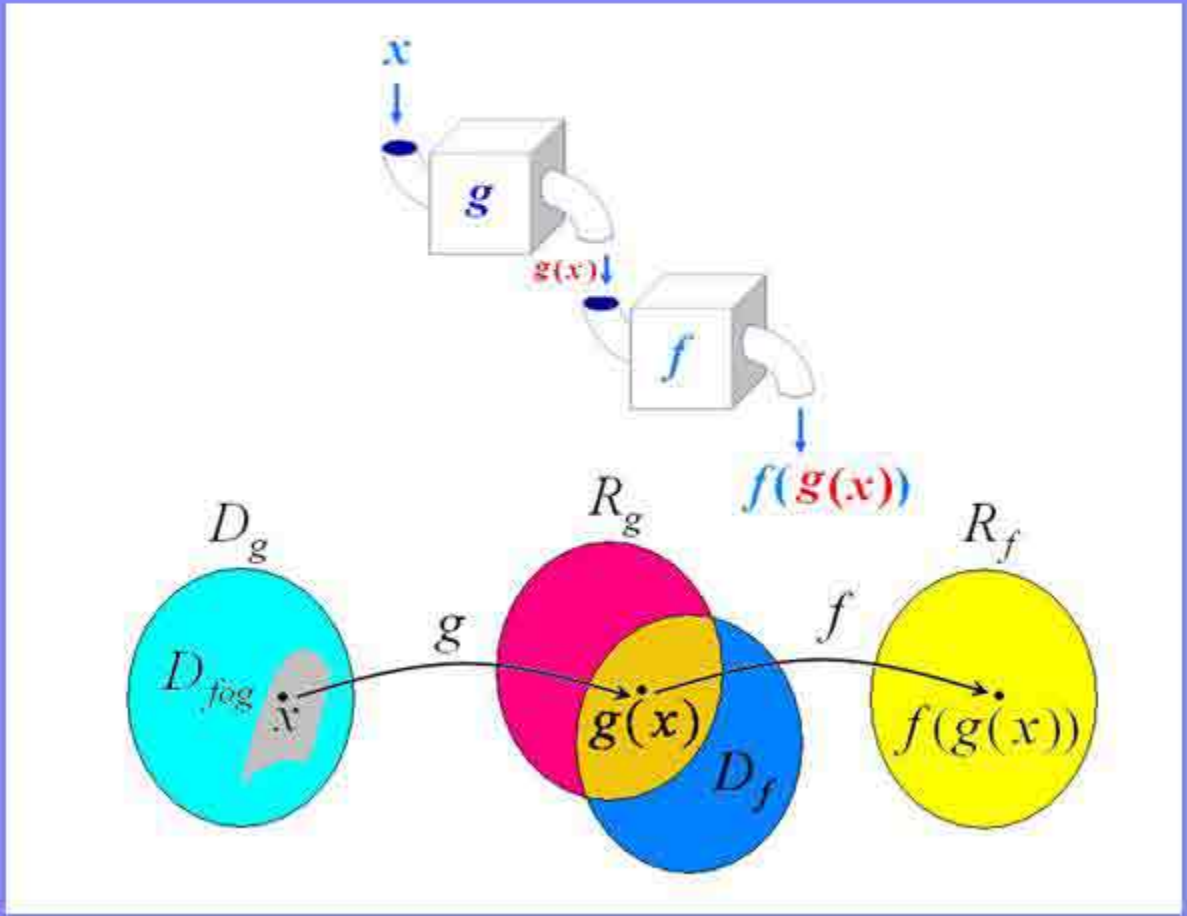
$$(fog)(x) = f(g(x))$$

تعریف می شود و قلمرو آن عبارت است از :

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

۴ . ۵ جبر توابع و انواع آن

نمودار مربوط به ترکیب توابع



۴. ۵ جبر توابع و انواع آن

مثال

فرض کنید $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=x^2-1$ تابع مرکب $(fog)of$ را به دست آورید .

$$f(x)=\sqrt{x}$$

$$D_f=[0,+\infty) \qquad D_g=\mathbf{P}$$

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(x^2-1)=\sqrt{x^2-1}$$

$$D_{fog}=\{x\in\mathbf{P}\mid g(x)\in[0,+\infty)\}$$

$$=\{x\in\mathbf{P}\mid |x|\geq 1\}=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$$

۴. ۵ جبر توابع و انواع آن

تعمیم ترکیب توابع

مفهوم ترکیب برای بیش از دو تابع نیز قابل تعمیم است ، برای مثال اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=x^2-1$ آنگاه $(fog)of$ به صورت زیر به دست می آید

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(x^2-1)=\sqrt{x^2-1}$$

بنابراین

$$[(fog)of](x)=(fog)(\sqrt{x})=\sqrt{(\sqrt{x})^2-1}=\sqrt{x-1}$$

۴. ۵ جبر توابع و انواع آن

تعریف

اگر قلمرو و برد تابع f اعداد حقیقی باشند آنگاه f را یک تابع **حقیقی** می نامیم .

تعریف

اگر برد f مجموعهٔ یکانی باشد f را تابع **ثابت** می نامیم .

تعریف

اگر به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $f(x) = x$ تابع f را تابع **همانی** می نامیم .

۴ . ۵ جبر توابع و انواع آن

تعریف

تابع $f(x)=ax+b$ را که در آن a و b اعداد حقیقی ثابت هستند تابع **خطی** می نامیم .

تعریف

تابع **فاکتوریل** تابعی است که قلمرو آن اعداد صحیح نا منفی و برد آن اعداد طبیعی است و به صورت زیر تعریف می شود .

$$f(x)=n!=\begin{cases}1 & n=0,1\\ 1\times 2\times 3\times\cdots\times n & n>1\end{cases}$$

۴ . ۵ جبر توابع و انواع آن

تعریف

تابع **قدر مطلق** با قلمرو $\mathbf{P}$ و برد $[0,+\infty)$ با ضابطهٔ زیر تعریف می شود :

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

تعریف

تابع $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ را که در آن n عددی صحیح و نامنفی بوده و a_0، . . . a_n اعدادی حقیقی و $a_0\neq 0$ است ، یک تابع **چند جمله ای** از درجهٔ n می نامیم .

۴ . ۵ جبر توابع و انواع آن

تعریف

اگر یک تابع را بتوان به صورت خارج قسمت دو تابع چند جمله ای نوشت آن را یک تابع **گویا** می نامیم .

تعریف

تابع **جبری** تابعی است که از تعدادی متناهی عمل جبری (جمع ، تفریق ، ضرب ، تقسیم ، به توان رساندن و ریشه گرفتن) تابع همانی و تابع ثابت حاصل شده باشد .

۴ . ۵ جبر توابع و انواع آن

تعریف

فرض کنیم x و $-x$ در قلمرو f باشند .

الف . تابع f را **زوج** گوییم اگر به ازای هر x در قلمرو f

$$f(-x)=f(x)$$

ب . تابع f را **فرد** گوییم اگر به ازای هر x در قلمرو f

$$f(-x)=-f(x)$$

۴ . ۵ جبر توابع و انواع آن

مثال

الف . تابع $f(x)=5x^4+6x^2-3$ یک تابع زوج است

زیرا

$$f(-x)=5(-x)^4+6(-x)^2-3=5x^4+6x^2-3=f(x)$$

ب . تابع $g(x)=3x^5+7x^3-2x$ یک تابع فرد است

زیرا

$$g(-x)=3(-x)^5+7(-x)^3-2(-x)=3x^5-7x^3+2x$$
$$=-(3x^5+7x^3-2x)=-g(x)$$

۴ . ۵ جبر توابع و انواع آن

مثال

ج . تابع $h(x)=4x^4+x^3-5x^2+6$ نه فرد و نه زوج است . زیرا :

$$h(-x)=4(-x)^4+(-x)^3-5(-x)^2+6$$
$$=4x^4-x^3-5x^2+6$$

نه برابر $h(x)$ و نه برابر $h(-x)$ است پس h نه زوج و نه فرد است .

۴ . ۵ جبر توابع و انواع آن

مثال

نشان دهید تابع $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ یک تابع فرد است .

$$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{x^2+1})=\ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

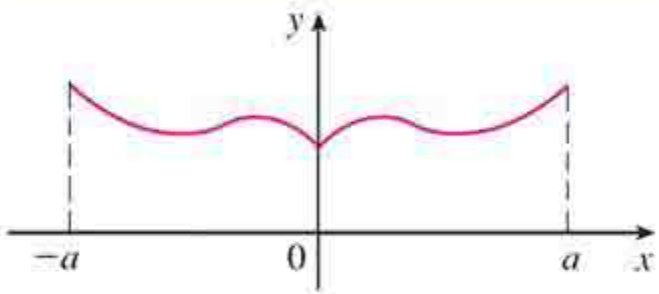
$$=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x)$$

۴ . ۵ جبر توابع و انواع آن

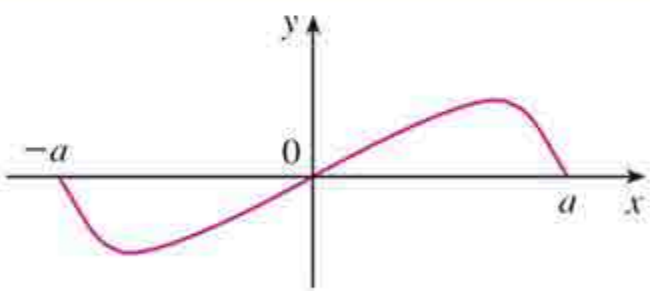
تذکر

نمودار توابع زوج نسبت به محور y ها متقارن است .

نمودار توابع فرد نسبت به مبدا متقارن است .



نمودار یک تابع زوج



نمودار یک تابع فرد

۴. ۵ جبر توابع و انواع آن

تمرین

در تمرینهای زیر معین کنید که تابع داده شده زوج ، فرد یا هیچکدام است .

1. $f(x)=4x^3-30x$
2. $f(x)=3x^4-5x^2-3$
3. $f(x)=\frac{x^2-x}{x^2+1}$
4. $f(x)=\frac{x^2+4}{|x|}\ ,\ x\neq 0$

۴. ۵ جبر توابع و انواع آن

تعریف

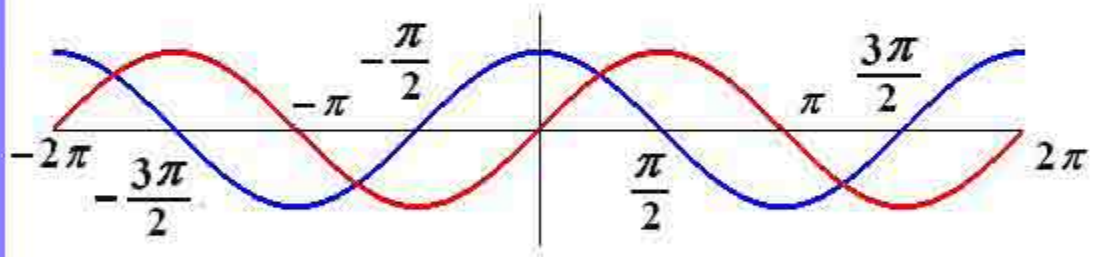
هر تابع را که به خطوط مثلثاتی قوس x بستگی داشته باشد تابع **مثلثاتی** می گوییم .

فرض کنیم x و $x+t$ در قلمرو f باشند . گوییم تابع f **متناوب** با **دورهٔ تناوب** $t \neq 0$ است هرگاه t کوچکترین عدد مثبتی باشد که :

$$f(x+t)=f(x)$$

۴. ۵ جبر توابع و انواع آن

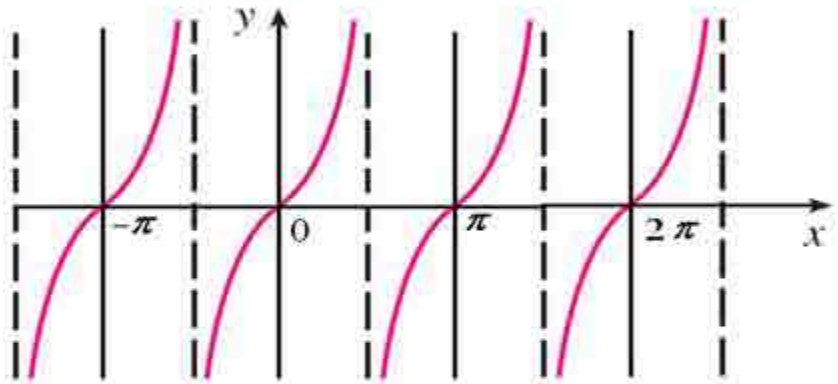
تعریف



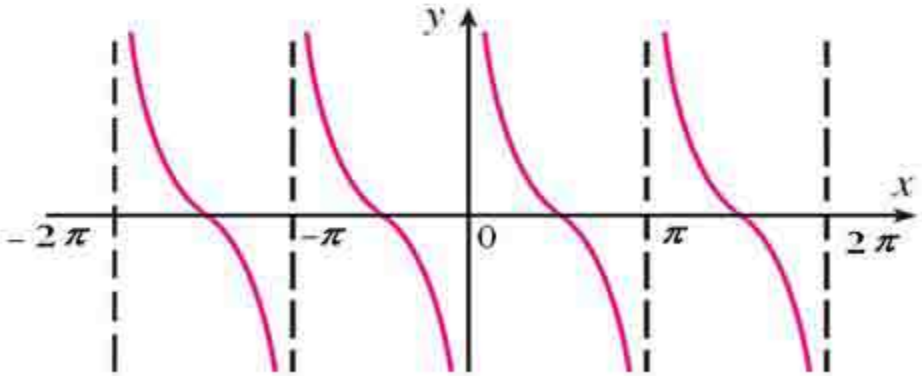
نمودارهای $y = \sin x$ و $y = \cos x$

۴ . ۵ جبر توابع و انواع آن

تعریف



$y = \tan x$



$y = \cot x$

فصل چهارم

بخش ششم

۶.۴ توابع خاص

تعریف

تابع $f : A \to B$ را **یک به یک** گوییم هرگاه به ازای هر $x_1, x_2 \in A$ داشته باشیم :

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

به عبارت دیگر

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

۶.۴ توابع خاص

مثال

تابع $f:\mathbf{P}\to\mathbf{P}$ با ضابطهٔ $f(x)=x^3-1$ یک به یک است زیرا به ازای هر x_1 و x_2 از $\mathbf{P}$ داریم :

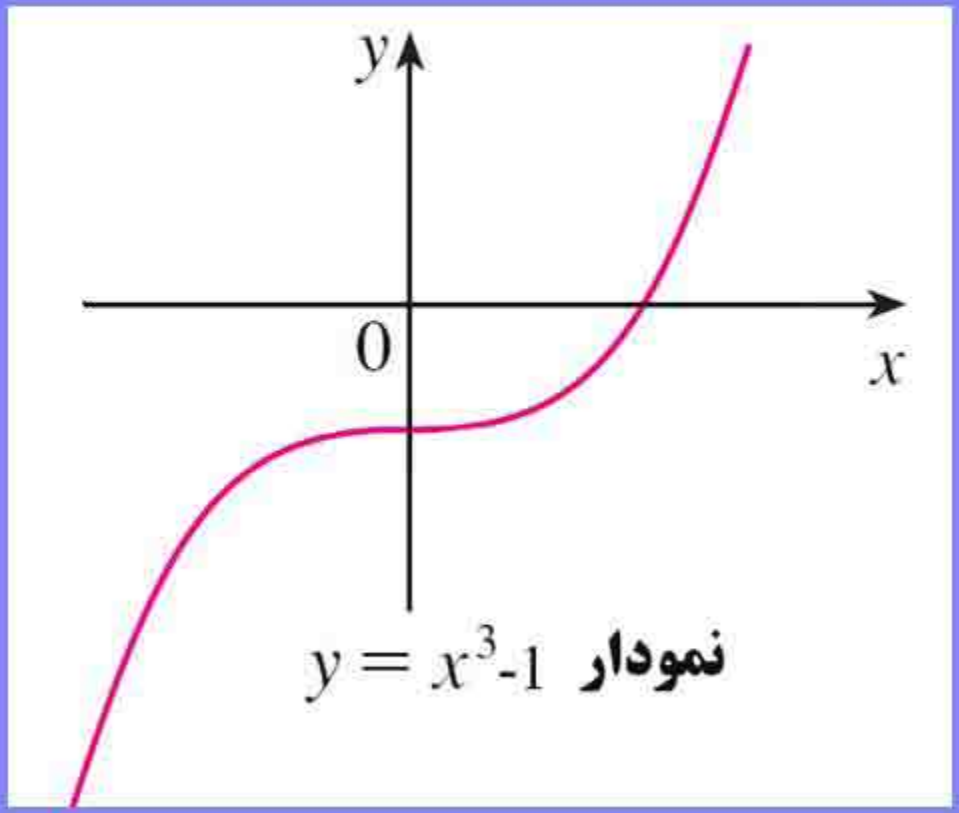
$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1^3-1=x_2^3-1$$

$$\Rightarrow x_1^3=x_2^3$$

$$\Rightarrow x_1=x_2$$

۶.۴ توابع خاص

نمودار



نمودار $y = x^3 - 1$

۶.۴ توابع خاص

مثال

تابع $g:\mathbf{P}\to\mathbf{P}$ با ضابطهٔ $g(x)=x^2-1$ یک به یک نیست زیرا :

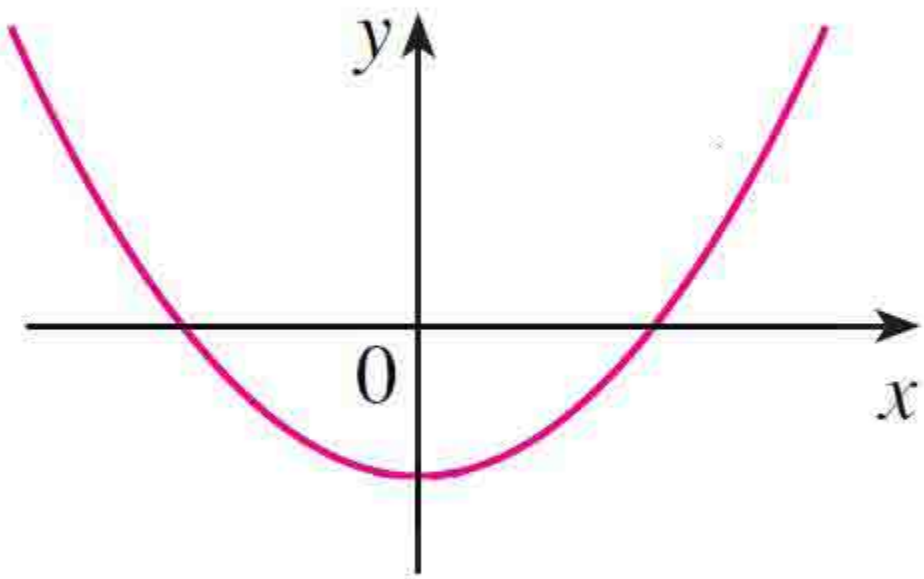
$$f(5)=f(-5)$$

ولی

$$5\neq -5$$

۶.۴ توابع خاص

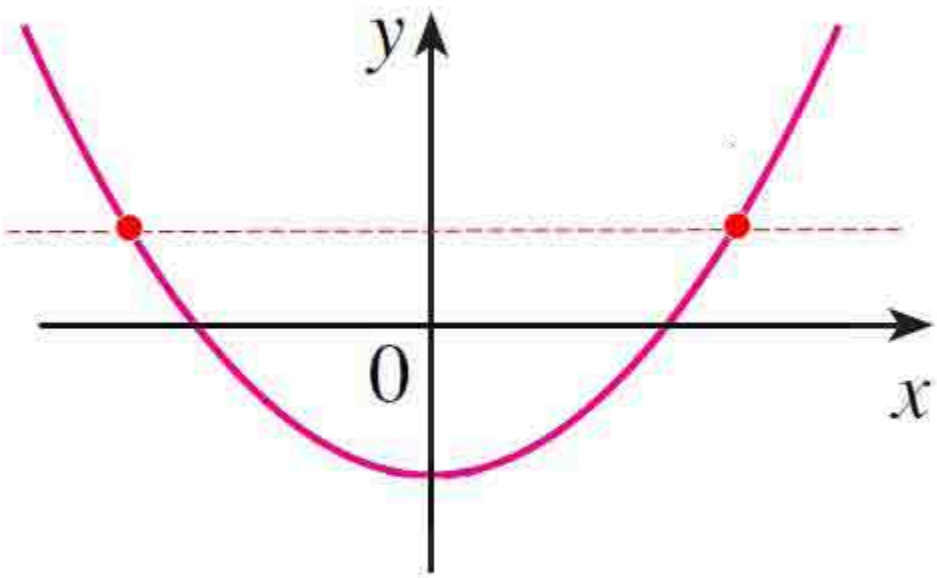
نمودار



نمودار $y = x^2 - 1$

۶.۴ توابع خاص

نمودار



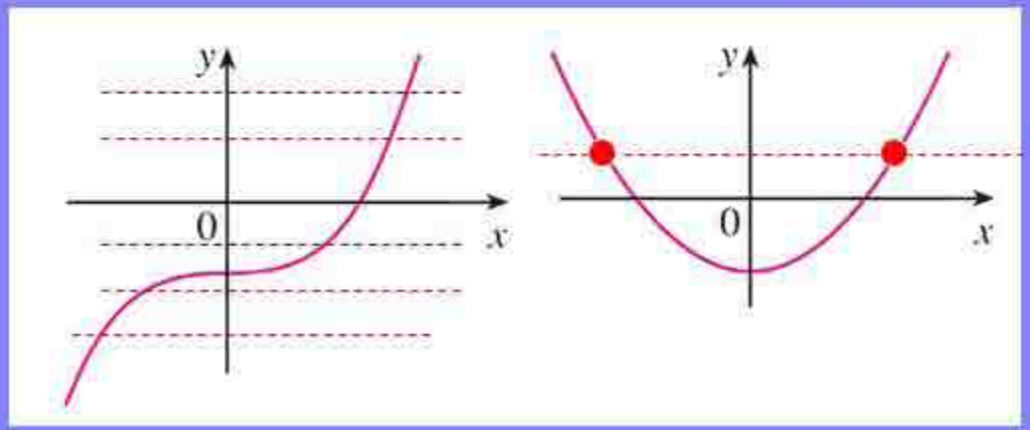
نمودار $y = x^2 - 1$

۶.۴ توابع خاص

تشخیص یک به یک بودن با توجه به نمودار

از روی نمودار تابع می توان یک به یک بودن آن را بررسی کرد :

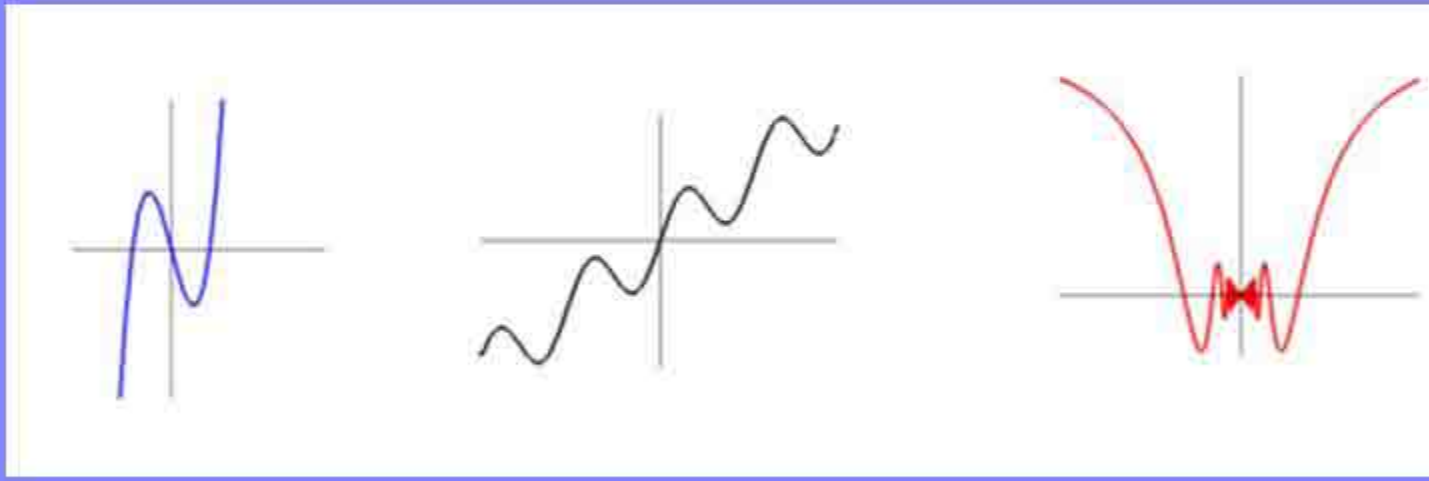
اگر هر خط افقی $y=a$ نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند تابع تابع یک به یک است در غیر این صورت یک به یک نیست .



۶.۴ توابع خاص

مثال

کدامیک از توابع زیر یک به یک است ؟



هیچکدام

۶.۴ توابع خاص

تمرین

کدامیک از توابع زیر یک به یک است ؟

1. $$f(x)=\begin{cases} x^2 & x\geq 0 \\ -x^2 & x<0 \end{cases}$$

2. $$f(x)=x^4 \qquad 1\leq x\leq 2$$

3. $$f(x)=\frac{3}{x^3-1} \qquad x\neq 1$$

٦.۴ توابع خاص

ادامهٔ تمرین

4. $f(x)=\begin{cases}5x & x\geq 1\\ 4 & x<1\end{cases}$

5. $f(x)=\sin x \qquad x\in[0,2\pi]$

6. $f(x)=\cos x \qquad x\in[0,\pi]$

۶.۴ توابع خاص

تعریف

تابع $f : A \to B$ را **پوشا** گوییم هرگاه :

$R_f = B$ (برد = هم دامنه)

به عبارت دیگر به ازای هر $y \in B$ عضوی مانند $x \in A$

وجود داشته باشد به طوری که :

$$y = f(x)$$

۶.۴ توابع خاص

مثال

تابع $f:\mathbf{P}\to\mathbf{P}$ با ضابطهٔ $f(x)=x^3+1$ پوشا است زیرا

به ازای هر $y\in R_f=\mathbf{P}$ عضو $x=\sqrt[3]{y-1}\in D_f=\mathbf{P}$

وجود دارد به طوری که :

$$f(x)=f(\sqrt[3]{y-1})=(\sqrt[3]{y-1})^3+1=y-1+1=y$$

۶.۴ توابع خاص

مثال

تابع $g:\mathbf{P}\to\mathbf{P}$ با ضابطهٔ $g(x)=x^2-1$ پوشا نیست زیرا به ازای $y=-3$ جوابی برای x به دست نمی آید به عبارت دیگر -3 عضوی از هم دامنهٔ g است که تصویر هیچ عضو از g نیست .

۶.۴ توابع خاص

مثال

کدام یک از توابع زیر پوشاست ؟

$f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}, f(n)=2n$ پوشا نیست

$f:\mathbf{P}\to\mathbf{P}, f(n)=2n$ پوشاست

$f:\mathbf{P}\to\mathbf{P}, f(x)=x^2$ پوشا نیست

$f:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}, f(x)=x-21$ پوشاست

$f:\mathbf{Z}\to\{0,1,2,3\}, f(x)=x-21$ تابع نیست

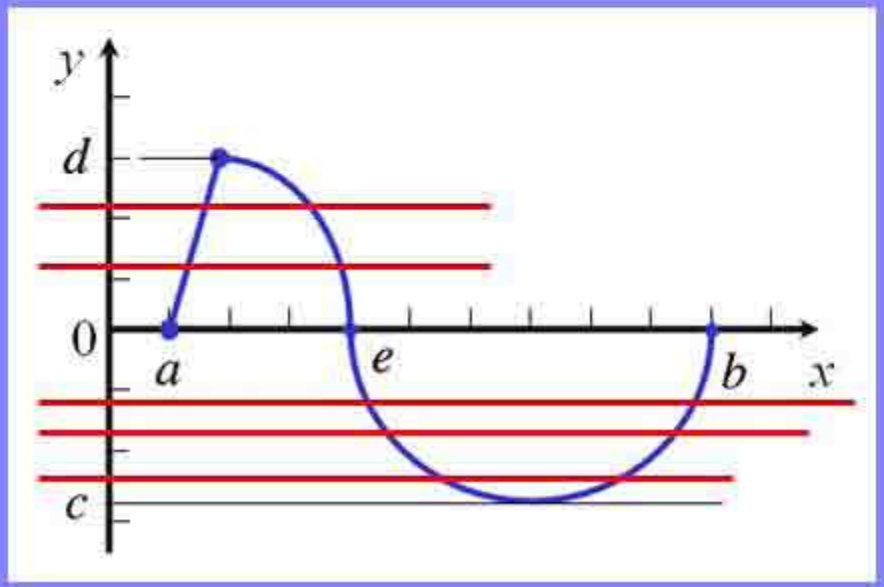
$f:\mathbf{P}\to\mathbf{P}^+, f(x)=x^2$ پوشاست

۶.۴ توابع خاص

تشخیص پوشا بودن با توجه به نمودار

از روی نمودار تابع می توان پوشا بودن آن را بررسی کرد :

اگر به ازای هر b از برد تابع خط افقی $y=b$ نمودار تابع را حداقل در یک نقطه قطع کند تابع تابع پوشا است در غیر این صورت پوشا نیست .



مثلاً تابع

$$f:[a,b]\to[c,d]$$

با نمودار مقابل پوشاست .

۶.۴ توابع خاص

تمرین

کدامیک از توابع زیر پوشا است ؟

1. $$f(x)=\begin{cases}3\sqrt{x} & x\geq 0\\ -5x & x<0\end{cases}$$

2. $$f(x)=\begin{cases}x^{2} & x\geq 0\\ x^{4}+1 & x<0\end{cases}$$

٦.۴ توابع خاص

ادامهٔ تمرین

.3

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{|x|} & x\neq 0\\ 3 & x=0\end{cases}$$

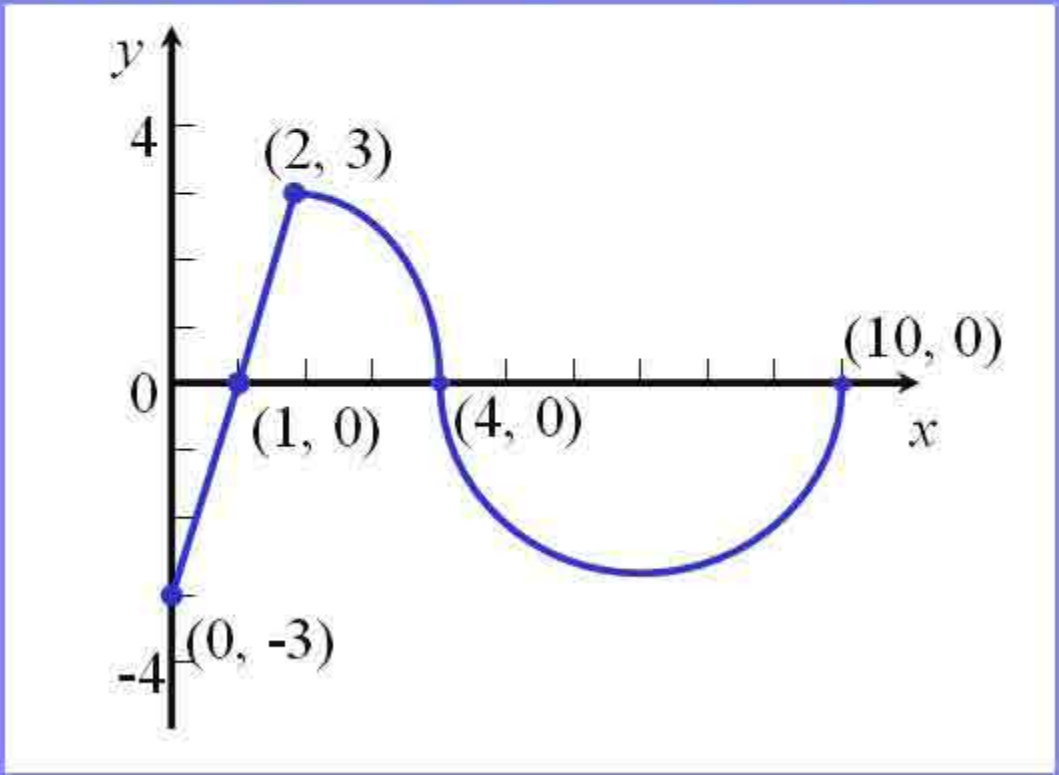
.4

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\geq 0\\ x^{5} & x<0\end{cases}$$

۶.۴ توابع خاص

تمرین

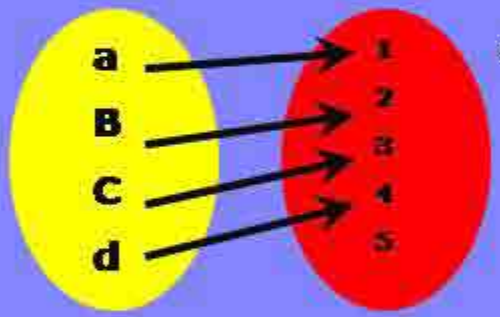
آیا تابع $f:[0,10]\to[-3,3]$ با نمودار زیر پوشاست ؟



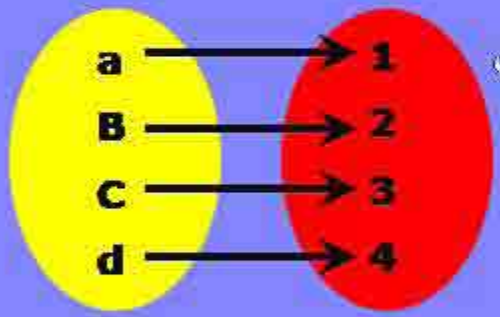
۶.۴ توابع خاص

تمرین

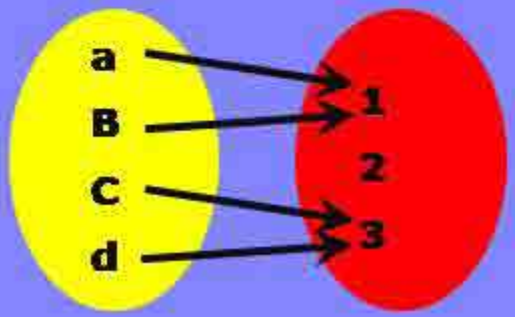
کدام نمودار یک تابع یک به یک یا پوشاست ؟



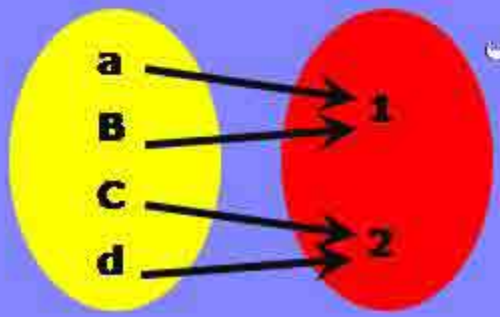
یک به
یک و
غیر
پوشا



هم یک
به یک
هم
پوشا



نه یک
به یک
و نه
پوشا



غیر یک
به یک
ولی
پوشا

۶.۴ توابع خاص

تعریف

تابع $f : A \to B$ را در نظر می گیریم :

الف. f را **صعودی** گوییم ، هرگاه برای هر $x_1 , x_2 \in A$

داشته باشیم :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

ب. f را **نزولی** گوییم ، هر گاه برای هر $x_1 , x_2 \in A$

داشته باشیم :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

تابع را **یکنوا** گویند هر گاه صعودی یا نزولی باشد .

۶.۴ توابع خاص

مثال

تابع $f(x)=x^3+1$ صعودی است زیرا از $x_1<x_2$ نتیجه می شود $x_1^3<x_2^3$ در نتیجه $x_1^3+1<x_2^3+1$ یعنی :

$$f(x_1)<f(x_2)$$

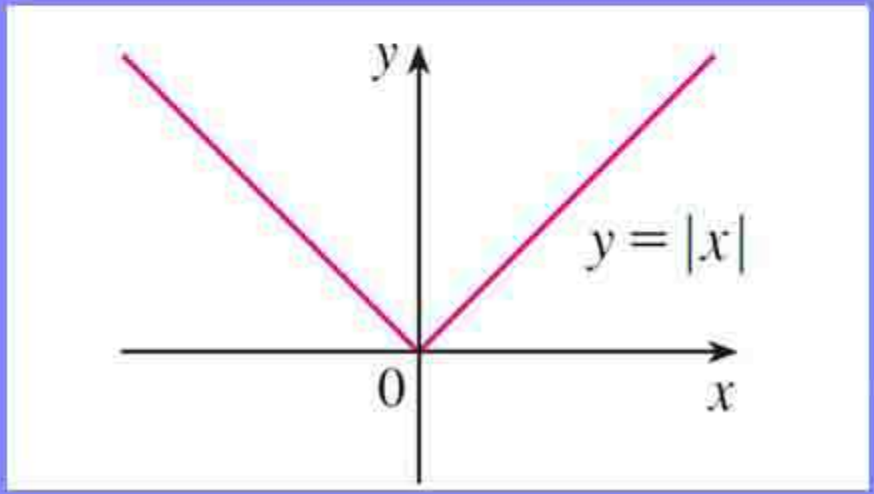
۶.۴ توابع خاص

مثال

تابع $f(x)=|x|$ نه صعودی و نه نزولی است زیرا

$-1<2 \Rightarrow f(-1)<f(2)$ پس f نزولی نیست .

$-2<-1 \Rightarrow f(-2)>f(-1)$ پس f صعودی نیست .



۶.۴ توابع خاص

قضیه

اگر تابع f صعودی یا نزولی باشد ، آنگاه f یک به یک خواهد بود .

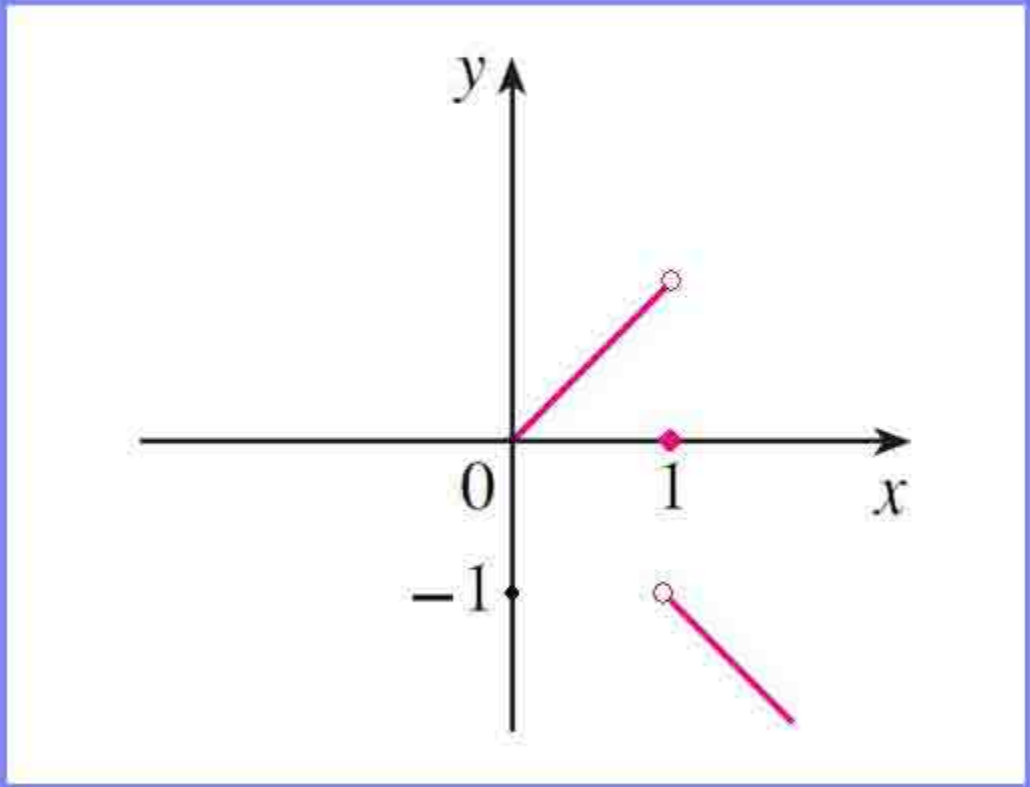
عکس قضیه برقرار نیست یعنی ممکن است تابعی یک به یک باشد ولی نه صعودی و نه نزولی باشد . مثلاً تابع

$$f(x)=\begin{cases} +x & 0\le x<1 \\ 0 & x=1 \\ -x & x>1 \end{cases}$$

یک به یک است ولی نه صعودی است و نه نزولی .

۶.۴ توابع خاص

نمودار y=f(x)



۶.۴ توابع خاص

تعریف

الف . اگر عددی مانند M وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $f(x) \leq M$ آنگاه f را **از بالا کراندار** می نامیم .

ب . اگر عددی مانند M وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $f(x) \geq M$ آنگاه f را **از پائین کراندار** می نامیم .

۶.۴ توابع خاص

ادامهٔ تعریف

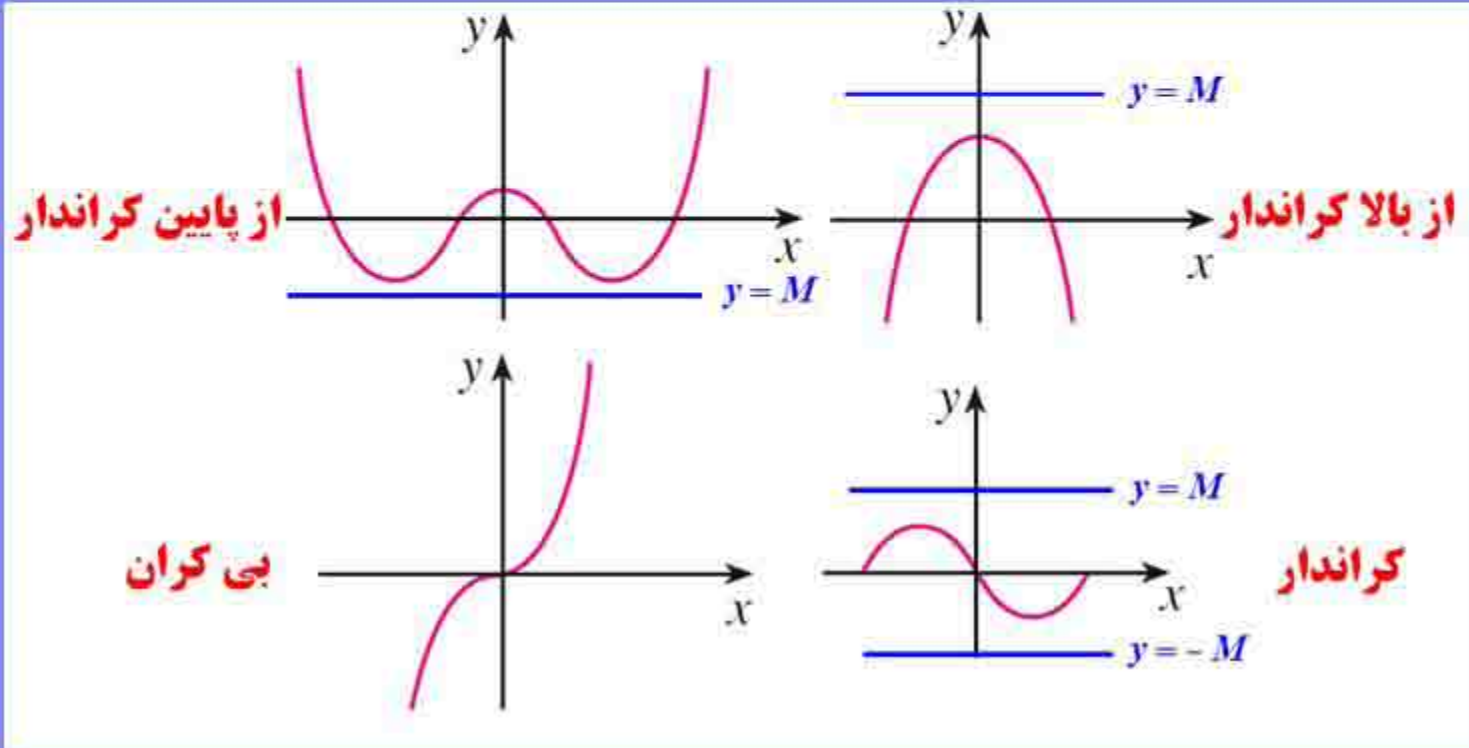
ج . اگر عددی مانند M وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $-M \leq f(x) \leq M$ آنگاه f را **کراندار** می نامیم .

د . اگر f کراندار نباشد آن را **بی کران** می نامیم .

۶.۴ توابع خاص

مثال

در شکل زیر چهار حالت مذکور در تعریف مشاهده می شود .



۶.۴ توابع خاص

مثال

۱ . تابع $f(x)=\sin(x)$ کراندار راست زیرا همواره

$$-1\le \sin(x)\le 1$$

۲ . تابع $f(x)=x^2+4$ از پائین کراندار است زیرا همواره

$$x^2+4>0$$

۳ . تابع $f(x)=4-x^2$ از بالا کراندار است زیرا همواره

$$4-x^2\le 0$$

۶.۴ توابع خاص

مثال

۴ . تابع $f(x)=x^3$ نه کران بالا دارد نه کران پائین پس کراندار نیست .

زیرا هر دو خط افقی $y=\pm M$ را در نظر بگریم نقطه ای روی نمودار f وجود دارد که در خارج نوار دو خط $y=\pm M$ واقع می شود .

۶.۴ توابع خاص

مثال

کدامیک از توابع زیر از بالا کراندار ، از پائین کراندار و یا کراندار است ؟

1. $f(x) = 2\cos x + 1$

2. $g(x) = x^{3+1}$

3. $h(x) = \begin{cases} 2x+5 & x<2 \\ 7 & x \geq 2 \end{cases}$

4. $k(x) = \begin{cases} -5 & x<-3 \\ 4x & -3 \leq x \leq 3 \\ 5 & x>3 \end{cases}$

۶.۴ توابع خاص

قضیه

فرض کنید $f : A \to B$ تابعی یک به یک و پوشا باشد رابطهٔ

$$g = \{(y, x) | (x, y) \in f\}$$

یک تابع از B به A است اگر و تنها اگر f یک به یک و پوشا باشد .

۶.۴ توابع خاص

تعریف

برای تابع یک به یک و پوشای $f : A \to B$ تابع $g : B \to A$ را **وارون** f گفته و آن را با f^{-1} نشان می دهیم ، پس :

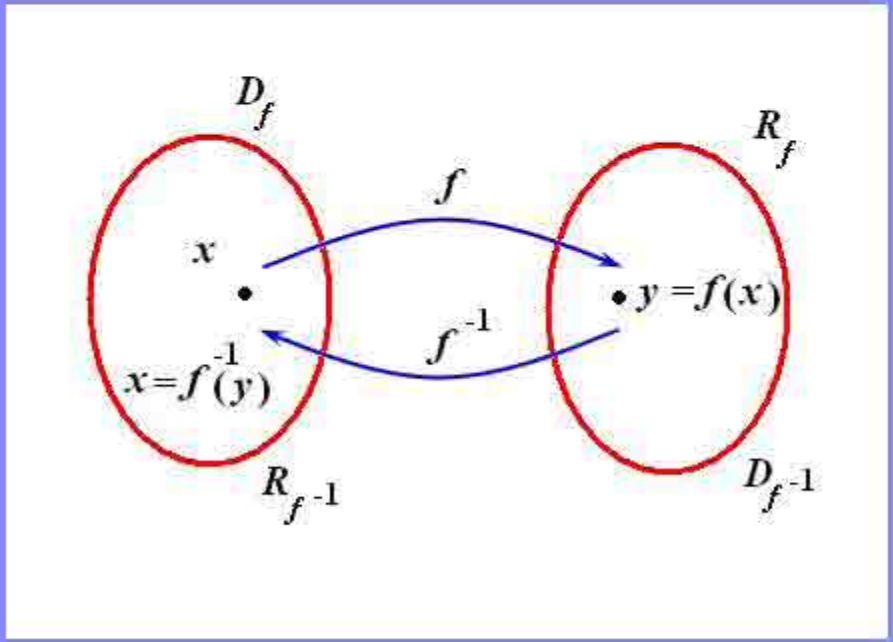
$$f^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in f\}$$

توجه کنید که قلمرو f^{-1} برد f و برد f^{-1} قلمرو f است .

در اسلاید بعدی وارون تابع نشان داده شده است .

٦.٤ توابع خاص

ادامهٔ تعریف



۶.۴ توابع خاص

تذکر

الف . اگر f^{-1} وارون f باشد f هم وارون f^{-1} است .

ب . وارون تا بعی که یک به یک و پوشا نباشد تعریف نشده است .

ج . ترکیب دو تابع f و f^{-1} یک تابع همانی است .

یعنی

$$(f o f^{-1})(y) = y \text{ و } (f^{-1} o f)(x) = x$$

۶.۴ توابع خاص

ادامهٔ تذکر

د . اگر $(x,y) \in f$ آنگاه $(y,x) \in f^{-1}$ اما دو

نقطهٔ (x,y) و (y,x) $y=f(x)$ نسبت به

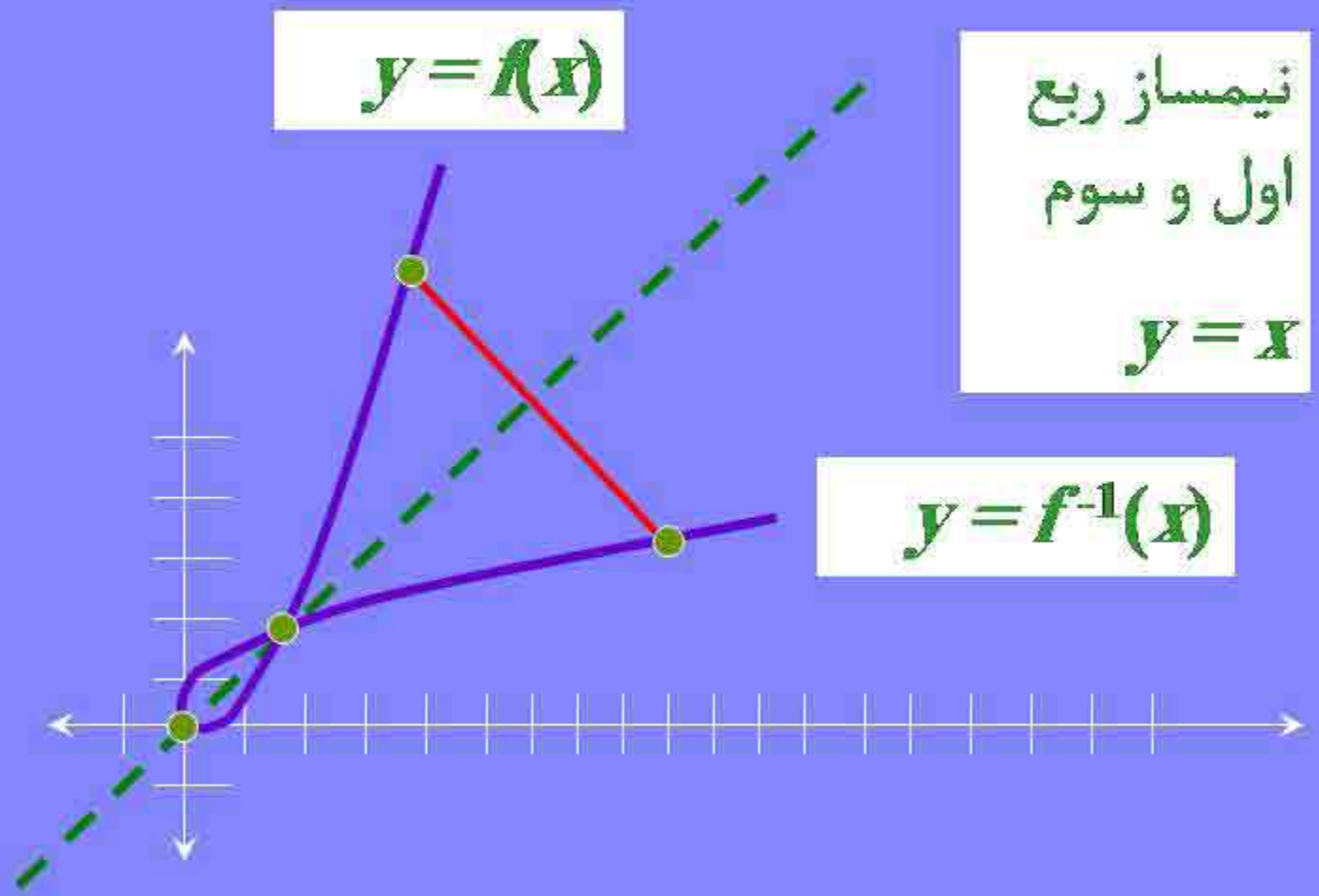
نیمساز ناحیه اول و سوم قرینه یکدیگرند پس اگر قرینهٔ

نمودار $y=x$ را نسبت به خط به دست آوریم

شکل حاصل نمودار $f^{-1}(x)$ است .

۶.۴ توابع خاص

ادامهٔ تذکر



۶.۴ توابع خاص

ادامهٔ تذکر

ه . اگر $g_1 : B \to A$ و $g_2 : B \to A$ هر دو وارون $f : A \to B$ باشند آنگاه $g_1 = g_2$ یعنی وارون یک تابع در صورت وجود منحصر بفرد است .

و . برای محاسبهٔ $f^{-1}(x)$ از معادلهٔ $y = f(x)$ مقدار x را بر حسب y تعیین می کنیم تا $x = f^{-1}(y)$ معلوم گردد در این تابع جای x و y را عوض می کنیم تا $y = f^{-1}(x)$ به دست آید .

۶.۴ توابع خاص

ادامهٔ تذکر

ز . f^{-1} را **معکوس** f نیز می گویند در این نوشته هر دو مورد معکوس و وارون را به کار خواهیم برد .

۶.۴ توابع خاص

مثال

تابع $f(x)=3x+5$ را در نظر می گیریم تابع صعودی است پس یک به یک است از طرفی اگر x عضو دلخواهی از $\mathbf{P}$ باشد از $y=3x+5$ نتیجه می شود $x=\frac{1}{3}(y-5)$

چون

$$f(x)=f[\tfrac{1}{3}(y-5)]=y$$

پس f پوشاست در نتیجه وارون دارد و

$$f^{-1}(x)=\tfrac{1}{3}(x-5)$$

۶.۴ توابع خاص

تمرین

کدامیک از توابع زیر وارون دارند ؟ وارون آنها را در صورت وجود به دست آورید .

1. $\begin{cases} f : \mathbf{P}^{+} \to \mathbf{P} \\ f(x) = 3x \end{cases}$

2. $\begin{cases} f : \mathbf{P} \to \mathbf{P} \\ f(x) = x^4 + 1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} f : \mathbf{P} \to \mathbf{P} \\ f(x) = 2x^3 - 4 \end{cases}$

4. $f(x) = \dfrac{3x+5}{x-2} \quad x \neq 2$

۶.۴ توابع خاص

وارون تابع نمایی

تابع $\begin{cases} f:\mathbf{P}\to\mathbf{P}^{+} \\ f(x)=a^{x} \end{cases}$ را که در آن $a\neq 1$ عددی مثبت است

در نظر می گیریم . می دانیم f یک به یک و پوشاست

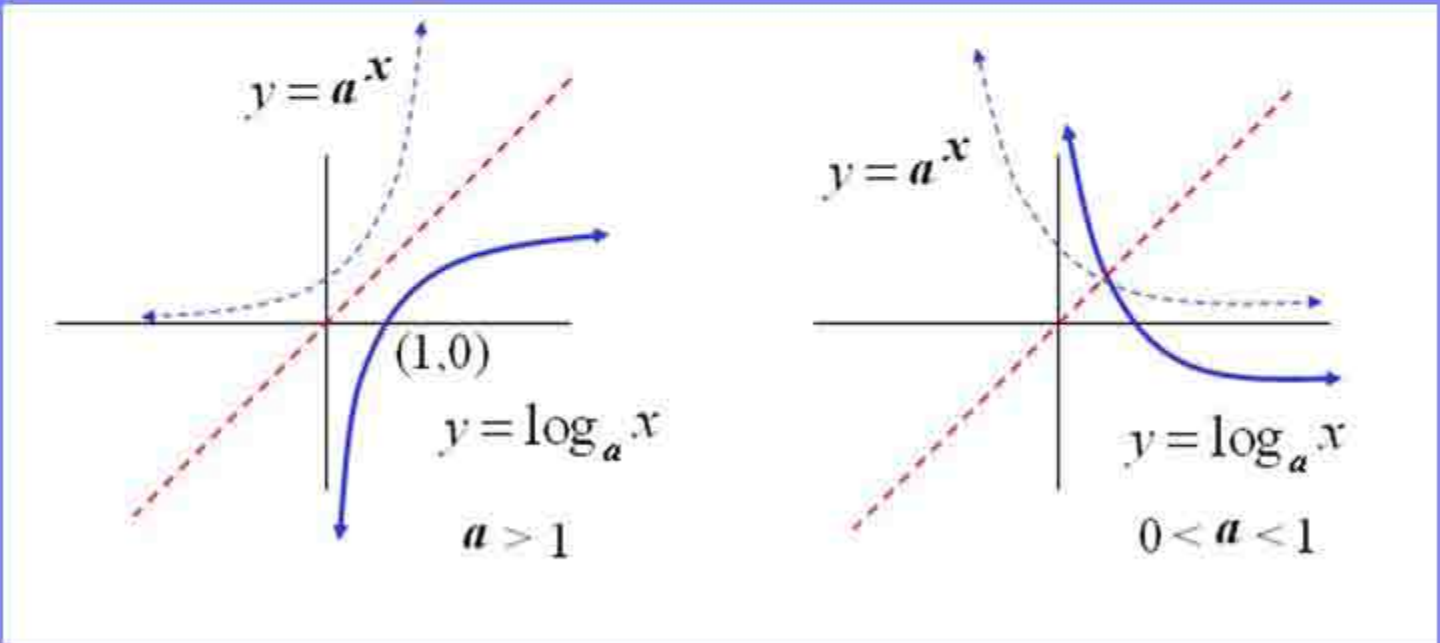
بنابراین وارون دارد . از $y=a^{x}$ نتیجه می شود

$x=\log_{a}(y)$ درنتیجه

$$f^{-1}(x)=\log_{a}(x)$$

۶.۴ توابع خاص

وارون تابع نمایی



۶.۴ توابع خاص

وارون توابع مثلثاتی

در این قسمت توابع مثلثاتی معکوس را مورد مطالعه قرار می دهیم . می دانیم توابع سینوس وکسینوس یک به یک نیستند لذا تابع سینوس و کسینوس وارون ندارند حال ببینیم چه شرایطی لازم است تا توابع $\sin x$ و $\cos x$ دارای وارون باشند .

۶.۴ توابع خاص

تعریف

$$\begin{cases} f:[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \to [-1,1] \\ f(x)=\sin x \end{cases}$$

می توان ثابت کرد

تابع $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ $[-1,1]$ یک تابع یک به

یک و پوشاست در نتیجه دارای وارونی است از

به $y=\sin x$ ، x چون سینوس یک تابع غیر جبری است نمی

توان از y را برحسب به دست آورد

سارایی قرارداد می کنیم

۶.۴ توابع خاص

تعریف

$f^{-1}(x)=\sin^{-1}x$ یا $f^{-1}(x)=\arcsin x$

را که در آن

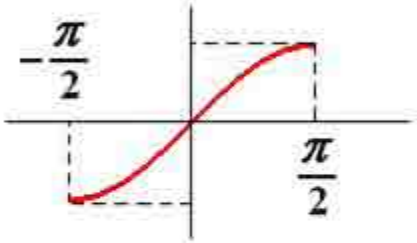
$-1<x<1$ $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$.

و

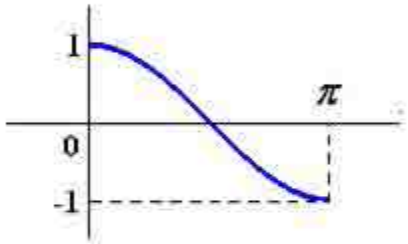
$$y=\sin^{-1}x \Leftrightarrow x=\sin y$$

۶.۴ توابع خاص

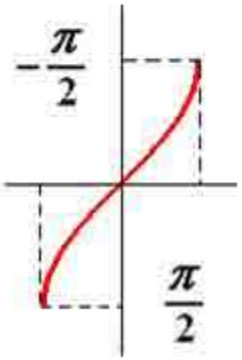
تعریف



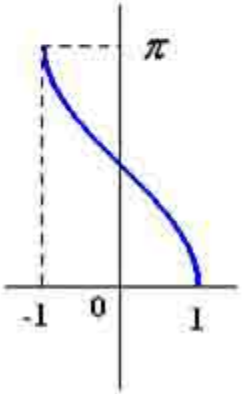
$y = \sin x$



$y = \cos x$



$y = \sin^{-1} x$



$y = \cos^{-1} x$

۶.۴ توابع خاص

تعریف

با روش مشابه با آنچه گفته شد می توان نشان داد تابع

$$\begin{cases} f:[0,\pi]\to[-1,1] \\ f(x)=\cos x \end{cases}$$

دارای وارون است که آن را به صورت زیر نشان می دهیم

$$f^{-1}(x)=\arccos x \text{ یا } f^{-1}(x)=\cos^{-1} x$$

که در آن $-1<x<1$ و $0<y<\pi$

$$y=\cos^{-1} x \Leftrightarrow x=\cos y$$

۶.۴ توابع خاص

تذکر

با توجه به آنچه گفته شد

$$\begin{cases} \sin(\sin^{-1} x) = x & \forall x \in [-1,1] \\ \sin^{-1}(\sin y) = y & \forall y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(\cos^{-1} x) = x & \forall x \in [-1,1] \\ \cos^{-1}(\cos y) = y & \forall y \in [0,\pi] \end{cases}$$

۶.۴ توابع خاص

تعریف

توابع تانژانت و کتانژانت در دامنهٔ خود یک به یک نیستند ولی با تهدید x به بازه های مشخص شده در زیر این توابع یک به یک و پوشا خواهند بود .

$$\begin{cases} f:(0,\pi)\to \mathbf{P} \\ f(x)=\cot x \end{cases} \qquad \begin{cases} f:(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\to \mathbf{P} \\ f(x)=\tan x \end{cases}$$

۶.۴ توابع خاص

تعریف

درنتیجه وارون خواهند داشت

$$\tan^{-1} x : \mathrm{P} \to (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \quad \text{یا} \quad \arctan x$$

$$\tan^{-1} x : \mathrm{P} \to (0, \pi) \quad \text{یا} \quad \arctan x$$

و

$$y = \tan^{-1} x \Leftrightarrow x = \tan y$$

$$y = \cot^{-1} x \Leftrightarrow x = \cot y$$

۶.۴ توابع خاص

تذکر

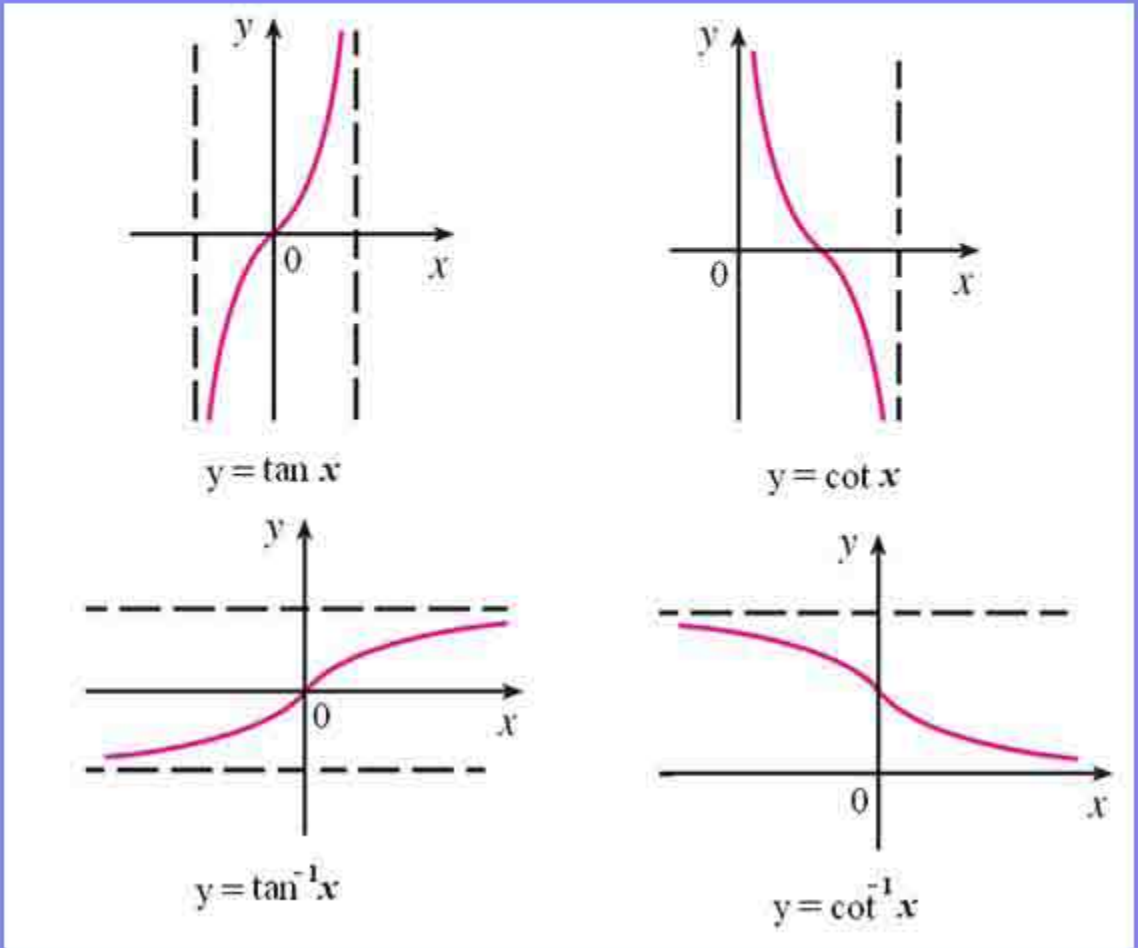
با توجه به آنچه گذشت

$$\begin{cases} \tan(\tan^{-1} x) = x & \forall x \in \mathbf{P} \\ \tan^{-1}(\tan y) = y & \forall y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cot(\cot^{-1} x) = x & \forall x \in \mathbf{P} \\ \cot^{-1}(\cot y) = y & \forall y \in (0, \pi) \end{cases}$$

۶.۴ توابع خاص

نمودار



۶.۴ توابع خاص

مثال

می خواهیم مقدار $\cos(\arcsin\frac{3}{5})$ را به دست آوریم

فرض کنیم $\cos(\arcsin\frac{3}{5}) = x$ پس $\sin x = \frac{3}{5}$ در نتیجه

$$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$$

پس

$$\cos(\sin^{-1}\frac{3}{5}) = \cos x = \frac{4}{5}$$

۶.۴ توابع خاص

تمرین

درستی برابریهای زیر را ثابت کنید :

1. $\sin(\arcsin\frac{1}{2}) + \cos(\arccos(-\frac{1}{2})) = 0$
2. $\cos^{-1}(\tan(-\frac{5\pi}{4})) + \sin^{-1}(\tan\frac{3\pi}{4}) = \frac{\pi}{2}$
3. $\sin(\arccos(\frac{-2}{3})) = \frac{\sqrt{5}}{3}$
4. $\tan(\sin^{-1}(\frac{-3}{4})) = \frac{-3\sqrt{7}}{7}$

فصل پنجم

حد و پیوستگی توابع

هدفهای رفتاری

دانشجو پس از مطالعه این فصل باید بتواند :

۱ . مفهوم همسایگی را بیان کند .

۲ . مفهومهای حد ، حد چپ و حد راست تابع در یک نقطه را بیان کرده و مقدار هریک را در صورت وجود محاسبه کند .

۳ . رابطه بین حدهای چپ و راست و حد تابع در یک نقطه را بیان کرده و به کار برد .

ادامهٔ هدفهای رفتاری

۴ . قضیه های مربوط به حد تابع در یک نقطه را بیان کرده و به کار برد .

۵ . حد توابع مثلثاتی داده شده را در یک نقطه محاسبه کند .

۶ . حد توابع در بینهایت را تعریف کرده و در صورت وجود حد ، آن را محاسبه کند .

۷ . صورتهای مبهم یا نامعین را تشخیص دهد .

ادامهٔ هدفهای رفتاری

۸ . مفهوم حدهایی را که بینهایت می شوند بیان کرده و مقدار آن حدها را تعیین کند .

۹ . قضیه های مربوط به حد توابع در بینهایت و حدهایی را که بینهایت می شوند را بیان کرده و به کار برد .

فصل پنجم

بخش اول

۵.۱ علامت Σ

چند مثال برای توضیح معنای Σ

از علامت **Σ** برای نمایش جمله ها استفاده می کنیم چند مثال از علامت **Σ** در زیر آمده است :

$$\sum_{n=1}^{4} n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$$

$$\sum_{n=1}^{5} \frac{1}{i} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

فصل پنجم

بخش دوم

۵ . ۲ استقرای ریاضی

استقرا

فرض کنیم $P(n)$ خاصیتی وابسته به عدد طبیعی n باشد . یکی از طرقی که می توان ثابت کرد این خاصیت برای تمام اعداد طبیعی درست است روش **استقرا** است . روش استقرا شامل دو مرحله است ، که با اثبات آنها نتیجه می گیریم خاصیت P برای تمام اعداد طبیعی صحیح است .

مرحلهٔ ۱ . ثابت می کنیم که $P(1)$ صحیح است .

مرحلهٔ ۲ . ثابت می کنیم که برای هر عدد طبیعی دلخواه اگر $P(m)$ صحیح باشد ، آنگاه $P(m+1)$ نیز صحیح است .

فصل پنجم

بخش سوم

۵ . ۳ همسایگی

تعریف

اعداد حقیقی a و $\delta > 0$ را در در نظر می گیریم .مجموعهٔ اعدادی

ما x را که $|x-a|<\delta$ برای صدق می کنند یک

همسایگی به مرکز a و شعاع δ می نامیم . این همسایگی را با

نماد $N(a,\delta)$ نشان می دهیم ، پس داریم :

$$N(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}$$

$$=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}=(a-\delta,a+\delta)$$

۵ . ۳ همسایگی

تعریف

اگر از $N(a,\delta)$ نقطهٔ a رابرداریم مجموعهٔ حاصل را یک **همسایگی محذوف** a نقطهٔ x به شعاع δ می نامیم . این همسایگی را با نماد $N'(a,\delta)$ نشان می دهیم ، پس داریم :

$$N'(a,\delta)=N(a,\delta)-\{a\}=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}$$
$$=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$$

۵ . ۳ همسایگی

تمرین

همسایگیهای محذوف زیر را به صورت مجموعه بنویسید و آنها را روی یک خط نشان دهید .

1. $N'(1,4)$
2. $N'(0,3)$

فصل پنجم

بخش چهارم

۵ . ۴ مفهوم حد

تعریف

فرض کنیم تابع f در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد . عددی مانند L را **حد** تابع f در نقطهٔ a می نامیم اگر ، برای هر عدد $\varepsilon > 0$ ، عدد مثبتی مانند δ (وابسته به ε) وجود داشته باشد به طوری که

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

۵ . ۴ مفهوم حد

ادامهٔ تعریف

در این صورت می نویسیم $\lim_{x \to a} f(x) = L$ و می خوانیم

حد $f(x)$ وقتی x به سمت a میل کند برابر L است .

۵ . ۴ مفهوم حد

مثال

فرض کنیم

$$f(x)=\begin{cases}4x+5 & x\neq 1\\ 3 & x=1\end{cases}$$

با استفاده از تعریف حد ثابت کنید که

$$\lim_{x\to a} f(x)=9$$

۵ . ۴ مفهوم حد

مثال

طبق تعریف حد باید ثابت کنیم ، برای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند $\delta > 0$ وجود دارد به طوری که

$$0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |f(x)-9| < \varepsilon$$

چون $|f(x)-9| = |4x+5-9| = 4|x-1|$ داریم

$0 < |x-1| < \delta$ پس $|f(x)-9| < 4\delta$ در نتیجه

اگر $4\delta = \varepsilon$ حکم برقرار است بنابراین کافی است

$\delta = \frac{\varepsilon}{4}$

۵ . ۵ قضایایی دربارهٔ حد توابع

قضیه

هر گاه m ، a و b سه عدد دلخواه باشند داریم :

$$\lim_{x \to a}(mx+b) = ma+b$$

$$\lim_{x \to a} x = a$$

$$\lim_{x \to a} b = b$$

۵ . ۵ قضایایی دربارهٔ حد توابع

قضیه [حد حاصل جمع ، ضرب و . . . دو تابع]

هر گاه $\lim_{x\to a} f(x)=L$ و $\lim_{x\to a} g(x)=M$ و c عدد ثابتی باشد آنگاه

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=L\pm M$$

$$\lim_{x\to a}[f(x).g(x)]=L.M$$

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{L}{M} \qquad M\neq 0$$

$$\lim_{x\to a} cf(x)=cL$$

۵ . ۵ قضایایی دربارهٔ حد توابع

نتیجه

قضیه حد مجموع و حاصلضرب را می توان به هر تعداد متناهی تابع تعمیم داد .

نتیجه

$$\lim_{x \to a} x^n = a^n$$

۵ . ۵ قضایایی دربارهٔ حد توابع

قضیه [حد چند جمله ای]

اگر $f(x) = c_0x^n + c_1x^{n-1} + \cdots + c_n$ یک چند جمله ای

درجهٔ n ام از x باشد آنگاه

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

یعنی حد یک چند جمله ای در $x = a$ برابر مقدار آن

چند جمله ای در $x = a$ است .

۵ . ۵ قضایایی دربارهٔ حد توابع

قضیه

اگر $\lim_{x \to a} f(x) = L$ آنگاه برای هر عدد صحیح و مثبت n داریم :

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

در این رابطه اگر n زوج باشد L را نا منفی فرض می کنیم .

۵ . ۵ قضایایی دربارهٔ حد توابع

قضیه

اگر $\lim_{x \to a} f(x) = L$ آنگاه

$$\lim_{x \to a} |f(x)| = |\lim_{x \to a} f(x)| = |L|$$

مثال

$\lim_{x \to a}(x^2 + 4x - 9)$ را محاسبه کنید .

$$\lim_{x \to a}(x^2 + 4x - 9) = \lim_{x \to a} x^2 + \lim_{x \to a} 4x - \lim_{x \to a} 9$$

$$= 2^2 + 4(2) - 9 = 3$$

۵ . ۵ قضایایی دربارهٔ حد توابع

مثال

می خواهیم $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+2x+6}{x^2-3x}$ را محاسبه کنیم

صورت و مخرج در ۱ حد دارند وحد مخرج مخالف صفر است بنابراین

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+2x+6}{x^2-3x}=\frac{\lim\limits_{x\to 1} x^3+2x+6}{\lim\limits_{x\to 1} x^2-3x}=\frac{1+2+6}{1-3}=\frac{-9}{2}$$

۵ . ۵ قضایایی دربارهٔ حد توابع

مثال

می خواهیم $\lim_{x\to a}\frac{x^3-8}{x-2}$ را محاسبه کنیم چون

$\lim_{x\to a}(x-2)=0$ لذا نمی توان قضیهٔ حد خارج قسمت را

به کار برد اما چون $x\to 2$ لذا $x\neq 2$ پس می توان

صورت و مخرج کسر را بر $x-2$ تقسیم کرد بنابر این

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x^2+2x+4)=12$$

.

۵ . ۵ قضایایی دربارهٔ حد توابع

مثال

حدهای زیر را با استفاده از قضایای حد ، محاسبه کنید .

۵ . ۵ قضایایی دربارهٔ حد توابع

تمرین

ثابت کنید حد تابع f در یک نقطه در صورت وجود منحصر بفرد است به عبارت دیگر اگر

$$\lim_{x \to a} f(x) = L_2 \text{ و } \lim_{x \to a} f(x) = L_1$$

آنگاه

$$L_1 = L_2$$

۵ . ۵ قضایایی دربارهٔ حد توابع

قضیهٔ فشار

فرض کنیم توابع f ، g و h در نا برابریهای

$$h(x) \le f(x) \le g(x)$$

صدق کنند اگر

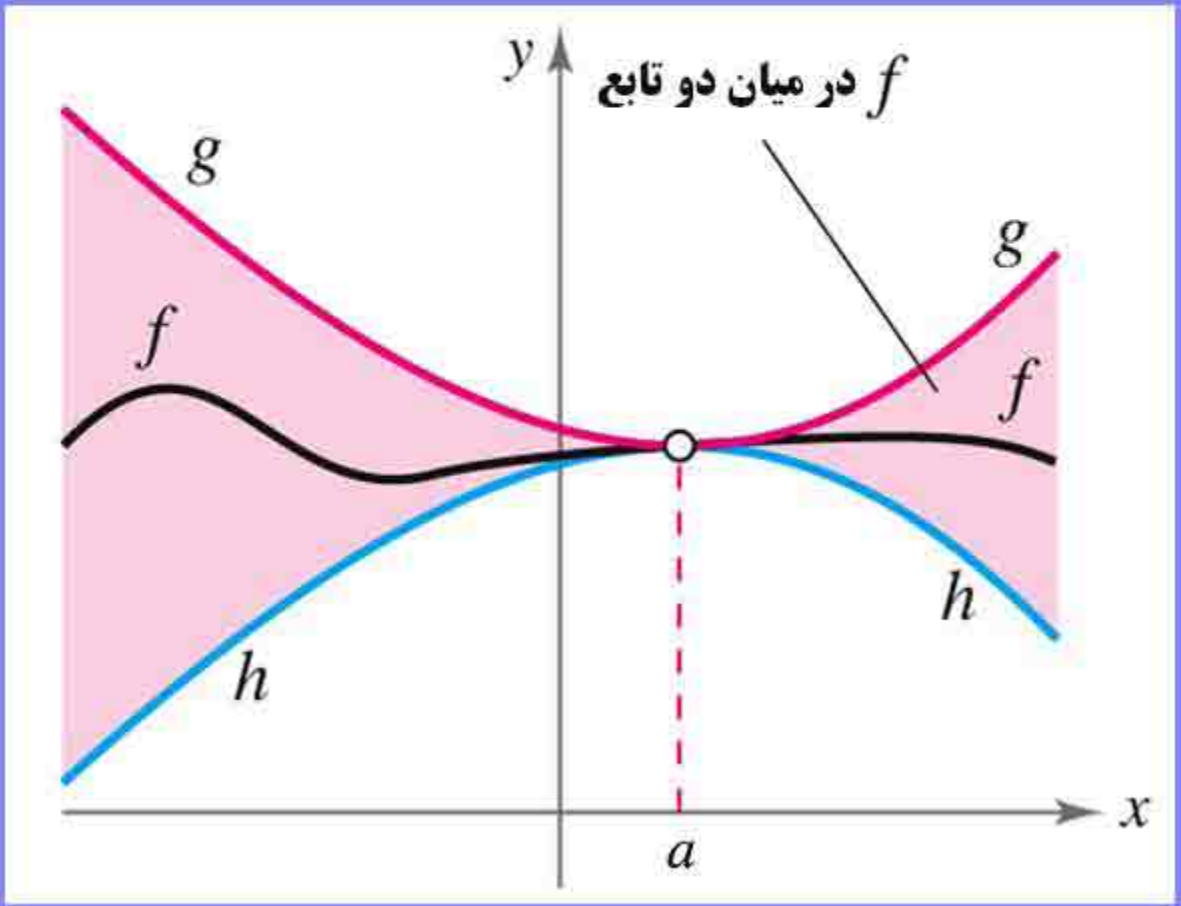
$$\lim_{x \to a} h(x) = \lim_{x \to a} g(x) = L$$

آنگاه تابع f در a حد دارد و

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

۵ . ۵ قضایایی دربارهٔ حد توابع

قضیهٔ فشار



۵ . ۵ قضایایی دربارهٔ حد توابع

مثال

حدهای زیر را با استفاده از قضایای حد ، محاسبه کنید .

۵ . ۵ قضایایی دربارهٔ حد توابع

مثال

حدهای زیر را با استفاده از قضایای حد ، محاسبه کنید .

۵ . ۵ قضایایی دربارهٔ حد توابع

مثال

حدهای زیر را با استفاده از قضایای حد ، محاسبه کنید .

۵ . ۵ قضایایی دربارهٔ حد توابع

مثال

$\lim\limits_{x\to a}(x-3)^2\sin\frac{1}{\sqrt[3]{x-3}}$ را با استفاده از قضیهٔ فشار محاسبه کنید .

می دانیم $-1\le\sin\frac{1}{\sqrt[3]{x-3}}\le 1$ بنابراین

$$-(x-3)^2\le(x-3)^2\sin\frac{1}{\sqrt[3]{x-3}}\le(x-3)^2$$

از $\lim\limits_{x\to a}(x-3)^2=\lim\limits_{x\to a}[-(x-3)^2]=0$ و قضیه فشار

نتیجه می شود : $\lim\limits_{x\to a}(x-3)^2\sin\frac{1}{\sqrt[3]{x-3}}=0$

۵ . ۵ قضایایی دربارهٔ حد توابع

مثال

محاسبهٔ $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta}$

می توان ثابت کرد اگر $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ آنگاه

$$\cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta} < 1$$

چون $\lim_{\theta \to 0} 1 = 1$ و $\lim_{\theta \to 0} \cos\theta = 1$ پس بنا بر قضیهٔ فشار

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

۵ . ۵ قضایایی دربارهٔ حد توابع

تمرین

حدهای زیر را با استفاده از قضایای حد ، محاسبه کنید .

1. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{3x}$

2

3

4

5

6

۵ . ۵ قضایایی دربارهٔ حد توابع

تمرین

اگر تابع f در یک همسایگی محذوف a کراندار باشد و

$\lim_{x \to 0} g(x) = 0$ آنگاه

$$\lim_{x \to 0} f(x)g(x) = 0$$

۵ . ۵ قضایایی دربارهٔ حد توابع

تمرین

برای محاسبهٔ $\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x}=0$ ملاحظه می کنیم که

$\lim_{x\to 0} x=0$ و کسینوس تابعی کراندار است پس طبق قضیهٔ

فوق داریم

$$\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x}=0$$

۶.۵ حدود یک طرفه

تعریف

فرض کنیم f روی (a,c) تعریف شده باشد اگر برای هر $\varepsilon > 0$ عدد مثبتی مانند δ وجود داشته باشد به طوری که :

$$0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

آنگاه L را حد راست تابع f در نقطهٔ $x = a$ می نامیم و می نویسیم :

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

۶.۵ حدود یک طرفه

تعریف

فرض کنیم f روی (c,a) تعریف شده باشد اگر برای هر $\varepsilon > 0$ عدد مثبتی مانند δ وجود داشته باشد به طوری که :

$$-\delta < x - a < 0 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

آنگاه L را حد چپ تابع f در نقطهٔ $x = a$ می نامیم و می نویسیم : $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$

۶.۵ حدود یک طرفه

تذکر

علامت $x \to a^+$ نمایش $x \to a$ و $x > a$ است .

علامت $x \to a^-$ نمایش $x \to a$ و $x < a$ است .

۶.۵ حدود یک طرفه

قضیه

$\lim_{x \to 0} f(x)$ وجود دارد اگر و فقط اگر

$\lim_{x \to a^+} f(x)$ و $\lim_{x \to a^-} f(x)$ موجود و با هم برابر باشند .

نتیجه

الف . اگر حد چپ یا حد راست تابعی در یک نقطه وجود نداشته باشد تابع در آن نقطه حد ندارد .

ب . اگر حد چپ و حد راست تابعی در یک نقطه برابر نباشند تابع در آن نقطه حد ندارد .

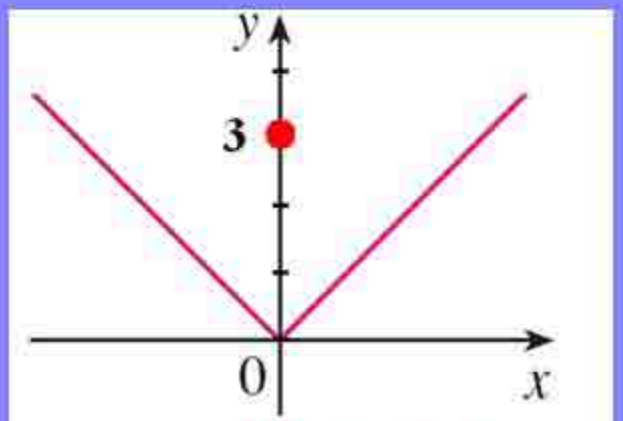
۱.۵ حدود یک طرفه

تمرین

فرض کنیم :

$$f(x)=\begin{cases}|x| & x\neq 0\\ 3 & x=0\end{cases}$$

می خواهیم $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ در صورت وجود به دست آوریم .



نمودار $y=f(x)$

۱.۵ حدود یک طرفه

تمرین

داریم

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0 = \lim_{x\to 0^-} (-x) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$$

بنابراین

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

۱.۵ حدود یک طرفه

تمرین

حدهای زیر را در صورت زیر به دست آورید .

1. $\lim_{x \to 2^+} \sqrt{2-x}$

2

3

۵ . ۱ حدود نامتناهی

تعریف

اگر برای هر عدد $N > 0$ ، عددی مانند $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوری که :

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > N$$

آنگاه گوییم حد تابع f وقتی که x به سمت a میل کند برابربینهایت مثبت است و می نویسیم :

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

۵ . ۱ حدود نامتناهی

تعریف

اگر برای هر عدد $N > 0$ ، عددی مانند $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوری که :

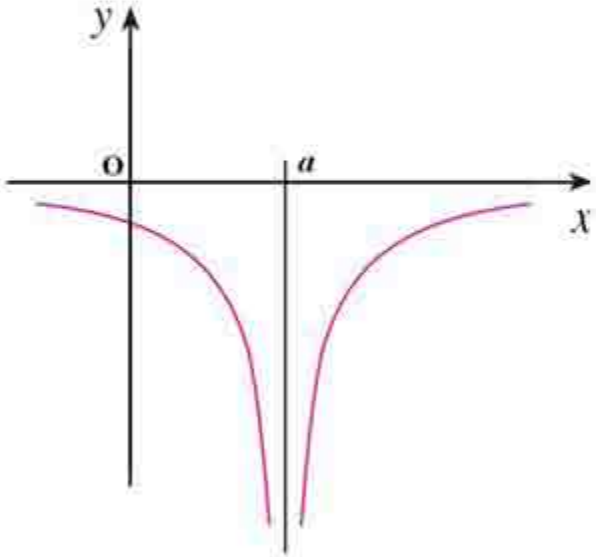
$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < N$$

آنگاه گوییم حد تابع f وقتی که x به سمت a میل کند برابربینهایت منفی است و می نویسیم :

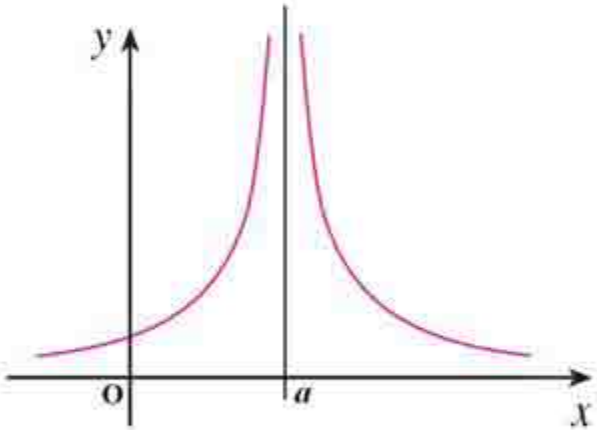
$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

۵ . ۱ حدود نامتناهی

تعریف



$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

۵ . ۱ حدود نامتناهی

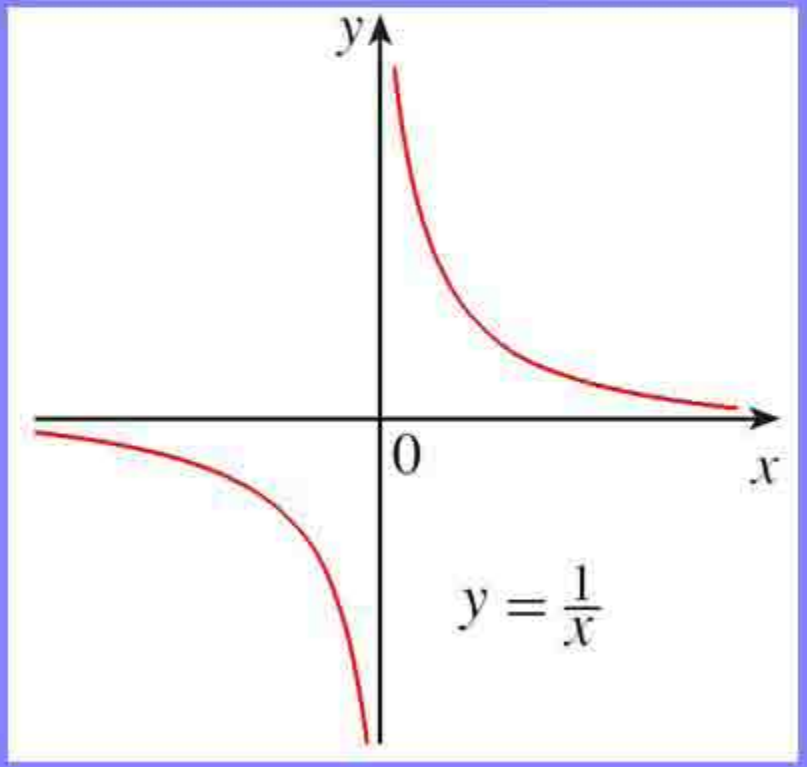
تمرین

وقتی $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ خواهیم گفت f در a حد ندارد زیرا $+\infty$ و $-\infty$ اعداد حقیقی نیستند .

۵ . ۱ حدود نامتناهی

تمرین

تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ را در نظر می گیریم نمودار این تابع را در پایین مشاهده می کنید .



$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=-\infty$$

۵ . ۸ حدود در بینهایت

تعریف

اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ عدد مثبتی مانند N (معمولاً وابسته به وجود داشته باشد به طوری که :

$$x < N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

آنگاه گوییم حد تابع f وقتی که x به سمت بینهایت مثبت میل کند L برابر است و می نویسیم

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

۵ . ۸ حدود در بینهایت

تمرین

حدهای زیر را با استفاده از قضایای حد ، محاسبه کنید .

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{3x}$

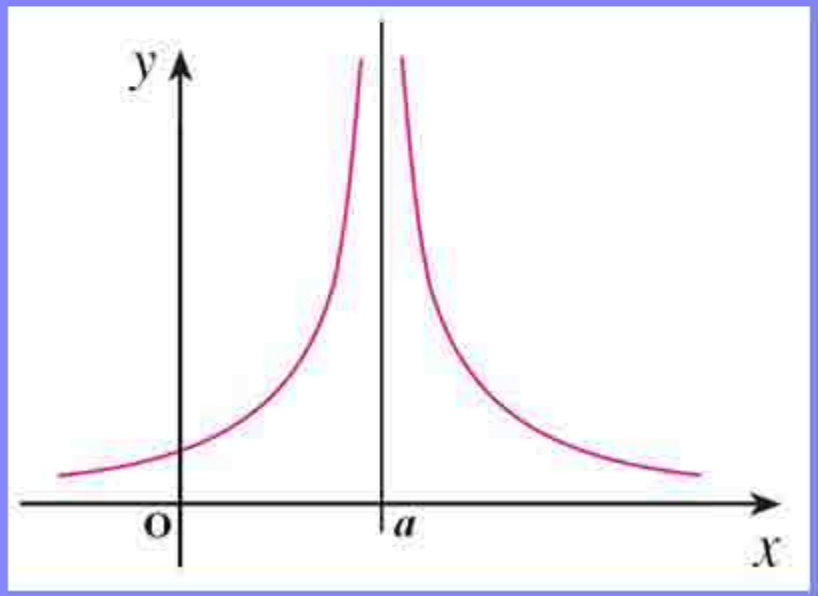
2

3

4

5

6



۵ . ۸ حدود در بینهایت

تمرین

حدهای زیر را با استفاده از قضایای حد ، محاسبه کنید .

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{3x}$

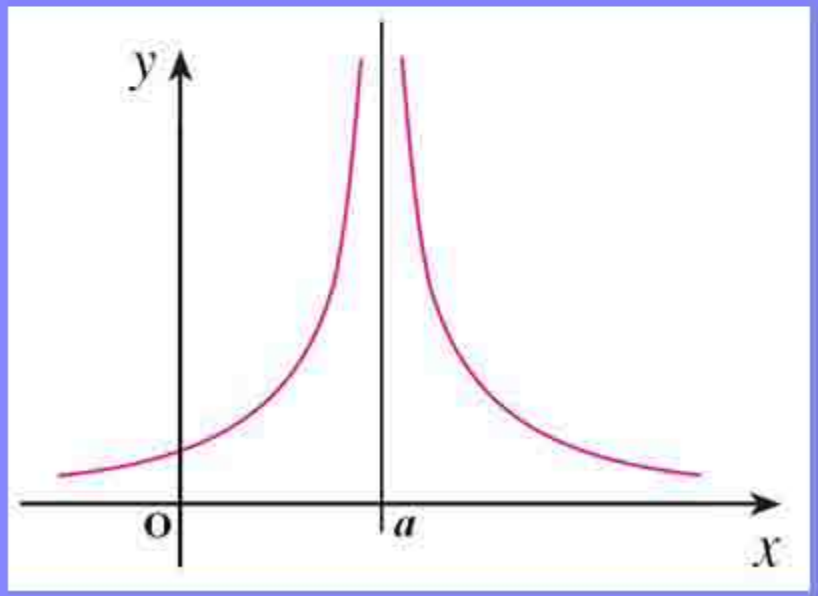
2

3

4

5

6



۵ . ۸ حدود در بینهایت

تمرین

حدهای زیر را با استفاده از قضایای حد ، محاسبه کنید .

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{3x}$

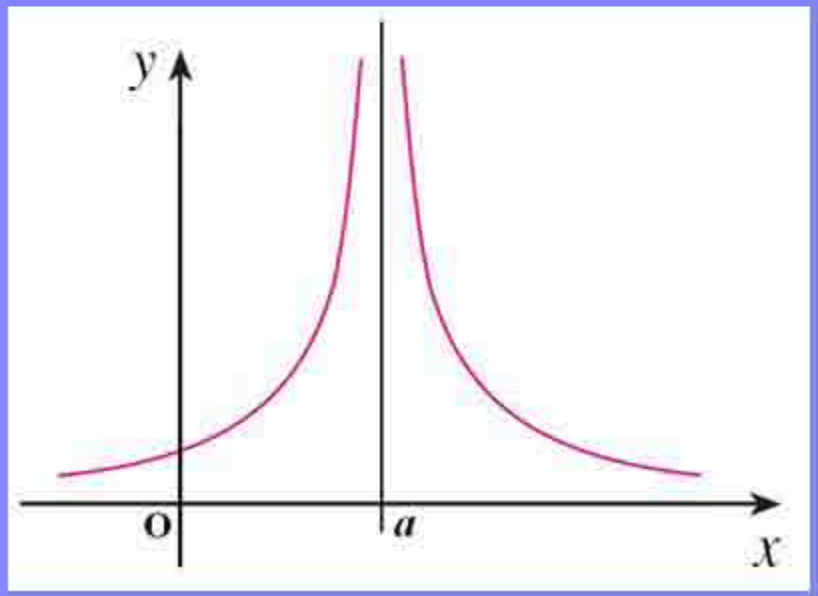
2

3

4

5

6



فصل ششم

مشتق

هدفهای رفتاری

دانشجو پس از مطالعه این فصل باید بتواند :

۱ . شیب خط مماس و خط قائم بر منحنی داده شده را در نقطه داده شده تعریف و محاسبه کند .

۲ . مشتق تابع در یک نقطه را تعریف کرده و محاسبه کند .

۳ . قضیه های مشتق را بیان کرده و به کار برد .

ادامهٔ هدفهای رفتاری

۴ . قاعده زنجیره ای در مشتق گیری را بیان کرده و آن را در محاسبات به کار برد .

۵ . از توابعی که به صورت ضمنی (غیر صریح) بیان شده اند ، مشتق گیری کند .

۶ . مشتق وارون یک تابع را محاسبه کند .

ادامهٔ هدفهای رفتاری

۷ . مشتقهای مرتبه های بالاتر از یک یک تابع را تعریف کرده و محاسبه کند .

۸ . مفهوم دیفرانسیل را بیان کرده و دیفرانسیل یک تابع را محاسبه کند .

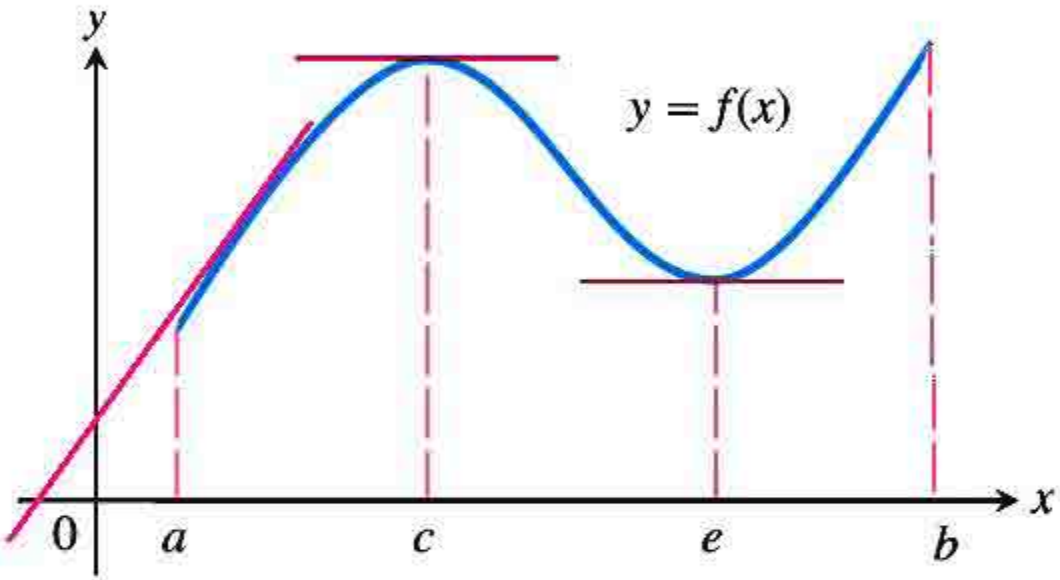
۹ . مشتق توابع پارامتری را با استفاده از دیفرانسیل محاسبه کند .

مقدمه

ایدهٔ اصلی حساب دیفرانسیل مفهوم مشتق است . در اواخر سال ۱۶۳۶ وقتی پیرفرما ریاضی دان بزرگ فرانسوی ، ماکسیمم و مینیمم چند تابع خاص را مورد مطالعه قرار داد ، دریافت که خطوط مماس در نقاطی که منحنی ماکسیمم یا مینیمم دارد باید افقی باشد . این مطلب فرما را به تعیین امتداد خطوط مماس در حالت کلی سوق داد و این فکر اساس مسئلهٔ جدیدی بنام مشتق گردید .

مطالعات ارزشمند نیوتن و لایپنیتسز به نتایج بسیار سودمندی رسید به طوری که امروزه مشتق کلید حل بسیاری از مسائل مهم علمی است .

مقدمه



فصل ششم

بخش اول

۱.۶ تعریف مشتق

تعریف

تابع و نقطهٔ را در نظر می گیریم اگر وجود داشته باشد ،آن را مشتق تابع در نقطهٔ در نقطهٔ مشتق داشته باشد گوییم در مشتق پذیر است .

فصل ششم

بخش دوم

۲.۶ قضایای مشتق

دو

فصل ششم

بخش سوم

۳.۶ مشتق ترکیب توابع و تابع ضمنی

دو

فصل ششم

بخش چهارم

۴.۶ مشتق توابع مثلثاتی

دو

فصل ششم

بخش پنجم

۵.۱ مشتق وارون یک تابع

دو

فصل ششم

بخش ششم

۶.۶ توابع هیپربولیک و مشتق آنها

دو

فصل ششم

بخش هفتم

٦.٤ مشتق مرتبة n/م

دو

فصل ششم

بخش هشتم

٦.٨ ديفرانسيل

دو

فصل هفتم

کاربردهای مشتق

هدفهای رفتاری

دانشجو پس از مطالعه این فصل باید بتواند :

۱ . نقاط ماکسیمم و مینیمم نسبی یک تابع را در یک بازه تعریف کند و مقادیر ماکسیمم و مینیمم نسبی تابع را در صورت وجود محاسبه کند .

ادامهٔ هدفهای رفتاری

۲ . نقاط ماکسیمم و مینیمم مطلق یک تابع را روی قلمروش تعریف کرده و مقادیر ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع را در صورت وجود محاسبه کند .

۳ . قضیه های مقدا ر میانی ، رول و مقدار میانگین را بیان کرده و به کار برد .

۴ . نقاط بحرانی یک تابع را تعریف و تعیین کند .

ادامهٔ هدفهای رفتاری

۵ . بازه هایی را که تابع در آنها صعودی یا نزولی است ، با استفاده از علامت مشتق اول تعیین کند .

۶ . تقعر و تحدب منحنی تابع را دریک نقطه تعریف کرده و تقعر یا تحدب توابع داده شده را تعیین کند .

۷ . نقطهٔ عطف یک تابع را تعریف کرده و برای توابع داده شده در صورت وجود نقطهٔ عطف آن را تعیین کند .

مقدمه

د رفصل ۶ بعضی از موارد کاربرد مشتق ، مانند معادلات خط مماس و قائم بر یک منحنی ، سرعت و شتاب متحرک را بررسی کردیم . در این فصل کاربردهای دیگری از مشتق را بیان می کنیم .

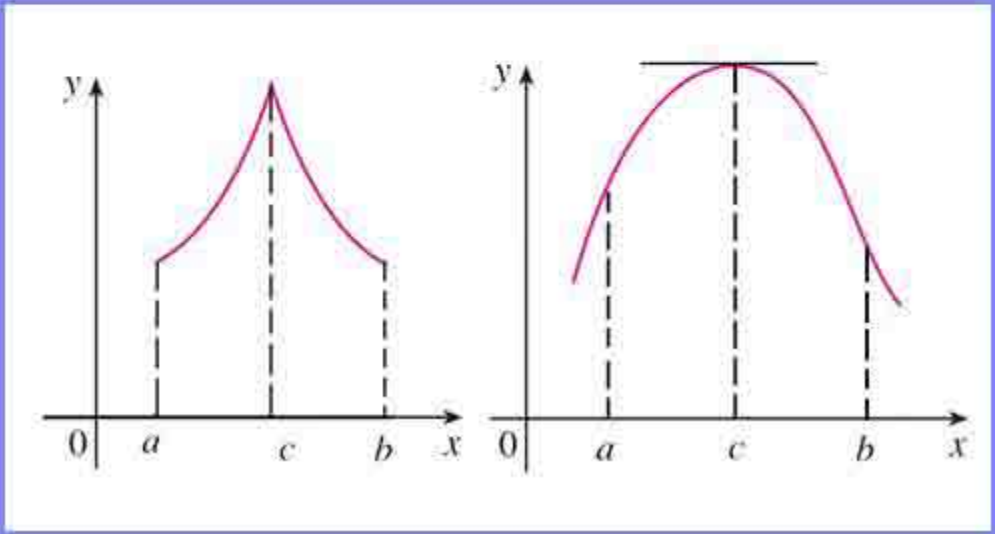
فصل هفتم

بخش اول

۱.۷ ماکسیمم و مینیمم یک تابع

تعریف

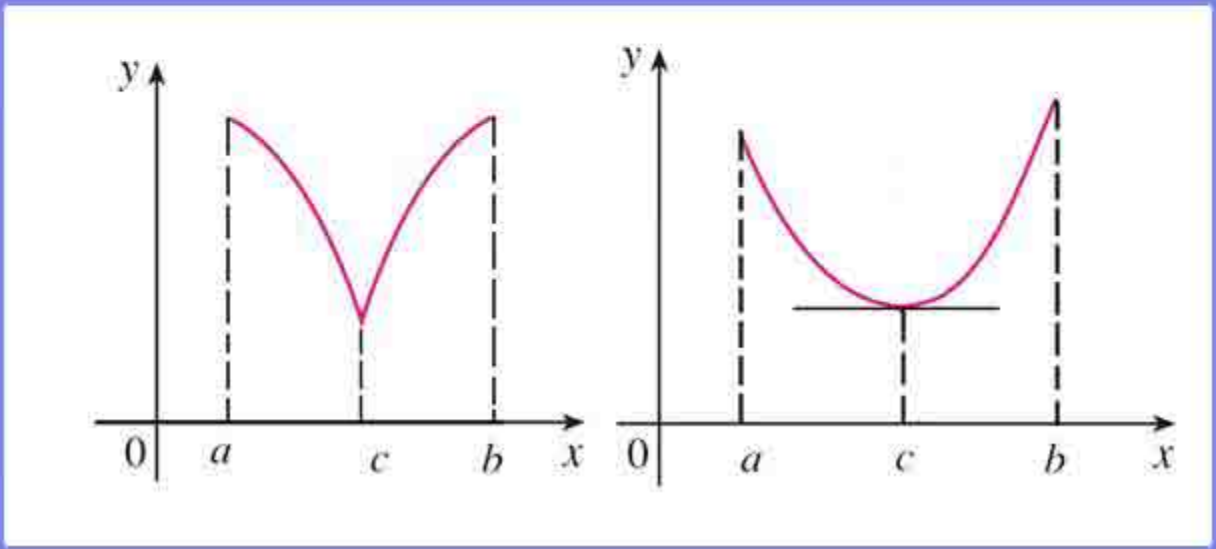
تابع f در نقطهٔ c **ماکسیمم نسبی** دارد هرگاه یک همسایگی از c وجود داشته باشد به طوری که f در آن همسایگی تعریف شده و به ازای هر x در این همسایگی $f(c) \geq f(x)$.



۷.۱ ماکسیمم و مینیمم یک تابع

تعریف

تابع f در نقطهٔ c **مینیمم نسبی** دارد هرگاه یک همسایگی c از وجود داشته باشد به طوری که f در آن همسایگی تعریف شده و به ازای هر x در این همسایگی $f(c) \leq f(x)$.



۱۰.۱ ماکسیمم و مینیمم یک تابع

تعریف

اگر تابع f در نقطهٔ c ماکسیمم نسبی یا مینیمم نسبی داشته باشد ، گوییم f در c **اکسترمم نسبی** دارد .

قضیه

اگر $f(x)$ به ازای همه مقادیر x در (a,b) موجود بوده و در $c \in (a,b)$ اکسترمم نسبی داشته باشد ، آنگاه ، در صورت وجود $f'(c)$ داریم :

$$f'(c)=0$$

۷ . ۱ ماکسیمم و مینیمم یک تابع

تذکر

اگر f یک تابع مشتق پذیر باشد تنها مقادیری از x که در آنها f می تواند ماکسیمم یا مینیمم نسبی داشته باشد آن نقاطی هستند که در آنها $f'(x)=0$ ، اما ممکن است $f'(x)$ به ازای مقادیری از x صفر باشد ولی f در آنها ماکسیمم یا مینیمم نسبی نداشته باشد . به عبارت دیگرعکس قضیهٔ فوق درست نیست .

۷ . ۱ ماکسیمم و مینیمم یک تابع

مثال

تابع $f(x)=(x-2)^5$ را در نظر می گیریم داریم :

$$f'(x)=5(x-2)^4$$

مشاهده می شود که $f'(2)=0$ ولی به ازای $x<2$ ، $f(x)<0$

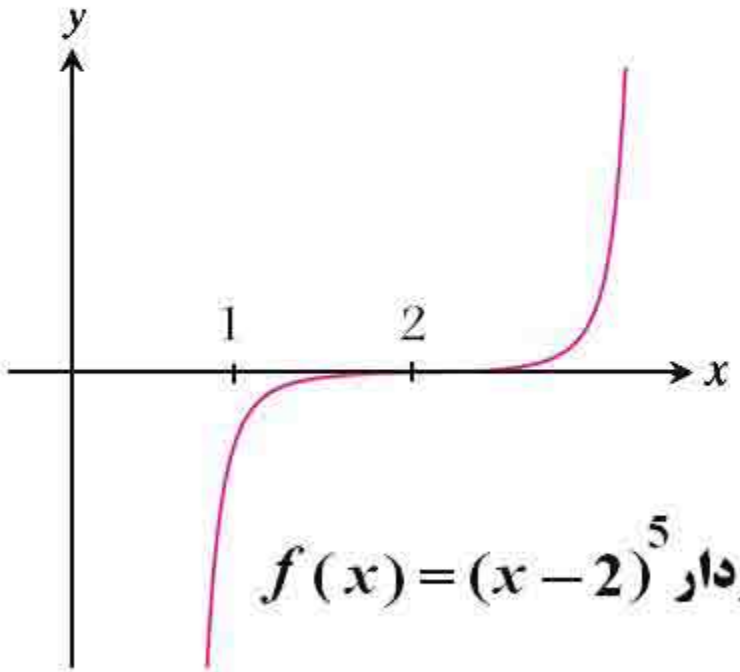
و به ازای $x>2$ ، $f(x)>0$ در نتیجه f در $x=2$ نه

ماکسیمم نسبی دارد نه مییمم نسبی .

نمودار این تابع در اسلاید بعدی مشاهده می شود .

۱.۷ ماکسیمم و مینیمم یک تابع

نمودار



نمودار $f(x)=(x-2)^5$

۱.۷ ماکسیمم و مینیمم یک تابع

تذکر

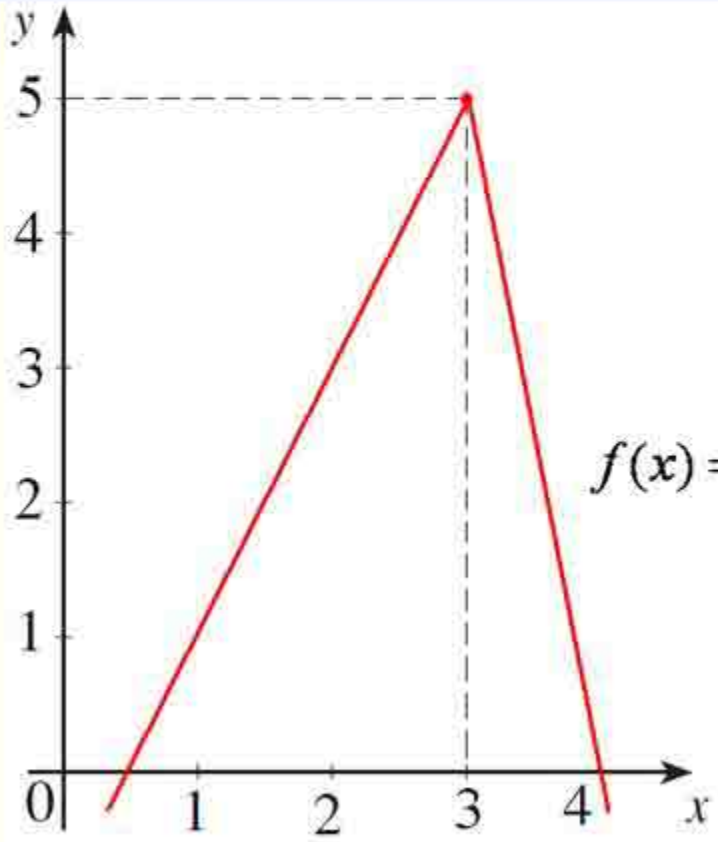
توجه کنید که ممکن است تابعی در نقطه ای ماکسیمم یا مینیمم نسبی داشته باشد ، بدون این که در آن نقطه مشتق داشته باشد به عنوان مثال تابع

$$f(x)=\begin{cases}2x-1 & x\le 3\\ 4-x & x>3\end{cases}$$

را در نظر می گیریم نمودار این تابع در اسلاید بعدی رسم شده است .

۱.۷ ماکسیمم و مینیمم یک تابع

نمودار



نمودار تابع :

$$f(x)=\begin{cases}2x-1 & x\le 3\\ 4-x & x>3\end{cases}$$

۷.۱ ماکسیمم و مینیمم یک تابع

تذکر

اگر تابع f در c تعریف شده باشد شرط لازم برای آن که f در c اکسترمم نسبی داشته باشد این است که $f'(c)=0$ یا $f'(c)$ موجود نباشد اما این شر ط کافی نیست .

۷ . ۱ ماکسیمم و مینیمم یک تابع

تعریف

نقطه c متعلق به قلمرو f را یک نقطه **بحرانی** می نامیم ،

هر گاه یکی از دوشرط زیر برقرار باشد :

۱- $f'(c) = 0$

۲- $f'(c)$ وجود نداشته باشد .

۷ . ۱ ماکسیمم و مینیمم یک تابع

مثال

الف . تابع $f(x)=|x|$ را در نظر می گیریم چون $f'(0)$ وجود ندارد لذا $x=0$ نقطهٔ بحرانی تابع f است.

ب . تابع $g(x)=x^3-3x$ را در نظر می گیریم داریم :

$$g'(x)=3x^2-3$$

ریشه های معادلهٔ $g'(x)=0$ عبارتند از : $x=1$ و $x=-1$

یعنی نقاط بحرانی تابع عبارتند از ۱ و ۱- .

۱.۷ ماکسیمم و مینیمم یک تابع

تمرین

نقاط بحرانی توابع زیر را به دست آورید :

1. $f(x) = x^3 + 7x^2 - 5x$
2. $f(x) = \sin 2x$
3. $f(x) = x^{4/3} + 4x^{1/3}$
4. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

۷ . ۱ ماکسیمم و مینیمم یک تابع

آزمون مشتق اول برای اکسترممهای نسبی

فرض کنیم تابع f روی یک همسایگی نقطهٔ بحرانی c مانند (a,b) پیوسته باشد و در همهٔ نقاط آن احتمالاً به جز در c مشتق داشته باشد .

۱- اگر $f'(x)$ روی (a,c) مثبت و روی (c,b) منفی باشد ، f در $x=c$ یک ماکسیمم نسبی دارد .

۲- اگر f' روی (a,c) منفی و روی (c,b) مثبت باشد ، f در $x=c$ یک مینیمم نسبی دارد .

۳- اگر (۱) و (۲) برقرار نباشند f در $x=c$ ماکسیمم نسبی یا مینیمم نسبی ندارد .

۷ . ۱ ماکسیمم و مینیمم یک تابع

تذکر

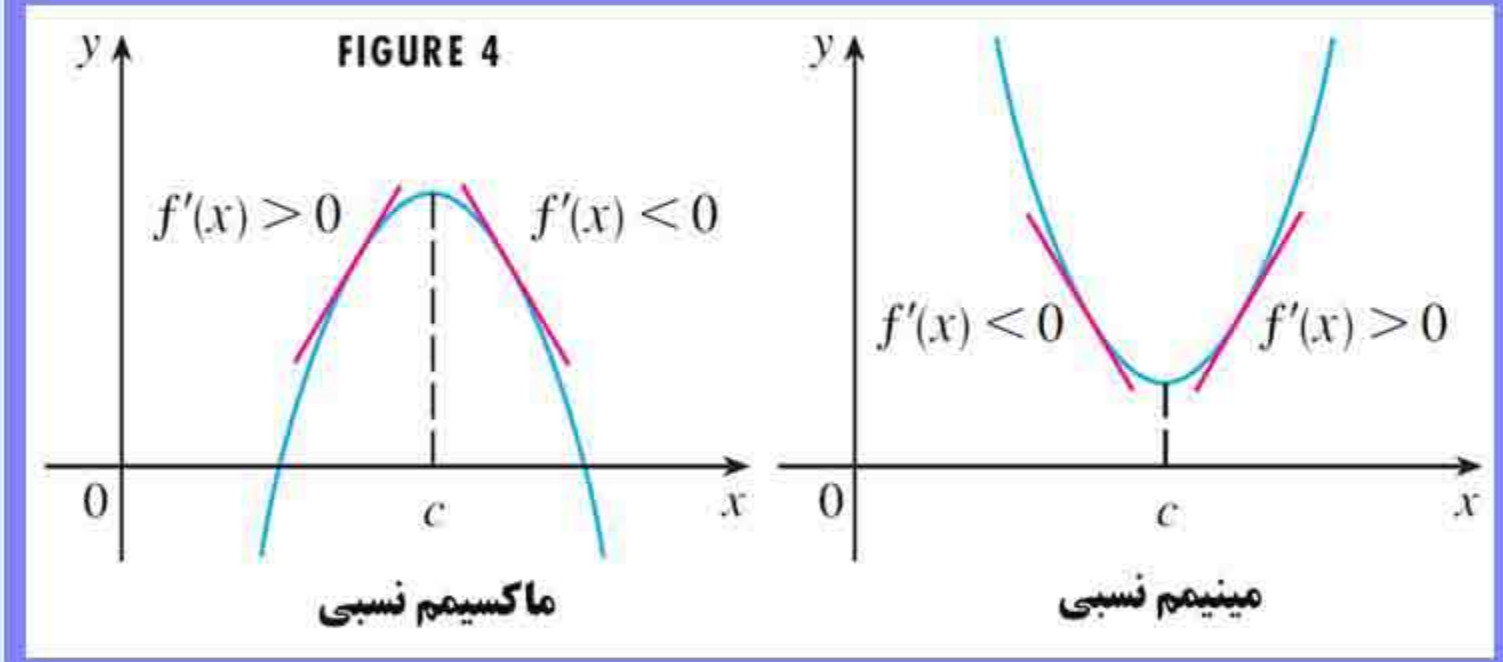
آزمون مشتق اول برای اکسترممهای نسبی بیان می کند که :

اگر f' در نقطهٔ بحرانی c از مثبت به منفی تغییر علامت دهد $f(c)$ ماکسیمم نسبی f است.

و اگر f' درنقطهٔ بحرانی c ازمنفی به مثبت تغییر علامت دهد $f(c)$ مینیمم نسبی f است .

۱۰.۷ ماکسیمم و مینیمم یک تابع

نمودار



۷ . ۱ ماکسیمم و مینیمم یک تابع

مثال

ماکسیمم و مینیمم نسبی تابع $f(x)=2x^3-15x^2+36x-25$ را با استفاده از آزمون مشتق اول به دست آورید .

مشتق این تابع برابر است با $f'(x)=6x^2-30x+36$ ریشه های معادله $f'(x)=0$ عبارتند از ۲ و ۳ ، پس ۲ و ۳ نقاط بحرانی f هستند . آزمون مشتق اول را به کار می بریم و نتیجه را در جدول زیر خلاصه می کنیم :

۱.۷ ماکسیمم و مینیمم یک تابع

ادامهٔ مثال

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		تابع صعودی است	3	تابع نزولی است	2	تابع صعودی است	
			ماکسیمم نسبی		مینیمم نسبی		

۱۰.۷ ماکسیمم و مینیمم یک تابع

مثال

ماکسیمم و مینیمم نسبی تابع

$$f(x)=\begin{cases}-3x+5 & x\geq 2\\ x^2-5 & x<2\end{cases}$$

را با استفاده از آزمون مشتق اول به دست آورید .

f در ۲ پیوسته است اما چون $f'_-(2)=4$ و $f'_+(2)=-3$

پس $f'(2)$ وجود ندارد بنابراین ۲ یک نقطهٔ بحرانی تابع f

است و داریم :

$$f'(x)=\begin{cases}-3 & x\geq 2\\ 2x & x<2\end{cases}$$

۷.۱ ماکسیمم و مینیمم یک تابع

مثال

چون $f'(0)=0$ پس 0 نیز یک نقطه بحرانی f است . آزمون مشتق اول را به کار می بریم و نتیجه را در جدو ل زیر خلاصه می کنیم .

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	وجود ندارد	$-$
$f(x)$	تابع نزولی است	-5 مینیمم نسبی	تابع صعودی است	-1 ماکسیمم نسبی	تابع نزولی است

۱۰.۷ ماکسیمم و مینیمم یک تابع

مثال

نشان دهید که

$$e^x > x+1 \qquad (x \neq 0)$$

تابع $f(x)=e^x-(x+1)$ را در نظر می گیریم ، مشتق این تابع برابر است با $f'(x)=e^x-1$ این تابع تنها در $(0,0)$ مینیمم نسبی دارد بنابراین به ازای هر $x \neq 0$ داریم

$$f(x) > f(0)$$

و یا $e^x-(x+1)>0$ در نتیجه $e^x > (x+1)$.

۱۰.۱ ماکسیمم و مینیمم یک تابع

تمرین

ماکسیمم نسبی و مینیمم نسبی توابع زیر را به وسیله آزمون مشتق اول به دست آورید . معلوم کنید توابع زیر روی چه فاصله هایی صعودی و روی چه فاصله های نزولی هستند .

1. $f(x)=5x^2-10x+9$

2. $f(x)=2x^3-9x^2+12x-1$

3. $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$

۱۰.۱ ماکسیمم و مینیمم یک تابع

ادامهٔ تمرین

4. $$f(x)=\begin{cases}2x+9 & x\le -2\\ x^2+1 & x>-2\end{cases}$$

5. $$f(x)=(x-1)^2(x+1)^3$$

۱.۷ ماکسیمم و مینیمم یک تابع

آزمون مشتق دوم برای اکسترممهای نسبی

فرض کنیم c یک نقطه بحرانی تابع f و $f'(c)=0$ و f' و f''

در یک همسایگی c وجود داشته باشند .

۱- اگر $f''(c)<0$ ، آنگاه f در c ماکسیمم نسبی دارد ،

۲- اگر $f''(c)>0$ ، آنگاه f در c مینیمم نسبی دارد .

۱۰.۱ ماکسیمم و مینیمم یک تابع

مثال

تابع $f(x)=2x^3+3x^2-12x+5$ را در نظر می گیریم مشتق تابع f برابر است با

$$f'(x)=x^2+6x^2-12$$

ریشه های مشتق عبارتند از ۱ و ۲- بنابراین ۱ و ۲- نقاط بحرانی f هستند .

مشتق دوم تابع f برابر است با $f''(x)12x+6$ مقدار f'' در نقاط ۱ و ۲- عبارت است از $f''(1)=18>0$ $f''(-2)=-18<0$

پس f در ۱ مینیمم نسبی و در ۲- ماکسیمم نسبی دارد .

۱۰.۱ ماکسیمم و مینیمم یک تابع

تذکر

اگر $f'(c)=f''(c)=0$ ، آزمون مشتق دوم در باره ماکسیمم نسبی یا مینیمم نسبی اطلاعی به دست نمی دهد ، در این مورد باید از آزمون مشتق اول استفاده کرد .

به دو مثال بعدی توجه کنید .

۱.۷ ماکسیمم و مینیمم یک تابع

مثال

تابع $f(x)=(x-1)^3$ را در نظر می گیریم داریم :

$$f'(x)=3(x-1)^2 \qquad f''(x)=6(x-1)$$

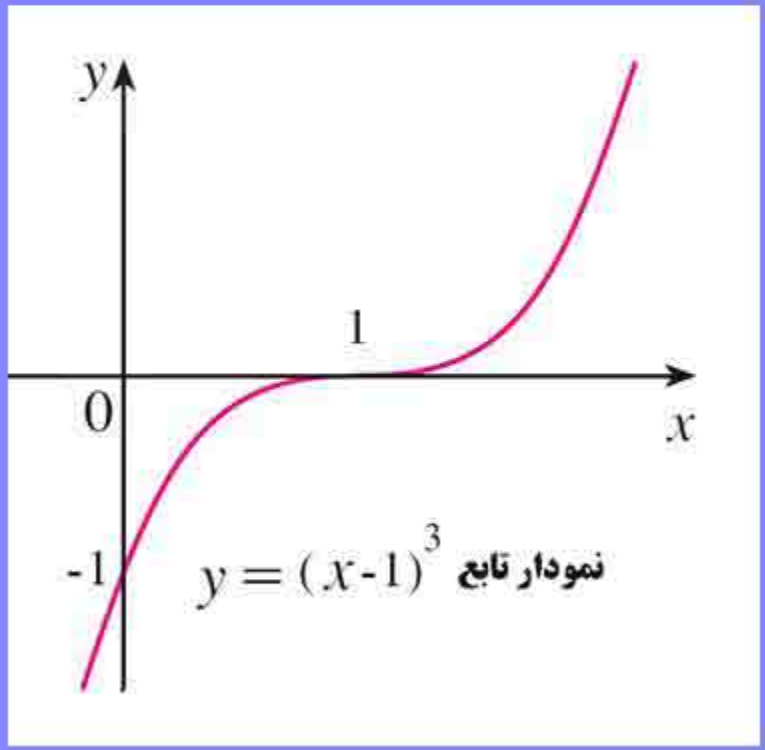
پس $f'(1)=f''(1)=0$ آزمون مشتق اول را به کار می بریم .

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	تابع صعودی است	0	تابع صعودی است

پس f در $x=1$ نه ماکسیمم نسبی دارد نه مینیمم نسبی .

۱.۷ ماکسیمم و مینیمم یک تابع

نمودار



۱۰.۷ ماکسیمم و مینیمم یک تابع

مثال

تابع $f(x)=(x-1)^4$ را در نظر می گیریم داریم :

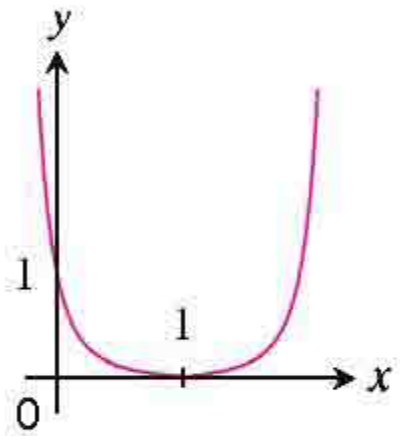
$$f'(x)=4(x-1)^3 \qquad f''(x)=12(x-1)^2$$

پس $f'(1)=f''(1)=0$ آزمون مشتق اول را به کار می بریم و می بینیم که f در $x=1$ مینیمم نسبی دارد :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	تابع نزولی است	0	تابع صعودی است
		مینیمم نسبی	

۱.۷ ماکسیمم و مینیمم یک تابع

نمودار



نمودار تابع $f(x) = (x-1)^4$

۱۰.۱ ماکسیمم و مینیمم یک تابع

تمرین

الف . نقا ط بحرانی توابع زیر را پیدا کنید .

ب . با استفاده از آزمون مشتق دوم نقاط ماکسیمم نسبی و مینیمم آنها را به دست آورید .

1. $f(x) = 2x^4 + x$

2. $f(x) = x + \frac{1}{x} \quad x > 0$

3. $f(x) = x^2 e^{-x}$

۷.۱ ماکسیمم و مینیمم یک تابع

تعریف

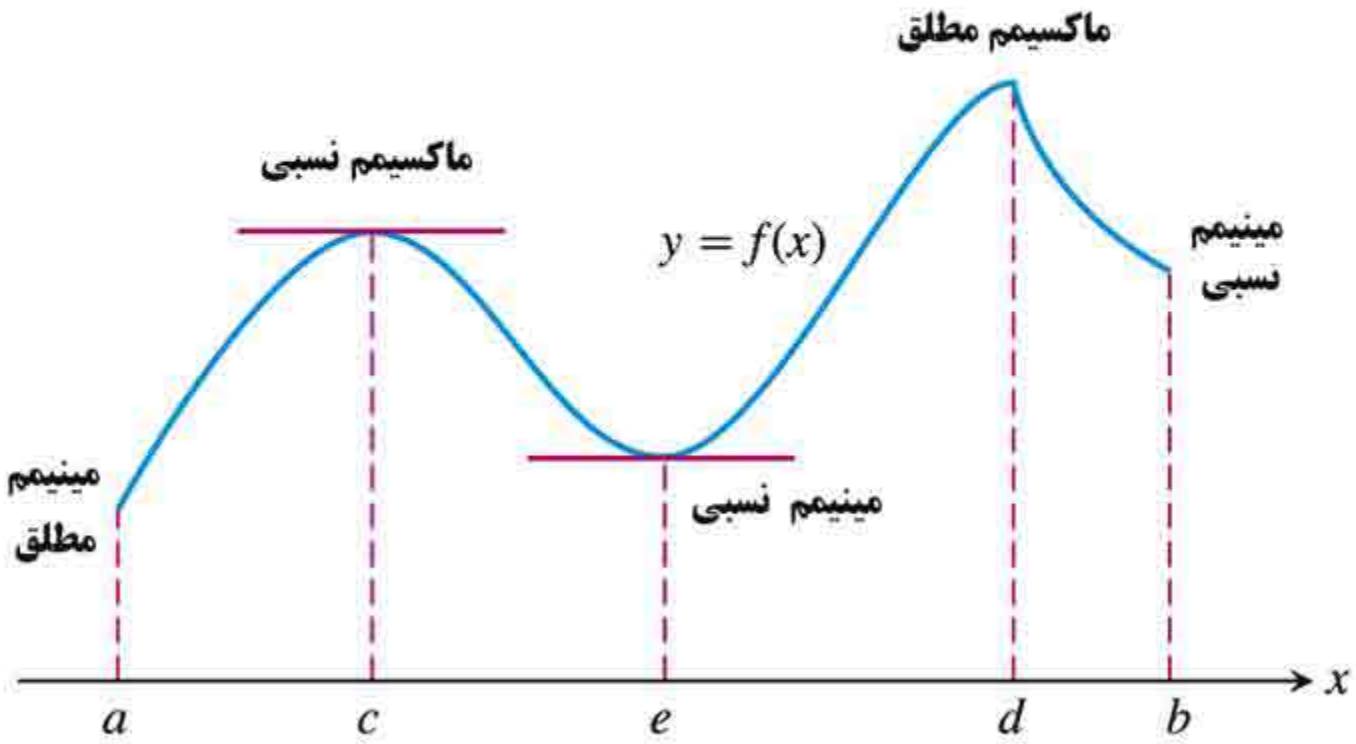
گوییم تابع f **بر یک بازه ماکسیمم مطلق** دارد اگر عددی مانند c در این بازه باشد به طوری که به ازای هر x در این بازه $f(c) \geq f(x)$ در چنین حالت ، $f(c)$ **ماکزیمم مطلق** f بر این بازه است .

تعریف

گوییم تابع f **بر یک بازه مینیمم مطلق** دارد اگر عددی مانند c در این بازه باشد به طوری که به ازای هر x در این بازه $f(c) \geq f(x)$ در چنین حالت ، $f(c)$ **مینیمم مطلق** f بر این بازه است .

۱.۷ ماکسیمم و مینیمم یک تابع

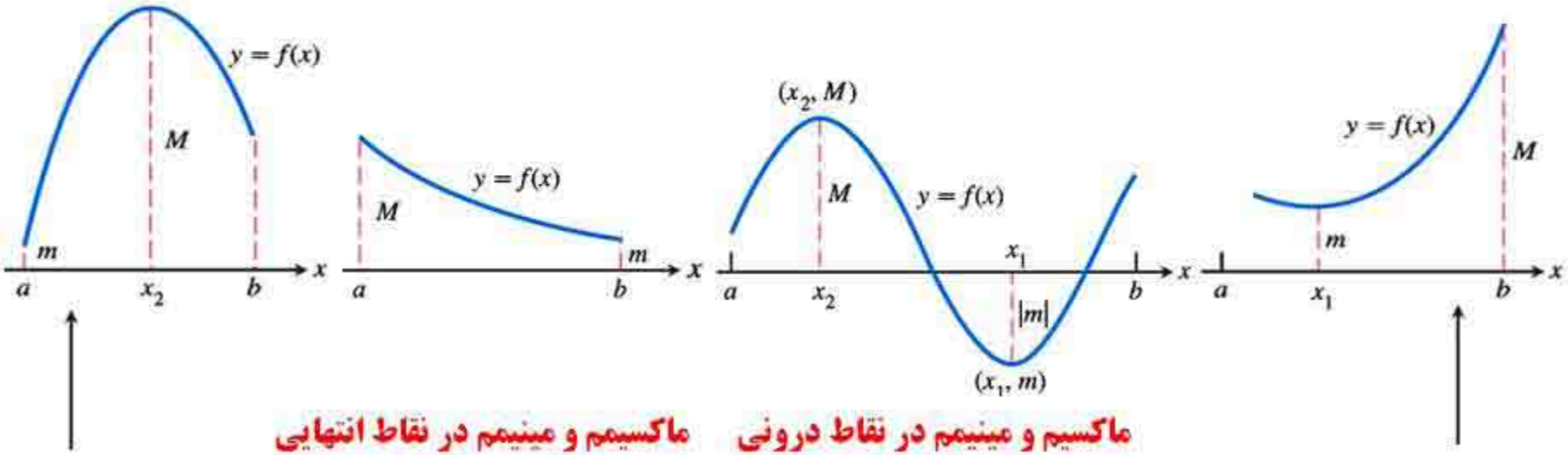
نمودار



۱.۷ ماکسیمم و مینیمم یک تابع

قضیه

اگر f روی فاصله بستهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه f بر $[a,b]$ ماکسیمم مطلق و مینیمم مطلق دارد .



ماکسیمم و مینیمم در نقاط انتهایی

ماکسیمم و مینیمم در نقاط درونی

ماکسیمم در نقطهٔ درونی و مینیمم در نقطهٔ انتهایی

ماکسیمم در نقطهٔ انتهایی و مینیمم در نقطهٔ درونی

۷ . ۱ ماکسیمم و مینیمم یک تابع

دستورالعمل پیدا کردن اکسترممهای مطلق

برای پیدا کردن ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع f در فاصلهٔ $[a,b]$:

۱ . ماکسیمم ها و مینیمم های نسبی تابع را در این فاصله پیدا کنید .

۲ . مقدار تابع را در نقاط a و b محاسبه کنید .

۳ . بیشترین و کمترین مقدار به ترتیب برابر با ماکسیمم مطلق و مینیمم مطلق خواهد بود .

۱۰۷ ماکسیمم و مینیمم یک تابع

مثال

تابع $f(x)=3x-2x^2-\frac{4}{3}x^3$ را درفاصلهٔ $[-2,2]$ در نظر می گیریم مشتق این تابع برابر است با

$$f'(x)=3-4x-4x^2$$

نقاط بحرانی تابع ریشه های مشتق یعنی عبارتند از $x=-\frac{3}{2}$ و $x=\frac{1}{2}$.

آزمون مشتق اول را به کار می بریم و نتیجه را در جدول زیر خلاصه می کنیم :

۱.۷ ماکسیمم و مینیمم یک تابع

مثال

x	-2		2		3		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		تابع نزولی است	مینیمم نسبی	تابع صعودی است	ماکسیمم نسبی	تابع نزولی است	

۷.۱ ماکسیمم و مینیمم یک تابع

مثال

تابع در $x=-\frac{3}{2}$ مینیمم نسبی و در $x=\frac{1}{2}$ ماکسیمم نسبی دارد .

مقدار تابع در نقاط بحرانی و نقاط ۲ و ۲ − عبارتند از :

x	$f(x)$	
$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$	← بیشترین مقدار
$-\frac{3}{2}$	$-\frac{9}{2}$	
-2	$-\frac{10}{3}$	
2	$-\frac{38}{3}$	← کمترین مقدار

بنابر این

ماکسیمم مطلق تابع

$$f(\tfrac{1}{2})=\tfrac{5}{6}$$

مینیمم مطلق تابع

$$f(2)=\tfrac{-38}{3}$$

۱.۷ ماکسیمم و مینیمم یک تابع

تمرین

ماکسیمم و مینیمم مطلق توابع زیر را به دست آورید .

1. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x \qquad 0 \le x \le 6$

2. $f(x) = (x^2 - 4)^2 \qquad -3 \le x \le 4$

3. $f(x) = x^{2/3} \qquad -1 \le x \le 1$

۱.۷ ماکسیمم و مینیمم یک تابع

ادامهٔ تمرین

4. $$f(x)=\begin{cases}3x-4 & -3\le x\le 1\\ x^2-2 & 1\le x\le 3\end{cases}$$

5. $$f(x)=\sin x+\cos^2 x \qquad 0\le x\le 2\pi$$

فصل هفتم

بخش دوم

۲.۷ چند کاربرد ماکسیمم و مینیمم

مثال

فرض کنید که بخواهیم جعبه ای را بابست بفرستیم و مقطع این جعبه به شکل مربع باشد . مقررات بستی ، مقرر می دارد که مجموع طول و محیط جعبه نمی تواند از ۱۶۰ سانیتیمتر تجاوز کند . ابعاد این جعبه را چگونه انتخاب کنیم تا حجم آن ماکسیمم شود ؟

طول جعبه را x و ارتفاع آن را y می نامیم داریم :

$$x+4y=160$$

می خواهیم $V=xy$ ماکسیمم باشد دراین صورت $y=\frac{160-x}{4}$ و

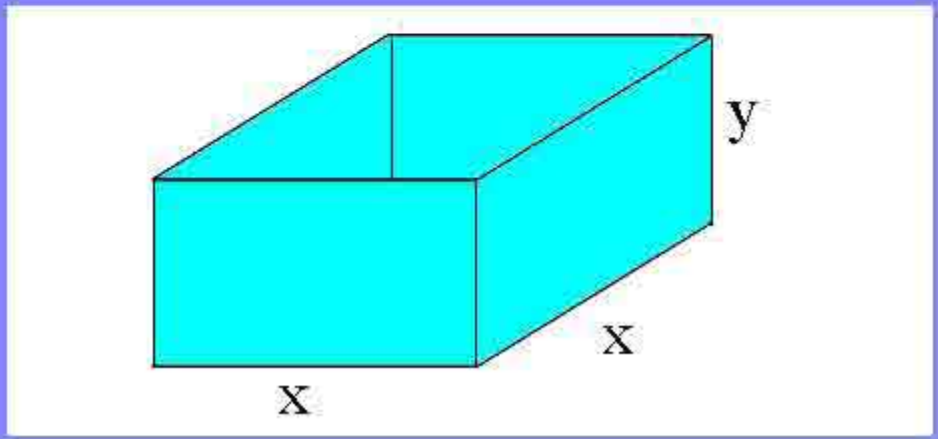
$$V=x\left(\frac{160-x}{4}\right)=40x-\frac{1}{4}x^2$$

۲.۵ چند کاربرد ماکسیمم و مینیمم

مثال

مشتق این تابع برابراست با $V'(x) = 40 - \frac{x}{2}$ ریشهٔ مشتق عبارت است از $x = 80$ و چون $V''(x) = -\frac{1}{2} < 0$ لذا $x = 80$ حجم ماکسیمم را به دست می دهد بنابراین ابعاد مورد نظر عبارتند از :

$x = 80$ $\qquad$ $y = 20$



۲.۷ چند کاربرد ماکسیمم و مینیمم

مثال

اگر مجموع د و متغیر نامنفی ثابت باشد حاصل ضرب آنها وقتی ماکسیمم است که این متغیرها برابر باشند .

فرض کنیم $y \geq 0$ و $x \geq 0$ و $x + y = k$ و k مقدار ثابتی باشند داریم : $f(x) = xy = x(k - x) = kx - x^2$

مشتق این تابع برابر است با $f'(x) = k - 2x$ و ریشهٔ مشتق عبارت است از $x = k/2$ چون $f''(x) = -2$ پس ماکسیمم تابع در $x = k/2$ برابر $y = k/2$ است .

۲.۵ چند کاربرد ماکسیمم و مینیمم

مثال

روی بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ نقطه ای در ناحیه اول مشخص کنید که حاصل ضرب طول و عرض آن بیشترین مقدار باشد .

فرض کنیم $M(X,Y)$ نقطهٔ مطلوب بوده و $X.Y$ ماکسیمم باشد ، در نتیجه عبارتهای x^2y^2 و $\frac{x^2}{a^2}\frac{y^2}{b^2}$ ماکسیمم خواهد شد و چون مجموع این دو جمله مقدار ثابت ۱ است پس بنا بر مثال قبل خواهیم داشت : $\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=1$ در نتیجه نقطهٔ $M(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}})$ جواب مسا له است .

۲.۷ چند کاربرد ماکسیمم و مینیمم

قضیهٔ مقدار میانی

اگر f روی $[a,b]$ پیوسته باشد و اگر N عددی مابین $f(a)$ و $f(b)$ باشد آنگاه لااقل یک عدد مانند c بین a و b وجود دارد به طوری که :

$$f(c)=N$$

۲.۵ چند کاربرد ماکسیمم و مینیمم

نتیجه

اگر f روی $[a,b]$ پیوسته باشد و اگر $f(a)$ و $f(b)$ مختلف العلامه باشند آنگاه لااقل نقطه ای مانند $x \in (a,b)$ وجود دارد به طوری که :

$$f(x)=0$$

فصل هفتم

بخش سوم

۳.۷ قضایای رول و میانگین

قضیهٔ رول

اگر f تابع د ر شرایط زیر صدق کند :

۱ . در فاصلهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد .

۲ . درفاصلهٔ باز (a,b) مشتق پذیر باشد .

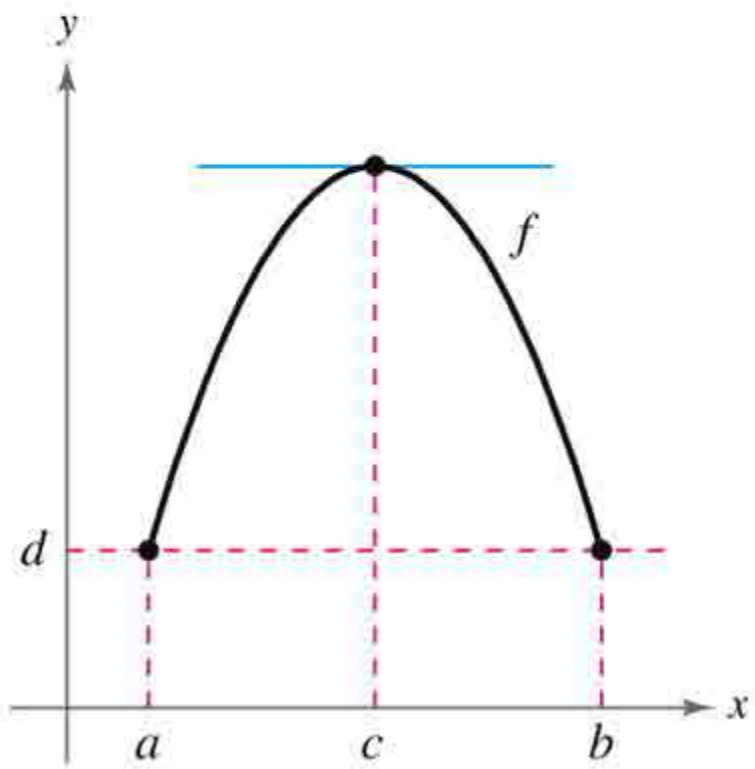
۳ . $f(a)=f(b)=0$

در این صورت عددی مانند c در فاصلهٔ (a,b) وجود دارد به طوری که :

$$f'(c)=0$$

۳.۷ قضایای رول و میانگین

نمودار مربوط به قضیهٔ رول



۳.۷ قضایای رول و میانگین

مثال

تابع $f(x)=4x^3-9x$ را درفاصلهٔ $[0\,,\,\frac{3}{2}]$ را در نظر می گیریم این تابع در فاصلهٔ $[0\,,\,\frac{3}{2}]$ پیوسته و در $(0\,,\,\frac{3}{2})$ فاصلهٔ مشتق پذیر است و نیز $f(0)=f(\frac{3}{2})=0$.

پس f در هر شرط قضیهٔ رول صدق می کند ، بنابراین f' باید لااقل در یک نقطه از فاصلهٔ $(0\,,\,\frac{3}{2})$ صفر شود ، داریم :

$$f'(x)=0\Rightarrow 12x^2-9=0\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

که تنها $\frac{\sqrt{3}}{2}$ به فاصلهٔ $(0\,,\,\frac{3}{2})$ تعلق دارد .

۳.۷ قضایای رول و میانگین

نتیجه [صورت دیگری از قضیهٔ رول]

اگر f تابع د ر شرایط زیر صدق کند :

۱ . در فاصلهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد .

۲ . درفاصلهٔ باز (a,b) مشتق پذیر باشد .

۳ . $f(a)=f(b)=k$

در این صورت عددی مانند c در فاصلهٔ (a,b) وجود دارد به طوری که :

$$f'(c)=0$$

۳.۷ قضایای رول و میانگین

قضیهٔ مقدار میانگین

اگر f تابع د ر شرایط زیر صدق کند :

۱ . در فاصلهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد .

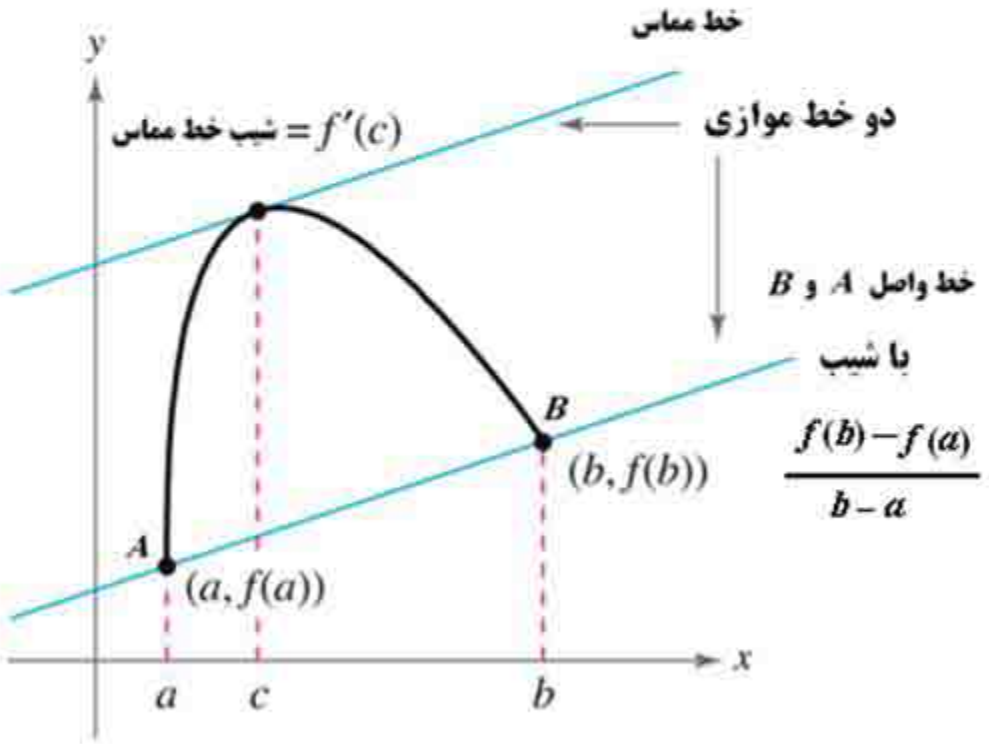
۲ . درفاصلهٔ باز (a,b) مشتق پذیر باشد .

در این صورت عددی مانند c در فاصلهٔ (a,b) وجود دارد به طوری که :

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

۳.۷ قضایای رول و میانگین

نمودار مربوط به قضیهٔ مقدار میانگین



۳.۷ قضایای رول و میانگین

مثال

تابع $f(x)=x^3-x^2-1$ را در فاصلهٔ $[-1,1]$ در نظر می گیریم ، این تابع روی $[-1,1]$ پیوسته و روی $(-1,1)$ مشتق پذیر است پس بنا بر قضیه میانگین نقطه ای مانند $c\in(-1,1)$ وجود دارد به طوری که :

$$f'(c)=\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}\Rightarrow 3c^2-2c=\frac{-1+3}{2}$$

در نتیجه $c=1$ و $c=-\frac{1}{3}$ که تنها $-\frac{1}{3}$ به فاصلهٔ $(-1,1)$ تعلق دارد .

۳.۷ قضایای رول و میانگین

مثال

تابع

$$f(x)=\begin{cases}0 & -2\le x<0\\ x & 0\le x\le 2\end{cases}$$

را در نظر می گیریم . قضیهٔ مقدار میانگین در مورد این تابع برقرار نیست ، زیرا $f'(0)$ وجود ندارد . بنابراین در هیچ یک از نقاط $[-2,2]$ نمی توان مماسی برمنحنی رسم کرد که با خط AB موازی باشد .

۳.۷ قضایای رول و میانگین

قضیه

فرض کنیم تابع f در فاصلهٔ $[a,b]$ پیوسته و در فاصلهٔ (a,b) مشتق پذیر باشد دراین صورت :

۱ . اگر به ازای هر x در (a,b) ، $f'(x)>0$ آنگاه f بر $[a,b]$ صعودی است .

۲ . اگر به ازای هر x در (a,b) ، $f'(x)<0$ آنگاه f بر $[a,b]$ نزولی است .

۳.۷ قضایای رول و میانگین

مثال

با استفاده از قضیه میانگین نشان دهید ، اگر $0<a<b$ آنگاه

$$(1-\frac{a}{b})<\ln\frac{b}{a}<\frac{b}{a}-1$$

تابع $f(x)=\ln x$ درفاصلهٔ $[a,b]$ در شرایط قضیه مقدار میانگین صدق می کند پس $c\in(a,b)$ وجود دارد به طوری که :

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

پس :

$$\frac{1}{c}=\frac{\ln b-\ln a}{b-a}$$

۳.۷ قضایای رول و میانگین

مثال

از نابرابری $a<c<b$ نتیجه می شود $\frac{1}{b}<\frac{1}{c}<\frac{1}{a}$ پس

$$\frac{1}{b}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{a}$$

یا :

$$(b-a)\frac{1}{b}<\ln b-\ln a<\frac{1}{a}(b-a)$$

د ر نتیجه :

$$1-\frac{a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b}{a}-1$$

فصل هفتم

بخش چهارم

۴ . ۷ چند کاربرد قضایای رول و میانگین

مسئله

معادلهٔ

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a^{n-1} x = 0$$

را که درآن n یک عدد طبیعی و a_1 ، a_2 ، ... ، a_{n-1} اعداد حقیقی اند در نظر می گیریم . فرض می کنیم $x = r$ یک ریشهٔ مثبت این معادله باشد . با استفاده از قضیه رول نشان می دهیم که معادلهٔ

$$nx^{n-1} + a_1(n-1)x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} = 0$$

حداقل یک ریشه مثبت کوچکتر از r دارد .

۴ . ۷ چند کاربرد قضایای رول و میانگین

مسئله

توجه کنید که $x=0$ دراین معادله صدق می کند . تابع

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a^{n-1}x$$

را در فاصلهٔ $[0,r]$ در شرایط قضیهٔ رول صدق می کند پس عددی مانند $c\in(0,r)$ وجود دارد به طوری که $f'(c)=0$ ولی

بنا براین عدد مثبت c با شرط $c<r$ ریشهٔ معادلهٔ زیر می باشد .

$$f'(x)=nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}$$

۱ . ۴ چند کاربرد قضایای رول و میانگین

قضیه

اگر

الف . $f(x)$ در فاصلهٔ $[a,b]$ پیوسته و در فاصلهٔ (a,b) مشتق پذیر باشد .

ب . $f(a)$ و $f(b)$ مختلف العلامه باشند .

ج . $f'(x)$ برای همهٔ مقادیر x در فاصلهٔ (a,b) مخالف صفر باشد .

آنگاه معادلهٔ $f(x)=0$ در فاصلهٔ $[a,b]$ یک وتنها یک جواب خواهد داشت .

۱ . ۴ چند کاربرد قضایای رول و میانگین

مثال

تابع ا

$f(x)$ $[a,b]$ (a,b)

$f(a)$ $f(b)$

$f'(x)$ x (a,b)

$f(x)=0$ $[a,b]$

فصل هفتم

بخش پنجم

لا . ∃ تقعر ، تحدب و نقطهٔ عطف

مثال

تابع ا

فصل هفتم

بخش ششم

۶.۱ کاربرد مشتق در رسم نمودار توابع

مثال

تابع ا

فصل هفتم

بخش هفتم

لا . لا صورتهای مبهم

مثال

تابع ا

فصل هشتم

انتگرال

هدفهای رفتاری

دانشجو پس از مطالعه این فصل باید بتواند :

۱ . روش انتگرال گیری با تغییر متغیر را توضیح داده و آن را در حل مسائل به کار برد .

۲ . روش انتگرال گیری جزء به جزء را توضیح داده و آن را در حل مسائل به کار برد .

فصل هشتم

بخش اول

۱.۸ انتگرال نامعین

تعریف

تابع $F(x)$ را **تابع اولیه** $f(x)$ درفاصلهٔ I گوییم هرگاه به ازای هر $x \in \mathrm{I}$ داشته باشیم $F'(x) = f(x)$.

۱.۸ انتگرال نامعین

مثال

نشان دهید $F(x)=x^2$ تابع اولیهٔ $f(x)=2x$ است .

چون

$$F'(x)=(x^2)'=2x$$

پس بنا به تعریف x^2 تابع اولیهٔ $2x$ است .

۱.۸ انتگرال نامعین

تذکر

بهتر است به جای تابع اولیه بگوییم « یک تابع اولیه »

زیرا اگر $F(x)$ یک تابع اولیهٔ $f(x)$ باشد آنگاه $F(x)+c$

نیز به ازای هر c ثابت یک تابع اولیهٔ $f(x)$ است .

۱.۸ انتگرال نامعین

قضیه

تفاضل بین دو تابع اولیه مقداری ثابت است یعنی اگر $F_1(x)$ و $F_2(x)$ دو تابع اولیهٔ $f(x)$ در فاصلهٔ I باشند آنگاه :

$$F_1(x) - F_2(x) = c$$

(c عددی ثابت است)

۱.۸ انتگرال نامعین

تعریف

اگر $F(x)$ یک تابع اولیهٔ $f(x)$ باشد عبارت $F(x)+c$ را **انتگرال نامعین** تابع $f(x)$ می نامیم و به صورت

$$\int f(x)\,dx$$

نشان می دهیم .

۱.۸ انتگرال نامعین

بنابراین

$$\int f(x)dx = F(x) + c \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

در این نماد $f(x)$ را انتگران و $\int$ را علامت انتگرال می نامیم .

۱.۸ انتگرال نامعین

بنا به تعریف ، انتگرال نامعین یک تابع مانند $f(x)$ دسته ای از منحنیها به صورت $F(x)+c$ است .

اولین سوالی که مطرح می شود این است که :

آیا هر تابع دارای تابع اولیه است جواب این سوال منفی است .

اما بدون اثبات می پذیریم که :

اگر تابع $f(x)$ پیوسته باشد دارای تابع اولیه و در نتیجه دارای انتگرال نامعین خواهد بود .

۱.۸ انتگرال نامعین

اما این انتگرال نامعین حتی در صورت وجود ممکن است با توابع مقدماتی قابل بیان نباشد .مثلاً :

$$\int e^{x^2} dx \quad \text{و} \quad \int \frac{\sin x}{x} dx$$

۱.۸ انتگرال نامعین

تعریف

تابع $f(x)$ را **مقدماتی** گویند هر گاه بشود $f(x)$ را از توابع چند جمله ای ، نمایی ، لگاریتمی ، مثلثاتی و معکوس مثلثاتی ، در چند مرحله با استفاده از اعمال جمع ، تفریق ، ضرب ، تقسیم یا ترکیب به دست آورد .

۱.۸ انتگرال نامعین

تعریف

محاسبهٔ تابع اولیهٔ یک تابع مانند $f(x)$ را **انتگرال گیری** تابع $f(x)$ می نامند .

در فصل ۲ طرز پیدا کردن مشتق یک تابع را مطالعه کردیم حال
فرض می کنیم که کاربرد برعکس مشتق گیری انجام
نمیشیم . یعنی می خواهیم تابعی مانند f را چنان بیابیم
که مشتق آن برابر تابع مفروضی مانند g باشد .
تابع f را یک تابع اولیه g در فاصله گوییم هرگاه
به ازای هر x داشته باشیم
نشان میدهیم تابع اولیه f است .
به جای تابع اولیه f می خواهیم گفت f یک تابع اولیه g را

یک تابع اولیه باشد آنگاه نیز که نمرآن مقدار ثابتی
است یک تابع اولیه است :

قضیه : تفاضل بین دو تابع اولیه مقداری ثابت است یعنی اگر و
دو تابع اولیه در فاصله باشند آنگاه :

تعریف : اگر یک تابع اولیه باشد عبارت را انتگرال نامعین تابع می
نامیم و به صورت نشان می دهیم در این عبارت را
انتگرال و را علامت انتگرال می نامند .

بنا به تعریف انتگرال اصلی یک تابع مانند بسته بحثی از منحنیها

به صورت است اولین سؤالی که مطرح می شود این است که :

آیا هر تابع مشتق تابع اولیه است جواب این سوال منفی است

محاسبه تابع اولیه یک تابع مانند را انتگرال گیری تابع می دانیم

تابع زیر از تعریف تابع نتیجه می شود

خواص انتگرال نامعین

۱. اگر عدد ثابتی بالفعل از دستور یا به تعریف انتگرال نامعین نتیجه می شود

۲. از دستورهای نتیجه می شود

از تعریف معلوم می شود که هر دستور مشتق گیری می تواند دستورهای برای یافتن تابع اولیه نیز باشد . پس از دستور رهای مشتق گیری می توان دستورهایی برای یافتن توابع اولیه به دست آورد . جدول زیر حاوی چند دستور انتگرال گیری است

درستی این دستورها با مشکل گروی از دو طرف برابری تحقیق
می شود. در دستورهای زیر عضوی ثابت است .

۱.۸ انتگرال نامعین

دو

فصل نهم

انتگرال معین

هدفهای رفتاری

دانشجو پس از مطالعه این فصل باید بتواند :

۱ . انتگرال ریمانی تابع f روی $[a, b]$ را تعریف کند .

۲ . شرط لازم برای انتگرال پذیری یک تابع را بیان کرده و آن را به کار برد .

۳ . مساحتهای ناحیه ها را به وسیلهٔ انتگرال محاسبه کند .

ادامهٔ هدفهای رفتاری

۴ . قضیه های مربوط به انتگرال را بیان کرده و به کار برد .

۵ . قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال را بیان کرده و به کار برد .

فصل نهم

بخش اول

۱.۹ مفهوم مساحت

انتگرال معین یکی از مفاهیم اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال است و کاربردهای زیادی در ریاضیات ، فیزیک و سایر رشته های علوم دارد . محاسبه مساحت محدود به منحنی ها، طول قوس ، حجم ، کار و سرعت نمونه هایی هستند که به محاسبه انتگرال معین منجر می شوند .

با مفهوم مساحت و روش محاسبه مساحت بعضی از اشکال هندسی آشنا هستیم . در این فصل به کمک مفهوم حد و خواص مساحت به تعریف مساحت نواحی زیر منحنی ها می پردازیم . این ایده منشاء تعریف انتگرال معین است که دراین قسمت خواهد آمد .

۱.۹ مفهوم مساحت

مساحت مستطیل و مثلث

مساحت شکل هندسی S را با $A(S)$ نشان می دهیم و

می دانیم اگر S مستطیلی به ابعاد a و b باشد آنگاه داریم :

$$A(S) = a \cdot b$$

اگر S مثلث قائم الزوایه با اضلاع قائم a و b باشد مساحت آن

برابر است با :

$$A(S) = \frac{a.b}{2}$$

زیرا مثلث قائم الزاویه نصف مستطیل است .

۹ . ۱ مفهوم مساحت

مساحت اشکال دیگر

اگر شکلی را بتوان به مستطیلها و مثلثها تقسیم کرد مساحت آن شکل هندسی را می توان از مجموع مساحات اشکال به دست آمده محاسبه کرد . . اما بسیاری از اشکال را نمی توان به مستطیلها و مثلثها تقسیم کرد ، به عنوان مثال یک دایره را نمی توان به مجموعه ای از مستطیلها ، هر قدر هم که ابعاد آنها کوچک انتخاب شوند ، تقسیم کرد . در شکل (۹ . ۲) مشاهده می شود که یا قسمتی از مستطیلها در خارج دایره قرار می گیرد یا نقاطی از دایره خارج از مستطیلها .

۱.۹ مفهوم مساحت

مساحت دایره

۱.۹ مفهوم مساحت

مثال

ناحیه محصور بین سهمی $y = x^2$ و خطوط $x = 0$ و $x = 1$ و $y = 0$ را در نظر می گیریم . برای محاسبه مساحت این ناحیه به صورت زیر عمل می کنیم :

۱.۹ مفهوم مساحت

مثال

(الف) فاصلهٔ $[0,1]$ را به n فاصلهٔ برابر تقسیم می کنیم .
هریک از این فاصله ها را یک زیر فاصله می نامیم .

(ب) در هر زیر فاصله یک مستطیل می سازیم در زیر فاصلهٔ $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ قاعده مستطیل $\frac{1}{n}$ و ارتفاع آن $f(\frac{k}{n})$ است .

(پ) مساحت این مستطیلها را حساب کرده و باهم جمع می کنیم .

(ت) حد این مجموع را وقتی که طول هریک از زیر فاصله ها به صفر میل کند پیدا می کنیم . این حد مساحت ناحیه $y = x^2$ زیر سهمی $[0,1]$ در فاصلهٔ است .

۱.۹ مفهوم مساحت

مثال

(الف) فاصلهٔ $[0,1]$ را به n فاصلهٔ برابر تقسیم می کنیم .
هریک از این فاصله ها را یک زیر فاصله می نامیم .

(ب) در هر زیر فاصله یک مستطیل می سازیم در زیر فاصلهٔ $[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]$ قاعده مستطیل $\frac{1}{n}$ و ارتفاع آن $f(\frac{k}{n})$ است .

(پ) مساحت این مستطیلها را حساب کرده و باهم جمع می کنیم .

(ت) حد این مجموع را وقتی که طول هریک از زیر فاصله ها به صفر میل کند پیدا می کنیم . این حد مساحت ناحیه $y=x^2$ زیر سهمی $[0,1]$ در فاصلهٔ است .

۱.۹ مفهوم مساحت

مثال

فرض کنیم مساحت مستطیل . . $i, i = 1, 2, 3, \ldots$ ام برابر S_i باشد ، در این صورت :

$$A(S_1) = \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2$$

$$A(S_2) = \frac{1}{n} f\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2$$

$$A(S_3) = \frac{1}{n} f\left(\frac{3}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2$$

$$\vdots$$

$$A(S_n) = \frac{1}{n} f\left(\frac{n}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2$$

۱.۹ مفهوم مساحت

مثال

اگر مجموع مساحتهای مستطیلهارا A_n بنامیم داریم :

$$A_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\left[1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + \cdots + n^2\right]$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

در نتیجه

$$\lim_{n \to +\infty} A_n = \frac{1}{3}$$

۱.۹ مفهوم مساحت

تعریف

فاصلهٔ $[a,b]$ را به وسیلهٔ نقاط

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

به n زیر فاصلهٔ دلخواه $[x_0, x_1]$، $[x_1, x_2]$ و $\cdots$ و $[x_{n-1}, x_n]$

تقسیم می کنیم (شکل ۹ - ۴)

مجموعهٔ $p = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ را یک افراز $[a,b]$ می نامیم.

روشن است که طول زیر فاصلهٔ $[x_{k-1}, x_k]$ برابر است با

$$x_k - x_{k-1}$$

۱.۹ مفهوم مساحت

تعریف

فرض کنیم $p=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ یک افراز $[a,b]$ باشد .

طول بزرگترین زیرفاصله را نرم p می نامیم و با نماد $\|p\|$ نشان می دهیم ، پس

$$\|p\|=\max\{x_1-x_0\,,\,x_2-x_1,\dots,x_n-x_{n-1}\}$$

روشن است که اگر طول زیر فاصله ها برابر باشد نرم p طول مشترک آنها خواهد بود .

۱.۹ مفهوم مساحت

مثال

۱.۹ مفهوم مساحت

مساحت مستطیل و مثلث

۱.۹ مفهوم مساحت

مساحت مستطیل و مثلث

فصل دهم

کاربردهای انتگرال معین

هدفهای رفتاری

دانشجو پس از مطالعه این فصل باید بتواند :

۱ . مساحت ناحیهٔ محدود بین دو منحنی را به کمک انتگرال محا سبه کند .

۲ . مسافتی را که یک متحرک طی می کند ، حساب کند .

۳ . حجم یک جسم دوار را به وسیلهٔ انتگرال بیابد .

ادامهٔ هدفهای رفتاری

۴ . طول یک منحنی مسطح را محاسبه کند .

۵ . مساحت یک سطح دوار را حساب کند .

۶ . مقدار کار انجام شده را به وسیلهٔ انتگرال محاسبه کند .

۷ . گشتاور نیروها و مرکز جرم را حساب کند .

ادامهٔ هدفهای رفتاری

۸ . مساحت ناحیه محدود بین دو منحنی قطبی و طول منحنیهای قطبی داده شده را به وسیله انتگرال محاسبه کند .

۹ . مساحت سطح حاصل از دوران یک ناحیه محدود به منحنیهای قطبی را حول محورهای مختصات حساب کند .

فصل دهم

بخش اول

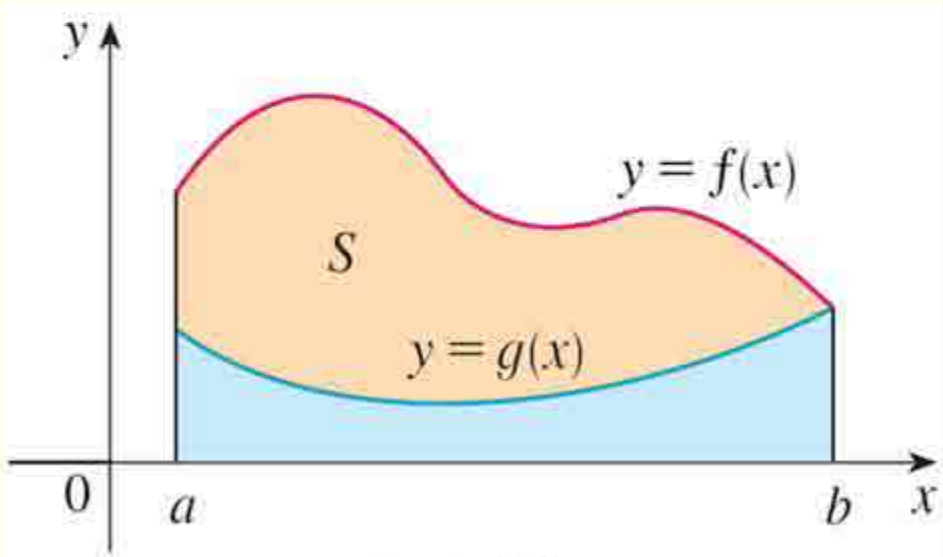
۱۰.۱ محاسبهٔ مساحت

دو

۱۰.۱ محاسبهٔ مساحت

مساحت ناحیهٔ بین دو منحنی

فرض کنید S ناحیه بین دو تابع پیوستهٔ f و g در فاصلهٔ $[a,b]$ باشد و در این فاصله $f(x) \geq g(x)$.



شکل ۱۰ – ۷

۱۰.۱ محاسبهٔ مساحت

مساحت ناحیهٔ بین دو منحنی

فرض کنیم $A(S)$ مساحت ناحیهٔ S باشد در این صورت :

$$A(S) = \int_a^b (\text{تابع بالایی})\, dx - \int_a^b (\text{تابع پایینی})\, dx$$

$$= \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

۱۰.۱ محاسبهٔ مساحت

مثال

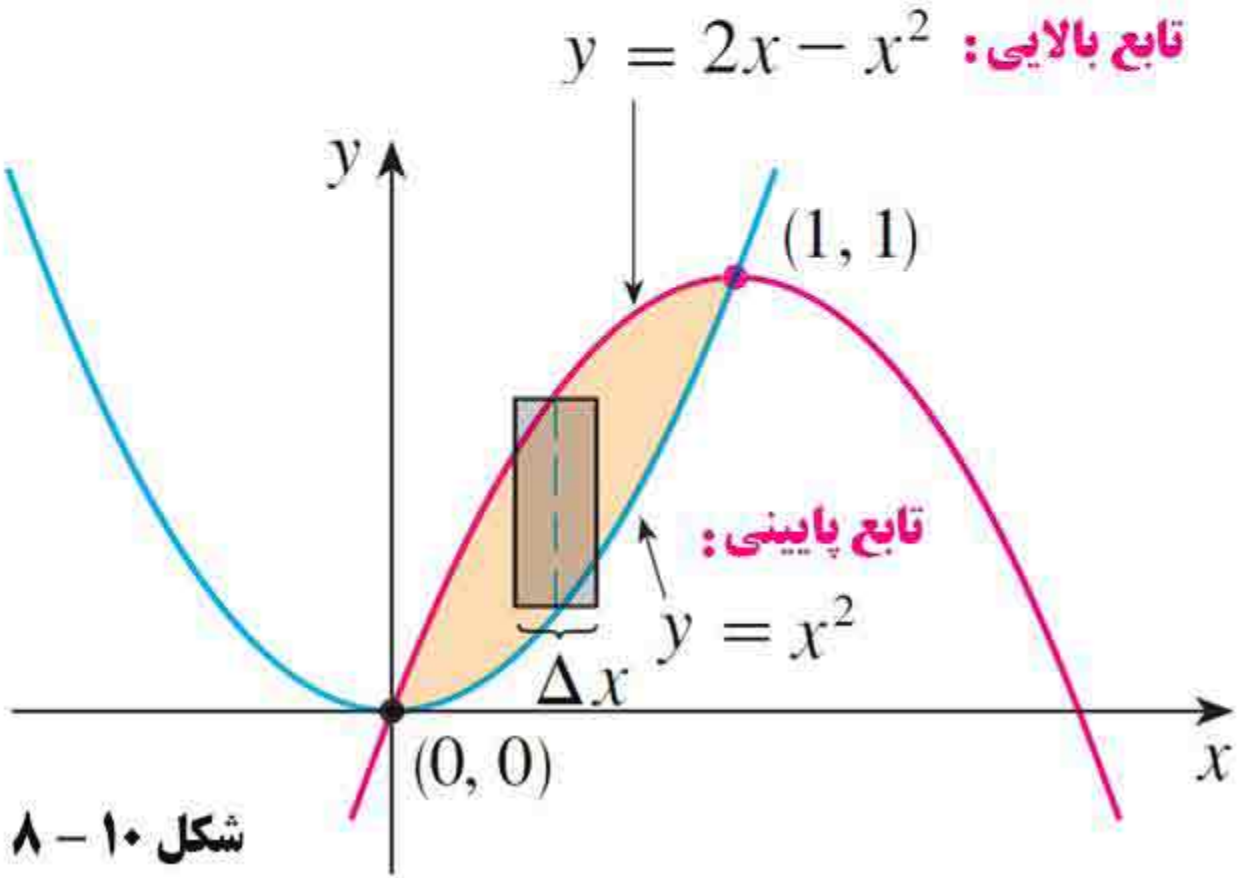
مساحت محدود به نمودار توابع $y = x^2$ و $y = 2x - x^2$ را محاسبه کنید .

پاسخ : ابتدا با حل دستگاه $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x - x^2 \end{cases}$ محل تلاقی دو منحنی را که عبارتند از $(0,0)$ و $(0,1)$ به دست می آوریم .

با توجه به شکل (۱۰ - ۸) $y = 2x - x^2$ تابع بالایی و $y = x^2$ تابع پایینی است .

۱۰.۱ محاسبهٔ مساحت

مساحت ناحیهٔ بین دو منحنی



شکل ۱۰ – ۸

۱۰.۱ محاسبهٔ مساحت

مساحت ناحیهٔ بین دو منحنی

ناحیهٔ مورد نظر بین $x=0$ و $x=1$ قرار دارد ، پس

$$A(S)=\int_0^1 [(2x-x^2)-(x^2)]dx$$

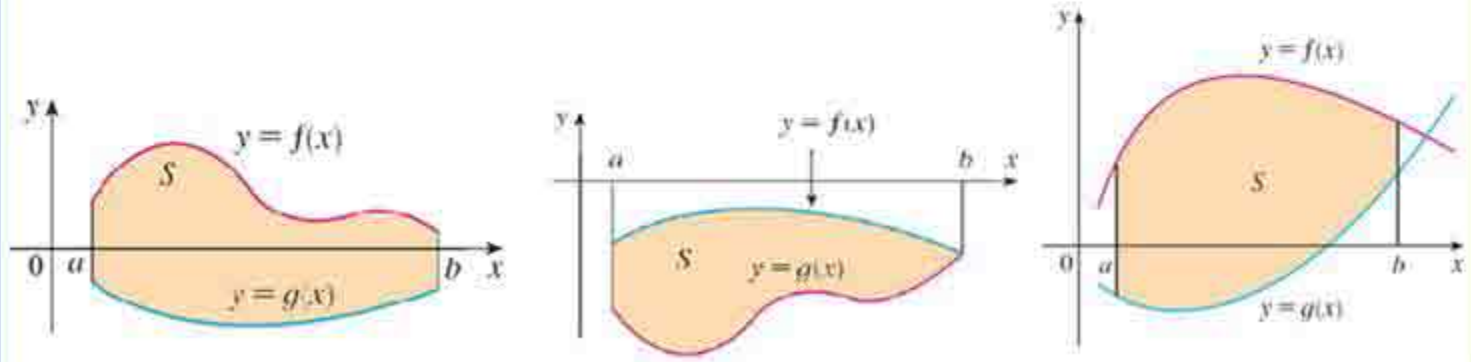
$$=\int_0^1 [(2x-2x^2)]dx=2\int_0^1 [(x-x^2)]dx$$

$$=2[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}]_0^1=2(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})=\frac{1}{3}$$

۱۰.۱ محاسبهٔ مساحت

مساحت ناحیهٔ بین دو منحنی

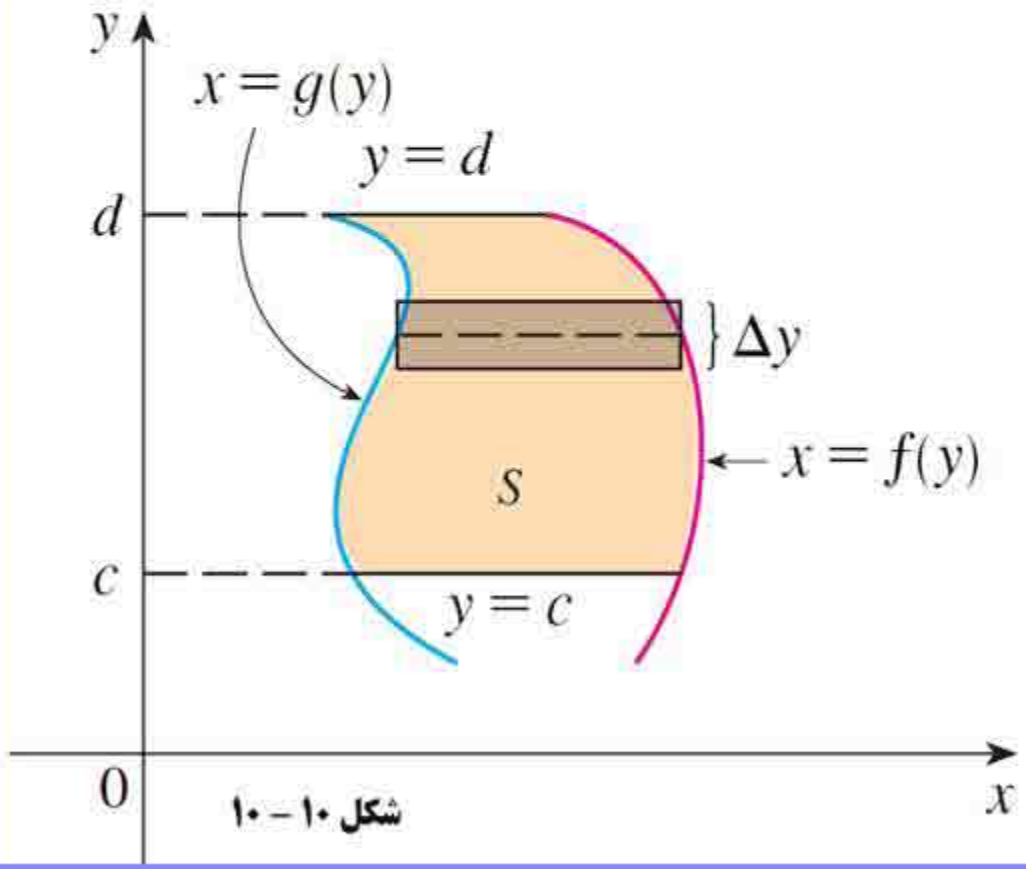
برای محاسبهٔ مساحت بین دو منحنی لازم نیست که توابع f و g نامنفی باشند فقط کافی است که $f(x) \geq g(x)$ باشد . مثل نمودار توابع زیر :



شکل ۱۰ – ۹

۱۰.۱ محاسبهٔ مساحت

مساحت بین دو منحنی $x = f(y)$ و $x = g(y)$



شکل ۱۰ – ۱۰

۱۰.۱ محاسبهٔ مساحت

مساحت بین دو منحنی $x = f(y)$ و $x = g(y)$

فرض کنیم S ناحیهٔ بین نمودار دو تابع $x = f(y)$ و $x = g(y)$ خطوط $y = c$ و $y = d$ مانند شکل ۱۰-۱۰ باشد. بنا بر آنچه گفته شد مساحت S برابر است با :

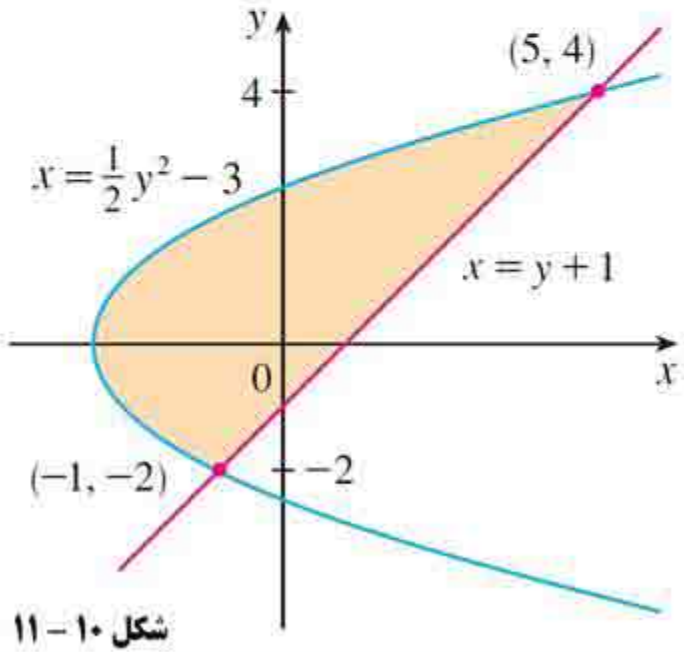
$$A(S) = \int_c^d (\text{تابع سمت راست}) - (\text{تابع سمت چپ})\, dy$$

$$= \int_c^d [f(y) - g(y)]\, dy$$

۱۰.۱ محاسبهٔ مساحت

مثال

مساحت محدود به خط $y = x - 1$ و سهمی $y^2 = 2x + 6$ را به دست آورید .



شکل ۱۰ – ۱۱

پاسخ : نمودار این دو منحنی همدیگر را در نقاط $(-1,-2)$ و $(5,4)$ قطع می کنند .

۱۰.۱ محاسبهٔ مساحت

مثال

$y = x - 1$ تابع سمت راست و $y^2 = 2x + 6$ تابع سمت چپ است بنا براین

$$A = \int_{-2}^{4} [(y+1) - (\tfrac{1}{2}y^2 - 3)]\, dy$$

$$= \int_{-2}^{4} (-\tfrac{1}{2}y^2 + y + 4)\, d\, y$$

$$= -\tfrac{1}{2}\left(\frac{y^3}{3}\right) + \frac{y^2}{2} + 4y \;\Big]_{-2}^{4}$$

$$= -\tfrac{1}{6}(64) + 8 + 16 - (\tfrac{4}{3} + 2 - 8) = 18$$

۱۰.۱ محاسبهٔ مساحت

تذکر

اگر در فرمول

$$A(S) = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

تابع $g(x) = 0$ باشد آنگاه همان فرمول قبلی که

در به دست آوردیم حاصل خواهد شد .

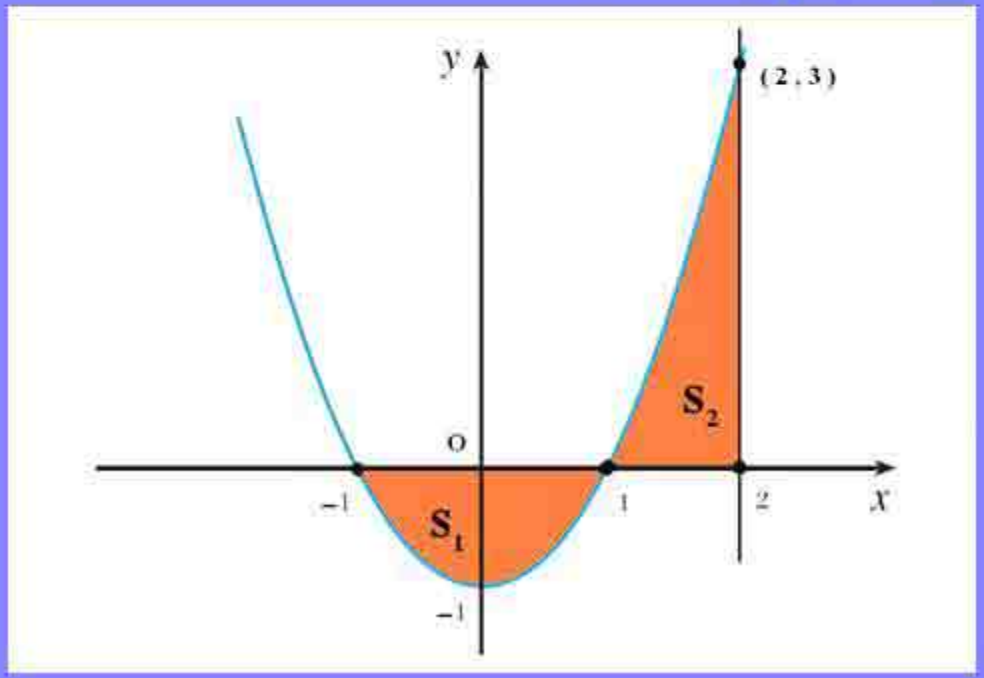
$$A(S) = \int_a^b f(x)\,dx$$

۱۰.۱ محاسبهٔ مساحت

مثال

مساحت ناحیهٔ محصور بین منحنی $y = x^2 - 1$ و

خطوط $x = -1, x = 2$ و $y = 0$ را به دست آورید .



۱۰.۱ محاسبهٔ مساحت

ادامهٔ مثال

داریم :

$$A(S) = A(S_1) + A(S_2)$$

ولی

$$A(S_1) = -\int_{-1}^{1} f(x)dx = -\int_{-1}^{1}(x^2-1)dx = -\tfrac{1}{3}x^3 + x\Big|_{-1}^{1} = \tfrac{4}{3}$$

$$A(S_1) = \int_{1}^{2} f(x)dx = \int_{1}^{2}(x^2-1)dx = \tfrac{1}{3}x^3 - x\Big|_{1}^{2} = \tfrac{4}{3}$$

در نتیجه

$$A(S) = \tfrac{4}{3} + \tfrac{4}{3} = \tfrac{8}{3}$$

۱۰.۱ محاسبهٔ مساحت

مساحت محدود به منحنی های پارامتری

فرض کنیم S ناحیهٔ محدود به منحنی پارامتری $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$

در فاصلهٔ $\alpha \le t \le \beta$ باشد . با استفاده از جاگذاری

می توان فرمول زیر را برای محاسبهٔ مساحت S به دست آورد :

فرمول محاسبهٔ مساحت محدود به منحنی پارامتری

$$A = \int_a^b y\,dx = \int_\alpha^\beta g(t)\,f'(t)\,dt$$

۱۰.۱ محاسبهٔ مساحت

مثال

مساحت محدود به یکی از کمانهای سیکلوئید با معادلات زیر را به دست آورید .

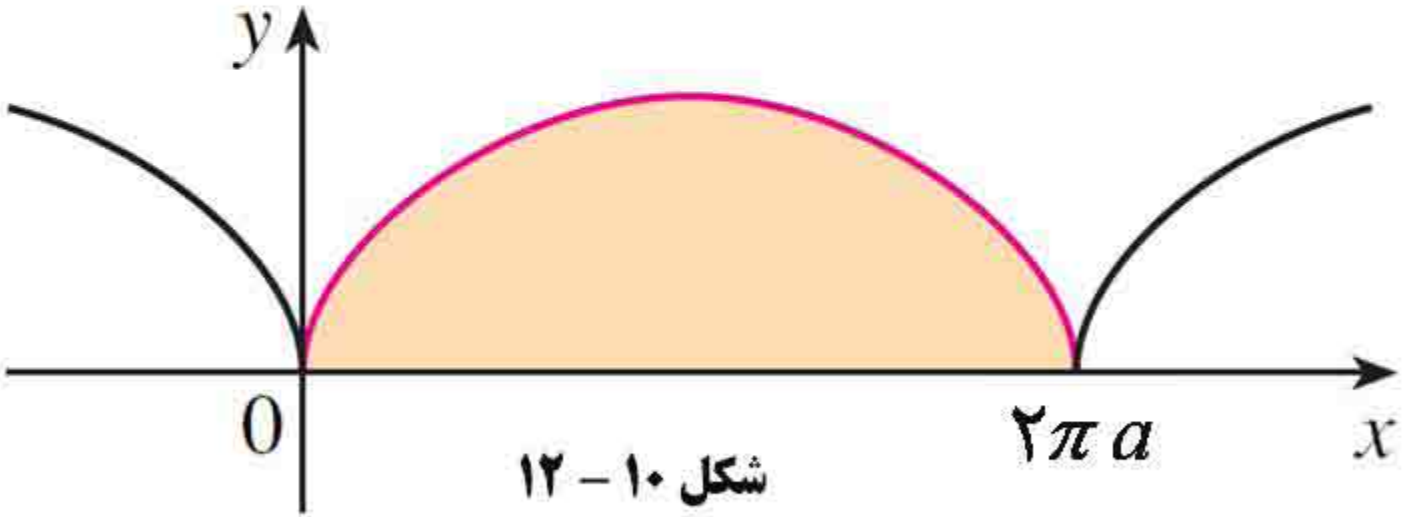
$$\begin{cases} x = a\,(t - \sin\ t) \\ y = a\,(1 - \cos\ t) \end{cases}$$

پاسخ : نمودار سکلوئید در اسلاید بعدی مشاهده می شود . داریم :

$$\begin{cases} y = a\,(1 - \cos\ t) \\ dx = a\,(1 - \cos\ t)\,dt \end{cases}$$

۱۰.۱ محاسبهٔ مساحت

نمودار سیکلوئید



شکل ۱۰ – ۱۲

۱۰.۱ محاسبهٔ مساحت

ادامهٔ مثال

بنابراین

$$A = \int_0^{2\pi r} y\,dx = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\,a(1-\cos t)\,dt$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2\,dt$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} (1-2\cos t+\cos^2 t)^2\,dt$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} [(1-2\cos t+\tfrac{1}{2}(1+\cos 2t)]dt$$

$$= a^2 [\tfrac{3}{2}t-2\sin t+\tfrac{1}{4}\sin 2t]_0^{2\pi}$$

$$= a^2(\tfrac{3}{2}\cdot 2\pi) = 3\pi a^2$$

۱۰.۱ محاسبهٔ مساحت

مساحت محدود به منحنی های قطبی

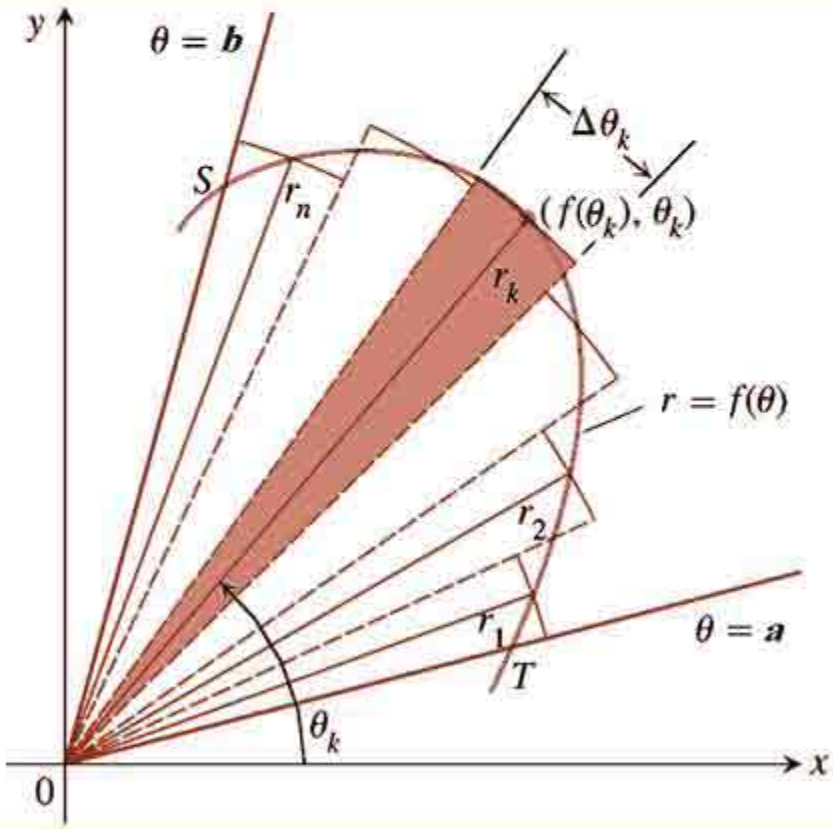
فرض کنیم S ناحیهٔ محدود به منحنی پیوستهٔ $r = f(\theta)$ و شعاعهای $\theta = a$ و $\theta = b$ باشد . به راحتی می توان فرمول زیر را برای محاسبهٔ مساحت S به دست آورد :

فرمول محاسبهٔ مساحت محدود به منحنی قطبی

$$A(S) = \frac{1}{2}\int_a^b [f(\theta)]^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_a^b r^2 d\theta$$

۱۰.۱ محاسبهٔ مساحت

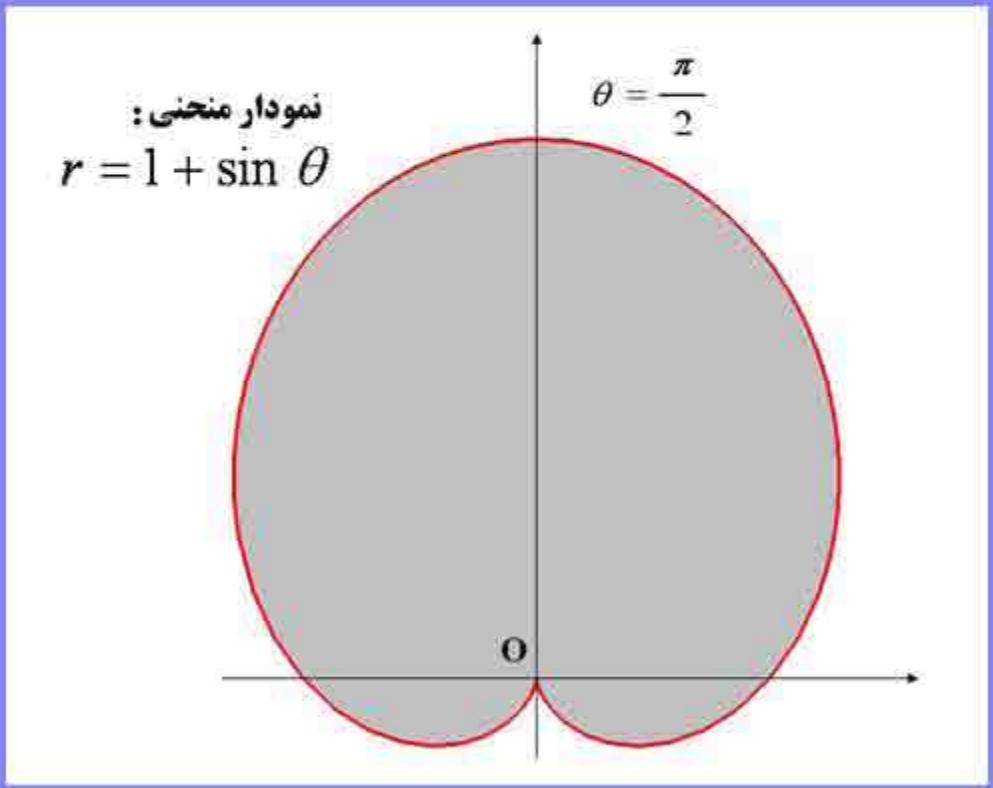
مساحت محدود به منحنی های قطبی



۱۰.۱ محاسبهٔ مساحت

مثال

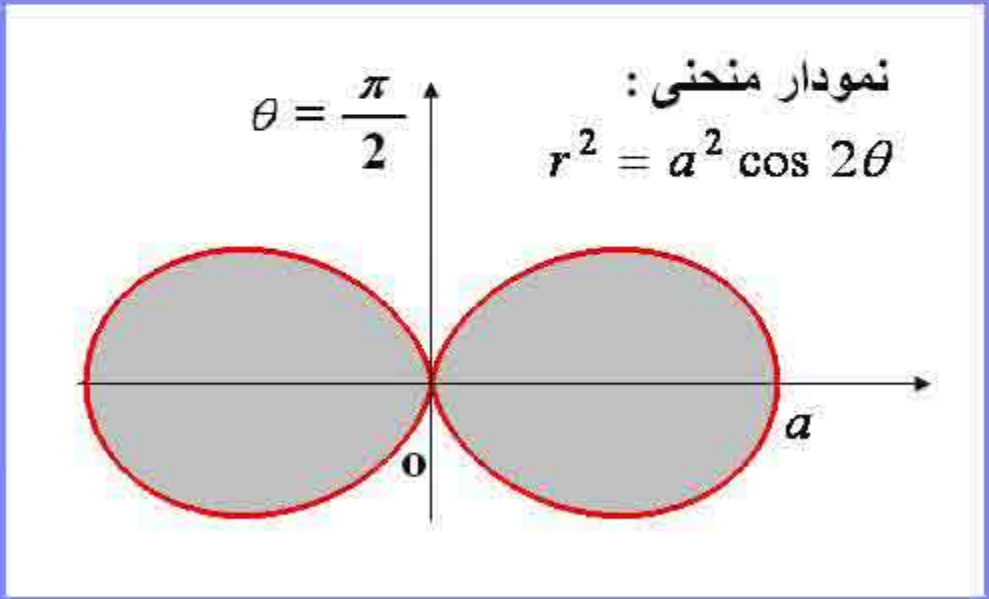
مساحت محدود به منحنی $r = 1 + \sin\theta$ به دست آورید :



۱۰.۱ محاسبهٔ مساحت

مثال

مساحت محدود به منحنی $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ به دست آورید .



۱۰.۱ محاسبهٔ مساحت

مساحت ناحیهٔ بین دو منحنی قطبی

فرض کنید S ناحیه بین دو تابع $r = f(\theta)$ و $r = g(\theta)$

در فاصلهٔ $a \le \theta \le b$ بوده و در این فاصله داشته باشیم :

$$f(\theta) \ge g(\theta)$$

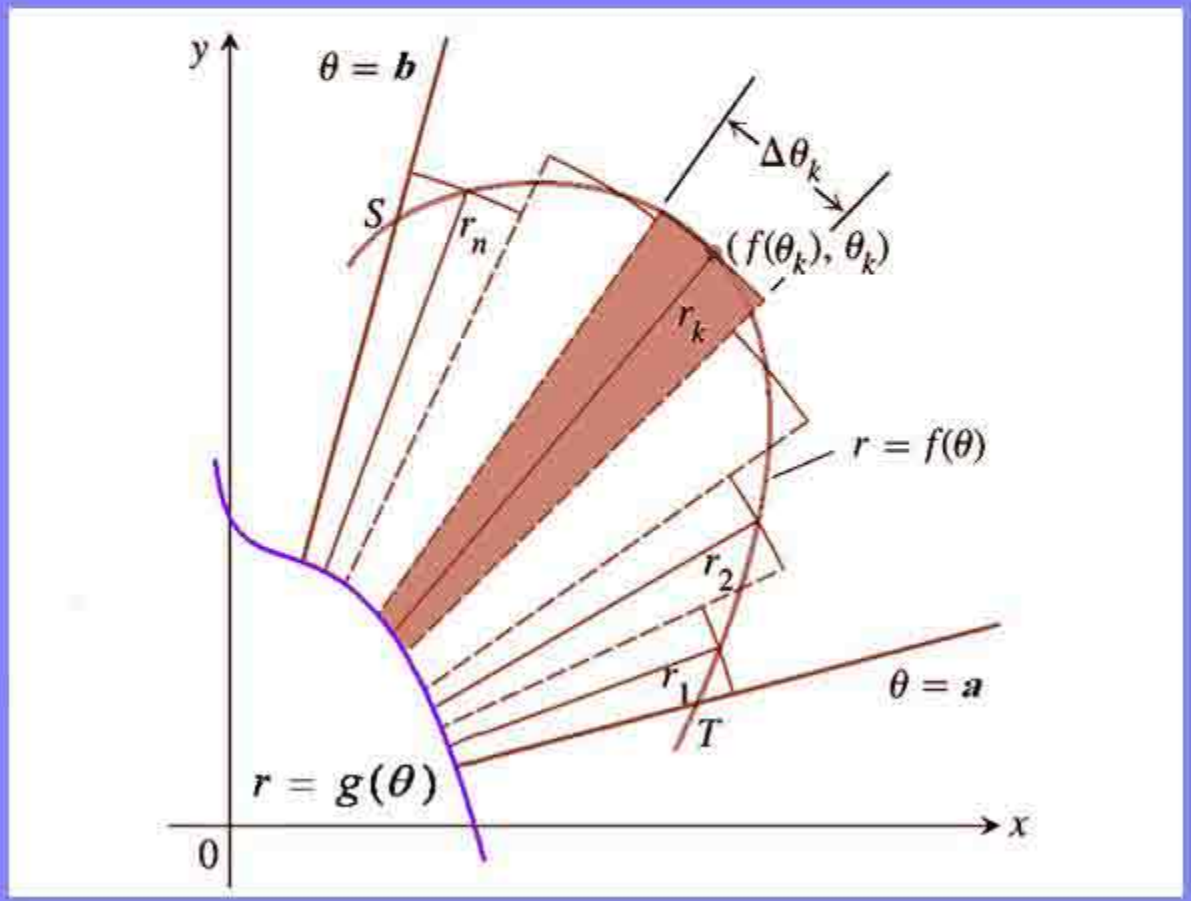
به راحتی می توان ثابت کرد مساحت ناحیهٔ S از فرمول زیر به

دست می آید :

$$A(S) = \frac{1}{2}\int_a^b \{[f(\theta)]^2 - [g(\theta)]^2\}\, d\theta$$

۱۰.۱ محاسبهٔ مساحت

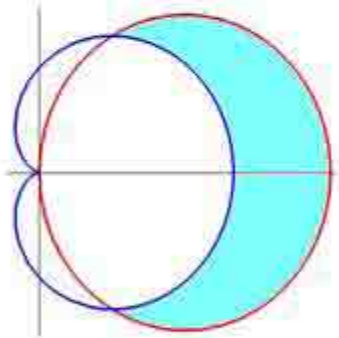
مساحت ناحیهٔ بین دو منحنی قطبی



۱۰.۱ محاسبهٔ مساحت

مثال

مساحت ناحیه ای که در درون دایرهٔ $r = 3\cos\theta$ و خارج منحنی $r = 1 + \cos\theta$ قرار دارد حساب کنید .



نمودار $r = 3\cos\theta$ (رنگ قرمز)

نمودار $r = 1 + \cos\theta$ (رنگ آبی)

۱۰.۱ محاسبهٔ مساحت

ادامهٔ مثال

ابتدا محل تلاقی دو منحنی را به دست می آوریم :

$$3\cos(\theta) = 1 + \cos(\theta) \Rightarrow \cos(\theta) = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{3}$$

در نتیجه :

$$\text{مساحت} = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{1}{2}\left(9\cos^2(\theta) - (1+\cos(\theta))^2\right)d\theta = \pi$$

فصل دهم

بخش دوم

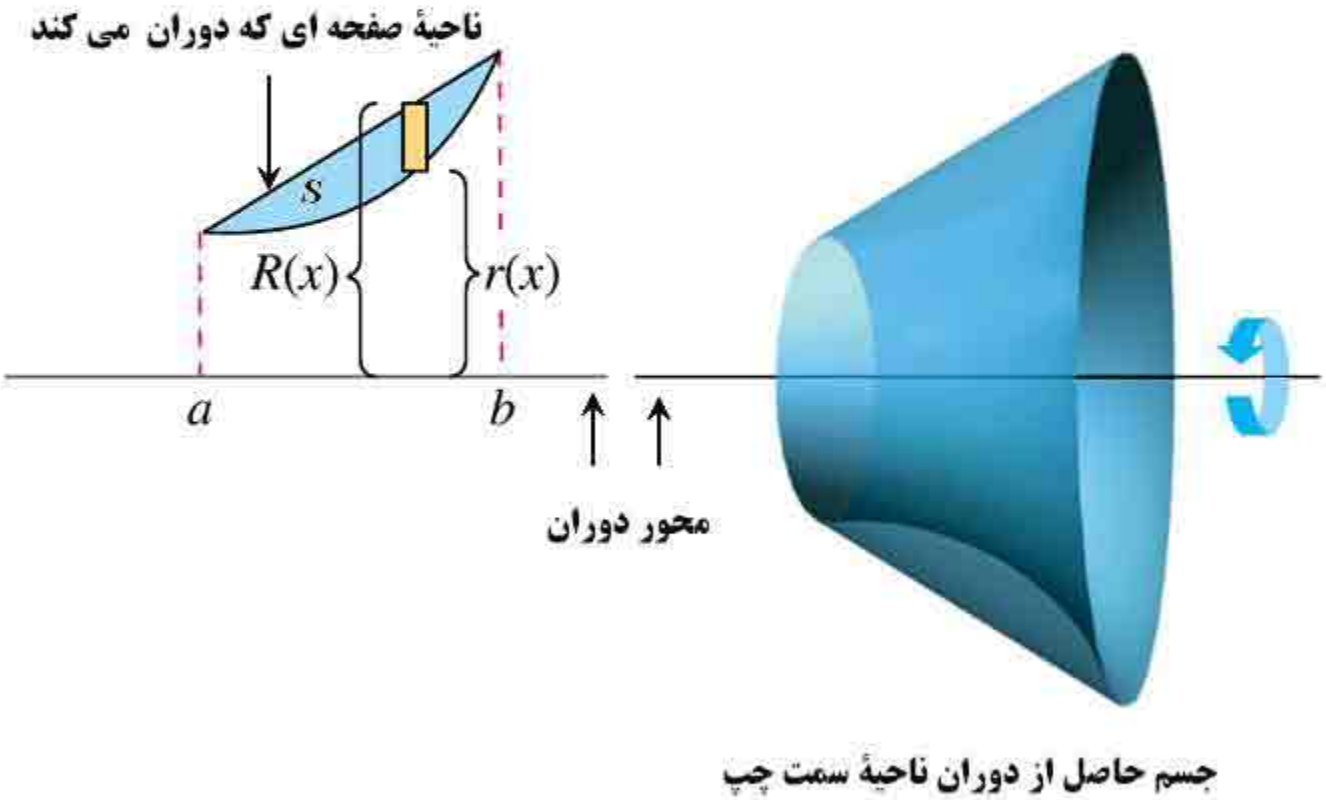
۱۰ . ۲ محاسبهٔ حجم اجسام دوار

روش واشر [دوران حول محور x]

فرض کنیم ناحیهٔ S محصور به نمودار منحنی های $y = f(x)$ و $y = g(x)$ و خطوط $x = a$ و $x = b$ باشد و توابع $f(x)$ و $g(x)$ هر دو در فاصلهٔ بستهٔ $[a, b]$ پیوسته بوده و بعلاوه برای هر x در این فاصله $f(x) \geq g(x)$ باشد . می خواهیم حجم حادث از دوران ناحیهٔ S را حول خط $y = k$ به دست آوریم .

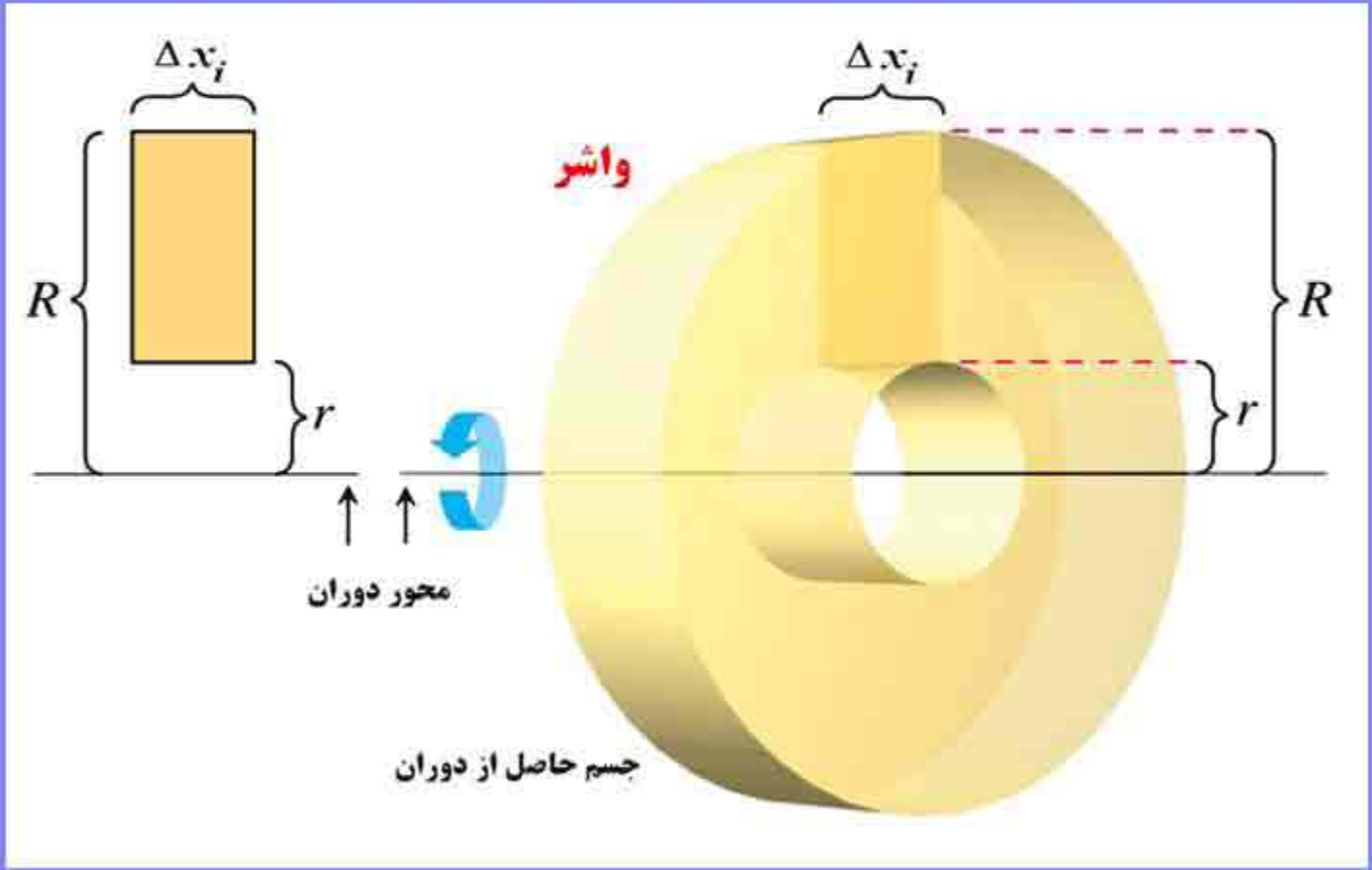
۲ .۱۰ محاسبهٔ حجم اجسام دوار

روش واشر [دوران حول محور x]



۱۰ . ۲ محاسبهٔ حجم اجسام دوار

روش واشر [دوران حول محور x]



۱۰ . ۲ محاسبهٔ حجم اجسام دوار

روش واشر [دوران حول محور x]

برای این منظور فرض می کنیم Δ افرازی از فاصلهٔ [a , b] به صورت

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b$$

و Δx_i طول i امین زیر فاصله باشد . نقطهٔ دلخواهی مانند c_i را در i امین زیر بازه انتخاب می کنیم و مطابق شکل مستطیلی می سازیم به قاعدهٔ Δxi و ارتفاع $f(c_i) - g(c_i)$.

۱۰ . ۲ محاسبهٔ حجم اجسام دوار

روش واشر [دوران حول محور x]

اگر این ناحیهٔ مستطیلی شکل حول خط $y = k$ دوران کند یک حلقهٔ مستدیری حاصل می شود (شبیه واشر) که حجم آن برابر است با

$$\Delta v_i = \pi (R_i^2 - r_i^2) \Delta x_i$$

که در آن R_i فاصلهٔ نقطهٔ $f(c_i)$ از خط $y=k$ و r_i فاصلهٔ نقطهٔ $g(c_i)$ از خط $y = k$ می باشد یعنی R_i و r_i توابعی از c_i هستند به عبارت دیگر

$$\Delta v_i = \pi [(R_i (c_i))^2 - (r_i(c_i))^2] \Delta x_i$$

۱۰ . ۲ محاسبهٔ حجم اجسام دوار

روش واشر [دوران حول محور x]

حال اگر مجموع اندازهٔ حجمهای n حلقهٔ مستدیر که از دوران n مستطیل حول خط $y = k$ به دست می آیند را حساب کنیم یک حجم تقریبی را به دست آورده ایم

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta v_i = \pi \sum_{i=1}^{n} [(R_i(c_i))^2 - (r_i(c_i))^2] \Delta x_i$$

با توجه به تعریف انتگرال معین وقتی $\|\Delta\| \to 0$ آنگاه خواهیم داشت :

۱۰ . ۲ محاسبهٔ حجم اجسام دوار

روش واشر [دوران حول محور x]

فرمول کلی محاسبهٔ حجم به روش واشر

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta v_i = \pi \int_a^b [(R(x))^2 - (r(x))^2] dx$$

شعاع خارجی واشر شعاع داخلی واشر

۱۰ . ۲ محاسبهٔ حجم اجسام دوار

روش واشر [دوران حول محور y]

فرض کنیم ناحیهٔ S از سمت چپ به منحنی $x = g(y)$ و از سمت راست به منحنی $x = f(y)$ و از پایین به خط $y = a$ و از بالا به خط $y = b$ محصور باشد و برای هر y در فاصلهٔ بستهٔ $[a , b]$ داشته باشیم $f(y) \geq g(y)$ و توابع $f(y)$ و $g(y)$ در فاصلهٔ بستهٔ $[a , b]$ پیوسته باشند . می خواهیم حجم حادث از دوران ناحیهٔ S را حول خط $x = k$ به دست آوریم .

۱۰ . ۲ محاسبهٔ حجم اجسام دوار

روش واشر [دوران حول محور y]

با استدلالی شبیه به آنچه که در حالت قبل دیدیم ثابت می شود حجم چنین جسمی برابر است با :

فرمول کلی محاسبهٔ حجم به روش واشر

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta v_i = \pi \int_a^b [(\underset{\uparrow}{R}(y))^2 - (\underset{\uparrow}{r}(y))^2] dy$$

شعاع خارجی واشر **شعاع داخلی واشر**

۱۰ . ۲ محاسبهٔ حجم اجسام دوار

مثال

حجم جسم حاصل از دوران ناحیهٔ محدود به نمودار منحنی $f(x)=\sqrt{x}$ و محور x ها در فاصلهٔ $[0,1]$ را حول محور x ها حساب کنید.

پاسخ :

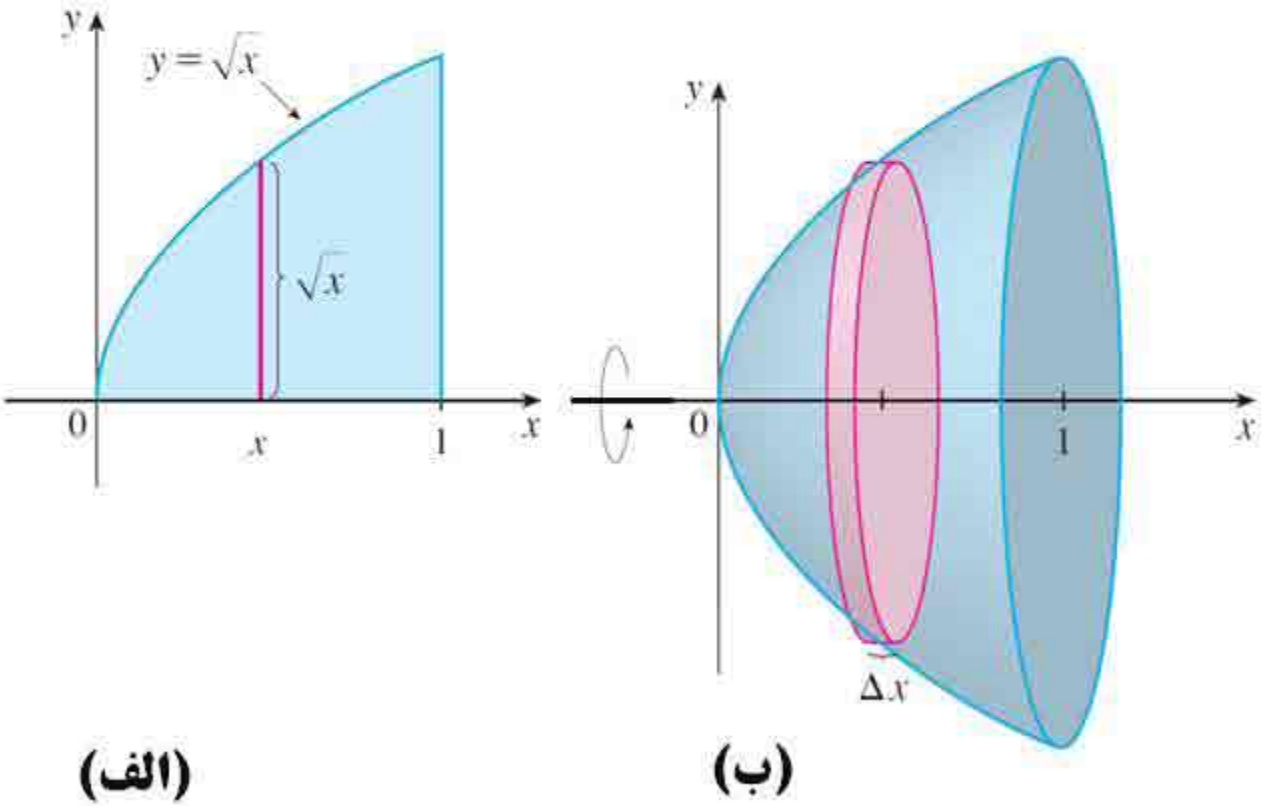
$$R(x)=\sqrt{x} \qquad r(x)=0$$

$$V=\int_a^b \pi[f(x)]^2\,dx$$

$$=\int_0^1 \pi[\sqrt{x}]^2\,dx=\pi\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}$$

۱۰ . ۲ محاسبهٔ حجم اجسام دوار

مثال



۱۰ . ۲ محاسبهٔ حجم اجسام دوار

مثال

ناحیهٔ محدود بین منحنی های $y = x$ و $y = x^2$ را حول محور x ها دوران می دهیم . حجم جسم حاصل را حساب کنید .

پاسخ :

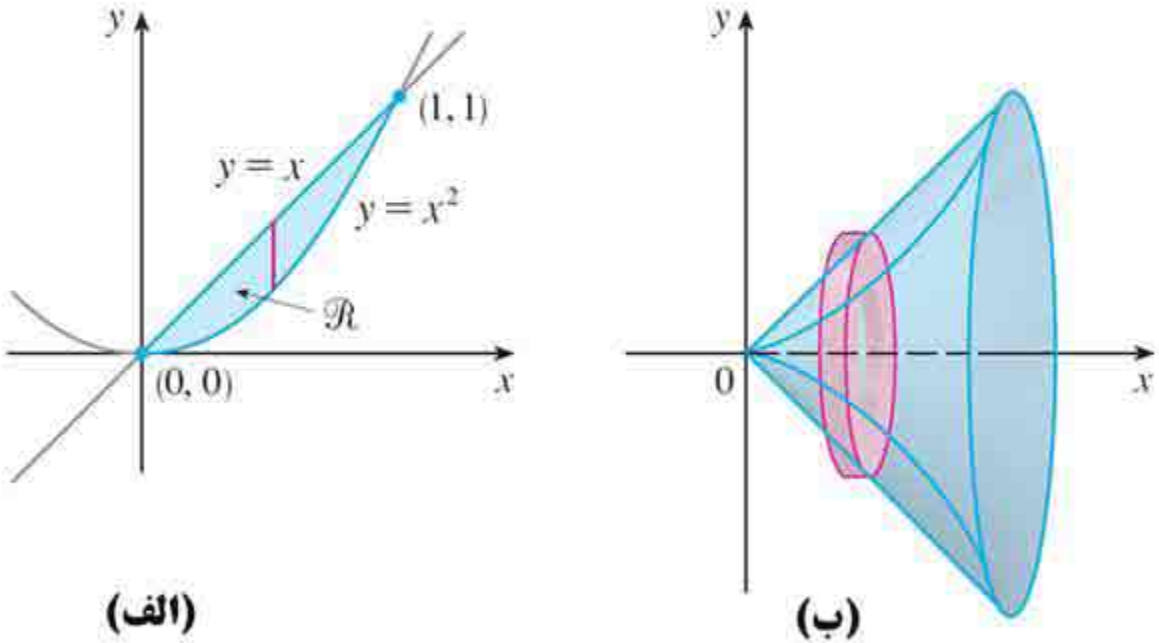
$$R(x) = x \qquad r(x) = x^2$$

$$V = \int_a^b \{\pi[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}\,dx$$

$$= \int_0^1 \pi[(x)^2 - (x^2)^2]\,dx = \pi[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}]\Big|_0^1 = \frac{2\pi}{15}$$

۱۰ . ۲ محاسبهٔ حجم اجسام دوار

مثال



۱۰ . ۲ محاسبهٔ حجم اجسام دوار

مثال

ناحیهٔ محدود بین منحنی های $y = x$ و $y = x^2$ را حول خط $y = 2$ دوران می دهیم . حجم جسم حاصل را حساب کنید .

$$V = \int_a^b \{\pi[\overbrace{f(x) - k}^{R(x)}]^2 - [\overbrace{g(x) - k}^{r(x)}]^2\}\, dx$$

$$= \int_0^1 \pi[(x^2 - 2)^2 - (x - 2)^2]\, dx$$

$$= \pi \int_0^1 [\, x^4 - 5x^2 + 4x]\, dx$$

$$= \pi[\tfrac{x^5}{5} - 5\tfrac{x^3}{3} + 4\tfrac{x^2}{2}]\Big|_0^1 = \tfrac{8\pi}{15}$$

۱۰ . ۲ محاسبهٔ حجم اجسام دوار

مثال

ناحیهٔ محدود بین منحنی های $y^2 = x^3$ و خطوط $x = 0$ و $x = 4$ را حول محور y ها دوران می دهیم . حجم جسم حاصل را حساب کنید .

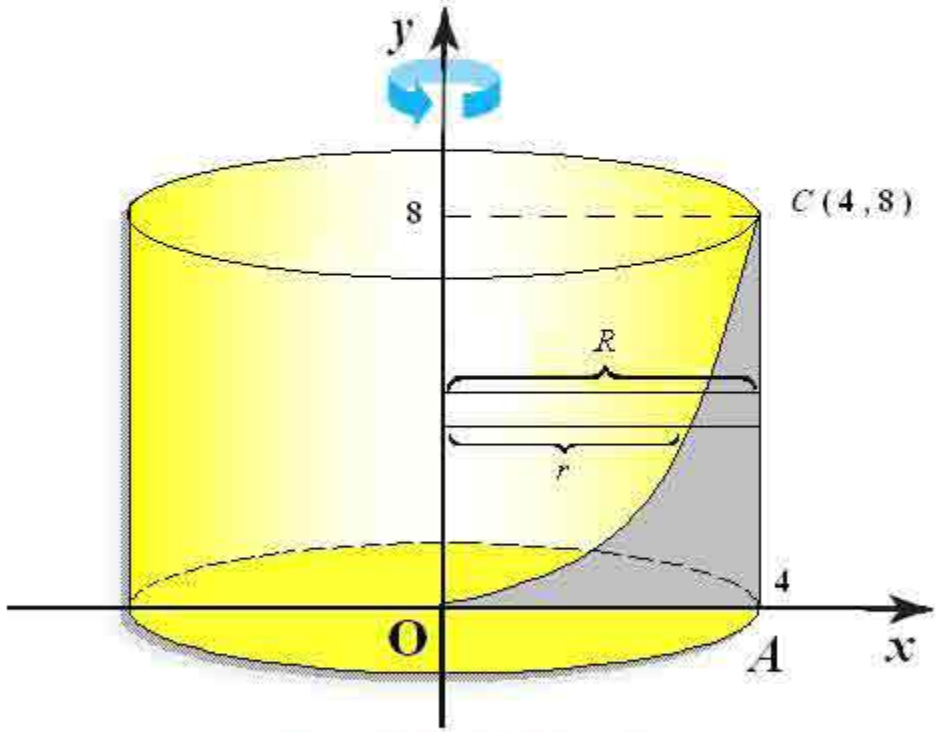
$$V = \pi \int_0^8 [\overbrace{4}^{R(y)}]^2 - [\overbrace{y^{2/3}}^{r(y)}]^2 \} dy$$

$$= \pi \int_0^8 \pi [16 - y^{4/3}] dy$$

$$= \pi \frac{512}{7}$$

۲ .۱۰ محاسبهٔ حجم اجسام دوار

مثال



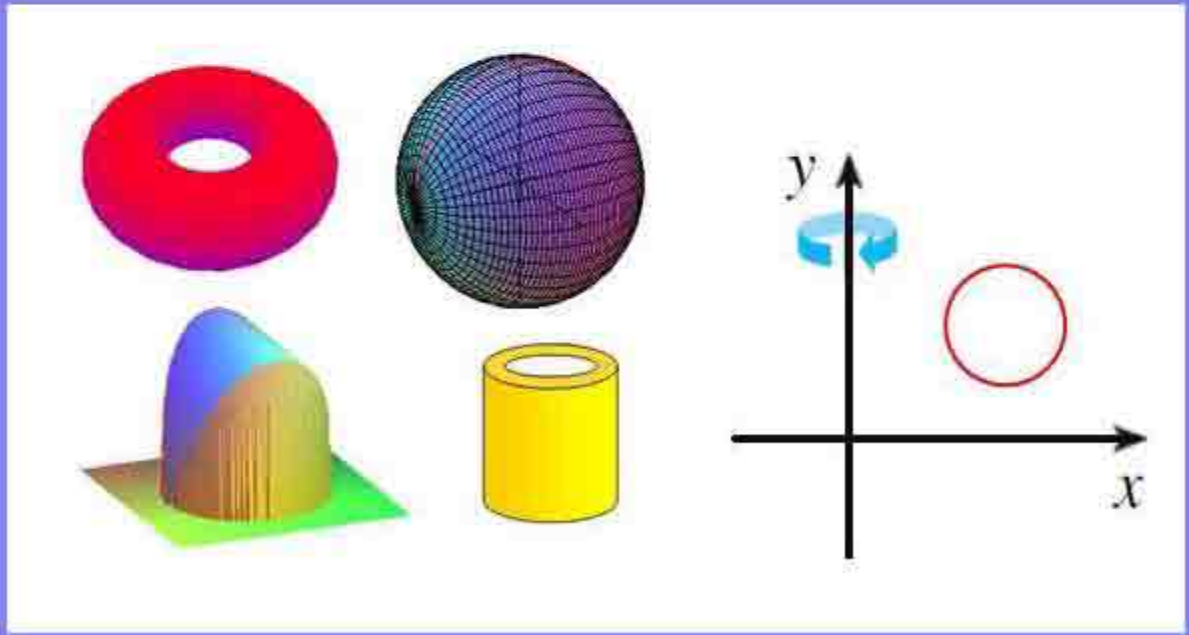
حجم حاصل از دوران منحنی

$y^2 = x^3$ حول محور y

۱۰ . ۲ محاسبهٔ حجم اجسام دوار

مثال

از دوران یک دایره واقع در ربع اول حول محور y ها کدام یک از اجسام زیر حاصل می شود .



۱۰ . ۲ محاسبهٔ حجم اجسام دوار

روش لایه های استوانه ای[دوران حول محور y]

فرض کنیم ناحیهٔ S محصور به نمودار منحنی های $y = f(x)$ و $y = g(x)$ و خطوط $x = a$ و $x = b$ باشد و توابع $f(x)$ و $g(x)$ هر دو در فاصلهٔ بستهٔ $[a, b]$ پیوسته بوده و بعلاوه برای هر x در این فاصله $f(x) \geq g(x)$ باشد . می خواهیم حجم حادث از دوران ناحیهٔ S را حول خط $x = 0$ به دست آوریم .

۱۰ . ۲ محاسبهٔ حجم اجسام دوار

روش لایه های استوانه ای[دوران حول محور y]

برای این منظور فرض می کنیم Δ افرازی از فاصلهٔ[a , b] به صورت

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b$$

و Δx_i طول i امین زیر فاصله باشد . فرض کنیم c_i نقطهٔ وسط i امین زیر بازه باشد داریم $c_i = 1/2\ (x_i + x_{i-1})$ مطابق شکل مستطیلی می سازیم به قاعدهٔ Δx_i و ارتفاع

$$h(c_i) = f(c_i) - g(c_i)\ .$$

۱۰ . ۲ محاسبهٔ حجم اجسام دوار

روش لایه های استوانه ای[دوران حول محور y]

اگر این ناحیهٔ مستطیلی شکل حول خط $x = 0$ دوران کند یک پوستهٔ استوانه ای حاصل می شود که حجم آن برابر است با

$$\Delta v_i = \pi (x_i^2 - x_{i-1}^2) \, h(c_i)$$

$$= \pi (x_i - x_{i-1}) (x_i + x_{i-1}) \; h(x_i)$$

چون $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ و چون $x_i + x_{i-1} = 2 \, c_i$ پس

$$\Delta v_i = 2 \pi c_i \, h(x_i) \, \Delta x_i$$

۱۰ . ۲ محاسبهٔ حجم اجسام دوار

روش لایه های استوانه ای[دوران حول محور y]

حال اگر مجموع اندازهٔ حجمهای n لایهٔ استوانه ای که از دوران n مستطیل حول خط $x=0$ به دست می آیند را حساب کنیم یک حجم تقریبی را به دست آورده ایم

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta v_i = \sum_{i=1}^{n} 2\pi c_i h(c_i) \Delta x_i$$

که یک مجموع ریمان است و بنا به تعریف انتگرال معین وقتی $\|\Delta\| \to 0$ آنگاه خواهیم داشت :

۱۰ . ۲ محاسبهٔ حجم اجسام دوار

روش لایه های استوانه ای[دوران حول محور y]

فرمول محاسبهٔ حجم به روش لایه های استوانه ای (محور دوران = محور y)

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi\, c_i h(c_i) \Delta x_i = 2\pi \int_a^b \underset{\text{شعاع}}{\underset{\uparrow}{x}}\, \underset{\text{ارتفاع}}{\underset{\uparrow}{h(x)}}\, dx$$

۱۰ . ۲ محاسبهٔ حجم اجسام دوار

فرمول روش لایه های استوانه ای

اگر ناحیهٔ S به جای محور عرضها حول خط $x = k$ دوران کند

آنگاه فرمول کلی به صورت زیر حاصل خواهد شد :

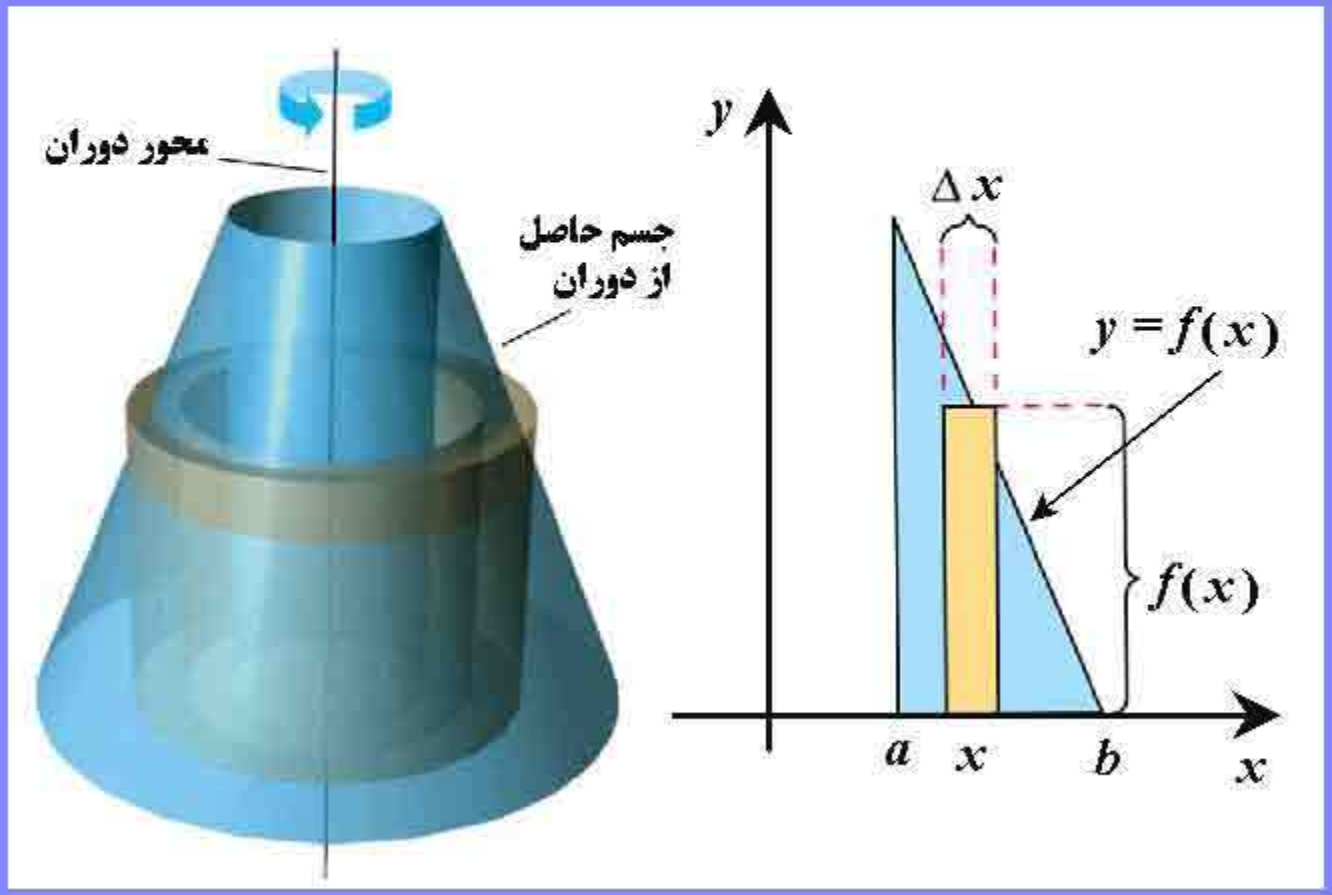
فرمول محاسبهٔ حجم به روش لایه های استوانه ای (محور دوران : $x = k$)

$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi c_i h(c_i) \Delta x_i = 2\pi \int_a^b \underset{\text{شعاع}}{\underset{\uparrow}{p}}\, \underset{\text{ارتفاع}}{\underset{\uparrow}{h(x)}} dx$$

که در آن $p = x - k$ یا $p = k - x$.

۱۰ . ۲ محاسبهٔ حجم اجسام دوار

روش لایه های استوانه ای



۱۰ . ۲ محاسبهٔ حجم اجسام دوار

روش لایه های استوانه ای [دوران حول محور x]

فرض کنیم ناحیهٔ S از سمت چپ به منحنی $x = g(y)$ و از سمت راست به منحنی $x = f(y)$ و از پایین به خط $y = c$ و از بالا به خط $y = d$ محصور باشد و برای هر y در فاصلهٔ بستهٔ $[c , d]$ داشته باشیم $f(y) \geq g(y)$ و توابع $f(y)$ و $g(y)$ در فاصلهٔ بستهٔ $[c , d]$ پیوسته باشند . می خواهیم حجم حادث از دوران ناحیهٔ S را حول خط $y = k$ به دست آوریم .

۱۰ . ۲ محاسبهٔ حجم اجسام دوار

روش لایه های استوانه ای[دوران حول محور x]

با استدلالی شبیه به آنچه که در حالت قبل دیدیم ثابت می شود حجم چنین جسمی برابر است با :

فرمول کلی محاسبهٔ حجم به روش لایه های استوانه ای

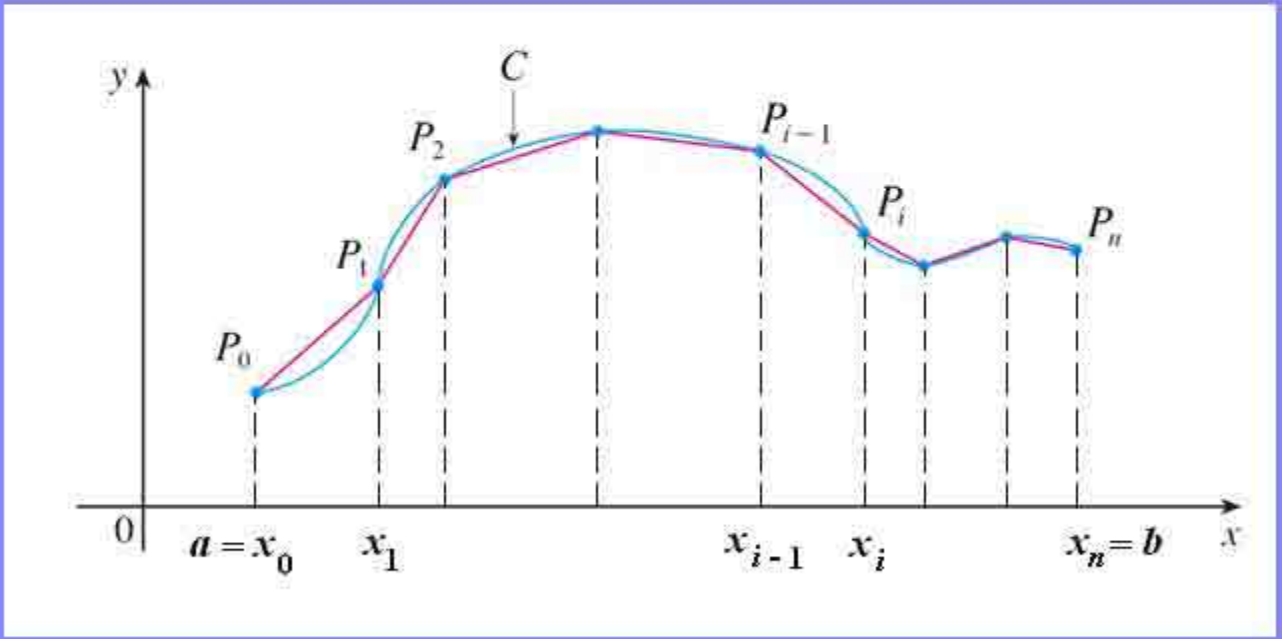
$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi c_i h(c_i) \Delta y_i = 2\pi \int_c^d \underset{\text{شعاع}}{\underset{\uparrow}{p}} \underset{\text{ارتفاع}}{\underset{\uparrow}{h}}(y)\, dy$$

۱۰ . ۲ محاسبهٔ حجم اجسام دوار

مثال

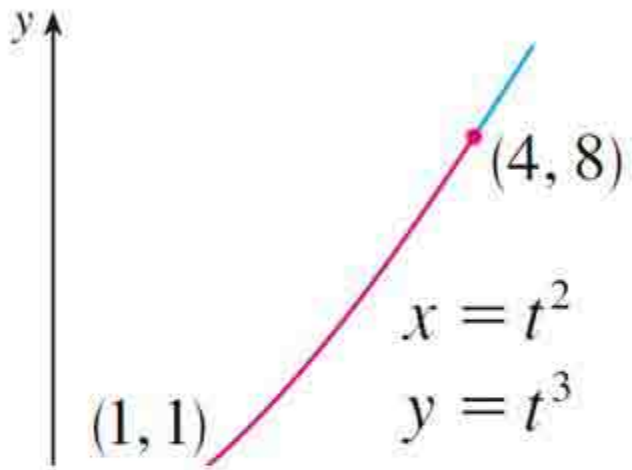
۱۰. ۳ طول منحنی مسطح

مثال



۳.۱۰ طول منحنی مسطح

مثال



$$L = \int_1^2 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_1^2 \sqrt{(2t)^2 + (3t^2)^2}\, dt$$

$$= \int_1^2 \sqrt{4t^2 + 9t^4}\, dt = \int_1^2 t\sqrt{4 + 9t^2}\, dt$$

١٠.٣ طول منحنى مسطح

ادامة مثال

Substituting $u = 4 + 9t^2$ leads to

$$L = \frac{1}{18}\int_{13}^{40} \sqrt{u}\, du = \frac{1}{18} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2}\Big]_{13}^{40}$$

$$= \frac{1}{27}\left[40^{3/2} - 13^{3/2}\right] = \frac{1}{27}\left(80\sqrt{10} - 13\sqrt{13}\right)$$

۳.۱۰ طول منحنی مسطح

فرمول کلی دکارتی

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

۳.۱۰ طول منحنی مسطح

فرمول کلی قطبی

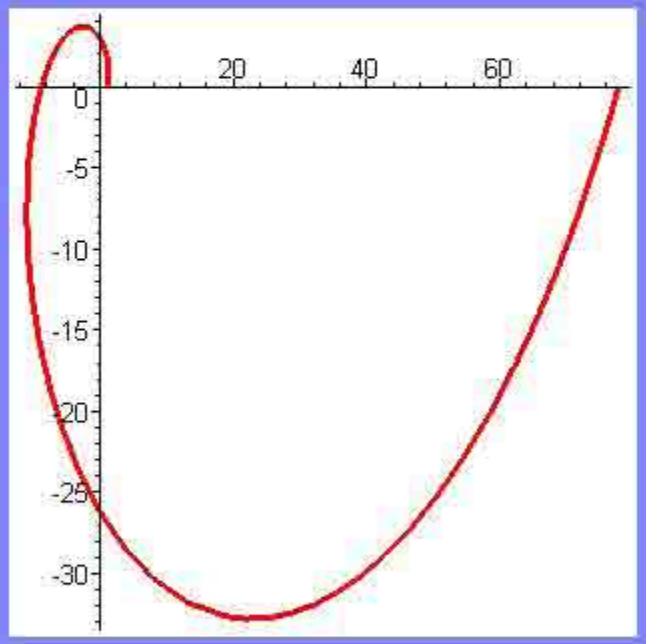
$$\frac{dx}{d\theta} = r(1 - \cos\theta) \qquad \text{and} \qquad \frac{dy}{d\theta} = r\sin\theta$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(1 - \cos\theta)^2 + r^2\sin^2\theta}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta)}\, d\theta = r\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos\theta)}\, d\theta$$

۳.۱۰ طول منحنی مسطح

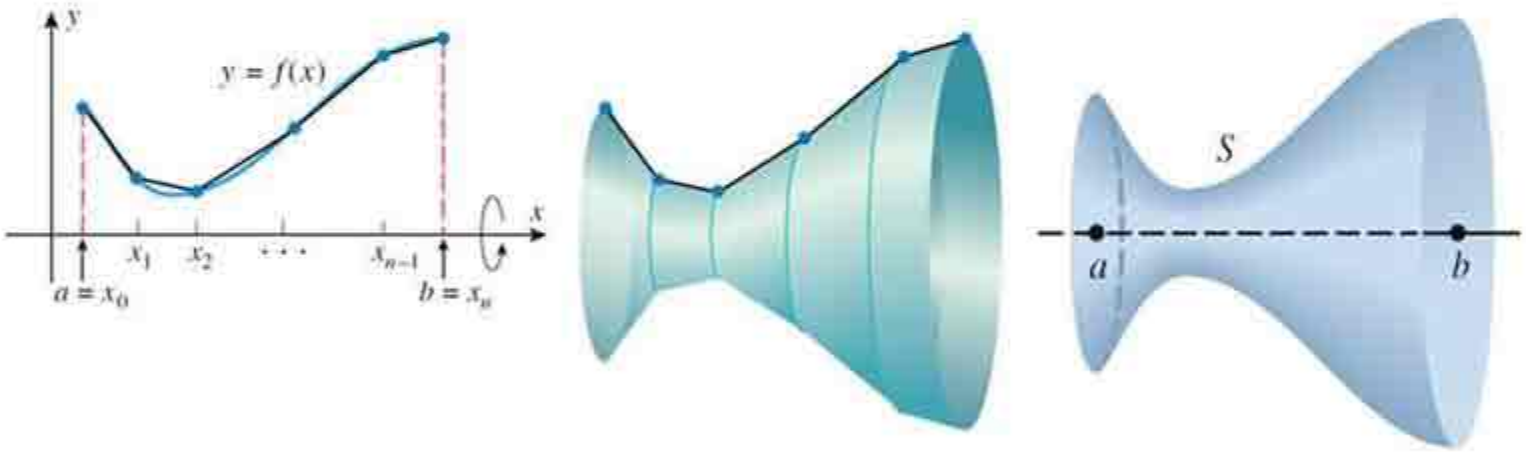
فرمول کلی قطبی



$$r = e^{2\theta}$$

۴.۱۰ مساحت یک سطح دوار

فرمول کلی قطبی



۴.۱۰ مساحت یک سطح دوار

7.5.2 DEFINITION. If f is a smooth, nonnegative function on $[a, b]$, then the surface area S of the surface of revolution that is generated by revolving the portion of the curve $y = f(x)$ between $x = a$ and $x = b$ about the x-axis is defined as

$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = \int_a^b 2\pi y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$S = \int_c^d 2\pi g(y)\sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, dy = \int_c^d 2\pi x\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

فصل یازدهم

روشهای عددی محاسبهٔ انتگرال

هدفهای رفتاری

دانشجو پس از مطالعه این فصل باید بتواند :

۱ . مقدار عددی انتگرالهای معین داده شده را به وسیلهٔ قاعدهٔ ذوزنقه ای تخمین بزند .

۲ . مقدار عددی انتگرالهای معین داده شده را به وسیلهٔ قاعدهٔ سیمپسون تخمین بزند .

مقدمه

بعضی از انتگرالهای مهم را که در فیزیک و ریاضی به کار می آیند نمی توان بر حسب توابع ساده نوشت . به عنوان مثال طول منحنی $y = \sin x$ در فاصلهٔ $[0, \pi]$ با دستور $\int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos^2 x}\, dx$ داده می شود .

این انتگرال را با هیچ یک از روشهایی که تا کنون خوانده ایم نمی توان محاسبه کرد با وجود این می توان مقدار عددی آن را تا هر چند رقم اعشار حساب کرد . در این فصل دو روش عددی موسوم به قاعدهٔ ذوزنقه و روش سیمپسون را برای محاسبهٔ چنین انتگرالهایی شرح می دهیم .

فصل یازدهم

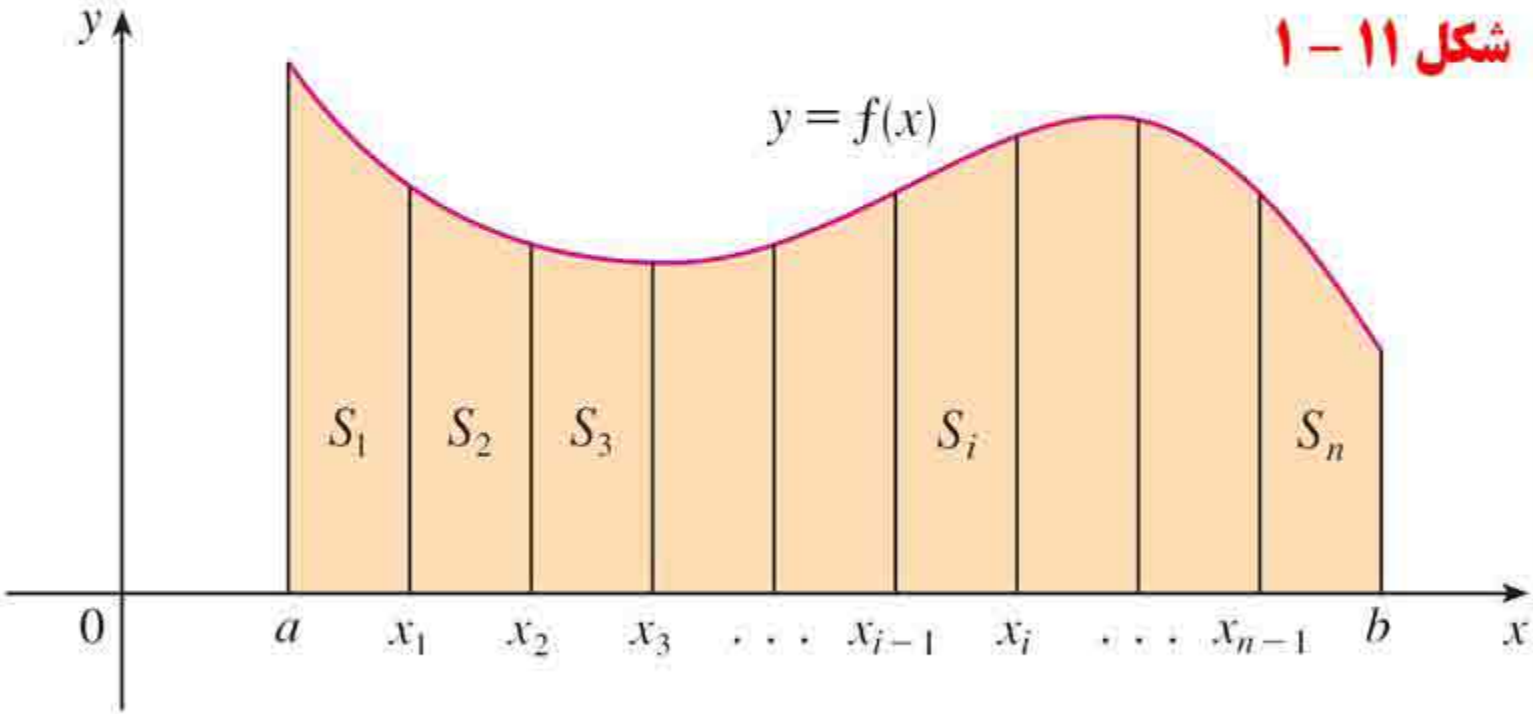
بخش اول

۱۰.۱۱ روش ذوزنقه

تشریح روش ذوذنقه

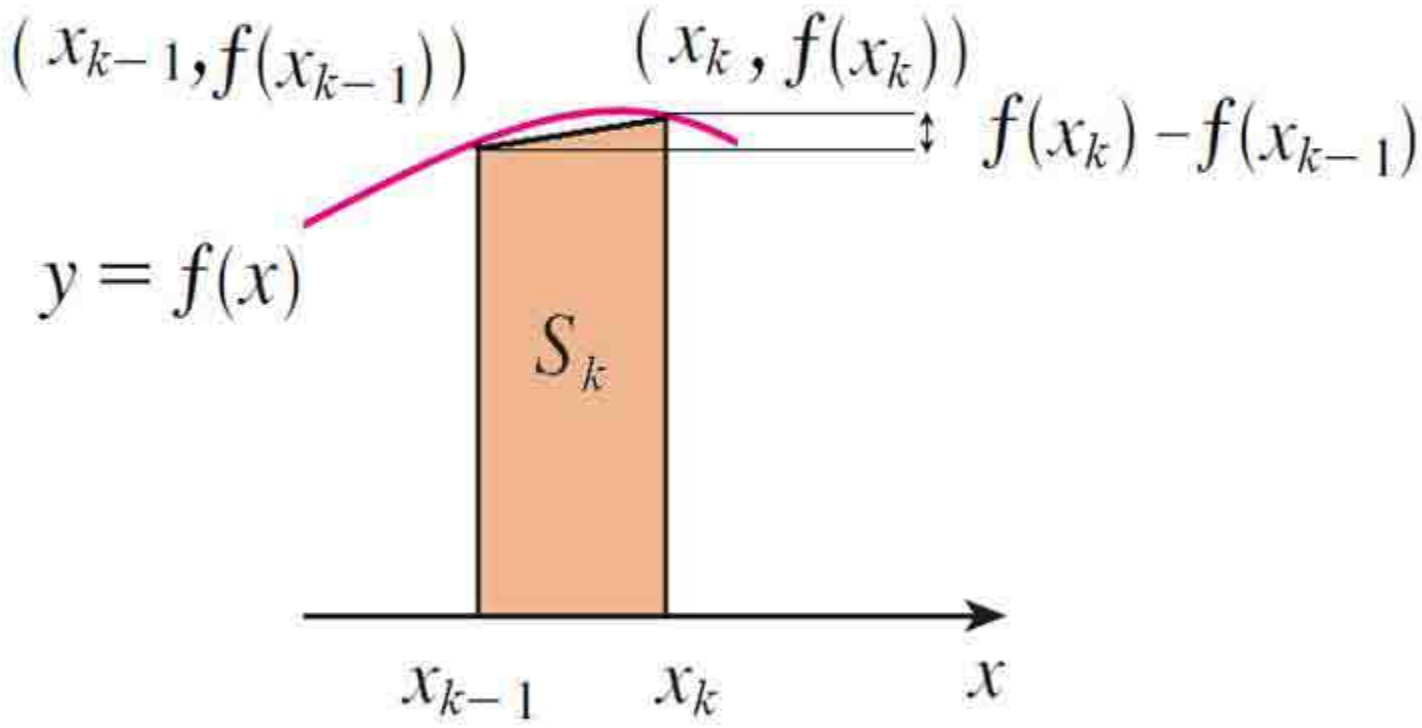
فرض کنید f در $[a,b]$ پیوسته باشد برای محاسبهٔ $\int_a^b f(x)dx$ این فاصله را با افراز $\{a=x_0,x_1,\ldots,x_n=b\}$ به n قسمت برابر با $\Delta x=\frac{b-a}{n}$ تقسیم می کنیم مجموع مساحتهای n ذوزنقهٔ به دست آمده تقریبی از مساحت زیر منحنی در فاصلهٔ $[a,b]$ یعنی $\int_a^b f(x)dx$ است . در شکل (۱۱-۲) ذوزنقهٔ n ام رسم شده است .

۱.۱۱ روش ذوزنقه



شکل ۱۱ – ۱

۱.۱۱ روش ذوزنقه



شکل ۱۱-۲

۱.۱۱ روش ذوزنقه

تشریح روش ذوذنقه

مساحت مثلث + مساحت مستطیل = مساحت ذوزنقه

است .

$$\text{مساحت ذوزنقه} = \Delta x\, f(x_k)k + \tfrac{1}{2}\Delta x[f(x_{k-1}) - f(x_k)]$$

$$= \tfrac{1}{2}\Delta x[f(x_{k-1}) + f(x_k)]$$

۱.۱۱ روش ذوزنقه

تشریح روش ذوذنقه

بنابراین فرمول قاعدهٔ ذوزنقه ای به صورت زیر به دست می آید :

فرمول قاعدهٔ ذوزنقه ای

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx T_n = \frac{\Delta x}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

که در آن $\Delta x = (b-a)/n$

۱.۱۱ روش ذوزنقه

مثال ۱

انتگرال $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ را با استفاده از قاعدهٔ ذوزنقه ، به ازای $n = 5$ حساب کنید .

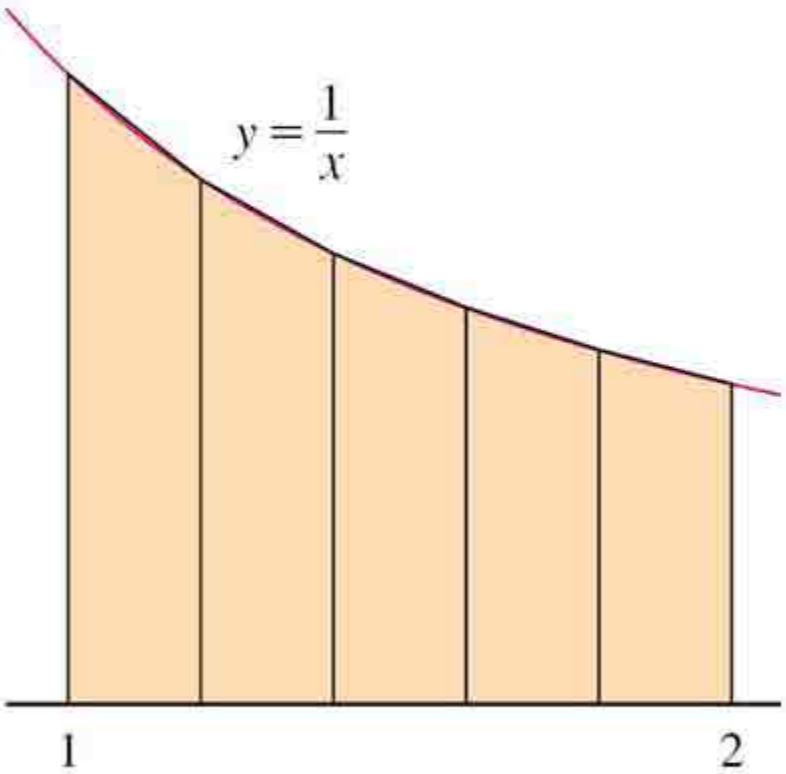
داریم $a = 1$ و $b = 2$ بنابراین $\Delta x = \frac{2-1}{5} = 0.2$ و

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx T_5 = \frac{0.2}{2}[f(1) + 2f(1.2) + 2f(1.4) + 2f(1.6) + 2f(1.8) + f(2)]$$

$$= 0.1\left(\frac{1}{1} + \frac{2}{1.2} + \frac{2}{1.4} + \frac{2}{1.6} + \frac{2}{1.8} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\approx 0.695635$$

۱.۱۱ روش ذوزنقه



شکل ۱۱ – ۳

۲.۱۱ روش سیمپسون

تشریح روش سیمپسون

فرض کنیم تابع f در فاصلهٔ $[a,b]$ پیوسته بوده و $\{a=x_0,x_1,\ldots,x_{2n-1},x_{2n}=b\}$ افرازی باشد که فاصلهٔ $[a,b]$ را به $2n$ قسمت برابر تقسیم می کند در این صورت داریم :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{3n}\{f(x_0)+2[f(x_2)+f(x_4)+\cdots+f(x_{2n-2})]+4[f(x_1)+f(x_3)+\cdots+f(x_{2n-1})]+f(x_{2n})\}$$

فرمول روش سیمپسون

۲.۱۱ روش سیمپسون

مثال ۲

انتگرال $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ را با استفاده از قاعدهٔ سیمپسون ، به ازای $n=10$ حساب کنید .

داریم $a=1$ و $b=2$ بنابراین $\Delta x=\frac{2-1}{10}=0.1$ و

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx S_{10}$$

$$=\frac{0.1}{3}\left(\frac{1}{1}+\frac{2}{1.2}+\frac{2}{1.4}+\frac{2}{1.6}+\frac{2}{1.8}+\frac{4}{1.1}+\frac{4}{1.3}+\frac{4}{1.5}+\frac{4}{1.7}+\frac{4}{1.9}+\frac{1}{2}\right)$$

$$\approx 0.693150$$

فصل دوازدهم

انتگرالهای ناسره

هدفهای رفتاری

دانشجو پس از مطالعه این فصل باید بتواند :

۱ . انتگرال ناسرهٔ یک تابع را بر یک بازه تعریف کند .

۲ . انواع انتگرالهای ناسره را تشخیص دهد .

۳ . در مورد همگرایی یا واگرایی انتگرالهای ناسرهٔ داده شده تحقیق کند .

۴ . از آزمون مقایسه در تشخیص همگرایی یا واگرایی انتگرالهای ناسره استفاده کند .

مقدمه

درفصل ۹ انتگرال معین را تعریف کردیم و گفتیم که اگر f در فاصله $[a , b]$ کراندار و نقاط نا پیوستگی آن در این فاصله متناهی باشد آنگاه f در فاصله $[a , b]$ انتگرال پذیر خواهد بود در این فصل انتگرال معین را تعمیم می دهیم .

فصل دوازدهم

بخش اول

۱۲ . ۱ تعریف انتگرال ناسره

تعریف

انتگرال $\int_a^b f(x)dx$ را یک ***انتگرال ناسره*** می نامیم هرگاه

الف . حداقل یکی از کرانه های انتگرال نامتناهی باشد . در این

صورت انتگرال را ***انتگرال ناسرهٔ رده اول*** می گوییم .

ب . $f(x)$ در یک یا چند نقطهٔ $[a , b]$ ناپیوسته باشد . در

این صورت انتگرال را ***انتگرال ناسرهٔ رده دوم*** می گوییم .

فصل دوازدهم

بخش دوم

۲.۱۲ انتگرالهای ناسرهٔ ردهٔ اول

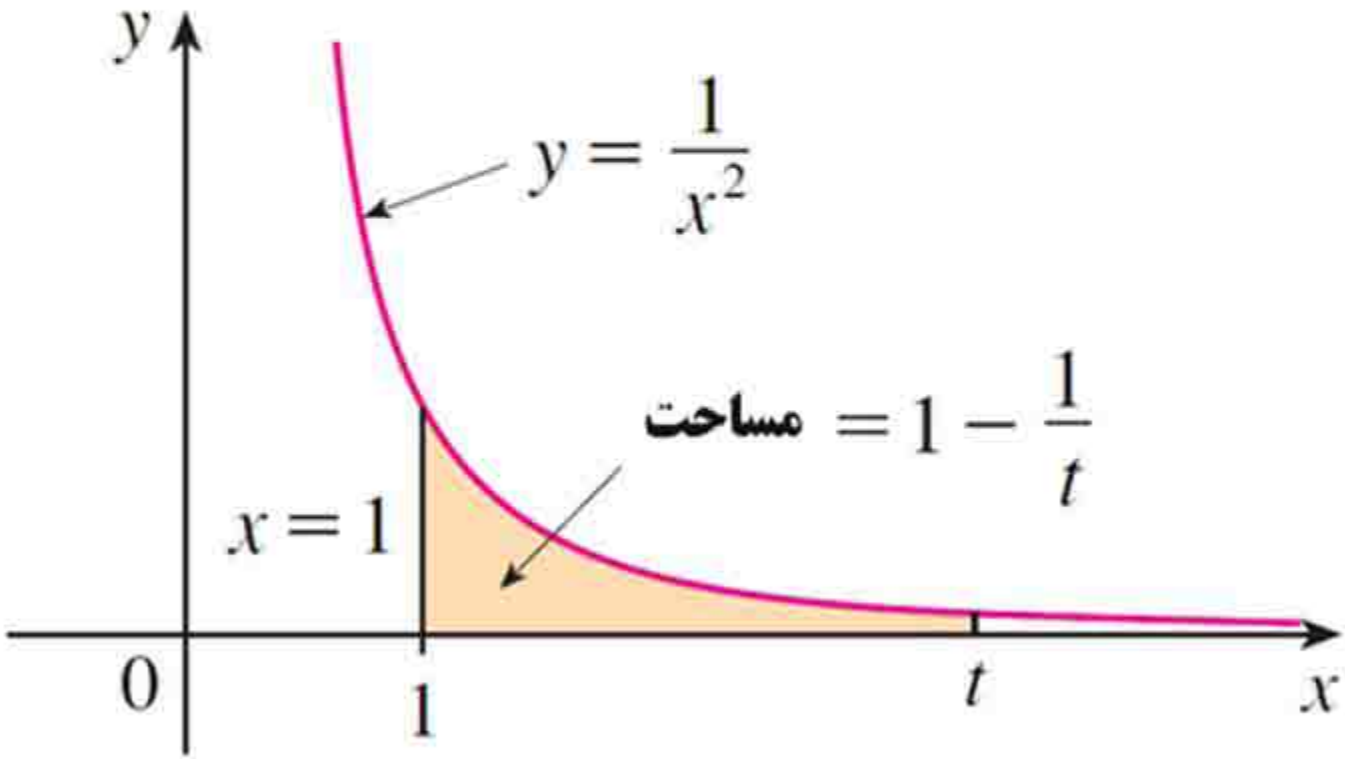
مثال مفهومی

تابع $y=\frac{1}{x^2}$ را که نمودار آن در شکل (۱۲- ۱) رسم شده است ، در نظر می گیریم . فرض کنیم S عبارت باشد از ناحیهٔ نا محدود :

- زیر منحنی $y=\frac{1}{x^2}$
- بالای محور x ها
- سمت راست خط $x=1$

آیا مساحت ناحیهٔ S متناهی است ؟

۲.۱۲ انتگرالهای ناسرهٔ ردهٔ اول



شکل ۱۲ – ۱

۲.۱۲ انتگرالهای ناسرهٔ ردهٔ اول

مثال مفهومی

مساحت قسمتی از ناحیهٔ S که در سمت چپ خط $y=t$ قرار دارد عبات است از :

$$A(t) = \int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big]_1^t = 1 - \frac{1}{t}$$

دقت کنید که به ازای هر مقدار t ، $A(t)<1$ و اگر $t \to \infty$ آنگاه $A(t) \to 1$.

۲.۱۲ انتگرالهای ناسرهٔ ردهٔ اول

مثال مفهومی

در نتیجه خواهیم گفت مساحت ناحیهٔ برابر با ۱ است

و می نویسیم :

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^{t} \frac{1}{x^2}\,dx = 1$$

با راهنمایی این مثال انتگرال تابع f در بازهٔ نامتناهی

را به کمک حد تعریف کنیم .

۲.۱۲ انتگرالهای ناسرهٔ ردهٔ اول

تعریف

فرض کنیم تابع f در فاصله $[a,+\infty)$ پیوسته باشد ،

$\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ را **انتگرال ناسرهٔ** $f(x)$

در فاصلهٔ $[a,+\infty)$ می نامیم و آن را با $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$

نشان می دهیم ، بنابراین :

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

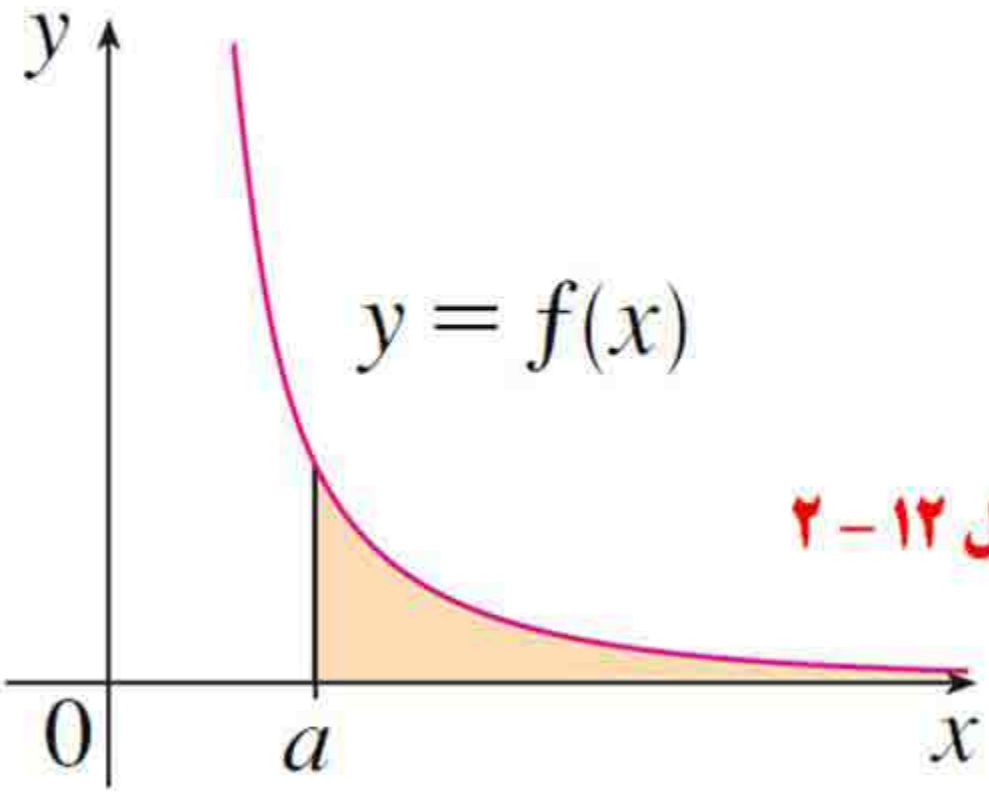
۲.۱۲ انتگرالهای ناسرهٔ ردهٔ اول

اگر حد طرف راست موجود و برابر ℓ باشد گوییم انتگرال ناسرهٔ $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ **همگرا** به ℓ است و در غیر این صورت انتگرال $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ **واگرا** است .

اگر انتگرال $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ همگرا به ℓ باشد می نویسیم :

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \ell$$

۲.۱۲ انتگرالهای ناسره ردهٔ اول



شکل ۱۲ – ۲

۲.۱۲ انتگرالهای ناسرهٔ ردهٔ اول

مثال ۱

انتگرال ناسرهٔ $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4}$ را در نظر می گیریم ، داریم :

$$\lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{dx}{x^2+4} = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2}\Big|_0^b$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{b}{2} = \frac{\pi}{4}$$

پس

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4} = \frac{\pi}{4}$$

۲.۱۲ انتگرالهای ناسرهٔ ردهٔ اول

مثال ۲

نشان دهید انتگرال $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$ واگراست .

$$\lim_{b \to +\infty} \int_e^b \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b \to +\infty} \ln \ln x \Big|_e^b = \lim_{b \to +\infty} (\ln \ln b - 0)$$

چون $\lim_{b \to +\infty} \ln \ln b = +\infty$ پس انتگرال ناسرهٔ

$\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$ واگراست .

۲.۱۲ انتگرالهای ناسرهٔ ردهٔ اول

تمرین

همگرایی یا واگرایی انتگرالهای ناسرهٔ زیر را بررسی کنید.

1. $\int_{1}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

2. $\int_{0}^{+\infty} \cos x\,dx$

3. $\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$

۲.۱۲ انتگرالهای ناسرهٔ ردهٔ اول

مثال ۳

همگرایی یا واگرایی انتگرال $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ را که در آن $a > 0$ به ازای مقادیر مختلف p بررسی کنید.

داریم:

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b \frac{1}{x^p} dx$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{1-p} x^{1-p} \Big|_a^b$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left[\frac{1}{1-p} (b^{1-p} - a^{1-p}) \right]$$

۲.۱۲ انتگرالهای ناسرهٔ ردهٔ اول

ادامهٔ مثال

سه حالت در نظر می گیریم :

حالت اول $p>1$ ، در این صورت

$$\lim_{b\to+\infty} b^{1-p}=0$$

در نتیجه

$$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\frac{-a^{1-p}}{1-p}=\frac{1}{(p-1)a^{p-1}}$$

پس انتگرال همگرا است .

۲.۱۲ انتگرالهای ناسرهٔ ردهٔ اول

ادامهٔ مثال

حالت دوم $p < 1$ ، در این صورت $\lim_{b \to +\infty} b^{1-p} = +\infty$

در نتیجه $\lim_{b \to +\infty} \int_a^b \frac{1}{x^p} dx = +\infty$ پس انتگرال واگرا است .

حالت سوم $p = 1$ ، باز انتگرال واگرا است ، زیرا داریم :

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \to +\infty} \ln x \Big|_a^b$$

$$= \lim_{b \to +\infty} (\ln b - \ln a) = +\infty$$

۲.۱۲ انتگرالهای ناسرهٔ ردهٔ اول

بنا براین

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{(p-1)a^{p-1}} & \text{همگرا به} \quad p > 1 \\ \text{واگرا} & p \le 1 \end{cases}$$

۲.۱۲ انتگرالهای ناسرهٔ ردهٔ اول

تذکر

قبلاً دیدیم که انتگرال $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ همگراست و

اکنون نشان دادیم که انتگرال $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$

واگراست .

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \quad \text{همگراست} \qquad \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx \quad \text{واگراست}$$

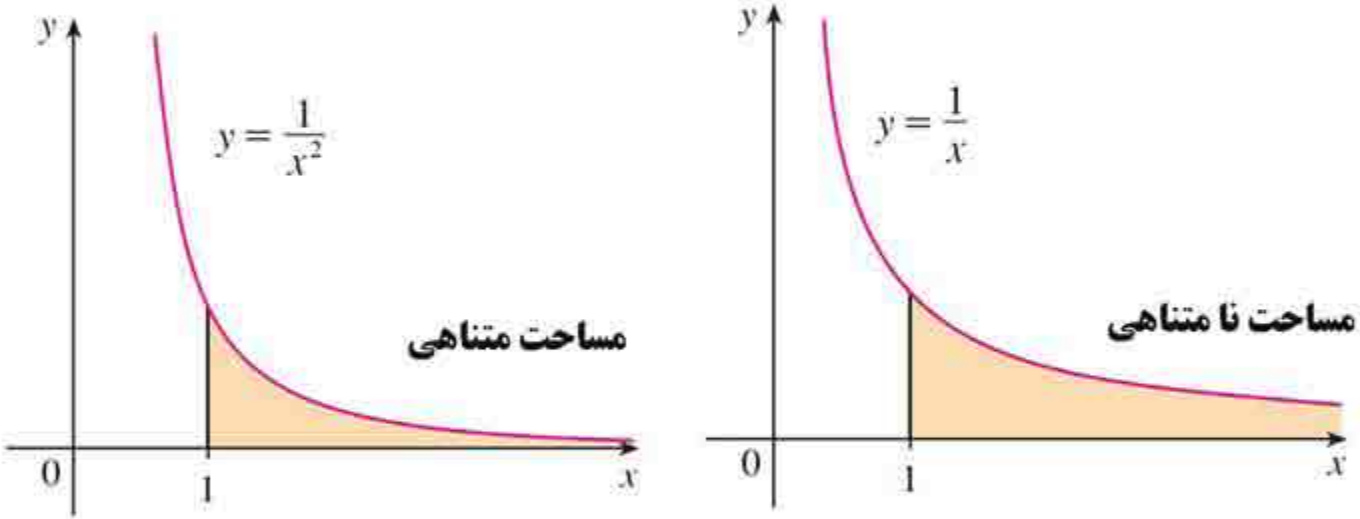
۲.۱۲ انتگرالهای ناسرهٔ ردهٔ اول

تذکر

دقت کنید که نمودارهای این دو تابع بسیار شبیه به هم است با این وجود مساحت زیر نمودار یکی از آنها متناهی و دیگری نا متناهی است .

نمودار این دو تابع در اسلاید بعدی مشاهده می شود .

۲.۱۲ انتگرالهای ناسرهٔ ردهٔ اول



شکل ۱۲ – ۳

۲.۱۲ انتگرالهای ناسرهٔ ردهٔ اول

مثال ۴

انتگرال $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ همگراست یا واگرا ؟

بنا به مثال قبل چون $p = \frac{1}{2} < 1$ پس واگرا است .

مثال ۵

انتگرال $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$ همگراست یا واگرا ؟

بنا به مثال قبل چون $p = 3 > 1$ پس همگرا است .

۲.۱۲ انتگرالهای ناسرهٔ ردهٔ اول

تعریف

مقصود از **نوع** یک انتگرال ناسره همگرایی یا واگرایی آن است . هر گاه دو انتگرال داده شده هردو همگرا یا هر دو واگرا باشند آن دو انتگرال را **هم نوع** می نامیم .

۲.۱۲ انتگرالهای ناسرهٔ ردهٔ اول

تمرین

۱ . اگر تابع f در فاصلهٔ $(k\ ,+\infty)$ پیوسته باشد ، نشان دهید که نوع انتگرال $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ناسرهٔ a به یعنی حد پائین انتگرال بستگی ندارد .

۲ . نشان دهید که اگر c یک عدد حقیقی غیرصفر باشد انتگرالهای $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ $\int_a^{+\infty} c\, f(x)\, dx$

۲.۱۲ انتگرالهای ناسرهٔ ردهٔ اول

تعریف

فرض کنیم تابع f در فاصلهٔ $(-\infty, b]$ پیوسته باشد ، $\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ را ***انتگرال ناسرهٔ*** f در فاصلهٔ $(-\infty, b]$ می نامیم و آن را با $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ نشان می دهیم ، بنابراین :

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

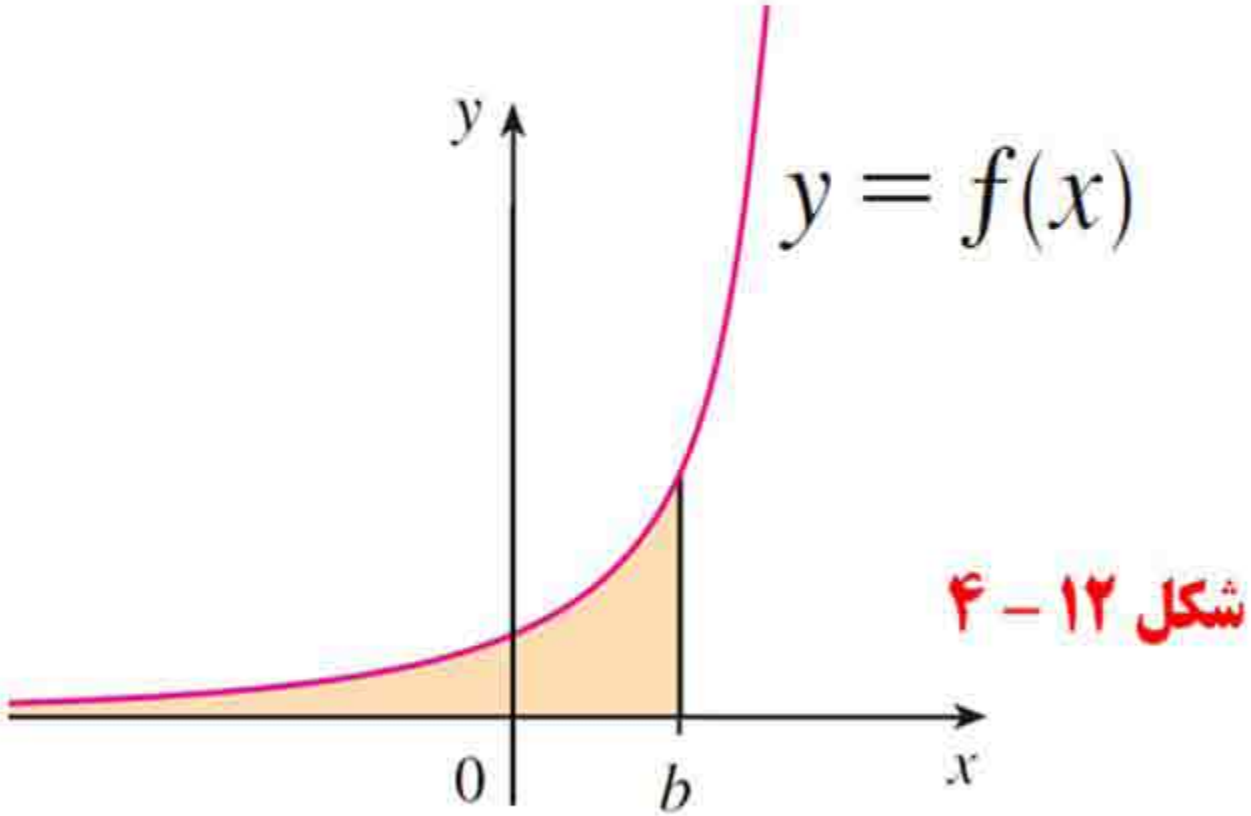
۲.۱۲ انتگرالهای ناسرهٔ ردهٔ اول

اگر حد طرف راست موجود و برابر ℓ باشد گوییم انتگرال ناسرهٔ $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ **همگرا** به ℓ است و در غیر این صورت انتگرال $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ **واگرا** است .

اگر انتگرال $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ همگرا به ℓ باشد می نویسیم :

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \ell$$

۲.۱۲ انتگرالهای ناسرهٔ ردهٔ اول



شکل ۱۲ – ۴

۲.۱۲ انتگرالهای ناسرهٔ ردهٔ اول

مثال ۶

انتگرال ناسرهٔ $\int_{-\infty}^{0} e^{2x}dx$ را در نظر می گیریم ، داریم :

$$\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} e^{2x}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\tfrac{1}{2}e^{2x}\Big|_{a}^{0}$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\tfrac{1}{2}(1-e^{2a}) = \tfrac{1}{2}-0=\tfrac{1}{2}$$

پس

$$\int_{-\infty}^{0} e^{2x}dx = \tfrac{1}{2}$$

۲.۱۲ انتگرالهای ناسرهٔ ردهٔ اول

تمرین

همگرایی یا واگرایی انتگرالهای ناسرهٔ زیر را بررسی کنید.

1. $$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(4-x)^2}$$

2. $$\int_{-\infty}^{0} xe^{x}\,dx$$

3. $$\int_{-\infty}^{0} e^{x}\cos x\,dx$$

۲.۱۲ انتگرالهای ناسرهٔ ردهٔ اول

تعریف

فرض کنیم تابع f در فاصله $(-\infty\ ,\ +\infty)$ پیوسته باشد ، ***انتگرال نا سرهٔ*** $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$$

که در آن c یک عدد حقیقی است .

۲.۱۲ انتگرالهای ناسرهٔ ردهٔ اول

تذکر

چون نوع انتگرالهای $\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$ و

$\int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$ به مقدار c بستگی ندارد به همین

جهت c را برابر صفر می گیرند . بنابراین :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx$$

۲.۱۲ انتگرالهای ناسرهٔ ردهٔ اول

تعریف

اگر هر دو انتگرال ناسرهٔ سمت راست برابری

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx$$

همگرا باشد گوییم انتگرال

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

همگرا است در غیر این صورت انتگرال را ***واگرا*** می نامیم .

۲.۱۲ انتگرالهای ناسرهٔ ردهٔ اول

مثال ۱

انتگرال ناسرهٔ $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-4x+9}$ را در نظر می گیریم ، داریم :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-4x+9} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x-2)^2+5} =$$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(x-2)^2+5}}_{I_1} + \underbrace{\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x-2)^2+5}}_{I_2}$$

۲.۱۲ انتگرالهای ناسره ردهٔ اول

ادامهٔ مثال

$$I_1=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{(x-2)^2+5}=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{dx}{(x-2)^2+5}$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{x-2}{\sqrt{5}}\Big|_{a}^{0}=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\tan^{-1}\frac{-2}{\sqrt{5}}-\tan^{-1}\frac{a-2}{\sqrt{5}}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\tan^{-1}\frac{-2}{\sqrt{5}}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

۲.۱۲ انتگرالهای ناسره ردهٔ اول

ادامهٔ مثال

$$I_2=\int_0^{-\infty}\frac{dx}{(x-2)^2+5}=\lim_{b\to+\infty}\int_0^{b}\frac{dx}{(x-2)^2+5}$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{x-2}{\sqrt{5}}\Big|_0^b=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\tan^{-1}\frac{b-2}{\sqrt{5}}-\tan^{-1}\frac{-2}{\sqrt{5}}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\frac{-2}{\sqrt{5}}\right]$$

ادامهٔ مثال

بنابراین :

$$I = I_1 + I_2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\tan^{-1}\frac{-2}{\sqrt{5}} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] + \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{-2}{\sqrt{5}}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi}{\sqrt{5}}$$

در نتیجه I همگرا به $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$ است .

۲.۱۲ انتگرالهای ناسرهٔ ردهٔ اول

مثال ۸

انتگرال ناسرهٔ $I=\int_{-\infty}^{+\infty}3x^2e^{x^3}dx$ را در نظر می گیریم ،

داریم :

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}3x^2e^{x^3}dx=\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}3x^2e^{x^3}dx}_{I_1}+\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}3x^2e^{x^3}dx}_{I_2}$$

۲.۱۲ انتگرالهای ناسرهٔ ردهٔ اول

ادامهٔ مثال

$$I_1 = \int_{-\infty}^{0} 3x^2 e^{x^3}\, dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} 3x^2 e^{x^3}\, dx$$

$$= \lim_{a \to -\infty} e^{x^3} \Big|_{a}^{0} = \lim_{a \to -\infty} (1 - e^{a^3}) = 1$$

پس انتگرال I_1 وجود دارد (همگرا است) .

۲.۱۲ انتگرالهای ناسرهٔ ردهٔ اول

ادامهٔ مثال

$$I_2 = \int_0^{+\infty} 3x^2 e^{x^3} dx = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b 3x^2 e^{x^3} dx$$

$$= \lim_{b \to +\infty} e^{x^3} \Big|_0^b = \lim_{b \to +\infty} (e^{b^3} - 1) = +\infty$$

پس انتگرال I_2 وجود ندارد (واگرا است) . در نتیجه

انتگرال I واگرا است .

۲.۱۲ انتگرالهای ناسرهٔ ردهٔ اول

تمرین

همگرایی یا واگرایی انتگرالهای ناسرهٔ زیر را بررسی کنید.

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+4x^2} dx$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^x+e^{-x}} dx$

3. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{|x|} dx$

فصل دوازدهم

بخش سوم

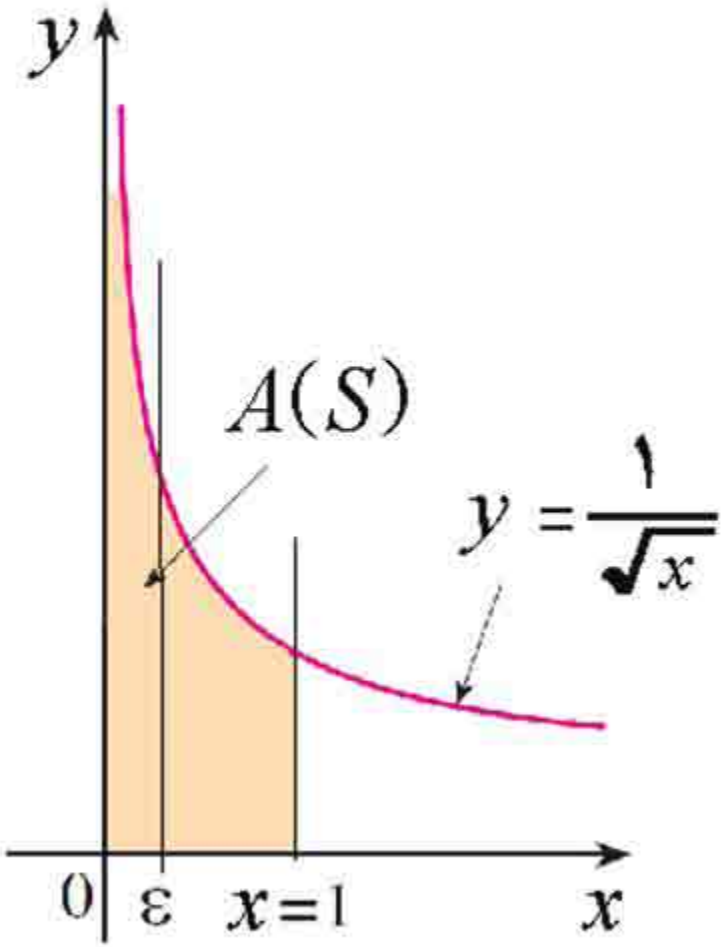
۳.۱۲ انتگرالهای ناسرهٔ ردهٔ دوم

مثال مفهومی

ناحیهٔ بین منحنی $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ و محور x ها را در فاصلهٔ $(0,1]$ با $A(S)$ نشان می دهیم شکل (۱۲ _ ۲) .

تابع $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ در $x=0$ پیوسته نیست بنابراین انتگرال آن در فاصلهٔ $[0,1]$ تعریف نشده است . در نتیجه نمی توان به کمک انتگرال معین ، مساحت ناحیه را حساب کرد .

۳.۱۲ انتگرالهای ناسرهٔ ردهٔ دوم



شکل ۱۲ – ۵

۳.۱۲ انتگرالهای ناسرهٔ ردهٔ دوم

نقطهٔ ε را در $(0\ ,\ 1]$ در نظر می گیریم چون f در فاصلهٔ $[\varepsilon\ ,\ 1]$ پیوسته است پس مساحت محصور بین این منحنی و محور x ها در فاصلهٔ $[\varepsilon\ ,\ 1]$ که آن را با $A_\varepsilon(S)$ نشان می دهیم به کمک انتگرال معین محاسبه می شود و داریم :

$$A_\varepsilon(S)=\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}\,\Big|_\varepsilon^1=2-2\sqrt{\varepsilon}$$

۳.۱۲ انتگرالهای ناسرهٔ ردهٔ دوم

اگر $\varepsilon \to 0^+$ یعنی اگر خط $x = \varepsilon$ به محور y ها نزدیک و نزدیکتر شود $A_\varepsilon(S)$ بر $A(S)$ منطبق می شود . پس

$$A(S) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$$

آنچه بیان شد اساس تعریف انتگرال ناسرهٔ رده دوم است .

۳.۱۲ انتگرالهای ناسرهٔ ردهٔ دوم

تعریف

فرض کنیم تابع f در فاصلهٔ $(a,b]$ پیوسته باشد ،

$\lim\limits_{a\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$ را ***انتگرال نا سرهٔ*** f در فاصله

$(a,b]$ می نامیم و آن را با $\int_a^b f(x)\,dx$ نشان می دهیم :

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

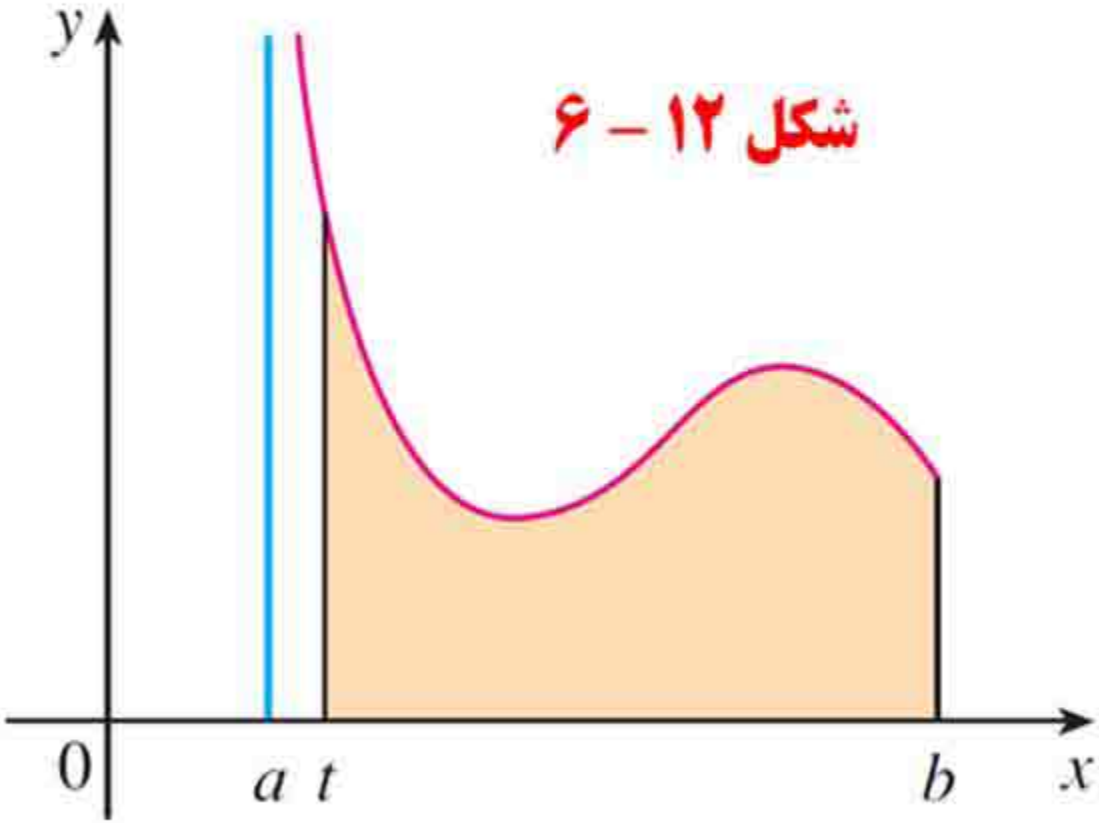
۳.۱۲ انتگرالهای ناسرهٔ ردهٔ دوم

اگر حد طرف راست موجود و برابر ℓ باشد گوییم انتگرال ناسرهٔ $\int_a^b f(x)\,dx$ **همگرا** به ℓ است و در غیر این صورت انتگرال $\int_a^b f(x)\,dx$ **واگرا** است .

اگر انتگرال $\int_a^b f(x)\,dx$ همگرا به ℓ باشد می نویسیم :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \ell$$

۱۲.۳ انتگرالهای ناسرهٔ ردهٔ دوم



شکل ۱۲ – ۶

۳.۱۲ انتگرالهای ناسرهٔ ردهٔ دوم

مثال ۹

انتگرال ناسرهٔ $\int_{-2}^{0} \frac{dx}{(x+2)^{1/5}}$ را در نظر می گیریم

تابع $f(x)=\frac{1}{(x+2)^{1/5}}$ در $x=-2$ ناپیوسته است ،

داریم :

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{-2+\varepsilon}^{0} \frac{dx}{(x+2)^{1/5}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\tfrac{5}{4}(x+2)^{4/5}\right]\Big|_{-2+\varepsilon}^{0}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \tfrac{5}{4}\left[2^{4/5}-\varepsilon^{4/5}\right] = \tfrac{5}{4}\sqrt[5]{16}$$

۳.۱۲ انتگرالهای ناسرهٔ ردهٔ دوم

ادامهٔ مثال

در نتیجه

$$\int_{-2}^{0} \frac{dx}{(x+2)^{1/5}} = \frac{5}{4}\sqrt[5]{16}$$

۳.۱۲ انتگرالهای ناسرهٔ ردهٔ دوم

تعریف

فرض کنیم تابع f در فاصلهٔ $[a\,,b)$ پیوسته باشد ،

$\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$ را ***انتگرال نا سرهٔ*** f

در فاصلهٔ $[a\,,b)$ می نامیم و آن را $\int_a^b f(x)\,dx$

با نشان می دهیم ، بنابراین :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

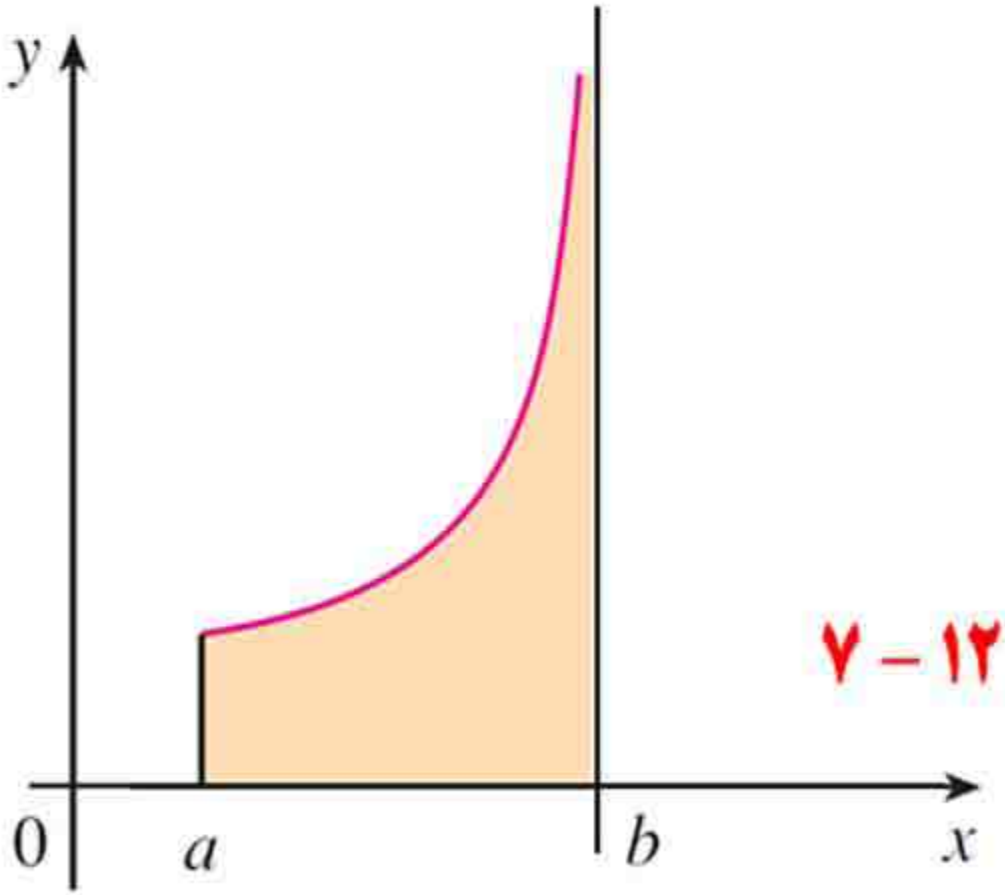
۳.۱۲ انتگرالهای ناسرهٔ ردهٔ دوم

اگر حد طرف راست موجود و برابر ℓ باشد گوییم انتگرال ناسرهٔ $\int_a^b f(x)dx$ **همگرا** به ℓ است و در غیر این صورت انتگرال $\int_a^b f(x)dx$ **واگرا** است .

اگر انتگرال $\int_a^b f(x)dx$ همگرا به ℓ باشد می نویسیم :

$$\int_a^b f(x)dx = \ell$$

۱۲.۳ انتگرالهای ناسرهٔ ردهٔ دوم



شکل ۱۲ – ۷

۳.۱۲ انتگرالهای ناسرهٔ ردهٔ دوم

مثال ۱۰

انتگرال ناسرهٔ $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$ را در نظر می گیریم

تابع $f(x)=\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$ در $x=3$

ناپیوسته است ، داریم :

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{3-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\arcsin\tfrac{x}{3}\right)\Big|_0^{3-\varepsilon}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin\tfrac{3-\varepsilon}{3}=\arcsin 1=\tfrac{\pi}{2}$$

۳.۱۲ انتگرالهای ناسرهٔ ردهٔ دوم

ادامهٔ مثال

در نتیجه

$$\int_{0}^{3} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

۳.۱۲ انتگرالهای ناسرهٔ ردهٔ دوم

تمرین

همگرایی یا واگرایی انتگرالهای ناسرهٔ زیر را بررسی کنید.

1. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{1-\sin x}}$

2. $\int_{0}^{5} \frac{dx}{5-x} dx$

۳ . ۱۲ انتگرالهای ناسرهٔ ردهٔ دوم

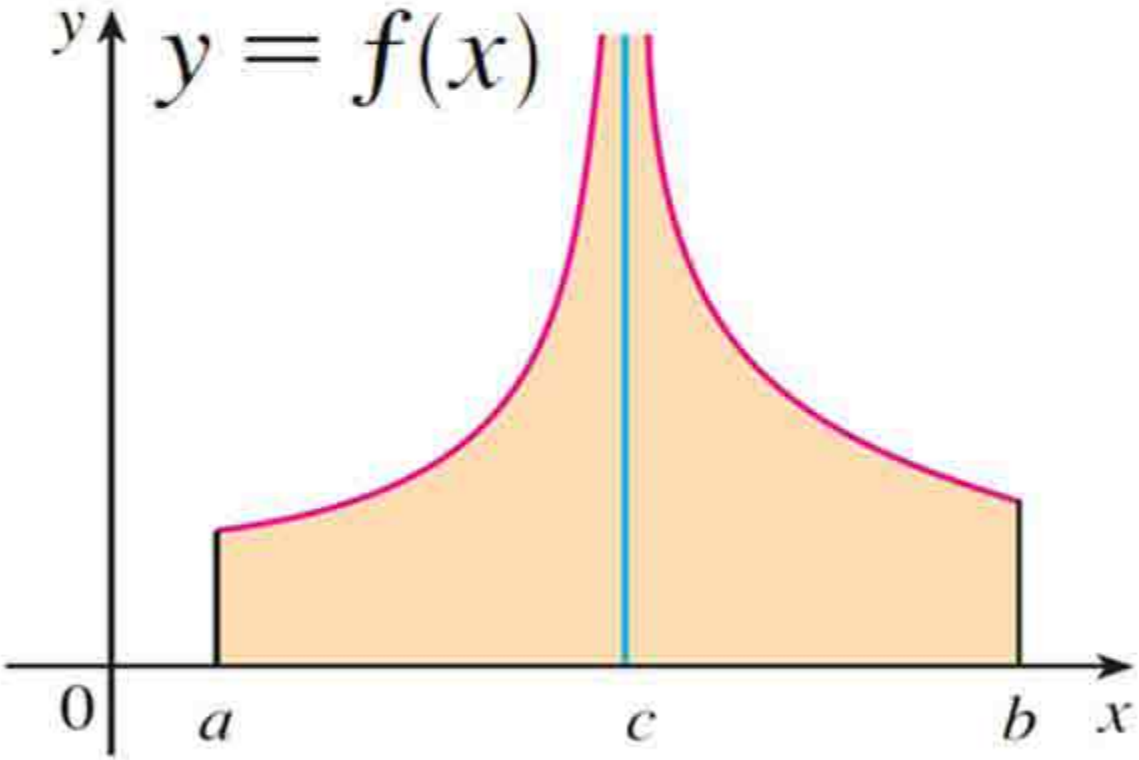
تعریف

فرض کنیم تابع f در فاصلهٔ $[a\,,\,b]$ پیوسته و در نقطهٔ $c\in(a\,,\,b)$ f ناپیوسته باشد ، انتگرال روی بازهٔ $[a\,,\,b]$ را با رابطهٔ زیر تعریف می کنیم :

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

انتگرال $\int_a^b f(x)dx$ همگراست هرگاه هر دو انتگرال سمت راست همگرا باشد و و اگر حداقل یکی از آنها واگرا باشد واگراست.

۱۲.۳ انتگرالهای ناسرهٔ ردهٔ دوم



شکل ۱۲ – ۸

۳.۱۲ انتگرالهای ناسرهٔ ردهٔ دوم

مثال ۱۱

انتگرال ناسرهٔ $I=\int_{-1}^{8}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ را در نظر می گیریم تابع $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ در $x=0$ ناپیوسته است ، داریم :

$$I=\underbrace{\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}}_{I_1}+\underbrace{\int_{0}^{8}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}}_{I_2}$$

۲.۱۲ انتگرالهای ناسرهٔ ردهٔ اول

ادامهٔ مثال

$$I_1 = \int_{-1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-1}^{0-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{3}{2} x^{2/3} \Big|_{-1}^{-\varepsilon} = \frac{-3}{2}$$

پس انتگرال I_1 همگرا به $\frac{-3}{2}$ است .

ادامهٔ مثال

$$I_2 = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{3}{2} x^{2/3} \Big|_{\varepsilon}^{8} = 6$$

پس انتگرال I_2 همگرا به ۶ است . در نتیجه

$$I = \int_{-1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{-3}{2} + 6 = \frac{9}{2}$$

۳.۱۲ انتگرالهای ناسرهٔ ردهٔ دوم

تمرین

همگرایی یا واگرایی انتگرالهای ناسرهٔ زیر را بررسی کنید .

1. $$\int_{-1}^{1} \frac{|x|}{x}\, dx$$

2. $$\int_{0}^{3} \frac{1}{(x-1)^3}\, dx$$

۳.۱۲ انتگرالهای ناسرهٔ ردهٔ دوم

مثال ۱۲ [یک حالت کلی]

همگرایی یا واگرایی انتگرال ناسرهٔ $I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{7-x}$

را بررسی کنید .

تابع $f(x)=\frac{dx}{7-x}$ در $x=7$ نا پیوسته است

همچنین کران بالای انتگرال $+\infty$ است . انتگرال را به

صورت مجموعی از سه انتگرال می نویسیم :

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{7-x}=\int_0^{7}\frac{dx}{7-x}+\int_7^{8}\frac{dx}{7-x}+\int_8^{+\infty}\frac{dx}{7-x}$$

۱۲ . ۳ انتگرالهای ناسرهٔ ردهٔ دوم

مثال ۱۲ (یک حالت کلی)

همگرایی یا واگرایی انتگرال ناسرهٔ $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{7-x}$ را بررسی کنید .

تابع $f(x) = \frac{dx}{7-x}$ در $x = 7$ نا پیوسته است همچنین کران بالای انتگرال $+\infty$ است . انتگرال را به صورت مجموعی از سه انتگرال می نویسیم :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{7-x} = \int_0^{7} \frac{dx}{7-x} + \int_7^{8} \frac{dx}{7-x} + \int_8^{+\infty} \frac{dx}{7-x}$$

ادامهٔ مثال ۱۲

اگر هر سه انتگرال ناسرهٔ سمت راست همگرا باشد آنگاه انتگرال I همگراست در غیر این صورت واگرا است .

اولین انتگرال را بررسی می کنیم :

$$\int_0^7 \frac{dx}{7-x} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^{7-\varepsilon} \frac{dx}{7-x}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} (-\ln|7-x|)\Big|_0^{7-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} [-\ln \varepsilon + \ln 7] = +\infty$$

۱۲ . ۳ انتگرالهای ناسرهٔ ردهٔ دوم

ادامهٔ مثال ۱۲

یعنی اولین انتگرال واگراست پس I واگراست .

۳.۱۲ انتگرالهای ناسرهٔ ردهٔ دوم

مثال ۱۳

تابع $f(x)=\begin{cases} x^2 & 0<x<1 \\ \frac{5}{2} & x=1 \\ 2 & 1<x<2 \end{cases}$ داده شده است

$\int_0^2 f(x)\,dx$ را محاسبه کنید .

ادامهٔ مثال ۱۳

تابع f در $x=1$ ناپیوسته است پس $\int_0^2 f(x)dx$

یک انتگرال ناسره است و داریم :

$$\int_0^2 = f(x)dx = \underbrace{\int_0^1 f(x)dx}_{I_1} + \underbrace{\int_1^2 f(x)dx}_{I_2}$$

$$I_1 = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{1-\varepsilon} x^2 dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{(1-\varepsilon)^3}{3} = \frac{1}{3}$$

$$I_2 = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{1+\varepsilon}^{2} 2dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} 2(1-\varepsilon) = 2$$

ادامهٔ مثال ۱۳

در نتیجه :

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3}$$

۳.۱۲ انتگرالهای ناسرهٔ ردهٔ دوم

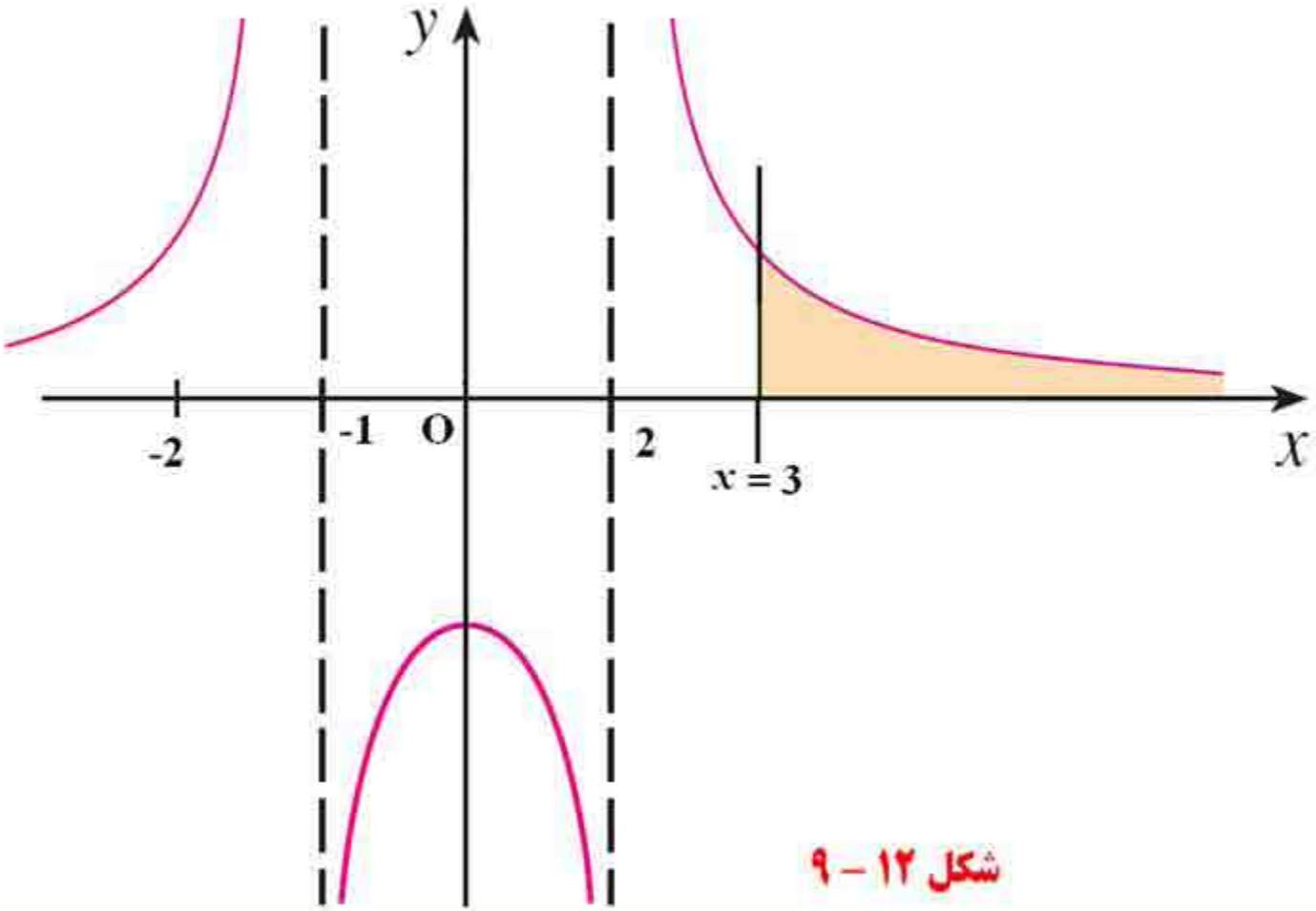
مثال ۱۴

مساحت ناحیهٔ بین منحنی $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$ و محور x ها را که در طرف راست خط $x=3$ قرار دارد به دست آورید .

نمودار تابع و ناحیهٔ مورد نظر در شکل (۱۲-۹) نشان داده شده است .

این ناحیه کراندار نیست و داریم :

۱۲ . ۳ انتگرالهای ناسرهٔ ردهٔ دوم



شکل ۱۲ – ۹

۳.۱۲ انتگرالهای ناسرهٔ ردهٔ دوم

ادامهٔ مثال ۱۴

$$A(S)=\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x^2-1}=\lim_{b\to+\infty}\int_3^b\frac{dx}{x^2-1}$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Big|_3^b=\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left[\ln\frac{b-1}{b+1}-\ln\frac{1}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\ln\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\ln 2$$

۱۲ . ۳ انتگرالهای ناسرهٔ ردهٔ دوم

تمرین

مساحت $y = \frac{1}{x^2+1}$ و محور x ها را به دست آورید .

فصل دوازدهم

بخش چهارم

۴.۱۲ تعیین نوع انتگرال ناسره

دیدیم که تعیین نوع یک انتگرال ناسره به محاسبهٔ یک انتگرال منجر می شود . اما توابعی وجود دارند که محاسبهٔ انتگرال آنها مشکل و گاهی غیر ممکن است .برای رفع این اشکال قضیهٔ زیر را مفید است .

۴.۱۲ تعیین نوع انتگرال ناسره

قضیه

فرض کنیم توابع f و g در فاصلهٔ $[a,+\infty)$ پیوسته باشند و در این فاصله $0<f(x)<g(x)$ در این صورت

الف . اگر $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ همگرا باشد ، $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ نیز همگرا است .

ب . اگر $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ واگرا باشد $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ نیز واگرا است .

۴.۱۲ تعیین نوع انتگرال ناسره

مثال ۱۵

نوع انتگرال $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$ را بررسی کنید .

در فاصلهٔ $[1,+\infty)$ داریم :

$$\frac{1}{x^2(1+e^x)} < \frac{1}{x^2}$$

چون $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ همگرا به ۱ است پس $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$ همگرا به عددی کمتر از ۱ است .

۴.۱۲ تعیین نوع انتگرال ناسره

مثال ۱۶

انتگرال $\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}}dx$ واگرا است زیرا در فاصلهٔ $[1 , +\infty)$ داریم :

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^3}} > \frac{x}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

و $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ واگرا است . پس $\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}}dx$ هم واگرا خواهد بود .

۴.۱۲ تعیین نوع انتگرال ناسره

تمرین

با استفاده از آزمون مقایسه نوع انتگرالهای زیر را تعیین کنید .

1. $\int_{2}^{+\infty} e^{x^2+x}\,dx$

2. $\int_{1}^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{x^2+x+7}$

3. $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^3 e^{2x}}$

4. $\int_{1}^{+\infty} \frac{1+\sqrt[8]{x}}{\sqrt[4]{x^3}}\,dx$

۴.۱۲ تعیین نوع انتگرال ناسره

تمرین

نشان دهید :

$\int_1^{\infty} x^p dx$ همگراست هرگاه $p < -1$ و واگراست هرگاه $p \geq -1$

$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ همگراست هرگاه $p > 1$ و واگراست هرگاه $p \leq 1$

$\int_0^{1} x^p dx$ همگراست هرگاه $p > -1$ و واگراست هرگاه $p \leq -1$

$\int_0^{1} \frac{1}{x^p} dx$ همگراست هرگاه $p < 1$ و واگراست هرگاه $p \geq 1$

$\int_0^{\infty} e^{ax} dx$ همگراست هرگاه $a < 0$ و واگراست هرگاه $a \geq 0$

خدا نگهدار

موفق باشید