www.salampnu.com


بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه پیام نور

فیزیک پایه ۱ (مکانیک)

رشته کامپیوتر

۳ واحد درسی

مؤلف : هریس بنسون ، انتشارات دانشگاه پیام نور

تهیه و تنظیم : سید محمود نجفیان رضوی

(عضو هیات علمی مرکز آران و بیدگل)

فهرست مطالب

فصـــــل اول

مقدمـــــــات

فیزیک چیست ؟

فیزیک علم اندازه گیری است و با رفتار و اجزای سازنده ماده وبرهمکنشهای

آن در بنیادی ترین سطوح سرو کار دارد .

قلمرو آن از درون هسته اتم تا ابعاد کهکشانها ست و به مشاهدات و چگونگی

انجام رویدادها می پردازد .

سه شاخه عمده فیزیک کلاسیک

مجموعه موضوعاتی که بین سالهای ۱۶۰۰ تا ۱۹۰۰ در علم فیزیک تدوین شد فیزیک کلاسیک نامیده می شود و شامل سه شاخه عمده است :

۱- مکانیک کلاسیک

۲- ترمو دینامیک

۳- الکترو مغناطیس

مواردی که در هر یک از شاخه های عمده فیزیک کلاسیک مورد بررسی قرار می گیرند :

۱- حرکت ذرات و شاره ها در مکانیک کلاسیک

۲- مطالعه دما ، انتقال گرما و خواص مجموعه ذرات در ترمو دینامیک

۳- الکتریسیته و مغناطیس و امواج الکترو مغناطیس و اپتیک در الکترو مغناطیس

نظریه های مهمی که در فیزیک جدید از اوایل قرن بیستم شکل گرفت :

۱- نسبیت خاص (توضیح رفتار ذرات با سرعتهای بسیار زیاد)

۲- مکانیک کوانتومی (توضیح دنیای بسیار کوچک یا زیر میکروسکوپ در رابطه با رفتار اتمها و ذرات درون آنها)

۳- نسبیت عام (ارتباط نیروی گرانشی به خواص هندسی فضا)

فیزیکدانها تمام پدیده های فیزیکی را امروزه بر حسب چهار نوع نیرو یا برهمکنش توضیح می دهند :

۱- گرانشی

۲- الکترو مغناطیسی

۳- قوی

۴- ضعیف

برهمکنش الکترو ضعیف

نظریه وحدت بزرگ

دو نیروی الکترو مغناطیس وضعیف نمودهای متفاوت برهمکنش بنیادی واحدی هستند به نام الکترو ضعیف

تلفیق نیروی هسته ای با نیروی الکترو ضعیف در قالب نظریه ای به نام نظریه وحدت بزرگ حاصل شده است .

اصطلاحاتی که در فیزیک با آنها سرو کار داریم :

مفاهیم : هر کمیت فیزیکی که برای تحلیل پدیده ها طبیعی به کار می رود .

اصول و قوانین
- قانون : روابط ریاضی بین کمیتهای فیزیکی است و محدود به زمینه خاصی است .
- اصل مفهوم کلی تری درباره رفتار طبیعت است .

مدلها : مشابه ساده و مناسب برای نمایش و توصیف سیستم فیزیکی واقعی است

(مدل وقتی اعلام می شود که نظریه کامل شده است)

نظریه : مجموعه ای از اصول و فرضهای اولیه که برای رسیدن به نتایج یا قوانین خاص در قالب یک مدل با هم ترکیب شده اند .

تعریف عملیاتی چیست ؟

هر گاه کمیتی را با استفاده از روشی که برای اندازه گیری آن به کار می رود تعریف کنیم به آن تعریف عملیاتی می گوییم .

مثال : تعریف بار الکتریکی به وسیله نیرویی که اجسام باردار برهم وارد می کنند .

واقعیت تجربی همیشه و به تنهایی برای رسیدن به نظریه کافی نیست بلکه بصیرت و ذهن خلاق لازم دارد .

- توقف گلوله ای که با سرعت اولیه روی سطح افقی به حرکت در آورده ایم ، از نظر ارسطو برای ادامه حرکت عاملی لازم است ، از نظر گالیله اگر اصطکاک کامل حذف شود گلوله به حرکتش ادامه می دهد .

- درمقایسه مدل زمین مرکزی و خورشید مرکزی ، مدل مورد قبول امروزی (خورشید مرکزی) مستقیما از داده های نجومی و مشاهدات تجربی نتیجه گیری نشده است .

فیزیک به چگونگی انجام رویدادها می پردازد نه به چرایی آنها

به عنوان مثال با پذیرفتن مفهوم بار الکتریکی و اینکه بارهای همنام یکدیگر را دفع وبارهای غیر همنام یکدیگر را جذب می کنند می توانبم قانون کولن را به دست آورده و بسیاری از برهمکنشهای بین ذرات باردار را توضیح دهیم ولی قانون کولن وحتی کل نظریه الکترو مغناطیس نمی تواند توضیح دهد که بار الکتریکی چیست و چرا بارها به هم نیرو وارد می کنند .

پایه های علم فیزیک (علم اندازه گیری) کمیتهای فیزیکی هستند که به دو دسته تقسیم می شوند :

کمیتهای اصلی ⟵ طول ، جرم ، زمان ، دما ، جریان الکتریکی ، شدت روشنائی ، مقدار ماده

کمیتهای فرعی ⟵ سایر کمیتها که ترکیبی از کمیتهای اصلی هستند .

برای یک اندازه گیری بایستی کمیت مورد نظر را بر حسب استاندارد یا یکای معینی بیان کنیم .

با توجه به اینکه دربخش مکانیک در دستگاه بین المللی یکاها (متریک یا SI بیشتر از سه کمیت طول ، جرم ، زمان استفاده می کنیم ، یکاهای این سه کمیت در این دستگاه به ترتیب عبارتند از:

متر (m) ، کیلوگرم (kg) ، ثانیه (s)

یکای طول در دستگاه **SI** متر است .

۱ – یک ده میلیونیوم فاصله استوا تا قطب بر روی نصف النهاری که از پاریس می گذرد .

۲ – فاصله دو خراش ظریف روی دو انتهای طلایی میله ای از آلیاژ پلاتین – ایریدیوم که در شرایط مناسبی در دفتر بین المللی اوزان و مقیاسها در فرانسه نگهداری می شود .

۳ – فاصله ای معادل ۱،۶۵۰،۷۶۳،۷۳ برابر طول موج نارنجی گسیل شده ازکریپتون 86

۴ – مسافتی که نور در خلاء در مدت $\frac{1}{299,792,458}$ ثانیه طی می کند .

یکای جرم در دستگاه SI کیلوگرم است .

۱ – جرم یک لیتر آب $4^0 c$ است .

۲ – جرم استوانه معینی از آلیاژ پلاتین – ایریدیوم که در دفتر بین المللی اوزان و مقیاسها در فرانسه نگهداری می شود .

یکای جرم اتمی (a.m.u) با u نشان داده می شود و $\frac{1}{12}$ جرم یک اتم کربن ۱۲ است .

$$1u = 1.66 \times 10^{-27} kg$$

یکای زمان در دستگاه SI ثانیه است .

۱ – $\frac{1}{84600}$ روز متوسط خورشیدی

۲ – زمانی که در آن زمان تابش معینی که از اتمهای سزیم گسیل می شود ، 9162631770بار ارتعاش کند .

استفاده از کسرهای واحد در تبدیل یکاها

الف –۵۰ مایل بر ساعت معادل چند متر بر ثانیه است ؟

$$1\,mile = 1600\ m\ ,\ 1\,h = 3600\ s$$

$$(50\frac{mile}{h})(\frac{1600m}{1mile})(\frac{1h}{3600s}) = \frac{50\times1600m}{3600s} = 22.2\frac{m}{s}$$

نتایج اندازه گیری ها همیشه با مقداری خطا یا عدم قطعیت همراه است .

مثال : اگر نتیجه اندازه گیری طول معینی m۶/۱۵ و عدم قطعیت آن ۲٪ باشد ، مقدار

واقعی طول مورد نظر احتمالا بین m ۶/۱۵ و m ۹/۱۵ یعنی $15.6 \pm 0.3m$ **است .**

گاهی عدم قطعیت در نتیجه اندازه گیری را با استفاده از ارقام با معنی نشان می دهند .

مثال : ۶/۱۵ سه رقم با معنی دارد که رقم ۶ قطعیت ندارد .

مثال : ۶۲۴/۱۵ پنج رقم با معنی دارد که رقم ۴ قطعیت ندارد .

صفرهایی که نماینده توانهای ده هستند جزء ارقام با معنی نیستند ولی صفرهای آخر به حساب می آیند .

مثال : ۰/۰۰۲۵۶۰ دارای چهار رقم با معنی است .

مثال : ۰/۱۲۰۰۰ دارای شش رقم با معنی است .

مثال : 1.2×10^4 دارای دو رقم با معنی است .

مثال : ۱۲۰۰۰ تعداد ارقام با معنی مشخصی نیست .

در عملیات ضرب و تقسیم ، تعداد ارقام با معنی در نتیجه نهایی باید برابر با کمترین تعداد ارقام بامعنی باشد که در عوامل این عملیات موجود است .

مثال :

$$\frac{36.479 \times 2.6}{14.58} = 6.387 = 6.4$$

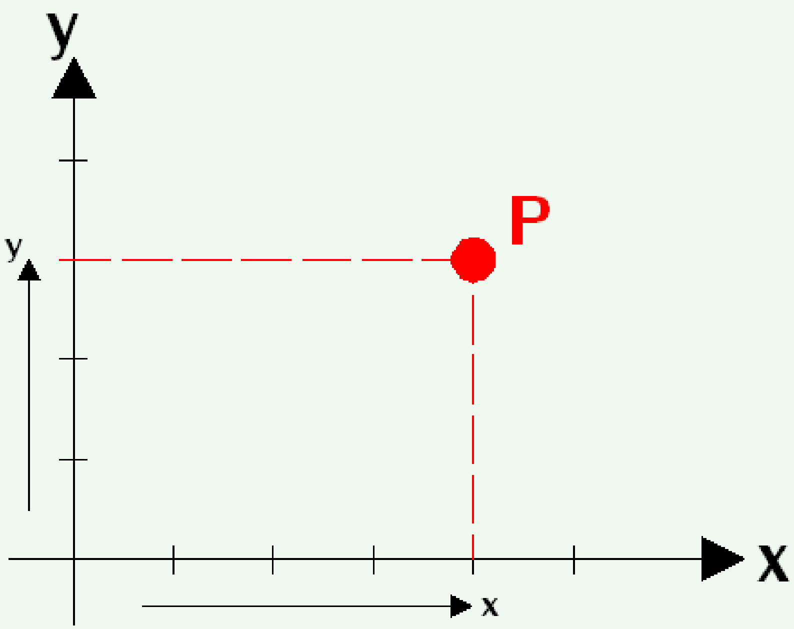
در عملیات جمع و تفریق ، فقط باید کمترین تعداد رقمهای اعشاری در نتیجه نهایی منظور شود .

مثال :

$$17.524 + 2.4 - 3.56 = 16.364 = 16.4$$

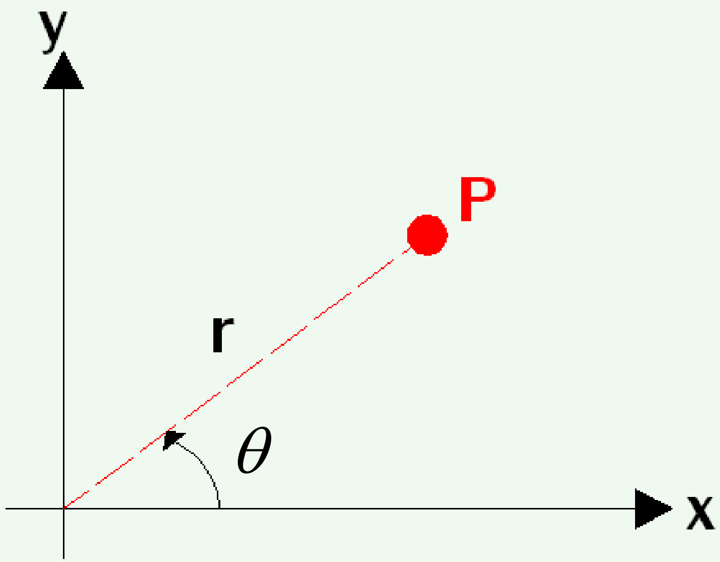
مکان یک جسم همیشه نسبت به یک دستگاه مختصات مشخص می شود که این دستگاه مختصات به یک چهار چوب مرجع (هر موجود فیزیکی) متصل است .

دستگاه مختصات دکارتی :



در دو بعد : مکان نقطه P با مختصات دکارتی (x,y)

دستگاه مختصات قطبی :



مکان نقطه P در مختصات قطبی دو بعدی با (r,θ) مشخص می شود که r مکان نقطه و θ زاویه ای است که در خلاف جهت عقربه ساعت نسبت به جهت مثبت محور در نظر گرفته می شود .

ارتباط بین مختصات قطبی و دکارتی در دو بعد

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \tan^{-1}(\frac{y}{x}) \end{cases}$$

فصـــــــــل دوم

بـــــــــــردارها

معرفی ابزار مفید و کار آمدی به اسم بردار می تواند به روابط پیچیده کمیتهای فیزیکی و اختصار و ساده سازی آنها کمک کند .

همچنین معادله ای که بر حسب بردارها بیان شد با عوض شدن دستگاه مختصات تغییر نمی کند . (قوانین فیزیکی مستقل از دستگاه مختصات انتخاب شده اند .)

کمیتهای فیزیکی تقسیم بندی دیگری نیز دارند :

کمیتهای نرده ای (اسکالر) ⟵ برای بیان آنها تنها گفتن مقدار ، اندازه یا بزرگی کافی است .

کمیتهای برداری ⟵ برای بیان آنها علاوه بر مقدار ، اندازه یا بزرگی بایستی جهتی هم مشخص گردد .

مثال برای کمیتهای نرده ای و برداری

کمیتهای نرده ای (اسکالر) ⟵ طول ، جرم ، زمان ، دما ، کار ، انرژی ، جرم حجمی ، تندی و ...

کمیتهای برداری ⟵ نیرو ، سرعت ، شتاب ، جابجایی ، گشتاور ، تکانه خطی ، تکانه زاویه ای و ...

مثال ۱ :

می گوییم دما 5^0c زیر صفر یا 5^0c بالای صفر ، یا می گوییم ده سال بعد از هجرت یا ده سال قبل هجرت .

آیا به نظر شما دما و زمان کمیتهای اسکالرند یا برداری ؟

حل مثال ۱ :

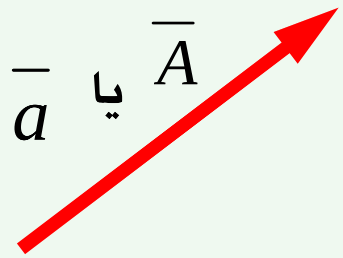
هر دو کمیت اسکالرند زیرا هر گاه مبدا دما را به جای صفر درجه سلسیوس ، صفر مطلق و مبداء زمان را به جای آغاز هجرت ، آغاز خلقت در نظر بگیریم دیگر دمای کمتر از صفر مطلق یا زمان پیش از آغاز خلقت مفهومی ندارد .

فرق تندی با سرعت و جابجایی با طول ؟

سرعت کمیتی برداری است که یک اندازه و یک جهت دارد ، مقدار یا اندازه آن را تندی می نامیم .

جابجایی کمیتی برداری است که یک اندازه و یک جهت دارد ، مقدار یا اندازه آن را طول می نامیم .

هر بردار را با خطی جهت دار نشان می دهیم که طول آن مشخص کننده اندازه اش و فلش جهت آن را نشان می دهد .



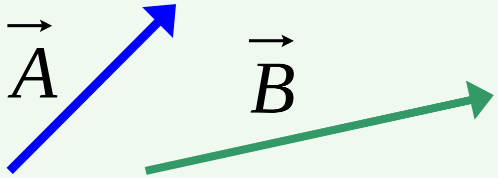
در این درس برای نمایش بردار از حروف کوچک یا بزرگ با نماد فلش روی آن استفاده می کنیم ، ($\overline{A}$ یا $\overline{a}$) و برای اندازه بردار از حروف کوچک یا بزرگ بدون نماد فلش روی آن استفاده می کنیم (A یا a)

جمع بردارها

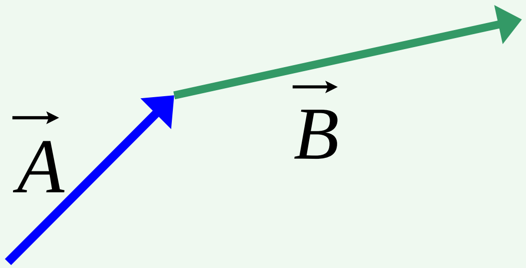
الف) روش مثلث

ب) روش متوازی الاضلاع

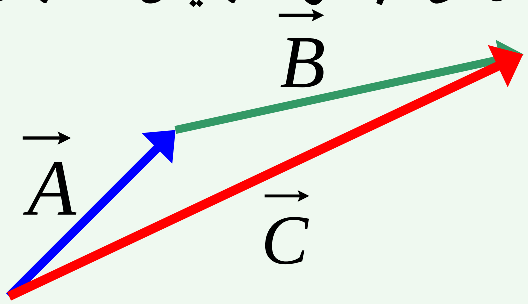
جمع دوبردار به روش مثلث



ابتدا همسنگ بردار $\vec{A}$ و از انتهای آن همسنگ بردار دیگر $\vec{B}$ را رسم می کنیم .



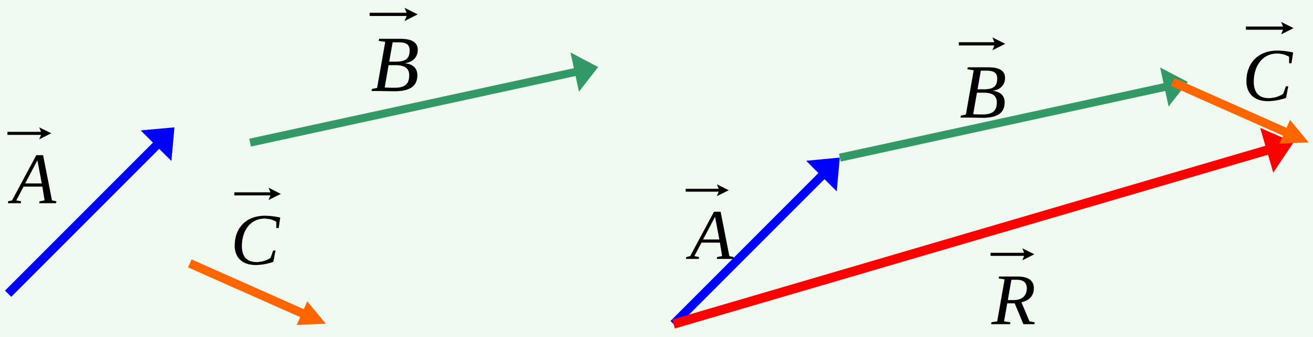
جمع دو بردار برداری است که ابتدای آن مبدا و انتهایش ، انتهای آخرین بردار است .



$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{C}$$

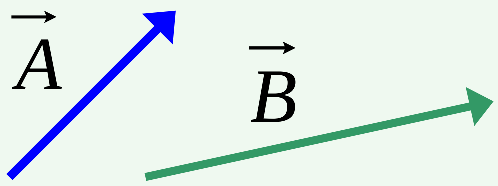
جمع بیش از دوبردار به روش مثلث

ابتدا همسنگ بردار $\vec{A}$ و از انتهای آن همسنگ بردار دوم $\vec{B}$ و از انتهای آن همسنگ بردار سوم و بهمین ترتیب ... . سپس از مبدا به انتهای آخرین بردار ، برداری رسم می کنیم . برای مثال به جمع سه بردار $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ توجه کنید .

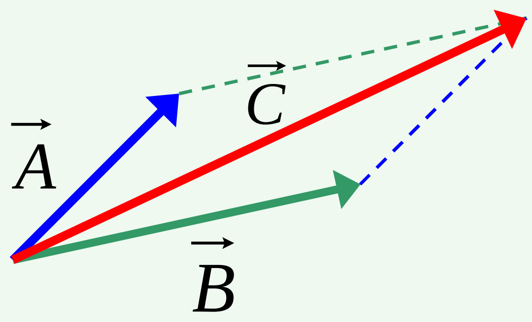


$$\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=\vec{R}$$

جمع دوبردار به روش متوازی الاضلاع



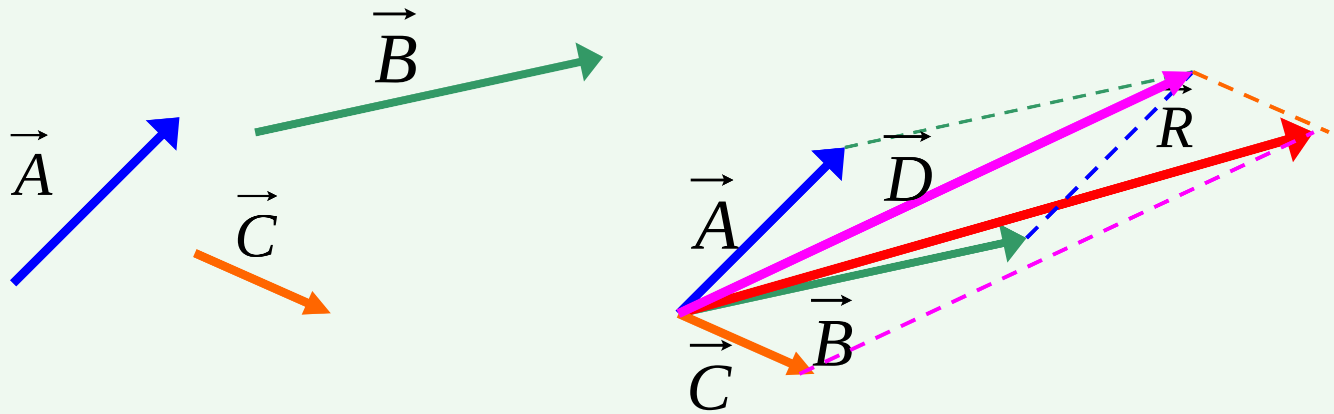
از یک نقطه مبدا همنسگ دو بردار را رسم می کنیم و متوازی الاضلاعی می سازیم که این دو بردار دو ضلع مجاورش باشد . قطر متوازی الاضلاع که از مبدا می گذرد برایند دو بردار است .



$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{C}$$

جمع بیش از دوبردار به روش متوازی الاضلاع

ابتدا همسنگ تمام بردارها را از یک نقطه مبدا رسم می کنیم سپس قطر متواری الاضلفاعی که از دو بردار ساخته می شود با بردار سوم در نظر می گیریم و به همین ترتیب ... . برای مثال به جمع سه بردار $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ توجه کنید .



$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{D}$$

$$\vec{D}+\vec{C}=\vec{R}$$

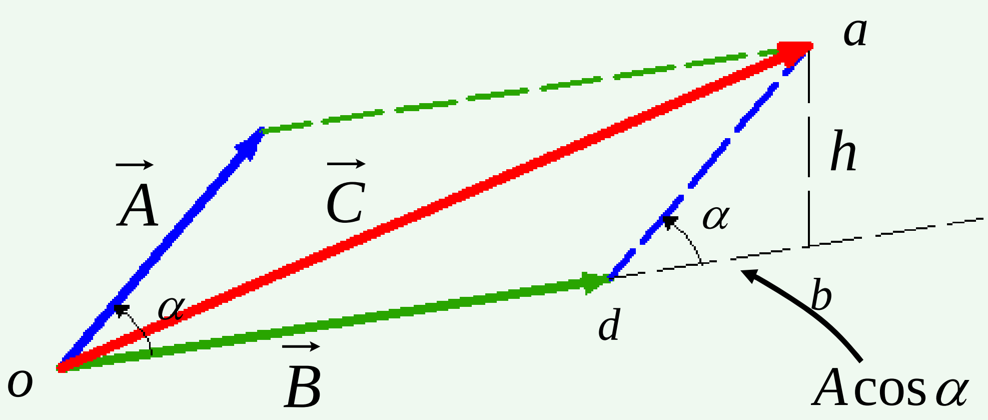
$$\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=\vec{R}$$

مثال ۲ :

در جمع دو بردار $\vec{A}, \vec{B}$ به روش متوازی الاضلاع اگر زاویه بین دو بردار که از یک نقطه می گذرد α باشد . ثابت کنید حاصلجمع دو بردار از رابطه زیر به دست می آید .

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2ABCOS\alpha}$$

حل مثال ۲ :



$h^2 = C^2 - (B + A\cos\alpha)^2$:oab مثلث

$h^2 = A^2 - (A\cos\alpha)^2$:dab مثلث

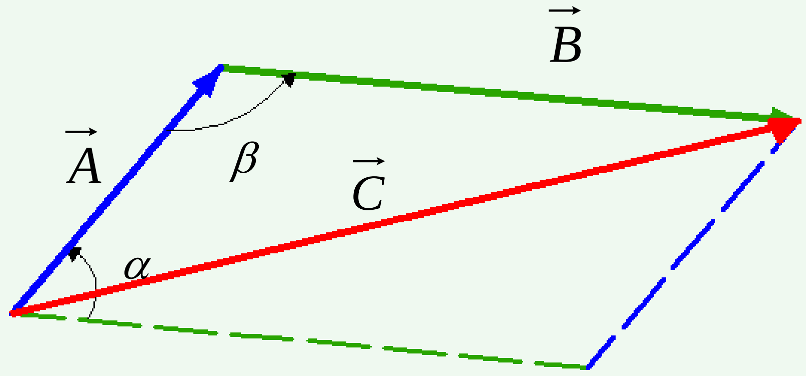
$\longrightarrow$ $C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2ABCOS\alpha}$

مثال ۳ :

در جمع دو بردار $\vec{A},\vec{B}$ به روش مثلث اگر زاویه بین دو بردار که از پشت سر هم رسم شده اند β باشد . ثابت کنید حاصلجمع دو بردار از رابطه زیر به دست می آید .

$$C=\sqrt{A^2+B^2-2ABCOS\beta}$$

حل مثال ۳ :

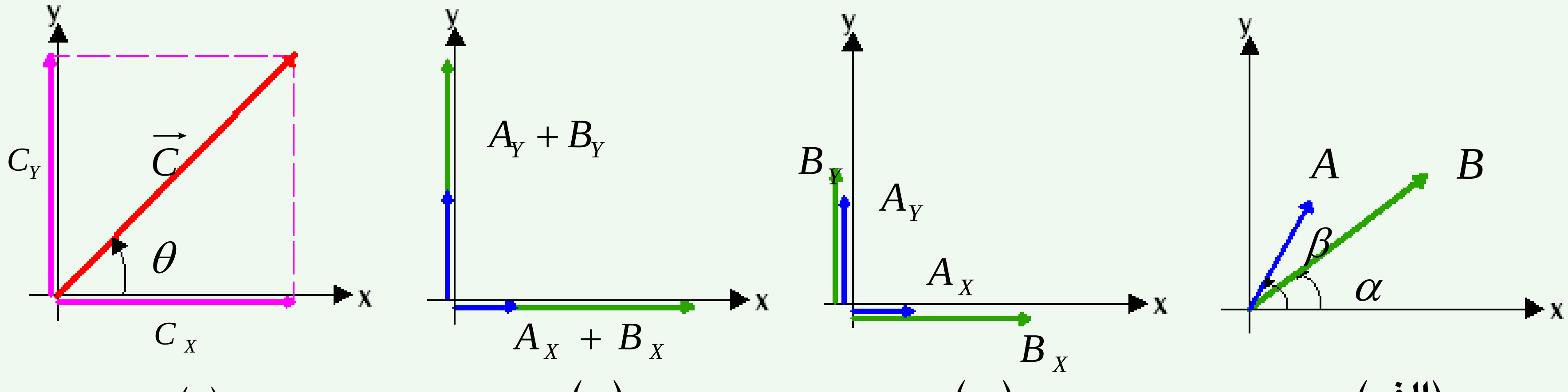


$$\alpha = \pi - \beta$$

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos(\pi - \beta)} \longrightarrow C = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\beta}$$

مشخص کردن جهت یک بردار یعنی زاویه آن نسبت به جهت مثبت محور X ها در جهت پاد ساعتگرد با توجه به روشهای مثلث و متوازی الاضلاع مشکل و یا طولانی است . بنابراین معمولا از روش تحلیلی جمع بردارها برای تعیین اندازه و جهت بردار حاصلجمع استفاده می کنیم .

اندازه و جهت برایند دو $\vec{A}, \vec{B}$ بردار به روش تحلیلی



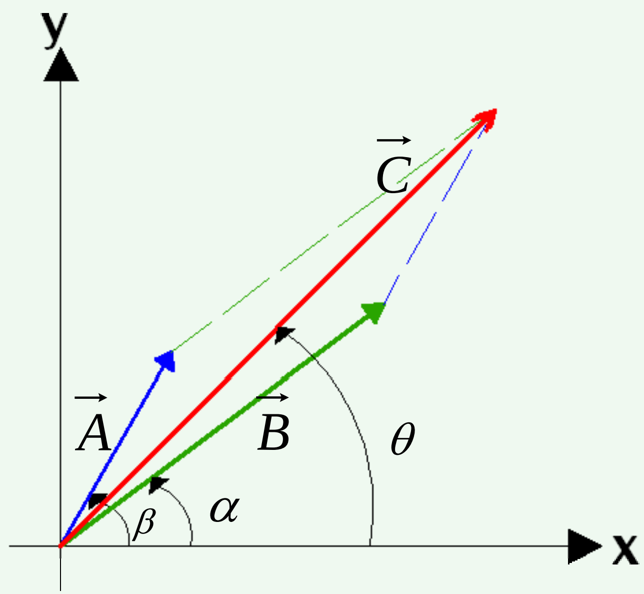
$$C = \sqrt{(C_X{}^2 + C_Y{}^2}$$ یا $$C = \sqrt{(A_X + B_X)^2 + (A_Y + B_Y)^2}$$

$$\tan \theta = \frac{C_Y}{C_X}$$ یا $$\tan \theta = \frac{A_Y + B_Y}{A_X + B_X}$$

مثال ۴ :

اندازه و جهت برایند دو بردار $\vec{A}, \vec{B}$ را تعیین کنید در صورتی که

$$A = 2, B = 6, \alpha = 37^0, \beta = 53^0$$



حل مثال ۴ :

$$A_X = A\cos\beta = 1.2$$

$$A_Y = A\sin\beta = 1.6$$

$$B_X = B\cos\alpha = 4.8$$

$$B_Y = B\sin\alpha = 3.6$$

$$C = \sqrt{(A_X + B_X)^2 + (A_Y + B_Y)^2} \cong 7.94$$

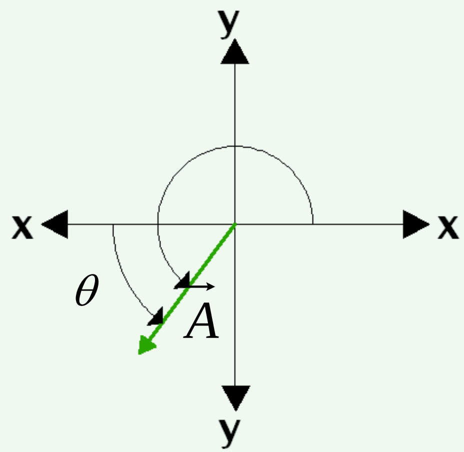
$$\tan\theta = \frac{A_Y + B_Y}{A_X + B_X} = \frac{2.6}{3}$$

در روش تحلیل جمع بردارها هر برداری مثل بردار $\vec{A}$ در هر ربع مثلثاتی که باشد می توانیم به دو طریق مولفه هایش را تعیین کنیم :

الف) با توجه به زاویه ای که با جهت مثبت محور x در جهت پاد ساعتگرد دارد .

$$A_X = A\cos(\pi + \theta)$$

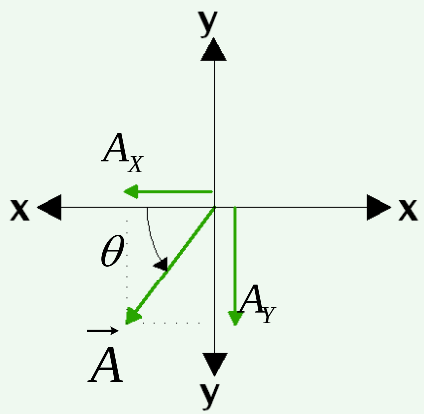
$$A_Y = A\sin(\pi + \theta)$$



ب) با توجه به زاویه ای که با یک محور دارد و جهت مولفه ها .

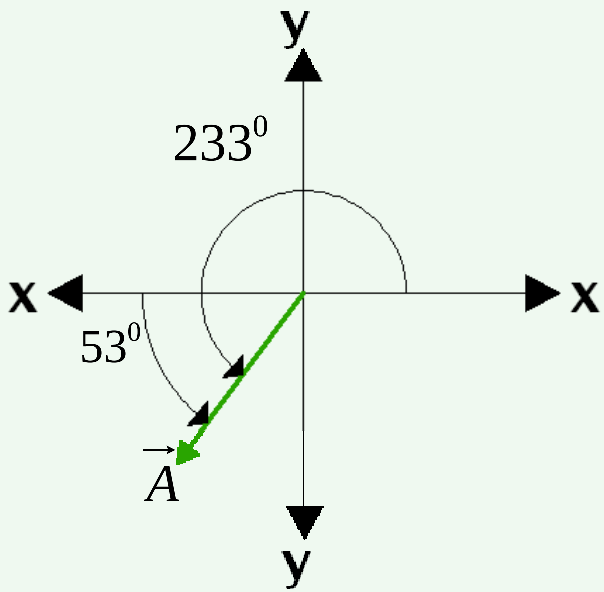
$$A_X = -A\cos\theta$$

$$A_Y = -A\sin\theta$$



مثال ۵ :

مولفه های بردار $\vec{A}$ را در شکل زیر به دو طریق به دست آورید.



حل مثال ۵ :

الف)

$$A_X = A\cos 233 = -1.2$$

$$A_Y = A\sin 233 = -1.6$$

ب)

$$A_X = -A\cos 53 = -1.2$$

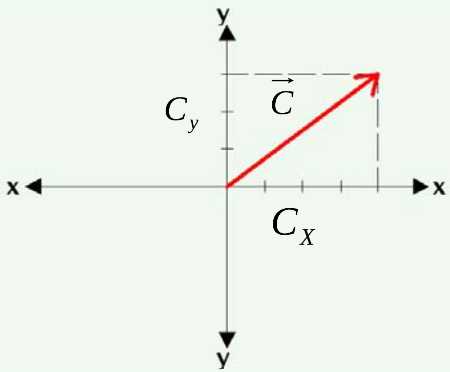
$$A_Y = -A\sin 53 = -1.6$$

در صورتی که اندازه و جهت برداری به صورت زیر به دست آمده باشد :

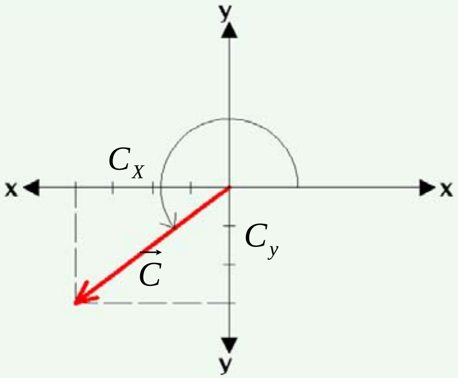
$$C = \sqrt{{C_X}^2 + {C_Y}^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = 5$$

$$\tan\theta = \frac{C_Y}{C_X} = \frac{-3}{-4}$$

برای رسم صحیح بردار نبایستی علامتها را در کسر مربوطه به $\tan\theta$ ساده کنیم .



نمایش غیر صحیح بردار $\vec{C}$



نمایش صحیح بردار $\vec{C}$

اگر $\vec{R}=\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$ باشد ، روابط مورد استفاده در تعیین اندازه و جهت $\vec{R}$ عبارتند از:

$$R_x = A_x + B_x + C_x$$

$$R_y = A_y + B_y + C_y$$

$$R = \sqrt{R_x^{\ 2} + R_y^{\ 2}} \qquad , \qquad \tan\theta = \frac{R_y}{R_x}$$

اگر $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} + \dots$ باشد ، روابط مورد استفاده در تعیین اندازه و جهت $\vec{R}$ عبارتند از:

$$R_x = A_x + B_x + C_x + D_x + \dots$$

$$R_y = A_y + B_y + C_y + D_y + \dots$$

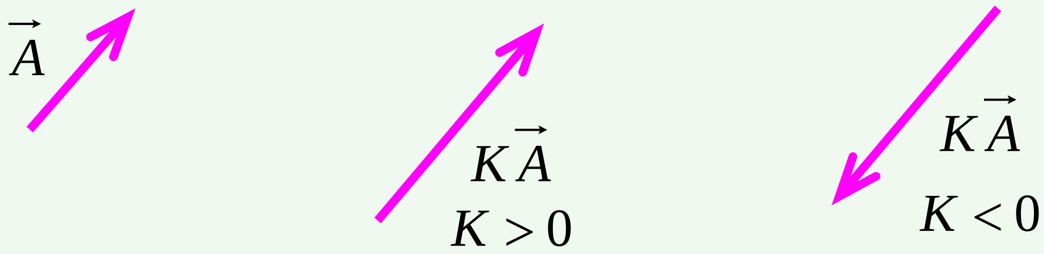
$$R = \sqrt{R_x^{\ 2} + R_y^{\ 2}} \qquad , \qquad \tan\theta = \frac{R_y}{R_x}$$

ضرب معمولی اسکالر دو بردار

حاصلضرب معمولی اسکالر K در بردار $\vec{A}$ ($K\vec{A}$) برداری است که اندازه آن K برابر اندازه بردار $\vec{A}$ و جهت آن به علامت اسکالر K بستگی دارد .

اگر K>0 $\longleftarrow$ بردار $K\vec{A}$ همجهت با بردار $\vec{A}$

اگر K<0 $\longleftarrow$ بردار $K\vec{A}$ در خلاف جهت بردار $\vec{A}$



با توجه به این که اگر اندازه برداری K برابر شود اندازه مولفه هایش نیز K برابر می شود اندازه و جهت بردار $\vec{C} = 2\vec{A} + \vec{B}$ از رابطه زیر به دست می آیند :

$$C = \sqrt{(2A_X + B_X)^2 + (2A_Y + B_Y)^2} \quad , \quad \tan\theta = \frac{2A_Y + B_Y}{2A_X + B_X}$$

که $C_Y = 2A_Y + B_Y \quad , \quad C_X = 2A_X + B_X$ است .

تفریق بردار $\vec{B}$ از $\vec{A}$ یعنی جمع بردار $\vec{A}$ با $(-\vec{B})$ و منفی یک بردار برداری برابر با بردار $\vec{B}$ ولی در خلاف جهت آن است و چون با تغییر جهت بردار ، جهت مولفه هایش نیز تغییر می کند ، اندازه و جهت بردار $\vec{C}=\vec{A}-\vec{B}$ از رابطه زیر به دست می آید :

$$C=\sqrt{(A_X-B_X)^2+(A_Y-B_Y)^2} \quad , \quad \tan\theta=\frac{A_Y-B_Y}{A_X-B_X}$$

مثال ۶ :

در روش تحلیلی برای تعیین اندازه و جهت بردار $\vec{R} = 2\vec{A} - \vec{B} + 3\vec{C}$ از چه روابطی استفاده می کنیم ؟

حل مثال ۶ :

$$R_X = 2A_X - B_X + 3C_X$$

$$R_Y = 2A_Y - B_Y + 3C_Y$$

$$R = \sqrt{R_X{}^2 + R_Y{}^2} \quad , \quad \tan\theta = -\frac{R_Y}{R_X}$$

تمرین ۱ :

در شکل زیر اندازه بردارها ی $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ به ترتیب ۲و۳ویک واحد فرض می شوند .

الف) اندازه و جهت بردار $\vec{P}=\vec{B}-2\vec{A}$

ب) اندازه و جهت بردار $\vec{R}=\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$

ج) چه برداری را با بردار $\vec{P}$ جمع کنیم تا بردار $\vec{R}$ بدست آید ؟

حل تمرین ۱ :

چون

$$A_X = A\sin 37 = 2(0.8)1.6$$

$$A_Y = A\sin 37 = 2(0.6) = 1.2$$

$$B_X = -B\sin 37 = -3(0.6) = -1.8$$

$$B_Y = B\cos 37 = 3(0.8) = 2.4$$

$$C_X = -C\cos 53 = -1(0.6) = 0.6$$

$$C_Y = -C\sin 53 = -1(0.8) = 0.8$$

حل تمرین ۱ : الف)

$$P_X = B_X - 2A_X = -5 \qquad P_Y = B_Y - 2A_Y = 0$$

$$P = \sqrt{P_X{}^2 + P_Y{}^2} = \sqrt{(-5)^2} = 5 \quad , \quad \tan\theta = \frac{P_Y}{P_X} = \frac{0}{-5} \Rightarrow \theta = 180^0$$

حل تمرين ١ : ب)

$$R_Y = A_Y + B_Y + C_Y = 2.8$$

$$R_X = A_X + B_X + C_X = -0.8$$

$$R = \sqrt{{R_X}^2 + {R_Y}^2} = \sqrt{(-0.8)^2 + (2.8)^2} = \quad , \ \tan\theta = \frac{R_Y}{R_X} = \frac{2.8}{-0.8} = \frac{7}{-2}$$

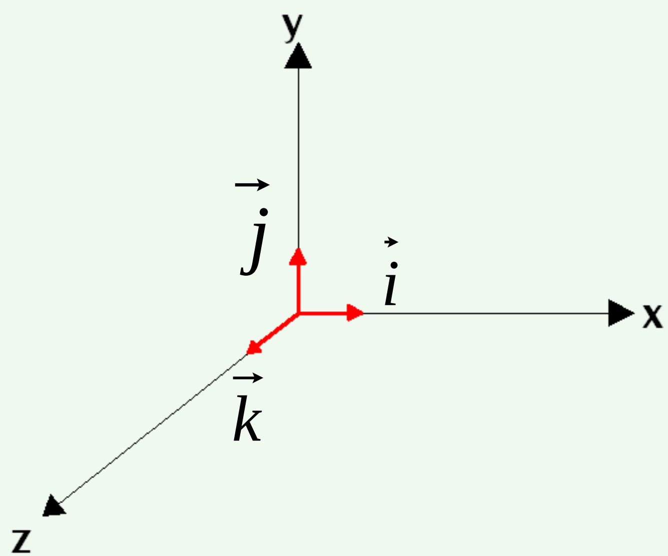
حل تمرین ۱ : ج)

$$\overrightarrow{X}+\overrightarrow{P}=\overrightarrow{R}\Rightarrow\begin{cases}X_x=R_x-P_x=-0.8-(-5)=4.2\\X_y=R_y-P_y=2.8-0=2.8\end{cases}$$

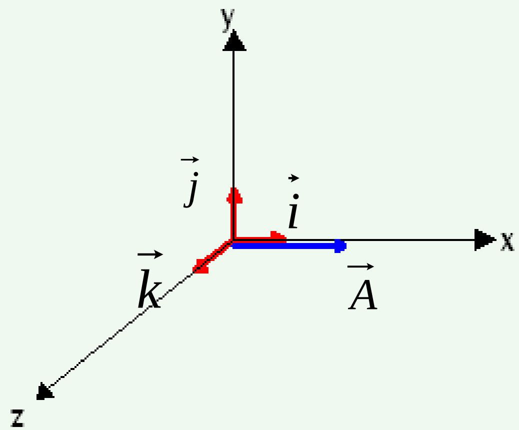
$$X=\sqrt{X_x{}^2+X_y{}^2}=\sqrt{(4.2)^2+(2.8)^2}=\quad,\ \tan\theta=\frac{X_y}{X_x}=\frac{2.8}{4.2}=\frac{2}{3}$$

بردارهای یکه

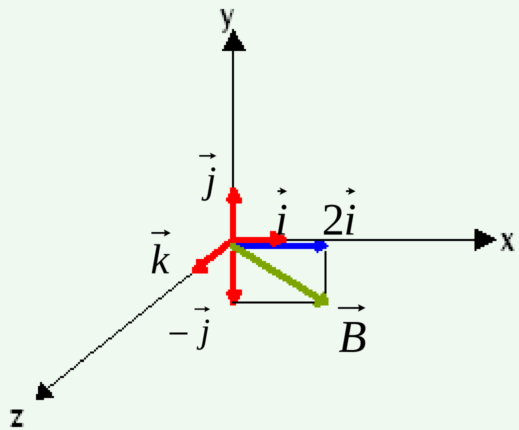
برای ساده سازی عملیات برداری و نشان دادن جهت هر بردار در فضا از بردارهای یکه $\vec{i}$ در جهت مثبت محور x ها ، $\vec{j}$ در جهت مثبت محور y ها و $\vec{k}$ در جهت مثبت محور z ها استفاده می شود که اندازه آنها واحد و بدون یکا هستند .



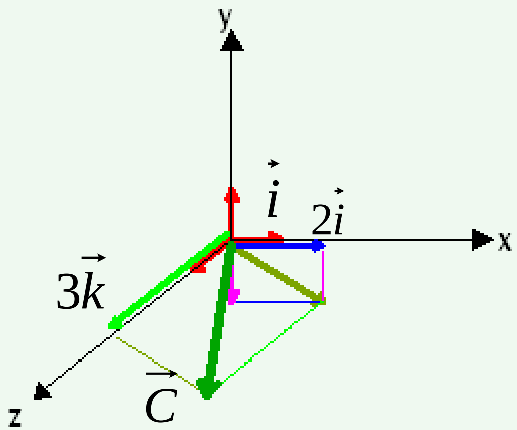
نمایش بردارها در فضا با استفاده از بردارهای یکه



$$A = 2\vec{i}$$

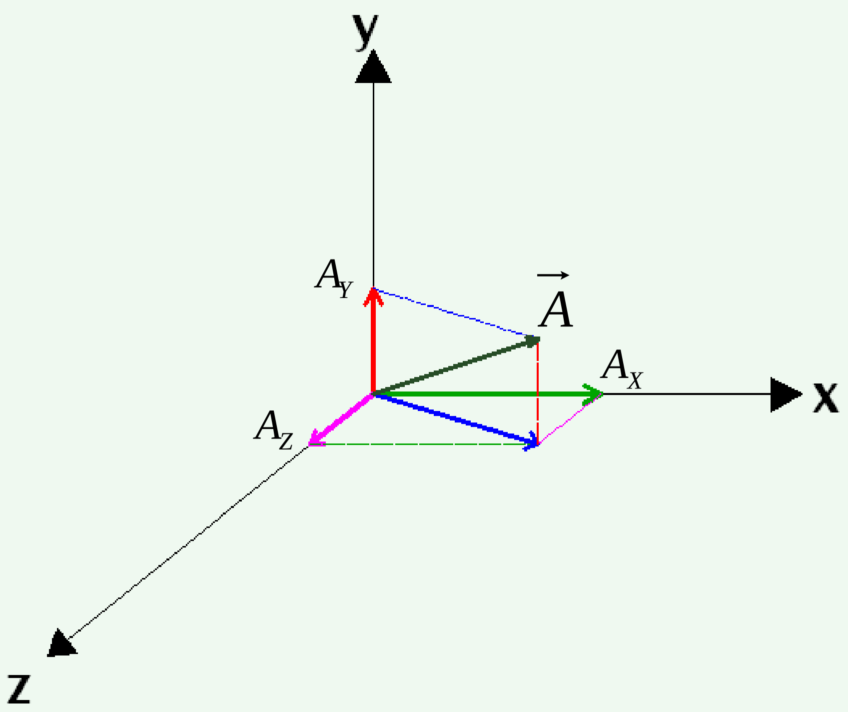


$$\vec{B} = 2\vec{i} - \vec{j}$$



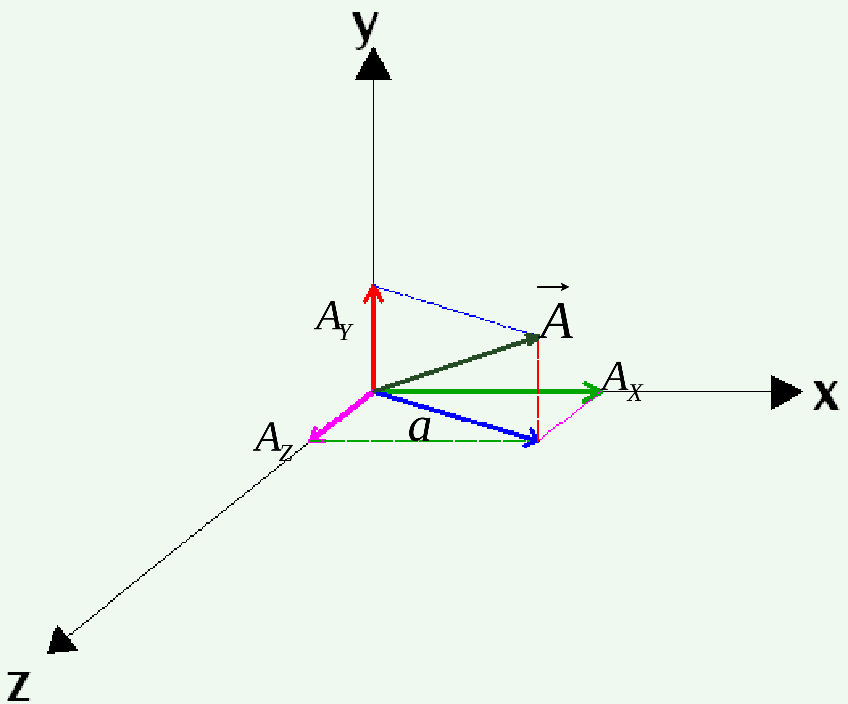
$$\vec{C} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$$

نمایش بردارها در فضای سه بعدی به طور کلی



$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$$

اندازه یک بردار در فضای سه بعدی



$$\begin{cases} a^2 = A_x{}^2 + A_y{}^2 \\ A^2 = a^2 + A_y{}^2 \end{cases} \Rightarrow A^2 = A_x{}^2 + A_y{}^2 + A_z{}^2$$

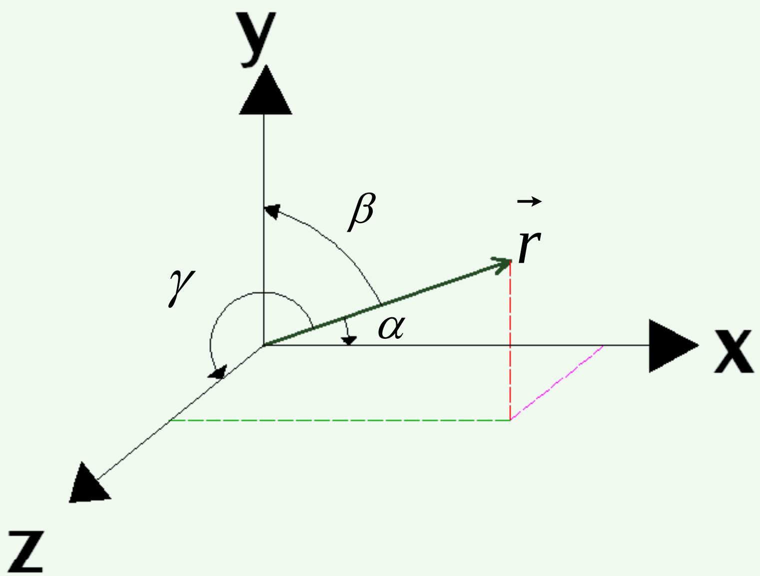
$$A = \sqrt{A_x{}^2 + A_y{}^2 + A_z{}^2}$$

تمرین ۲ :

بردار مکان ذره ای به صورت $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ اگر زاویه میان این بردار و هر یک از محورهای x,y,z را به ترتیب با γ, β, α مشخص کنیم . نشان دهید که :

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

حل تمرین ۲ :



$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{r_x}{r}\\ \cos\beta &= \frac{r_y}{r}\\ \cos\gamma &= \frac{r_z}{r}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{{A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2}{A^2} = 1$$

تمرین ۳ :

دو بردار $\vec{B} = -3\vec{i} + \vec{j}, \vec{A} = 2\vec{i} + \vec{j}$ مفروضند مطلوب است :

الف) اندازه و جهت بردار $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$

ب) چه برداری را با بردار $\vec{A}$ جمع کنیم تا بردار $\vec{B}$ بدست آید .

حل تمرین ۳ :

الف)

$$\vec{C} = (2\vec{i} + \vec{j}) + (-3\vec{i} + \vec{j}) = -\vec{i} + 2\vec{j}$$

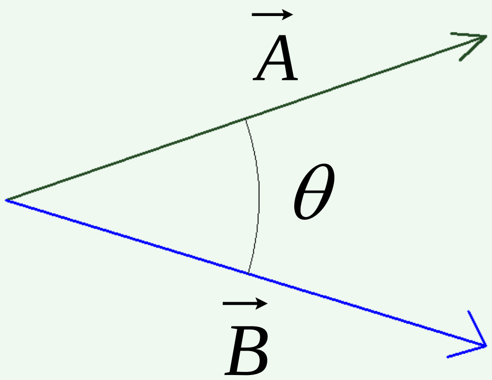
$$\begin{cases} C_x = 1 \\ C_y = 2 \end{cases} \Rightarrow C = \sqrt{{C_x}^2 + {C_y}^2} = \sqrt{5} \quad , \quad \tan\theta = \frac{C_y}{C_x} = \frac{2}{-1}$$

ب)

$$\vec{X} + \vec{A} = \vec{B} \Rightarrow \vec{X} = \vec{B} - \vec{A} = (-3\vec{i} + \vec{j}) - (2\vec{i} + \vec{j}) = -\vec{i}$$

$\vec{X}$ بردار واحد در جهت منفی محور x است .

حاصلضرب اسکالر (نرده ای) دو بردار ، کمیتی نرده ای است .



$$\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta$$

حاصلضرب اسکالردو بردار بر حسب مولفه های دو بردار :

$$\vec{A}.\vec{B} = (A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}).(B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k})$$

چون

$$\vec{i}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{j} = \vec{k}.\vec{k} = 1$$

$$(\vec{i}.\vec{j}) = (\vec{i}.\vec{k}) = (\vec{j}.\vec{i}) = (\vec{j}.\vec{k}) = (\vec{k}.\vec{i}) = (\vec{k}.\vec{i}) = (\vec{k}.\vec{j}) = 0$$

در نتیجه

$$\vec{A}.\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

رابطه ای برای زاویه دو بردار

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{AB} = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{\sqrt{A_x^{\ 2} + A_y^{\ 2} + A_z^{\ 2}}.\sqrt{B_x^{\ 2} + B_y^{\ 2} + B_z^{\ 2}}}$$

تمرین ۴ :

دو بردار $\vec{B} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}, \vec{A} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$ **مفروضند مطلوب است :**

الف) اندازه هر بردار

ب) برداری یکه در جهت هر بردار

ج) حاصلضرب اسکالر دوبردار

د) زاویه بین دو بردار

حل تمرین ۴ :

الف)

$$A=\sqrt{A_x{}^2+A_y{}^2+A_z{}^2}=\sqrt{16+4+16}=6$$

$$B=\sqrt{B_x{}^2+B_y{}^2+B_z{}^2}=\sqrt{1+4+4}=3$$

ب)

$$\vec{a}=\frac{\vec{A}}{A}\Rightarrow\vec{a}=\frac{4\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}}{6}\Rightarrow\vec{a}=\frac{2}{3}\vec{i}-\frac{1}{3}\vec{j}+\frac{2}{3}\vec{k}$$

$$\vec{b}=\frac{\vec{B}}{B}\Rightarrow\vec{b}=\frac{\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}}{3}\Rightarrow\vec{a}=\frac{1}{3}\vec{i}-\frac{2}{3}\vec{j}+\frac{2}{3}\vec{k}$$

حل تمرین ۴ :

ج)

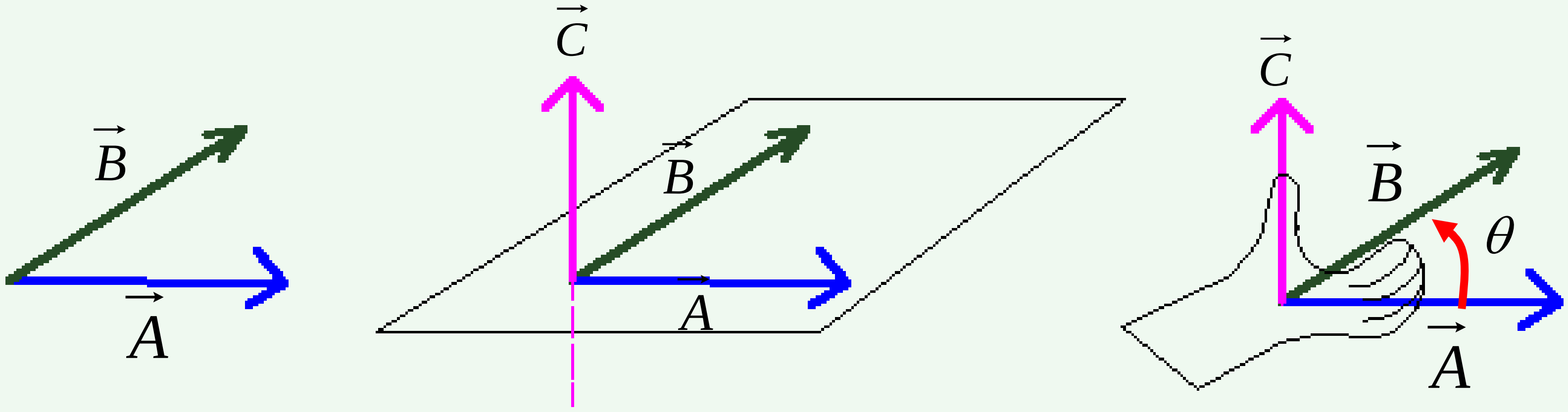
$$\vec{A}.\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$
$$= (4)(1) + (-2)(-2) + (4)(2) = 4 + 4 + 8 = 16$$

د)

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{AB} \Rightarrow \cos\theta = \frac{16}{(6)(3)} = \frac{8}{9}$$

ضرب برداری دو بردار :

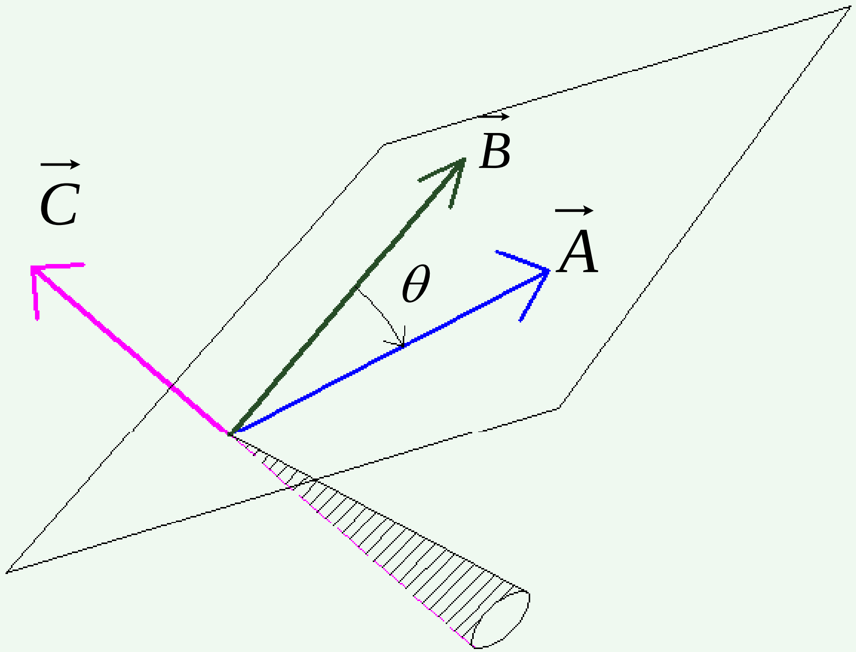
برداری است که اندازه آن عبارت است از حاصلضرب اندازه های دو بردار در سینوس زاویه کوچکتر بین آنها و امتداد آن بر صفحه دو بردار عمود است و جهت آن با استفاده از قانون شست و چهار انگشت خمیده دست راست یا پیچ راست گرد تعیین می شود .



$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

$$C = AB\sin\theta$$

قانون پیچ راستگرد



$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

حاصلضرب برداری دو بردار جابجایی ناپذیر است .

$$\vec{A}\times\vec{B}\neq\vec{B}\times\vec{A}$$

حاصلضرب دو بردار توزیع پذیر است .

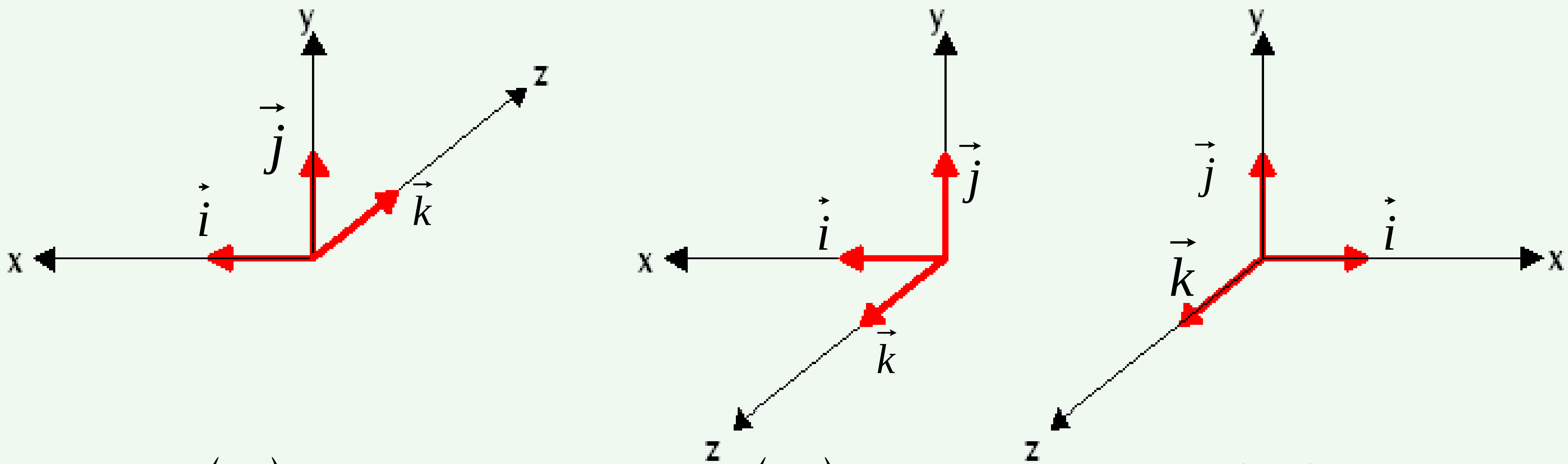
$$\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$$

محورهای راست گرد و چپ گرد

هر گاه محورهای مختصات x,y,z را به ترتیب دوره ای بر مبنای حروف الفبا در جهت عکس عقربه ساعت در نظر بگیریم محورها را راستگرد می گویند . (الف)

اگر جهت یکی از محورهای مختصات راستگرد را عوض کنیم محورها چپ گرد می شوند .(ب)

اگر جهت دو محور مختصات راستگرد را عوض کنیم محورها راست گرد می شوند .(ج)



(الف) (ب) (ج)

با توجه به حاصلضرب برداری دو بردار ، برای بردار های یکه $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ در محورهای مختصات داریم :

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0$$

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k} \quad , \quad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i} \quad , \quad \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$$

$$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k} \quad , \quad \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i} \quad , \quad \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$$

حاصلضرب برداری دو بردار بر حسب بردارهای یکه و مولفه های هر بردار

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = (A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}) \times (B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k})$$

$$\vec{C} = (A_y B_z - A_z B_y)\vec{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\vec{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\vec{k}$$

حاصلضرب برداری دو بردار را می توان از روی ماتریس ۳×۳ زیر به دست آورد :

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

که در سطر اول بردارهای یکه $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ و در سطر دوم مولفه های بردار اول $\vec{A}$ و در سطر سوم مولفه های بردار $\vec{B}$ قرار داده می شوند.

تمرین ۵ :

دو بردار $\vec{B}=2\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}, \vec{A}=-\vec{i}+2\vec{j}-5\vec{k}$ **مفروضند بردار یکه ای که بر دو بردار مذکور عمود باشد مشخص کنید .**

حل تمرين ۵ :

$$\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}=\left[(2)(-2)-(5)(3)\right]\vec{i}+\left[(-5)(2)-(-1)(-2)\right]\vec{j}+\left[(-1)(3)-(2)(2)\right]\vec{k}$$
$$=11\vec{i}-12\vec{j}-7\vec{k}$$

$$\hat{C}=\frac{\vec{C}}{C}=\frac{11\vec{i}-12\vec{j}-7\vec{k}}{\sqrt{11^2+12^2+7^2}}\Rightarrow\hat{C}=\frac{11}{\sqrt{314}}\vec{i}-\frac{12}{\sqrt{314}}\vec{j}-\frac{7}{\sqrt{314}}\vec{k}$$

فصــــــل سوم

حرکت یک بعــــــدی

مکانیک از سه بخش اصلی تشکیل می شود :

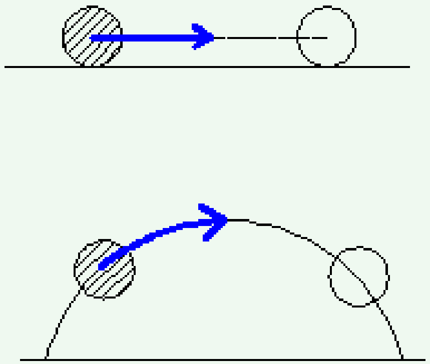
الف) سینماتیک : از حرکت اجسام صحبت می شود بدون در نظر گرفتن عامل آن

ب) دینامیک : از حرکت اجسام صحبت می شود با در نظر گرفتن عامل آن

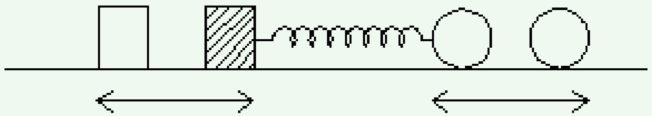
ج) از تعادل اجسام در حال سکون صحبت می شود .

سینماتیک یک بعدی ذره

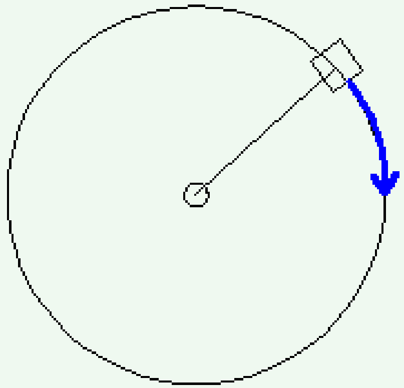
در این فصل جسم را که ممکن است حرکت انتقالی ، دورانی ، ارتعاشی یا ترکیبی از اینها داشته باشد ذره (نقطه مادی بدون بعد) فرض می کنیم و ابتدا در حرکتی انتقالی بر روی یک خط مستقیم ، ارتباط بین a,v,t,x را بدون در نظر گرفتن عامل حرکت بررسی می کنیم .



انتقال



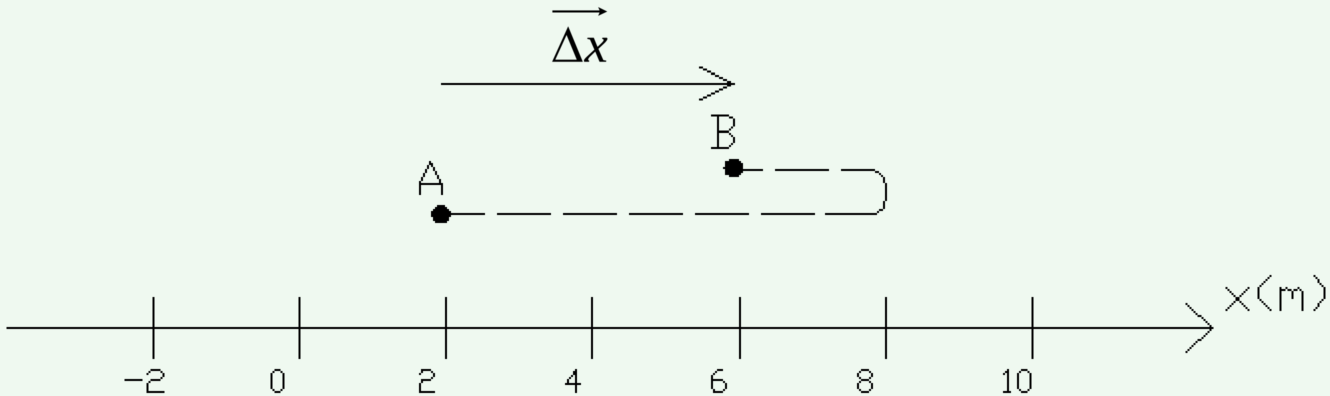
ارتعاش



دوران

جابجایی برداری است که فقط به مکانهای اولیه و نهایی بستگی دارد و به جزئیات حرکت و نوع مسیر وابسته نیست .

مسافت طی شده بین دو نقطه همیشه با اندازه بردار جابجایی بین همان دو نقطه برابر نیست .



جابجایی $\Delta x = x_2 - x_1 = 6 - 2 = 4m$

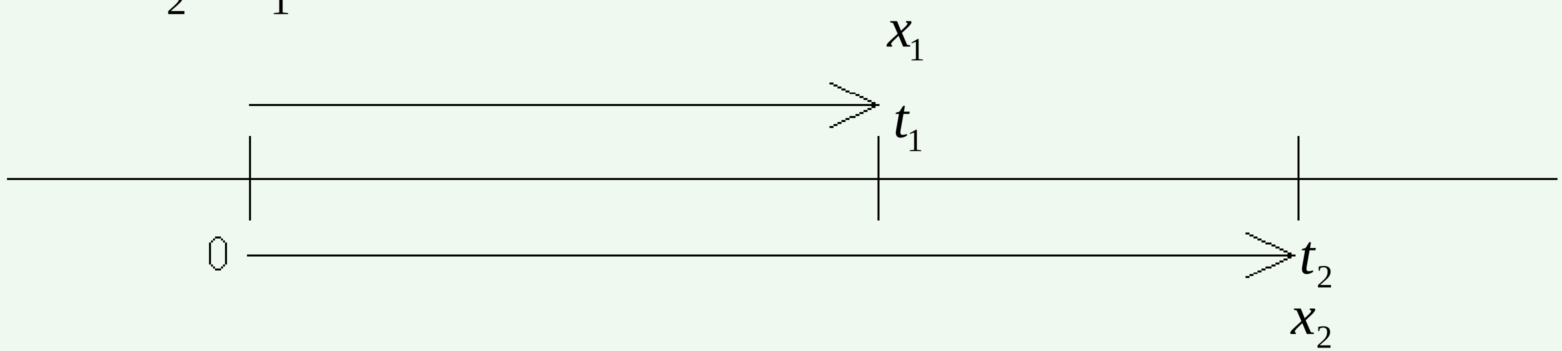
مسافت طی شده $10m$

تندی متوسط و سرعت متوسط

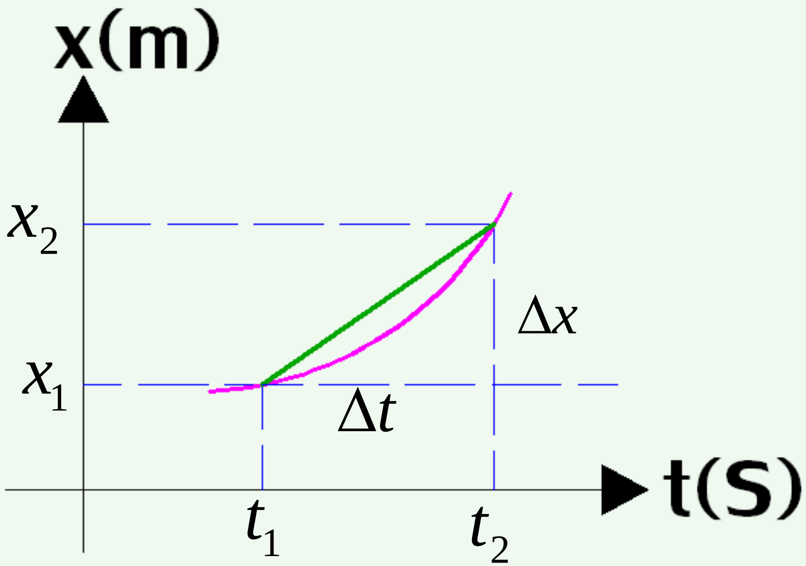
تندی متوسط عبارت است از مسافت طی شده تقسیم بر زمان سپری شده و سرعت متوسط برداری است که با بردار جابجایی ذره هم جهت است .

اگر در لحظه t_1 موقعیت جسمی $\vec{x_1}$ و در لحظه t_2 موقعیتش $\vec{x_2}$ باشد سرعت متوسط بین این دو موقعیت عبارت است از :

$$\vec{\bar{v}} = \frac{\vec{x_2} - \vec{x_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} (\frac{m}{s})$$



اندازه سرعت متوسط بین دو نقطه از روی نمودارx-t

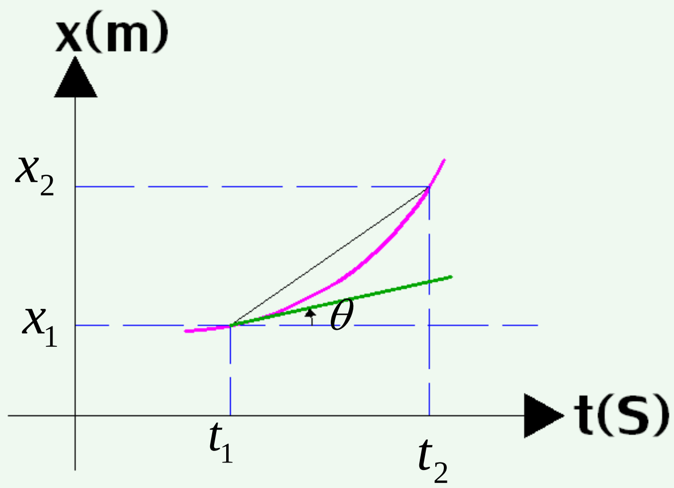


شیب وتر بین دو نقطه در نمودار x-t

$$\bar{v} = \tan\theta = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

سرعت لحظه ای

سرعت دریک لحظه همان سرعت متوسط بین دو لحظه بسیار نزدیک است . به عبارت دیگر وقتی $\Delta t \to 0$ میل می کند ، شیب وتر بین دو نقطه به شیب مماس در لحظه مورد نظر نزدیک می شود .



$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta x}}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

اندازه سرعت لحظه ای: مشتق مسافت نسبت به زمان

اندازه سرعت لحظه ای: شیب مماس بر نمودار x-t در لحظه مورد نظر

شتاب

شتاب یعنی عجله در این درس وقتی حرکت جسمی شتابدار است که سرعتش تغییر کند :

الف) اندازه سرعت تغییر کند ← شتاب خطی یا مماسی

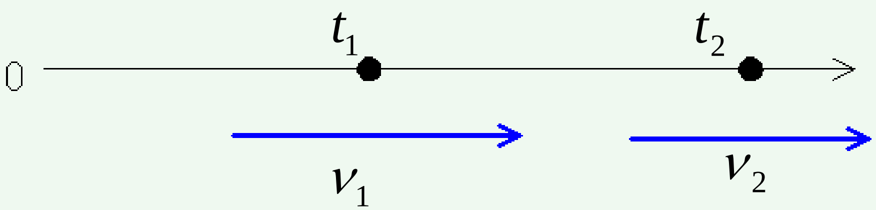
ب) جهت سرعت تغییر کند ← شتاب مرکز گرا

ج) اندازه و جهت سرعت هر دو تغییر کند ← دو شتاب داریم که شتاب کل برآیند آنهاست .

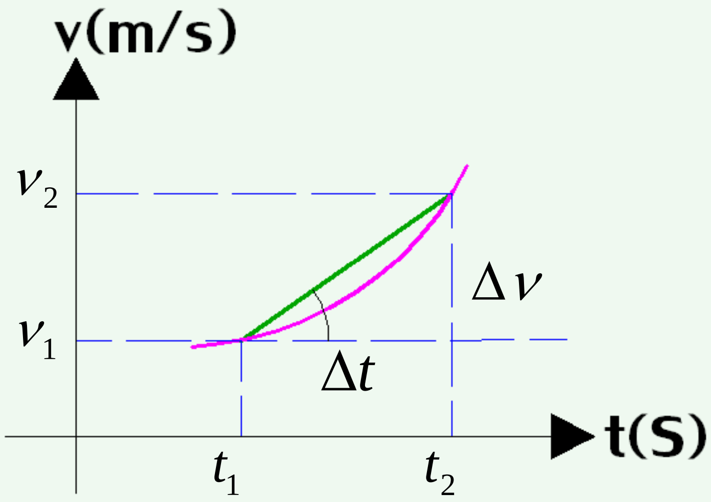
شتاب متوسط

اگر در لحظه t_1 سرعت جسمی $\overrightarrow{v_1}$ و در لحظه t_2 سرعتش $\overrightarrow{v_2}$ باشد شتاب متوسط بین این دو لحظه عبارت است از :

$$\vec{a} = \frac{\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \left(\frac{m}{s^2}\right)$$



اندازه شتاب متوسط بین دو نقطه از روی نمودار v-t

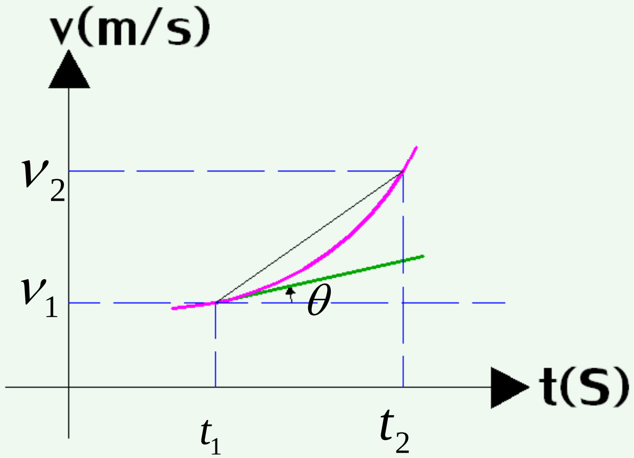


شیب وتر بین دو نقطه در نمودار v-t

$$\bar{a} = \tan\theta = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

شتاب لحظه ای

شتاب دریک لحظه همان شتاب متوسط بین دو لحظه بسیار نزدیک است . به عبارت دیگر وقتی میل می کند ، شیب وتر بین دو نقطه به شیب مماس در لحظه مورد نظر نزدیک می شود .



$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

اندازه شتاب لحظه ای:
- مشتق سرعت نسبت به زمان
- شیب مماس بر نمودار **v-t** در لحظه مورد نظر

مثال ۱ :

معادله حرکت (رابطه x-t) جسمی بر روی خط مستقیم به صورت $x = 5t^2 + 6t + 1$ **تعریف می شود مطلوب است :**

الف) تندی متوسط جسم بین دو لحظه $t_2 = 2s, t_1 = 1s$

ب) تندی جسم در لحظه $t = 2s$

حل مثال ۱ :

الف)

$$x_1 = 5(1)^2 + 6(1) + 1 = 11m$$

$$x_2 = 5(2)^2 + 6(2) + 1 = 32m$$

$$\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \rightarrow \bar{v} = \frac{32-11}{2-1} = 21\frac{m}{s}$$

ب)

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow v = 10t + 6$$

$$t = 2 \Rightarrow v = 26\frac{m}{s}$$

مثال ۲ :

در مثال ۱ مطلوب است :

الف) شتاب متوسط جسم بین دو لحظه $t_2 = 2s, t_1 = 1s$

ب) نسبت مسافت طی شده در ثانیه سوم به مسافت طی شده در ثانیه اول

حل مثال ۲ :

الف)

$$v = 10t + s \begin{cases} v_1 = 16\dfrac{m}{s} \\ v_2 = 26\dfrac{m}{s} \end{cases}$$

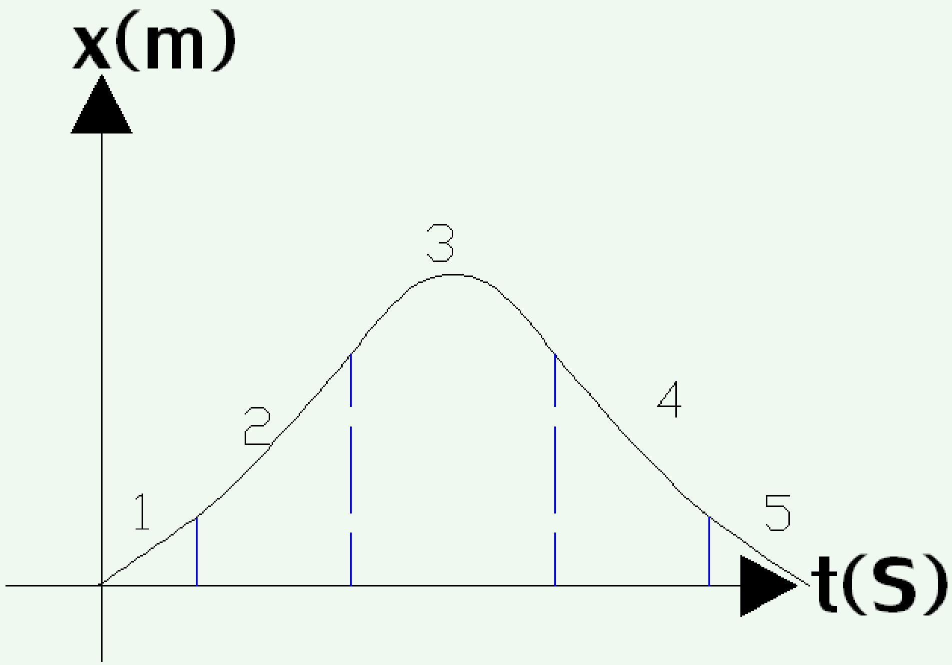
$$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{26-16}{2-1} = 10\frac{m}{s^2}$$

ب)

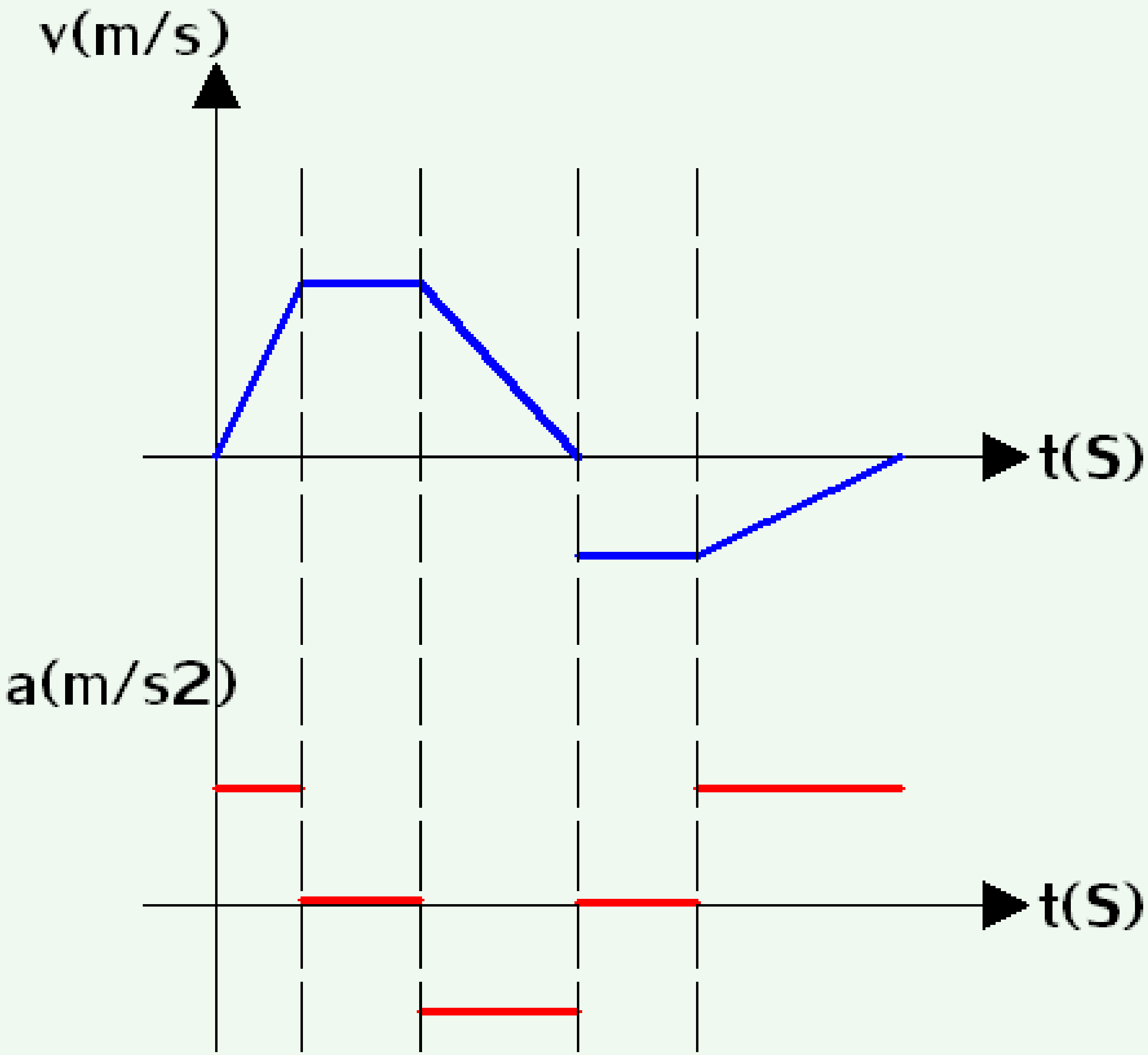
$$\left.\begin{array}{l} X_1 = x_1 - x_0 \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_1 = 12 \end{cases} \Rightarrow X_1 = 11 \\ X_3 = x_3 - x_2 \begin{cases} x_2 = 32 \\ x_3 = 64 \end{cases} \Rightarrow X_3 = 32 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{X_3}{X_1} = \frac{32}{11}$$

مثال ۳ :

نمودار تغییرات x-t برای حرکت جسمی به صورت زیر است نمودارهایی تقریبی برای تغییرات v-t و a-t این حرکت رسم کنید . (قسمتهای منحنی سهمی فرض می شوند)



حل مثال ۳ :

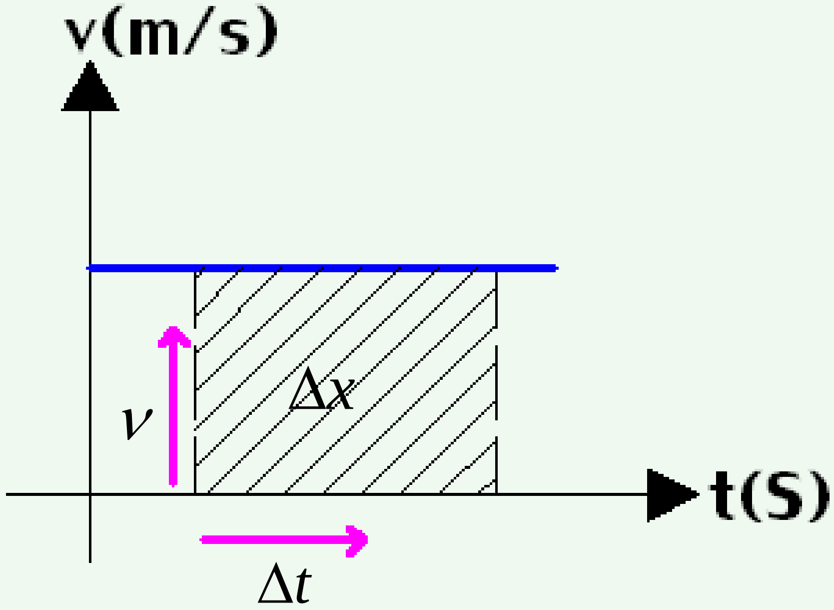


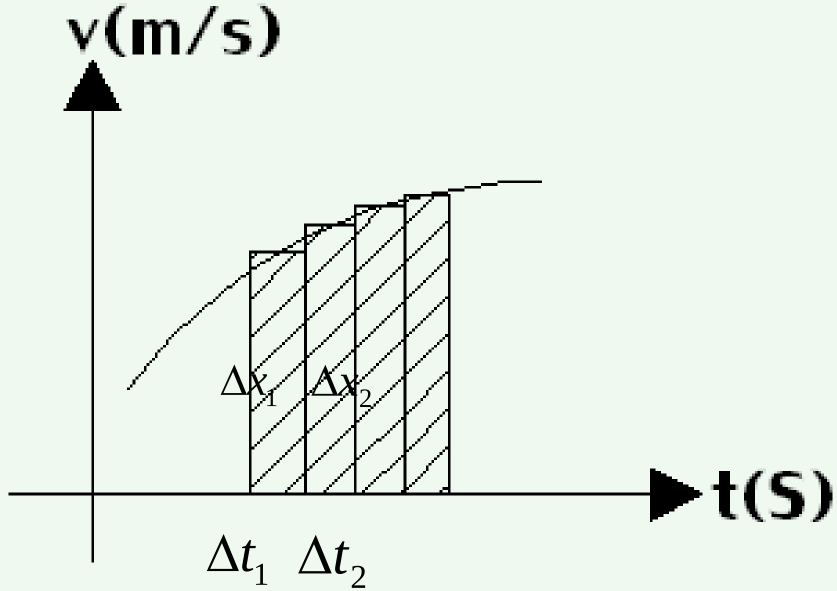
سرعت از روی نمودار مکان – زمان و شتاب از روی نمودار سرعت - زمان

مساحت هر نوع منحنی را می توانیم به تقریب برابر با مجموع مساحتهای تعدادی مستطیل به ارتفاعهای مختلف در نظر بگیریم .

از رابطه $\Delta x = v\Delta t$ نتیجه می شود که مساحت زیر منحنی v بر حسب t برای یک مدت معین برابر تغییر موقعیت در آن مدت است .

از رابطه $\Delta v = a\Delta t$ نتیجه می شود که مساحت زیر منحنی a بر حسب t برای یک مدت معین برابر تغییر سرعت در آن مدت است .

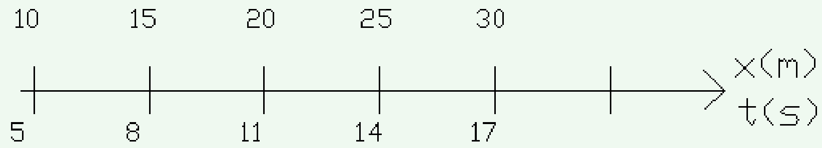


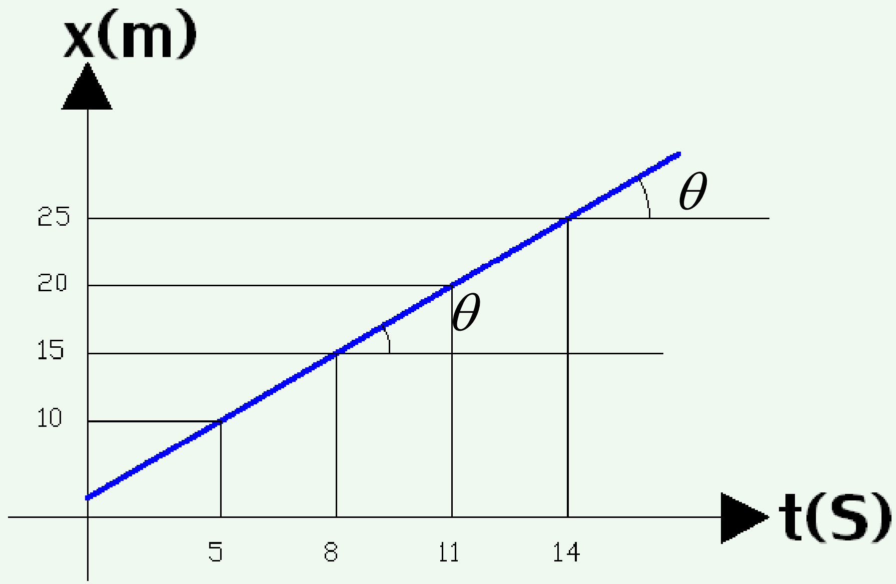


سرعت متغیر است .

حرکت یکنواخت مستقیم الخط (حرکت با سرعت ثابت)

هرگاه متحرکی در زمانهای مساوی مسافتهای مساوی را طی کند ، حرکتش یکنواخت است .





سرعت ثابت است ، بنابراین :

$$\bar{v} = v = \frac{x - x_0}{t - t_0}$$

$$\tan\theta = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \bar{v}$$

معادله حرکت یکنواخت

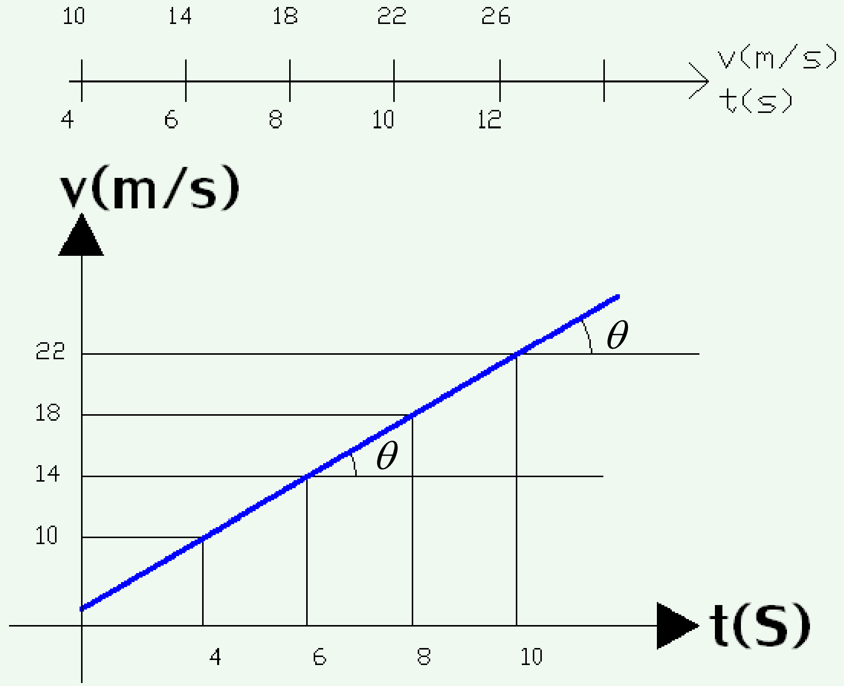
با فرض $x = vt + x_0 \quad , \quad t_0 = 0$

اگر در لحظه t=0 جسم در مبدا مکان باشد یعنی نمودار x-t از مبدا بگذرد ، معادله حرکت یکنواخت به صورت x=vt خواهد بود ، در غیر این صورت متحرک در لحظه t=0 در مبدا نخواهد بود .

حرکت با شتاب ثابت بر روی خط مستقیم

حرکت تند شونده (شتاب ثابت و مثبت)

سرعت جسم در زمانهای مساوی به طور یکسان تغییر می کند (افزایش می یابد)



شتاب ثابت است ، بنابراین :

$$\bar{a} = a = \frac{v - v_0}{t - t_0}$$

$$\tan\theta = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \bar{a}$$

معادله سرعت در حرکت با شتاب ثابت

با فرض $t_0 = 0 \quad , \quad v = at + v_0$

اگر در لحظه t=0 سرعت جسم صفر یا جسم در حال سکون باشد یعنی نمودار v-t از مبدا بگذرد ، معادله سرعت به صورت v=at خواهد بود ، در غیر این صورت نمودار v-t از مبدا نمی گذرد .

معادله حرکت با شتاب ثابت

معادله سرعت

$$v = at + v_0$$

سرعت متوسط بین دو نقطه

$$\bar{v} = \frac{x - x_0}{t}$$

چون در حرکت با شتاب ثابت ، سرعت متوسط بین دو نقطه برابر با میانگین سرعتها بین دو نقطه است :

$$\bar{v} = \frac{v + v_0}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

اگر در $x_0 = 0, t = 0$ باشد در نتیجه معادله حرکت :

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$$

معادله مستقل از زمان در حرکت با شتاب ثابت

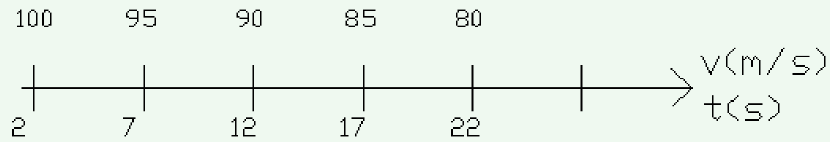
$$\left.\begin{aligned} v &= at + v_0 \\ x &= \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \end{aligned}\right\} v^2 - {v_0}^2 = 2a(x - x_0)$$

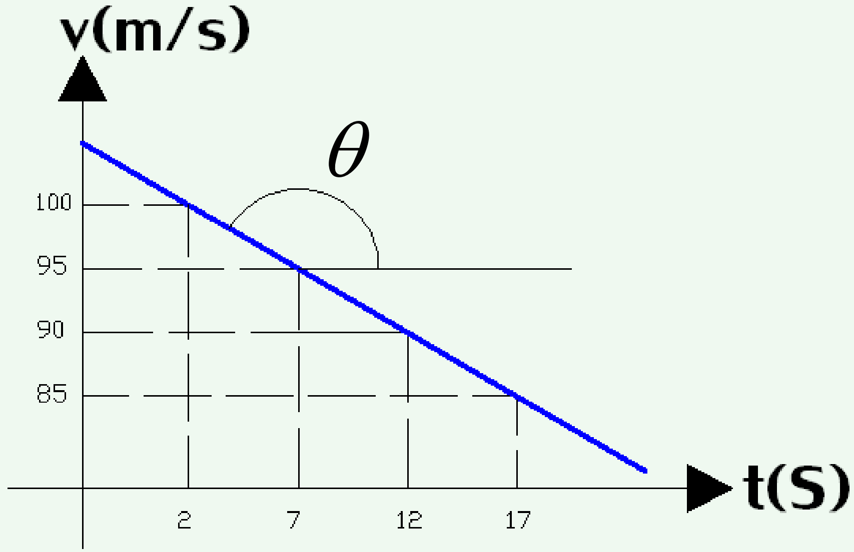
اگر متحرک در مبدا زمان در مبدا مکان باشد ، در نتیجه داریم :

$$v^2 - {v_0}^2 = 2ax$$

حرکت کند شونده (شتاب ثابت و منفی)

سرعت جسم در زمانهای مساوی به طور یکسان تغییر می کند (کاهش می یابد)





شتاب ثابت است ، بنابراین :

$$\tan\theta = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \bar{a} = a < 0$$

معادله حرکت با شتاب ثابت

الف) تند شونده

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \\ v &= at + v_0 \\ v^2 - v_0{}^2 &= 2ax \end{aligned}\right\}(x_0 = 0, t = 0)$$

ب) کند شونده

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{1}{2}at^2 + v_0 t \\ v &= -at + v_0 \\ v^2 - v_0{}^2 &= -2ax \end{aligned}\right\}(x_0 = 0, t = 0)$$

زمان تا توقف و مسافت تا توقف

در حرکت کند شونده ای که منجر به توقف می شود ، v=0 بنابراین :

$$\left.\begin{aligned} v = -at + v_0 \Rightarrow 0 = -at + v_0 \Rightarrow t = \frac{v_0}{a} \\ v^2 - {v_0}^2 = -2ax \Rightarrow 0 - {v_0}^2 = -2ax \Rightarrow x = \frac{{v_0}^2}{2a} \end{aligned}\right\}$$

تمرین ۱ :

هواپیمائی با سرعت 72km/h بر روی باند مستقیم فرودگاهی می نشیند و پس از 10ثانیه سرعتش به 36km/h مي رسد ، در صورتیکه حرکتش با شتاب ثابت باشد ، مطلوب است :

الف) مسافتی که در10 ثانیه اول طی می کند ؟

ب) زمان و مسافت طی شده از لحظه فرود تا هنگام توقف

حل تمرین ۱ :

الف)

$$v = -at + v_0 \Rightarrow 10 = -10a + 20 \Rightarrow a = 1\frac{m}{s^2}$$

$$x = -\frac{1}{2}at^2 + v_0 t \Rightarrow x = -\frac{1}{2}(1)(10)^2 + 20(10) = 150m$$

ب)

$$t = \frac{v_0}{a} = \frac{20}{1} = 20s$$

$$y = \frac{{v_0}^2}{2a} = \frac{20^2}{2(1)} = 200m$$

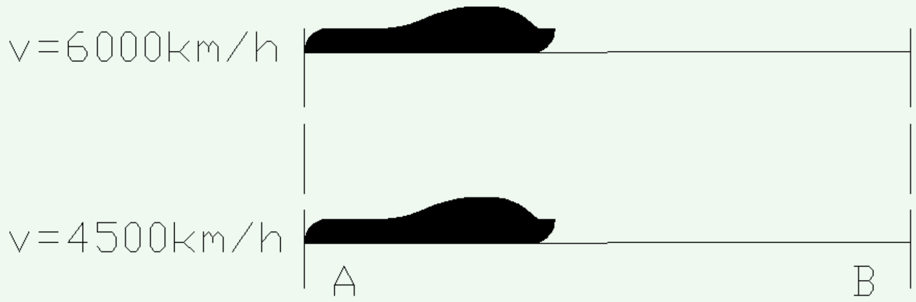
تمرین ۲ :

دو هواپیما یکی با سرعت 6000km/h و دیگری با سرعت 4500km/h هر دو همزمان از آسمان شهر A می گذرند اگر هواپیمای تندرو یک ثانیه زودتر از آسمان شهر B بگزرد . مطلوب است ؟

الف) زمانی که هر دو هواپیما مسافت AB را طی می کنند .

ب) فاصله AB

حل تمرین ۲ :



الف)

$$\begin{cases} t_1 = t \\ t_2 = t+1 \end{cases}, \begin{cases} x_1 = v_1 t_1 \\ x_2 = v_2 t_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = v_1 t \\ x_2 = v_2 (t+1) \end{cases}$$

$$x_1 = x_2 \Rightarrow 6000t = 4500(t+1) \Rightarrow t = 3s \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 3s \\ t_2 = 4s \end{cases}$$

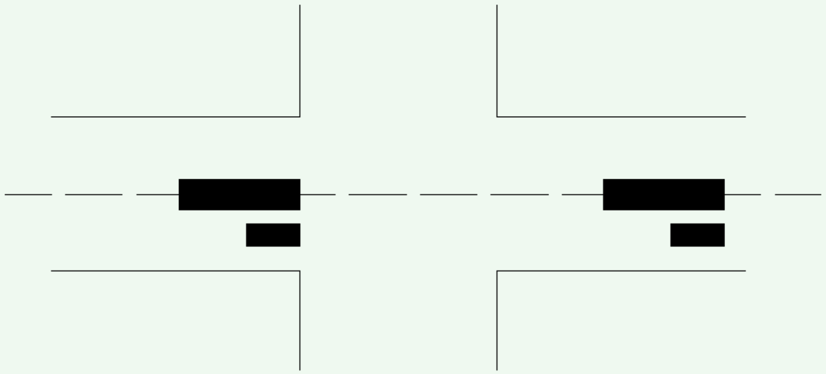
ب)

$$x_1 = v_1 t \Rightarrow x_1 = (\frac{6000 \times 1000}{3600})(3) = 5000m$$

تمرین ۳ :

اتومبیلی درسر چهار راهی پشت چراغ قرمزمتوقف است ، همزمان با سبز شدن چراغ کامیونی با سرعت 10m/s بدون توقف از چها راه می گذرد و اتومبیل با شتاب 1m/s شروع به حرکت می کند . پس ا زچند ثانیه و در چه فاصله ای از چها راه اتومبیل به کامیون میرسد ؟

حل تمرین ۳ :



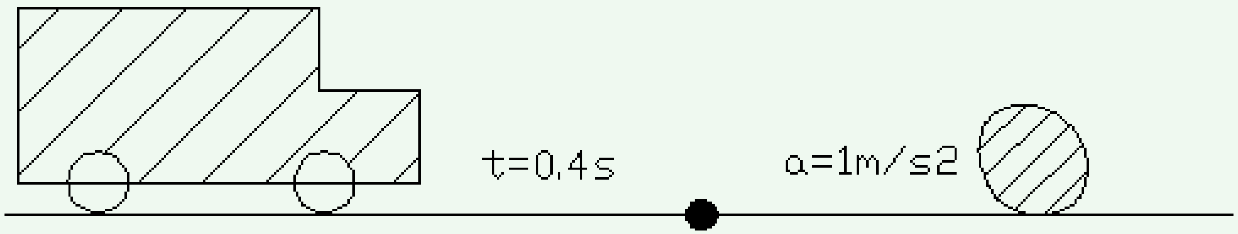
$$\begin{cases} x_1 = v_1 t_1 \\ x_2 = \frac{1}{2} a t_2{}^2 \end{cases}, \begin{cases} x_1 = x_2 \\ t_1 = t_2 = t \end{cases} \quad 10t = \frac{1}{2}(1)t^2 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 20s \end{cases}$$

$$x_1 = v_1 t_1 \Rightarrow x_1 = 10(20) = 200m$$

تمرین ۴ :

اتومبیلی باسرعت 72km/hدر جاده ای مستقیم در حرکت است در یک لحظه راننده متوجه مانعی در جاده می شود و ترمز می گیرد . اگر زمان واکنش راننده 0.4ثانیه باشد و حرکت اتومبیل با شتاب1متربرمجذورثانیه کند شود و در کنار مانع متوقف شود از لحظه دیدن مانع تا توقف ، اتومبیل چه مسافتی را طی کرده است و چند ثانیه طول کشیده است ؟

حل تمرین ۴ :



$$x_1 = vt_1 = 20(0.4) = 8m$$

$$t_2 = \frac{v_0}{a} = \frac{20}{1} = 20s \Rightarrow t_{total} = 20.4s$$

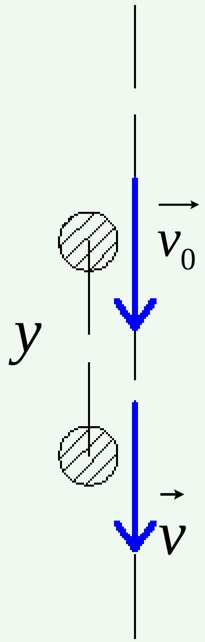
$$x_2 = \frac{{v_0}^2}{2a} = \frac{20^2}{2(1)} = 200m \Rightarrow x_{total} = 208m$$

سقوط آزاد اجسام در خلاء : حرکتی با شتاب ثابت و در خط مستقیم و در نزدیکی سطح زمین است .

سقوط آزاد اجسام در خلاء

- به جرم و جنس اجسام بستگی دارد .
- در راستای قائم صورت می گیرد .
- با شتاب ثابت g صورت می گیرد .

حرکت سقوط آزاد اجسام در خلاء ،حرکتی با شتاب ثابت (تند شونده) ، **g=9.8m/s** صورت می گیرد . بنابراین برای حل مسائل مربوط به آن از معادلات زیر استفاده می کنیم .

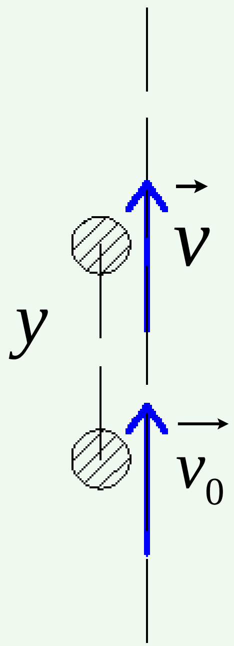


$$v = gt + v_0$$

$$y = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + y_0$$

$$v^2 - v_0{}^2 = 2g(y - y_0)$$

حرکت در راستای قائم به سمت بالا با شتاب ثابت (کند شونده) ، g=9.8m/s صورت می گیرد . بنابراین برای حل مسائل مربوط به آن از معادلات زیر استفاده می کنیم .



$$v = -gt + v_0$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + y_0$$

$$v^2 - {v_0}^2 = -2g(y - y_0)$$

زمان تا اوج و ارتفاع تا اوج

در حرکت در راستای قائم به سمت بالا ، در صورتیکه در **t=0** جسم در مبدا باشد$(y_0 = 0)$.
در نقطه اوج **v=0** است .

بنابراین

$$v = -gt + v_0 \Rightarrow 0 = -gt + v_0 \Rightarrow t_{og} = \frac{v_0}{g}$$

$$v^2 - {v_0}^2 = -2g(y) \Rightarrow 0 - {v_0}^2 = -2gy \Rightarrow y_{og} = \frac{{v_0}^2}{2g}$$

روش حل مسائل سقوط آزاد و پرتاب در راستای قائم به سمت بالا ، در خلاء

روش اول:

- در صورتیکه حرکت سقوطی باشد از روابط حرکت تند شونده استفاده می شود .
- در صورتیکه حرکت در راستای قائم به سمت بالا باشداز روابط حرکت کند شونده استفاده می شود .

روش دوم : چه حرکت سقوطی باشد چه صعودی (چه تند شونده چه کند شونده) با استفاده از قرار داد زیر از روابط حرکت تند شونده استفاده می شود .

قرارداد برای حل مسائل سقوط آزاد و پرتاب در راستای قائم به سمت بالا ، در خلاء

– محل پرتاب یا سقوط جسم را مبدا فرض کنید .

– تمام سرعتهای رو به بالا را مثبت و تمام سرعتهای رو به پایین را منفی قرار دهید .

– تمام مسافتهای بالای مبدا را مثبت و تمام مسافتهای زیر مبدا را منفی قرار دهید .

– چه حرکت به سمت بالا و چه حرکت به سمت پایین باشد همیشه مقدار **y** را منفی قرار دهید .

روابط مورد استفاده :

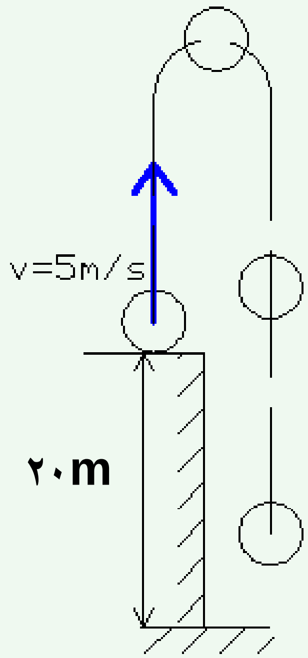
$$v = gt + v_0$$

$$y = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$$

$$v^2 - {v_0}^2 = 2g(y)$$

تمرین ۵ :

گلوله ای را از ارتفاع ۲۰ متری سطح زمین با سرعت 5m/s در راستای قائم به سمت بالا پرتاب می کنیم . موقعیت و سرعت گلوله را در زمانهای 0.5s, 1s,2s پس از پرتاب تعیین کنید . ($g=10m/s2$)



حل تمرین ۵ :

الف) از طریق حرکتهای کند شونده و تند شونده :

در فاصله ۲۵/۲۱ :

نقطه اوج :

$$t=\frac{1}{2}s\begin{cases} y=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t=-\frac{1}{2}(10)(\frac{1}{2})^2+5(\frac{1}{2})=1.25m \\ v=-gt+v_0=-10(\frac{1}{2})+5=0 \end{cases}$$

گلوله در مبدا است :

$$t=1s\begin{cases} y=\frac{1}{2}gt^2=\frac{1}{2}(10)(\frac{1}{2})^2=1.25m \\ v=gt=10(\frac{1}{2})=5\frac{m}{s} \end{cases}$$

ده متری سطح زمین

$$t=2s\begin{cases} y=\frac{1}{2}gt^2=\frac{1}{2}(10)(\frac{3}{2})^2=11.25m \\ v=gt=10(\frac{3}{2})=15\frac{m}{s} \end{cases}$$

حل تمرین ۵ :

ب) از طریق قرارداد :

$$
\begin{cases}
y = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \\
v = gt + v_0
\end{cases}
\begin{cases}
t = \frac{1}{2}s \begin{cases} y = \frac{1}{2}(-10)(\frac{1}{2})^2 + 5(\frac{1}{2}) = 1.25m \\ v = (-10)(\frac{1}{2}) + 5 = 0 \end{cases} \\
t = \frac{1}{2}s \begin{cases} y = \frac{1}{2}(-10)(1)^2 + 5(1) = 0 \\ v = (-10)(1) + 5 = -5 \end{cases} \\
t = \frac{1}{2}s \begin{cases} y = \frac{1}{2}(-10)(2)^2 + 5(2) = -10m \\ v = (-10)(2) + 5 = -15 \end{cases}
\end{cases}
$$

در فاصله ۲۵/۲۱ :

نقطه اوج :

گلوله در مبدا است :

ده متری سطح زمین

تمرین ۶ :

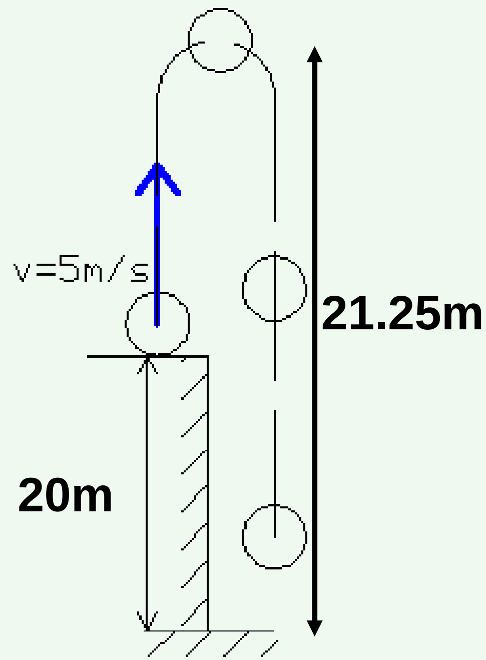
در تمرین ۵ گلوله پس از چه کدت از لحظه پرتاب و با چه سرعتی به زمین برخورد می کند ؟

حل تمرین ۶ :

الف) از طریق حرکتهای کند شونده و تند شونده :

پس از 0.5s ثانیه گلوله در ارتفاع 21/25 متری (نقطه اوج) قرار دارد و از این نقطه آزادانه سقوط می کند .

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 21.25 = \frac{1}{2}(10)(t)^2 \Rightarrow t = 2.06s \\ t_{total} = 0.5 + 2.06 = 2.56s \\ v = gt = (10)(2.06) = 20.6\frac{m}{s} \end{cases}$$



حل تمرین ۶ :

ب) از طریق قرارداد :

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}gt^2 + v_0 t \Rightarrow -20 = \dfrac{1}{2}(-10)t^2 + 5t \Rightarrow t = 2.5s \\ v = gt + v_0 \Rightarrow v = (-10)(2.5) + 5 = -20.6\dfrac{m}{s} \end{cases}$$

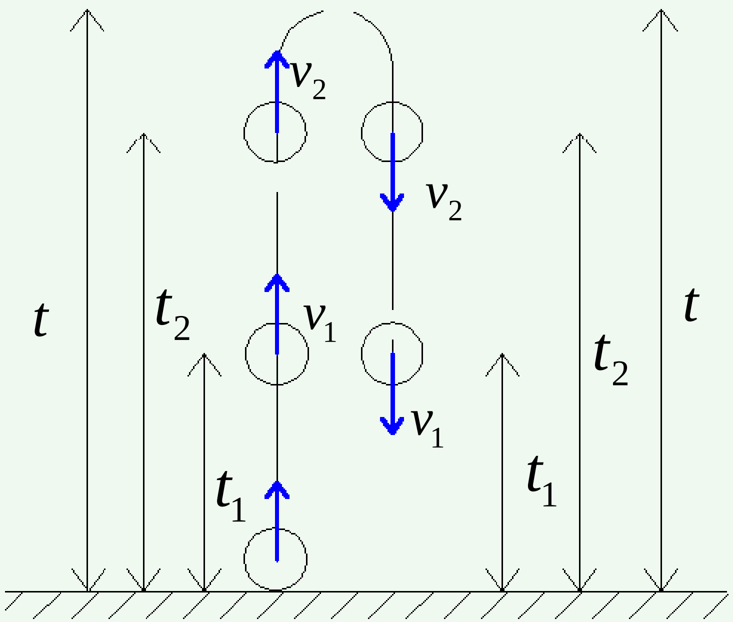
جهت سرعت به سمت پایین است .

دو نکته در حرکت جسم در راستای قائم به سمت بالا

د رهر سطح پرواز

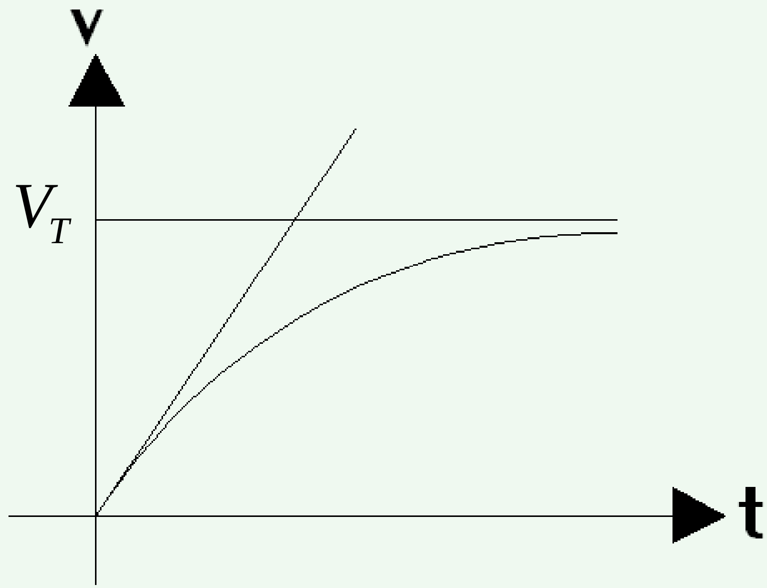
الف) زمان تا اوج برابر است با زمان از اوج تا آن سطح پرواز

ب) سرعت به سمت بالا برابر است با سرعت در همان سطح پرواز ، هنگام بازگشت از نقطه اوج



سرعت حد

وقتی که جسم زیاد سبک نباشد و از ارتفاع کم سقوط کند ، چشم پوشی از مقاومت هوا معقول است ، در غیر اینصورت شتاب حرکت جسم در حال سقوط ثابت نمی ماند و در ارتفاعی به صفر می رسد که در این نقطه سرعت آنها سرعت حد V_T نامیده می شود که به وزن و شکل جسم و چگالی هوا بستگی دارد .



نمودار V-T برای سقوط جسم در خلاء و در هوا و سرعت حد

فصـــــل چهارم

حرکت دو بعـــــدی

روابط برداری حرکت دو بعدی ذره در حالت کلی

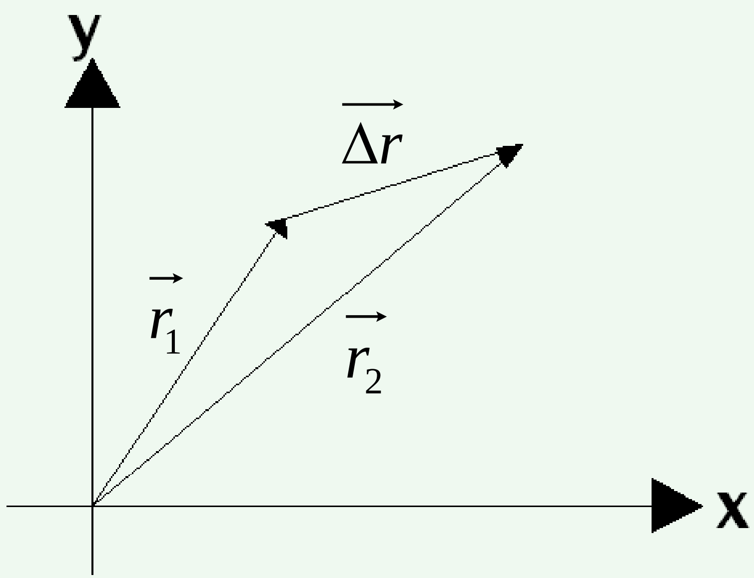
الف) بردار تغییر مکان :

$\vec{r_1}$ ، بردار مکان ذره در صفحه xy در لحظه t_1

$\vec{r_2}$ ، بردار مکان ذره در صفحه xy در لحظه $t_2 = t_1 + \Delta t$

$\overrightarrow{\Delta r}$ ، بردار تغییر مکان ذره در زمان Δt عبارت است از :

$$\Delta r = \Delta x \vec{i} + \Delta y \vec{j}$$



ب) بردارهای سرعت متوسط و سرعت لحظه ای در حالت دو بعدی

$$\vec{\bar{v}} = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\overrightarrow{\Delta t}} \Rightarrow \vec{\bar{v}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j} \Rightarrow \vec{\bar{v}} = \overrightarrow{\bar{v}_x}\,\vec{i} + \overrightarrow{\bar{v}_y}\,\vec{j}$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\overrightarrow{\Delta t}} = \frac{\overrightarrow{dr}}{dt} \Rightarrow \vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} \Rightarrow \vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$$

ج) بردار تغییر سرعت :

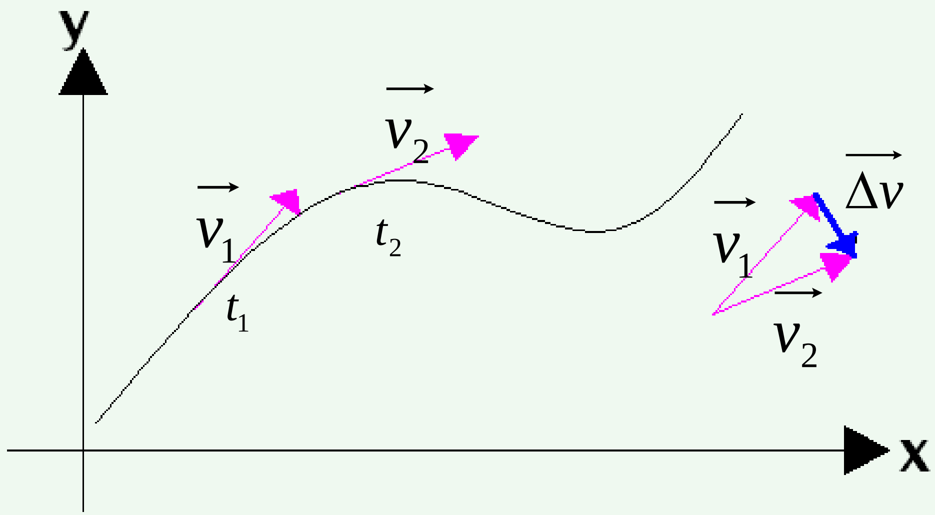
الف) بردار تغییر مکان :

$\vec{v_1}$ ، بردار سرعت ذره در صفحه xy در لحظه t_1

$\vec{v_2}$ ، بردار سرعت ذره در صفحه xy در لحظه t_2

$\overrightarrow{\Delta v}$ ، بردار تغییر سرعت ذره در زمان Δt عبارت است از :

$$\Delta v = \Delta v_x \vec{i} + \Delta v_y \vec{j}$$



د) بردارهای شتاب متوسط و شتاب لحظه ای در حالت دو بعدی

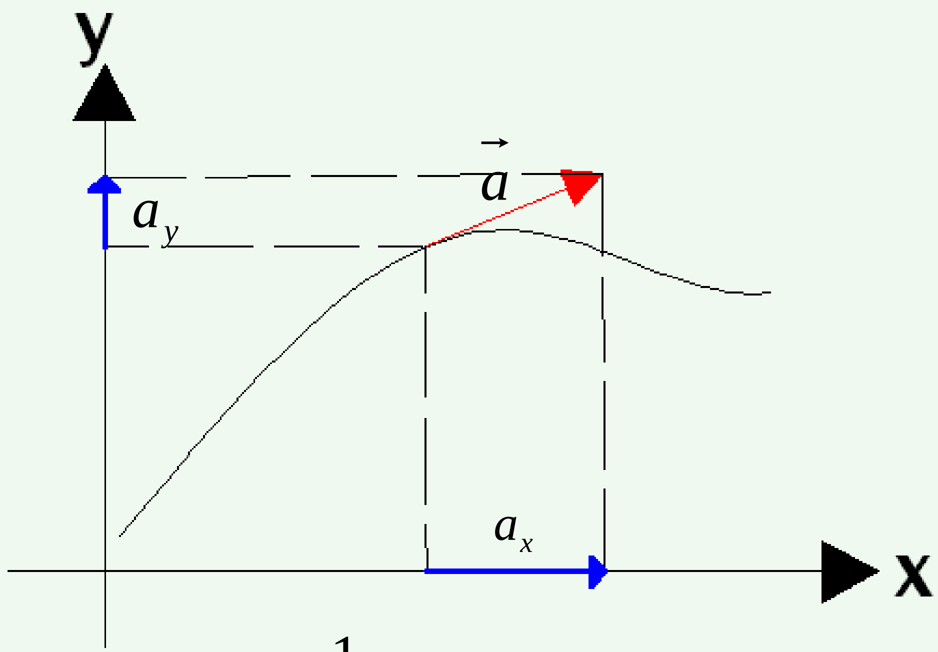
$$\vec{a} = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\overrightarrow{\Delta t}} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\vec{j} \Rightarrow \vec{a} = \overrightarrow{a_x \, i} + \overrightarrow{a_y \, j}$$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\overrightarrow{\Delta t}} = \frac{\overrightarrow{dv}}{dt} \Rightarrow \vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} \Rightarrow \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$$

با توجه به اینکه کمیتهای برداری مکان ، سرعت و شتاب و تغییرات آنها را می توان در حالت دو بعدی بر حسب مولفه هایان نوشت . معقول است که در بررسی حرکت ذره در صفحه xy چگونگی حرکت تصاویر آن را روی دو محور بررسی کرده و از تلفیق انها در مورد حرکت ذره در صفحه اظهار نظر کنیم .

برای مثال حرکت ذره ای را بررسی می کنیم که تصاویر آن روی هر یک از محورها حرکتی با شتاب ثابت به ترتیب برابر a_x, a_y دارد .

معادلات حرکت هر یک از تصویرها در راستای دو محور



$$y = \frac{1}{2}a_y t^2 + v_{0y}t$$

$$v_y = a_y t + v_{0y}$$

$$v_y{}^2 - v_{0y}{}^2 = 2a_y.y$$

$$x = \frac{1}{2}a_x t^2 + v_{0x}t$$

$$v_x = a_x t + v_{0x}$$

$$v_x{}^2 - v_{0x}{}^2 = 2a_x.x$$

از تلفیق معادلات حرکت تصاویر برروی دو محور x.y معادلات حرکت جسم در مثال فوق به صورت زیر به دست می آیند .

$$\vec{r} = \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \overrightarrow{v_0}t$$

$$\vec{v} = \vec{a}t + \overrightarrow{v_0}$$

$$\overrightarrow{v_0}\vec{v} = v_0.v = 2\overrightarrow{a_0}.\vec{r}$$

در این مثال $\overrightarrow{r_0} = 0$ فرض شده است .

حرکت پرتابی در سطح قائم در حالت خاص

الف) پرتابه را ذره در نظر می گیریم چون فقط حرکت انتقالی آن مد نظر است .

ب) حرکت پرتابه را در ارتفاعهای محدود در نظر می گیریم تا بتوانیم از تغییرات شتاب جاذبه زمین صرفنظر کنیم .

ج) به منظور دوری از روابط پیچیده ، از مقاومت هوا صرفنظر کرده و حرکت پرتابه را در خلاء فرض می کنیم .

پرتابه ای را با سرعت اولیه $\vec{v}_0$ تحت زاویه اولیه θ_0 نسبت به افق با شرایط فوق در سطح قائم پرتاب می کنیم .

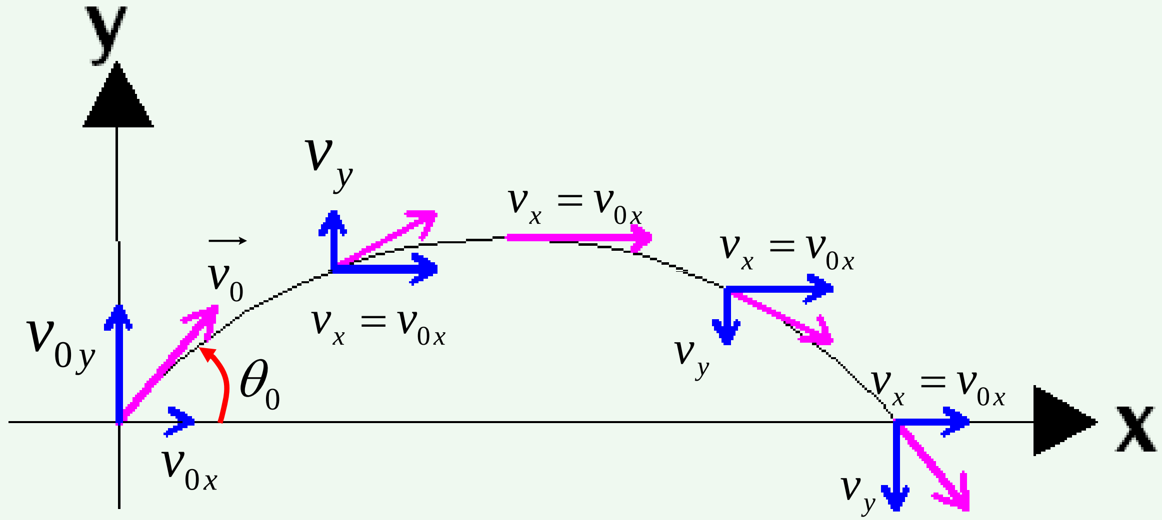
معادلات حرکت تصویر پرتابه روی محور y

$$y = \frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t$$

$$v_y = -gt + v_{0y}$$

$$v_y{}^2 - v_{0y}{}^2 = 2gy$$

$$v_{0y} = v_0 \sin\theta_0$$



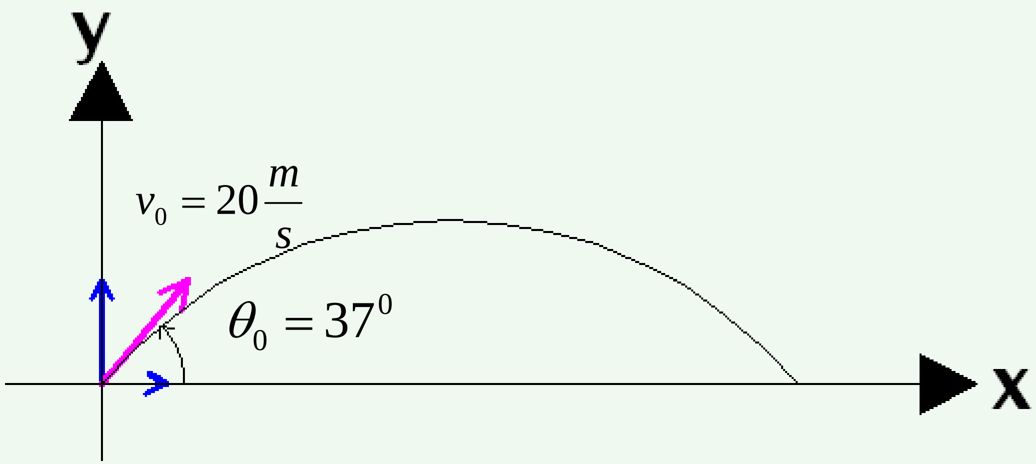
$$x = v_{0x}.t$$

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta_0$$

معادلات حرکت تصویر پرتابه روی محور y

مثال ۱ :

پرتابه ای را از سطح زمین با سرعت اولیه 20m/s تحت زاویه 37 درجه نسبت به افق ، در سطح قائم و در خلاء پرتاب می کنیم مطلوب است اندازه و جهت سرعت پرتابه یک ثانیه پس از پرتاب (g=10m/s2,sin37=0.6,cos37=0.8)



حل مثال ۱ :

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_{0x} = v_0 \cos\theta_0 = 20(0.8) = 16\frac{m}{s} \\ v_y &= -gt + v_0 \sin\theta_0 = -10(1) + 20(0.6) = 2\frac{m}{s} \end{aligned}\right\} v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{260}\,\frac{m}{s}$$

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{1}{8}$$

مثال ۲ :

پس از چه مدت پرتابه مثال ۱ ، به بالاترین نقطه مسیرش (ارتفاع اوج) می رسد و این نقطه در چه ارتفاعی از سطح افقی قرار دارد ؟

حل مثال ۲ :

زمان اوج :

$$v_y = -gt + v_0 \sin\theta_0 \Rightarrow 0 = -10t + 20(0.6) \Rightarrow t = 1.2s$$

ارتفاع اوج :

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\theta_0 t \Rightarrow y = -\frac{1}{2}(10)(1.2)^2 + 20(0.6)(1.2) = 7.2m$$

زمان اوج و ارتفاع اوج در حرکت پرتابی :

$$v_y = -gt + v_{0y} \Rightarrow 0 = -gt + v_0 \sin\theta \Rightarrow t_{og} = \frac{v_0 \sin\theta_0}{g}$$

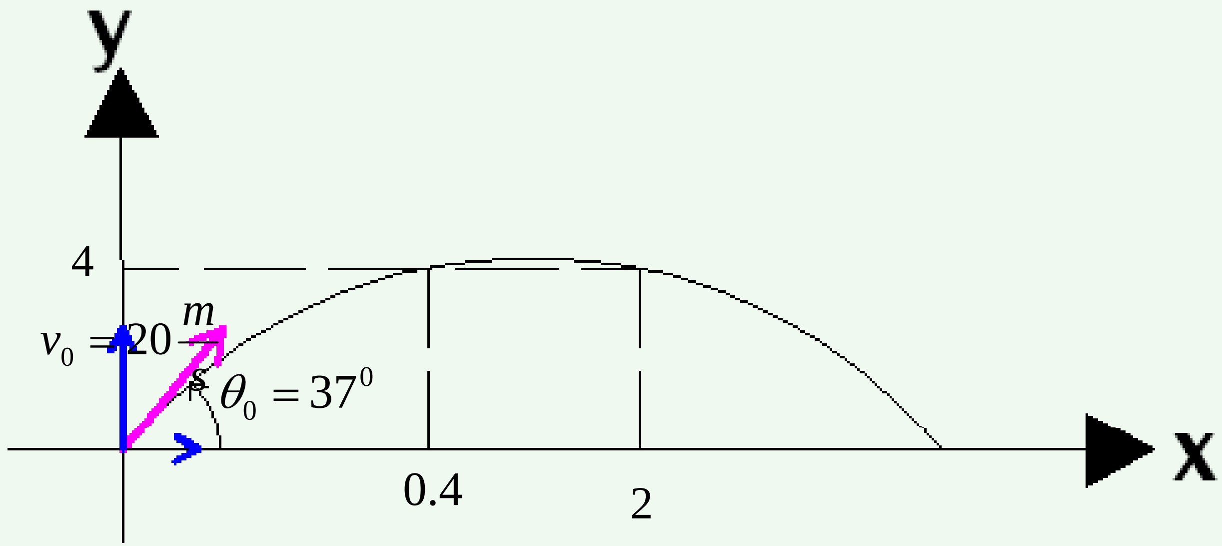
$$v_y{}^2 - v_{0y}{}^2 = -2gy \Rightarrow 0 = (v_0 \sin\theta_0)^2 = -2gy \Rightarrow y_{og} = \frac{v_0{}^2 \sin^2\theta_0}{2g}$$

مثال ۳ :

در چه زمانهایی پرتابه مثال ۱ در ارتفاع 4 متری سطح افق خواهد بود ؟

حل مثال ۳ :

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\theta_0 t \Rightarrow 4 = -\frac{1}{2}(10)(t)^2 + 20(0.6)(t) \Rightarrow t = \begin{cases} 2s \\ 0.4s \end{cases}$$



مثال ۴ :

پس از چه مدت پرتابه مثال ۱-۴به حداکثر فاصله افقی از سطح تراز اولیه (زمان برد) می رسد ؟

حل مثال ۴ :

$$y=\frac{1}{2}gt^2+v_0\sin\theta_0 t \Rightarrow 0=\frac{1}{2}(10)t^2+20(0.6)t \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=2.4s \end{cases}$$

در دو موقعیت یکی در مبدا و یکی در زمان**y=0, t=2.4s** است.

در حرکت پرتابی ، زمان برد ، دو برابر زمان اوج است :

در حداکثر فاصله افقی از سطح تراز اولیه **y=0** است .

$$y=-\frac{1}{2}gt^2+v_0\sin\theta_0 t \Rightarrow 0=t(-\frac{1}{2}gt+v_0\sin\theta_0) \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=\dfrac{2v_0\sin\theta_0}{g} \end{cases}$$

مثال ۵ :

حداکثر فاصله افقی پرتابه در مثال ۱ ، از سطح تراز اولیه (برد حرکت پرتابی) چقدر است ؟

همچنین نشان دهید برد حرکت پرتابی از رابطه $R = \dfrac{{v_0}^2 \sin 2\theta}{g}$ **دست می آید.**

حل مثال ۵ :

$$x = v_0 \cos\theta_0 t \Rightarrow R = 20(0.8)(2.4) = 38.4m$$

$$R = v_0 \cos\theta_0 \left(\frac{2v_0 \sin\theta_0}{g}\right) \Rightarrow R = \frac{{v_0}^2 \sin 2\theta_0}{g}$$

معادله مسیر در حرکت پرتابی ، یعنی رابطه بین **x,y** :

$$\left.\begin{aligned} x &= v_0 \cos\theta_0 t \\ y &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\theta_0 t \end{aligned}\right\} \Rightarrow y = -\frac{gx^2}{2{v_0}^2 \cos^2\theta_0} + x\tan\theta_0$$

که معادله یک سهمی است .

مثال ۶ :

در چه ارتفاعی پرتابه مثال ۱ > در فاصله افقی 16متری از مبدا قرار دارد ؟

حل مثال ۶ :

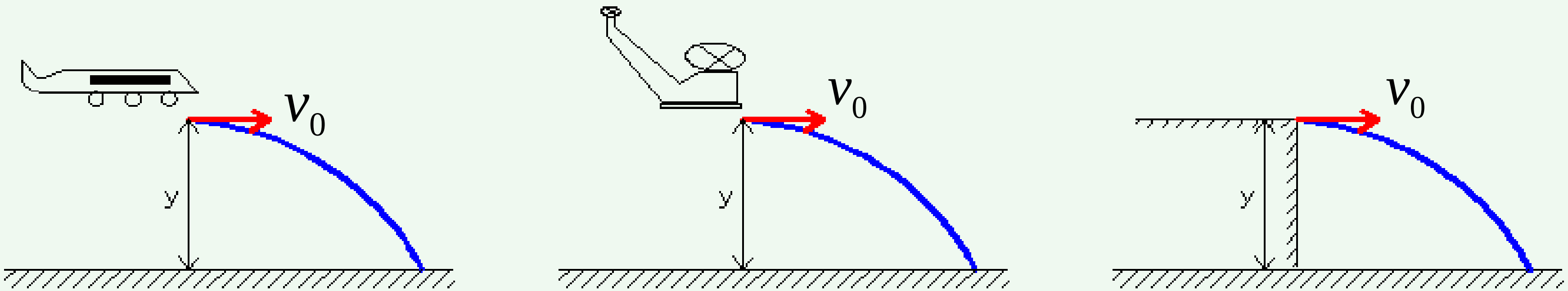
$$x = v_0 \cos\theta_0 t \Rightarrow 16 = 20(0.8)(t) \Rightarrow t = 1s$$

$$y = \frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin\theta_0 t \Rightarrow y = -\frac{1}{2}(10)(1)^2 + 20(0.6)(1) = 7m$$

یا

$$y = -\frac{g x^2}{2 {v_0}^2 \cos^2\theta_0} + x \tan\theta_0 \Rightarrow y = 7m$$

پرتاب افقی در سطح قائم :



پرتاب افقی از روی میز

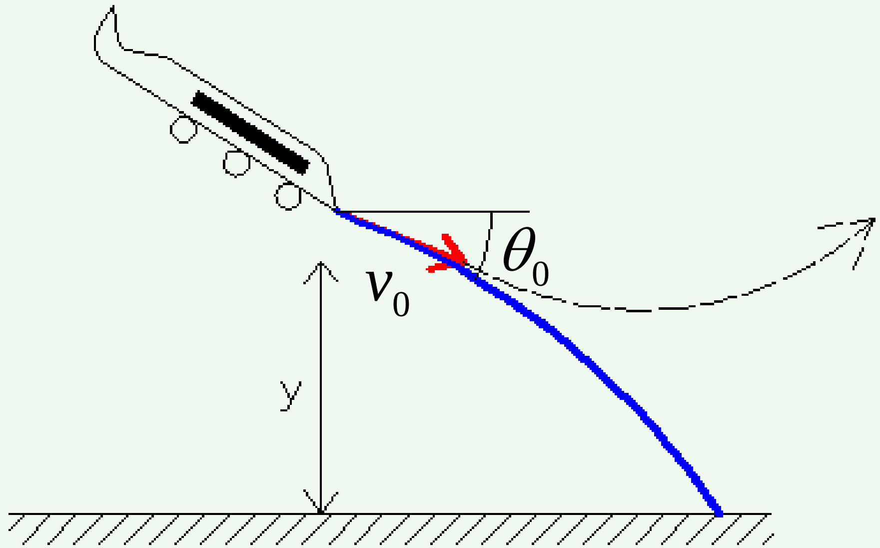
شلیک موشک به طور افقی از هلی کوپتر ساکن

بمب رها شده از هواپیمایی که با سرعت ثابت افقی حرکت می کند .

در هر سه مورد $v_{0x}=v_0, v_{0y}=0$ و معادلات مورد استفاده این حرکت عبارتند از:

$$x=v_0t, y=-\frac{1}{2}gt^2, v_y=-gt, \left(y=\frac{-gx^2}{2v_0^{\,2}}\right.$$ معادله مسیر)

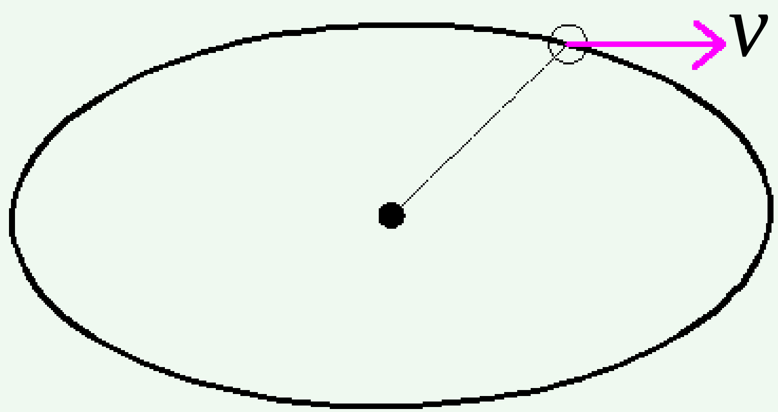
معادلات مورد استفاده برای پرتاب زیر افق :



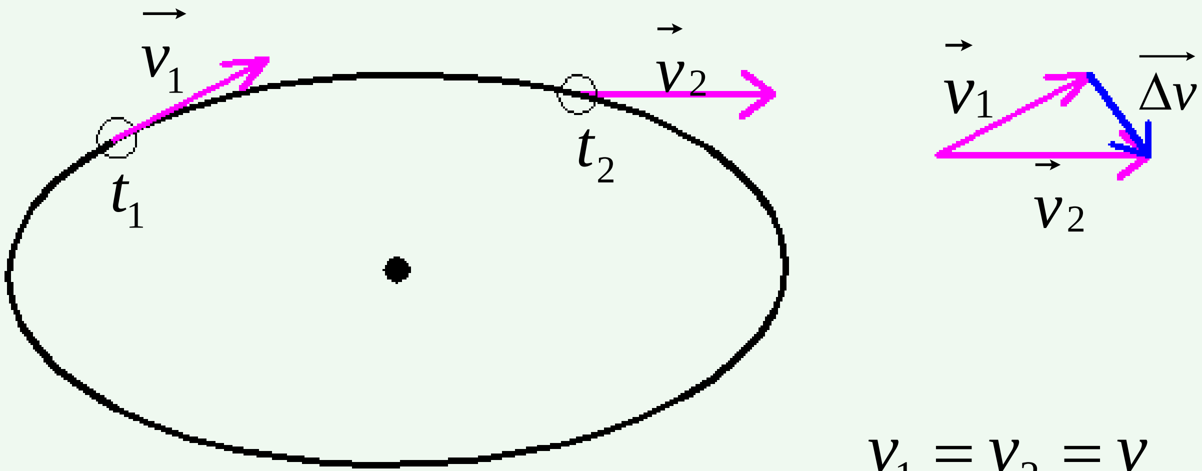
$$\left. \begin{array}{l} x = v_0 \cos\theta_0 t \quad , \quad y = -\dfrac{1}{2} g t^2 - v_0 \sin\theta_0 t \\ v_y = -gt - v_0 \sin\theta_0 \end{array} \right\}$$

حرکت دورانی یکنواخت در سطح افق

متحرک روی مسیری دایره ای در سطح افقی در زمانهای مساوی قوسهای مساوی طی می کند یا در این حرکت زاویه ای که خط واصل بین مرکز مسیر متحرک در واحد زمان طی می کند $\omega = \frac{\theta}{t}$ مقدار ثابتی است . یا حرکتی است که در آن فقط جهت سرعت تغییر می کند ولی اندازه سرعت ثابت است .



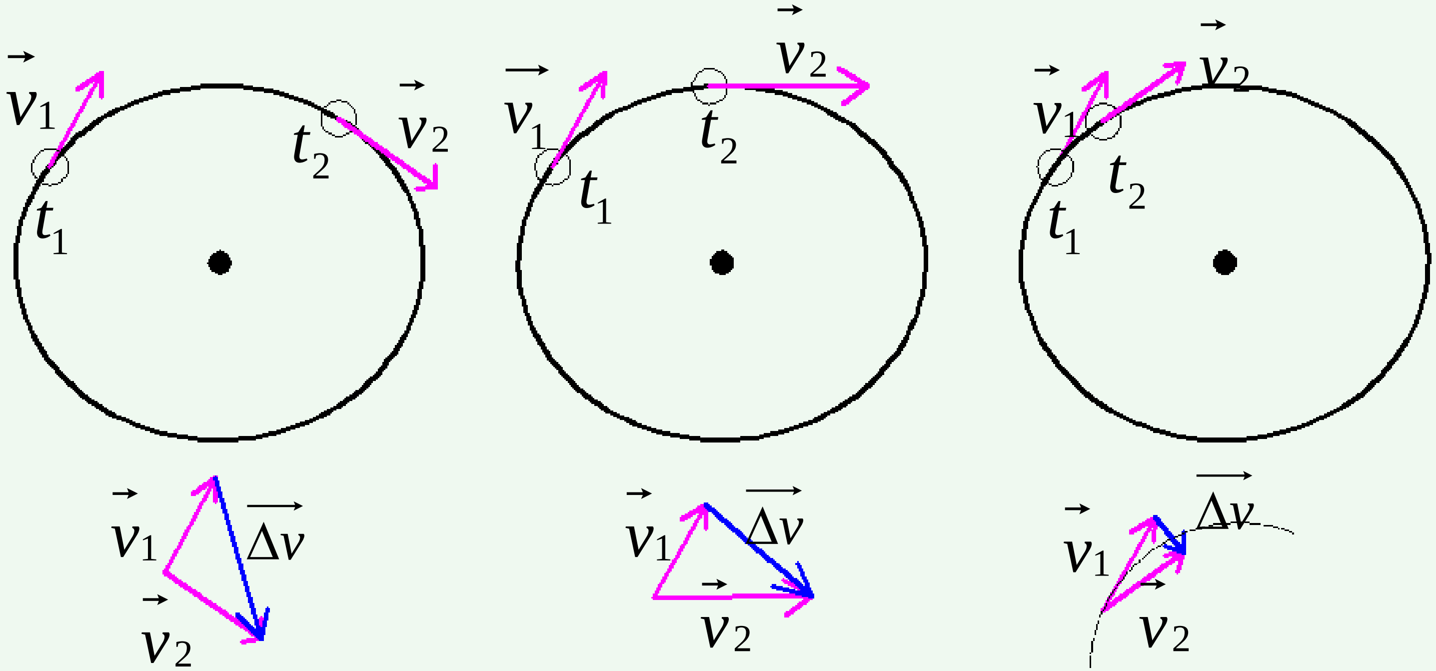
در یک حرکت دورانی یکنواخت شتاب داریم :



$$v_1 = v_2 = v$$

با رسم همسنگ بردارهای سرعت از یک نقطه دیده می شود که در زمان Δt به علت تغییر در جهت بردار سرعت ، بردار تغییر سرعت $\overrightarrow{\Delta v}$ داریم و چون $\vec{a} = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}$ است ، پس این حرکت بعلت تغییر در جهت سرعت دارای شتاب است .

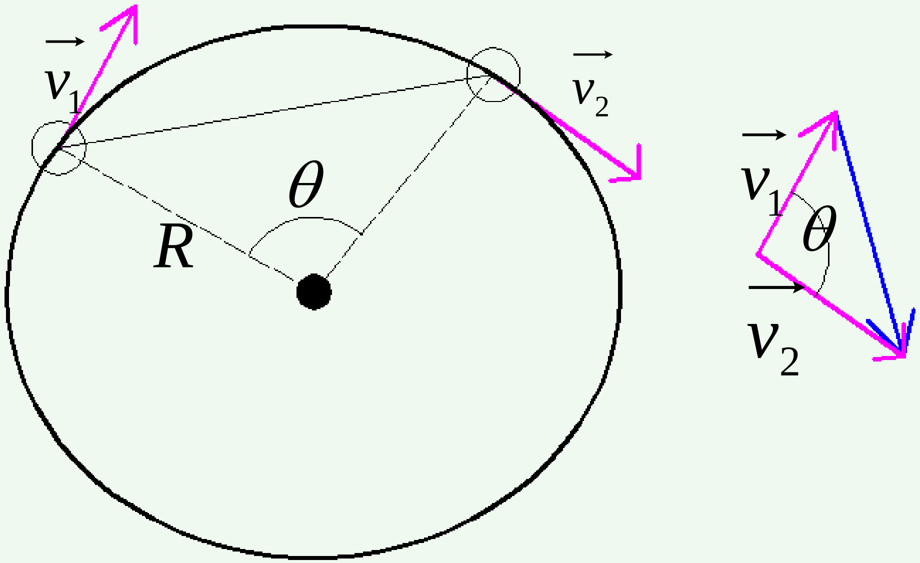
جهت شتاب در حرکت دورانی یکنواخت به جانب مرکز مسیر است (شتاب مرکز گرا)



اگر Δt بتدریج کوچک شود و به سمت صفر میل کند . در این حد جهت بردار $\overrightarrow{BV}$ یا در واقع a به جهتی میل می کند که بر امتداد بردارهای سرعت عمود است یعنی به سمت جانب مرکز است .

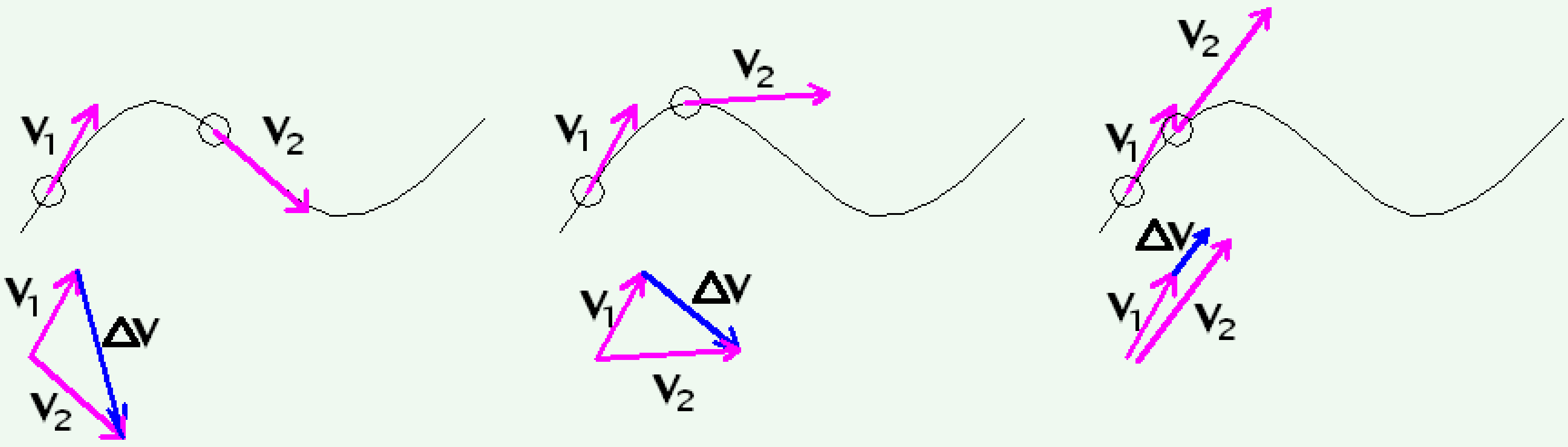
اندازه شتاب مرکز گرا در حرکت دورانی یکنواخت در سطح افق

متحرک را بین دو لحظه $t, t+\Delta t$ در نظر می گیریم به طوری که $\Delta t \to 0$ میل کند . از یک نقطه همسنگ دو بردار سرعت را رسم می کنیم در این حد که متحرک با سرعت ثابت v وتر یا طول قوس را در زمان طی می کند ، از تشابه دو مثلث متساوی الساقین ایجاد شده داریم .

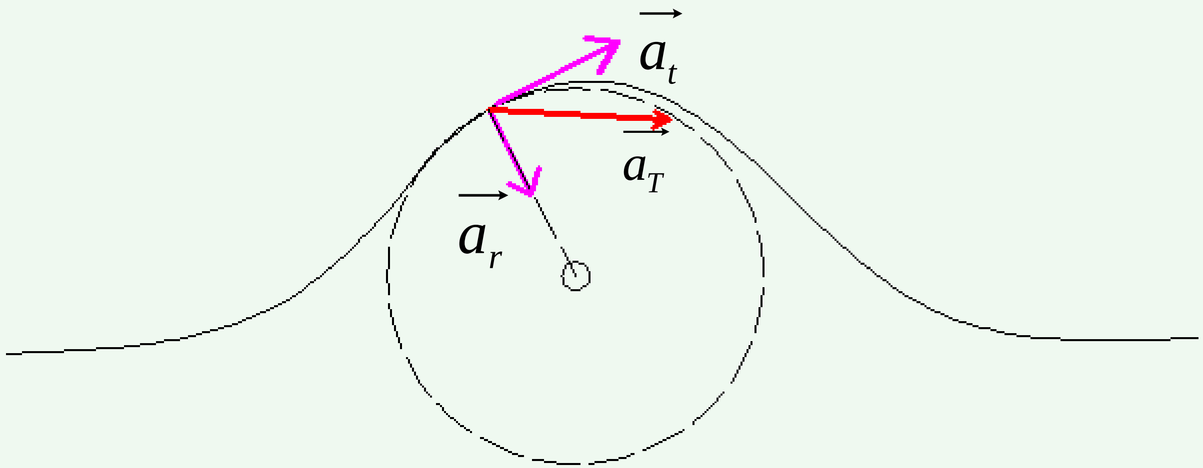


$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{v\Delta t}{R} \Rightarrow \frac{\Delta v}{v} = \frac{v^2}{R} \Rightarrow a = \frac{v^2}{R}$$

شتاب بعلت تغيير در اندازه سرعت (شتاب مماسی)

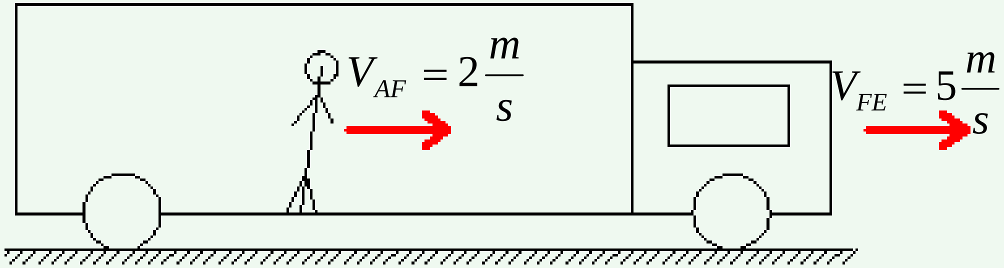


بردار شتاب در یک حرکت منحنی الخط در حالت کلی در هر لحظه برایند دو شتاب جانب مرکز (شعاعی) و شتاب مماسی (خطی) خواهد بود .

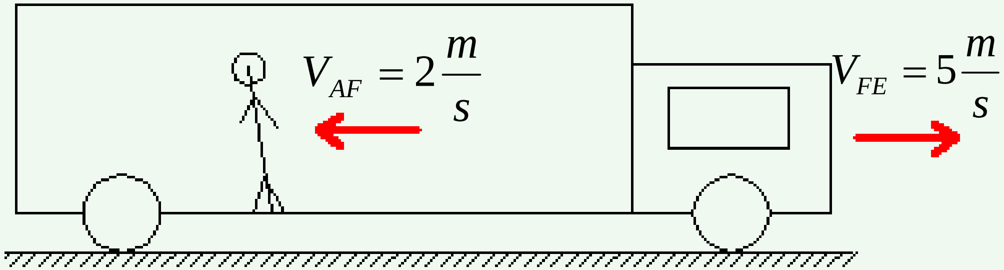


$$a_T = \sqrt{a_t^{\,2} + a_r^{\,2}}, \tan\theta = \frac{a_r}{a_t}$$

سرعت نسبی در حرکت یک بعدی

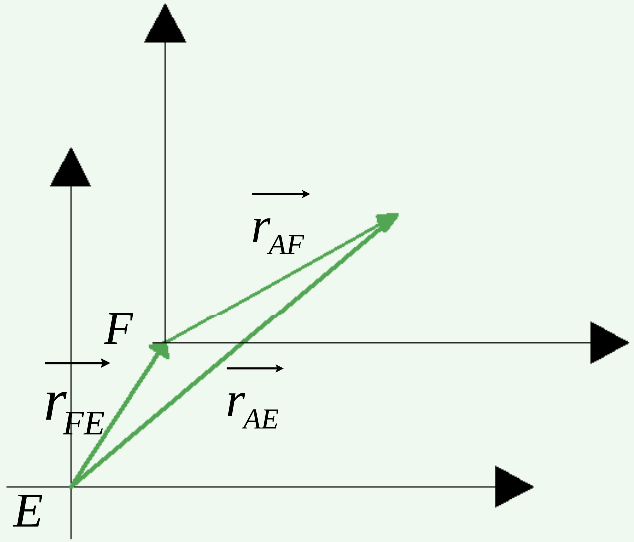


$$\Rightarrow V_{AE} = V_{AF} + V_{FE} = 7\frac{m}{s}$$



$$\Rightarrow V_{AE} = -V_{AF} + V_{FE} = 3\frac{m}{s}$$

سرعت نسبی در حرکت دو بعدی



بردارهای مکان A در دو چهار چوب E,F با رابطه زیر به یکدیگر مربوطند : $\overrightarrow{r_{AE}} = \overrightarrow{r_{AF}} + \overrightarrow{r_{FE}}$

اگر هم ذره A و هم چهار چوب F نسبت به چهر چوبE در حرکت باشد و از رابطه فوق نسبت به زمان مشتق بگیریم همان رابطه مربوط به حرکت یک بعدی به دست می آید :

$$\overrightarrow{V_{AE}} = \overrightarrow{V_{AF}} + \overrightarrow{V_{FE}}$$

دو مثال برای سرعت نسبی در حرکت دو بعدی

الف) قایقی که در رودخانه در حرکت است ، قایق جسم یا متحرک A ، آب رودخانه سیستم F و ساحل همان سیستم ساکن یا زمین (E) است .

ب) هواپیمایی که در هوا در حرکت است ، هواپیما جسم یا متحرک A ، هوا سیستم F و زمین سیستم ساکن (E) است .

د رهمه جا برای ساده بودن مسائل سرعتها ثابت فرض می شوند .

مثال ۷ :

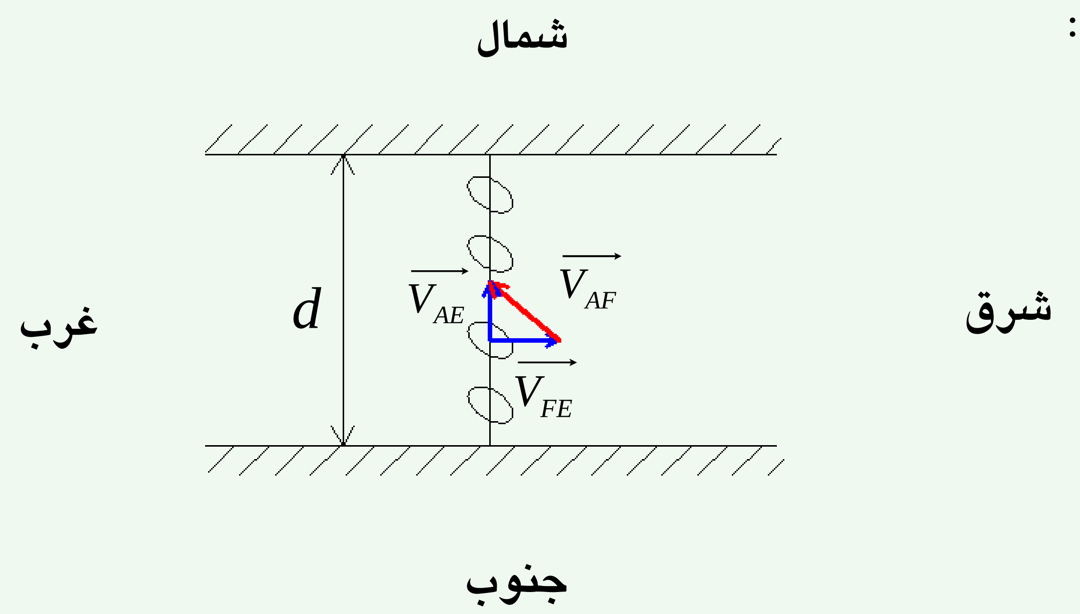
سرعت آب رودخانه ای که در جهت شرق در جریان است ، برابر 3m/s می باشد . قایقی می خواهد از یک ساحل درست به ساحل مقابل برود ، قایقران سرعت سنج قایق را روی 5 m/s تنظیم کرده است :

الف) قطب نمای قایق چه جهتی را نشان می دهد ؟

ب) سرعت دور شده قایق از ساحل چقدر است ؟

ج) اگر عرض رودخانه 2000 متر باشد ، پس از چه مدت قایق به ساحل مقابل می رسد ؟

حل مثال ۷ :



الف)

$$\vec{V}_{AE} = \vec{V}_{AF} + \vec{V}_{FE}$$

ب)

$$V_{AE} = \sqrt{25-9} = 4\frac{m}{s}$$

جهت قطب نمای قایق یعنی جهت بردار AF ۳۷درجه غرب محور شمال و ۵۳ درجه شمال محور غربی است .

ج)

$$t = \frac{d}{V_{AE}} = \frac{2000}{4} = 500s$$

فصـــــــل پنجم

دینامیک ذره – قسمت اول

در این فصل از حرکت اجسام و روابط بین a,t,v,x و همچنین عامل حرکت اجسام (نیرو) نیز در غالب قوانین نیوتن صحبت می شود . باید دانست که قوانین نیوتن قوانینی تجربی هستند .

نیرو می تواند باعث تغییر شکل و یا تغییر سرعت اجسام شود و هر نیرو یا نیروی تماسی است یا کنش از راه دور ، برای اندازه کیری و مقایسه نیروها می توانیم از یک فنر استاندارد و مدرج شده به عنوان نیروسنج استفاده کنیم .

نیرو کمیتی برداری است .

قانون اول نیوتن

هرگاه برآیند نیروهای خارجی وارد بر ذره ای صفرباشد اگر جسم ساکن باشد ساکن می ماند و اکر متحرک باشد به حرکت مستقیم الخط یکنواختش ادامه می دهد .

قانون اول نیوتن را قانون لختی یا ماند هم می نامند ، هر جسمی در غیاب نیروهای خارجی تمایل دارد حالت حرکت خود را حفظ کند یعنی اگر ساکن باشد ساکن بماند و اگر متحرک باشد به حرکت مستقیم الخط خود ادامه دهد .

گاهی به قانون اول نیوتن شرط اول تعادل گفته می شود بنابر شرط اول تعادل یاتعادل انتقالی هرگاه جسمی ساکن یاحرکتش مستقیم الخط یکنواخت باشد ، دارای تعادل انتقالی است و آن وقتی است که برآیند نیروهای خارجی وارد بر جسم صفر باشد .

شرط تعادل انتقالی یا قانون اول نیوتن برای یک جسم در دو بعد عبارت است از :

$$\sum \vec{F} = 0 \qquad \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases}$$

یکای نیرو

$SI : \dfrac{kgm}{s^2}$ یا نیوتن است و آن نیرویی است که اگر به جسمی به جرم **1kg** وارد شود شتابی برابر **1m/s2**به آن می دهد .

$C.G.S : \dfrac{grcm}{s^2}$ یا دین است و آن نیرویی است که اگر به جسمی به جرم **1gr** وارد شود شتابی برابر **1cm/s2**به آن می دهد .

$$1N = 10^5 dyn$$

جرم (**m**) :

ماند یا لختی تمایل به حفظ حالت حرکت یا مقاومت در مقابل تغییر تندی را ماند یا لختی می گویند که بستگی به مواد تشکیل دهنده جسم دارد ، هر چه مواد تشکیل دهنده جسم بیشتر یا به اصطلاح جرم جسم بیشتر باشد و به طور کلی اندازه مقاومت جسم در مقابل تغییر تندی را جرم جسم می نامند .

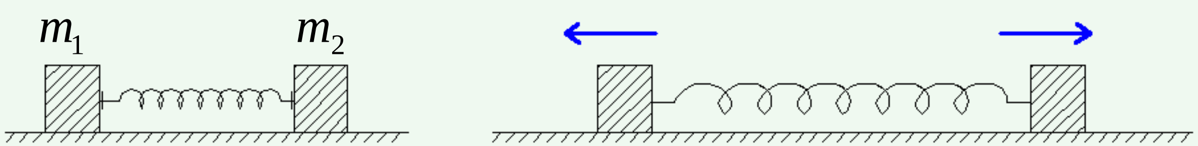
یکای جرم

$$kg : SI$$

$$gr : C.G.S$$

واحد جرم اتمی $\frac{1}{12}$ جرم اتم کربن ۱۲ $(1a.m.u = 1.67 \times 10^{-27}\,kg)$

تغییر سرعت جسم با جرمش نسبت عکس دارد .



$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\Delta v_2}{\Delta v_B}$$

قانون دوم نیوتن

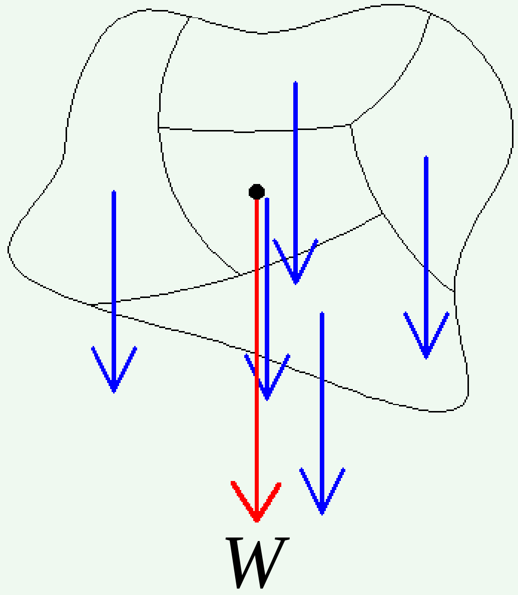
هرگاه برآیند نیروثابتی به ذره ای به جرم m اثر کند ، شتابی به آن ذره می دهد که با برایند نیرو نسبت مستقیم و با جرم نسبت عکس دارد .

$$\vec{a} = \frac{\sum \vec{F}}{m} \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = ma_x \\ \sum F_y = ma_y \\ \sum F_z = ma_z \end{cases}$$

با استفاده از ماشین آتوود ، ریل هوا و ... می توانیم درستی قانون نیوتن را تحقیق کنیم .

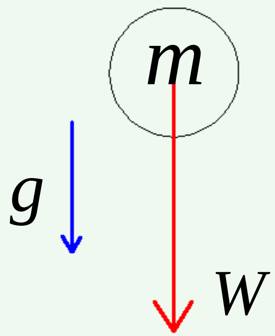
وزن (W)

برایند نیروهای جاذبه ای که از مرکز زمین به تک تک ذرات یک جسم اثر می کند و می خواهد آن را به سمت مرکز زمین بکشاند . باید دانست که این تعریفی است که فقط در نزدیکی زمین صدق می کند .



رابطه وزن و جرم

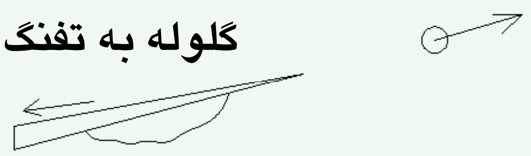
هر گاه جسمی به جرم m در نزدیکی سطح زمین در حال سقوط در نظر بگیریم ، با چشم پوشی از مقاومت هوا تنها نیروی موثر بر آن نیروی ثقل زمین یا وزن جسم است که بنابر قانون دوم نیوتن شتاب جسم با نیرو نسبت مستقیم و با جرم نسبت عکس دارد .



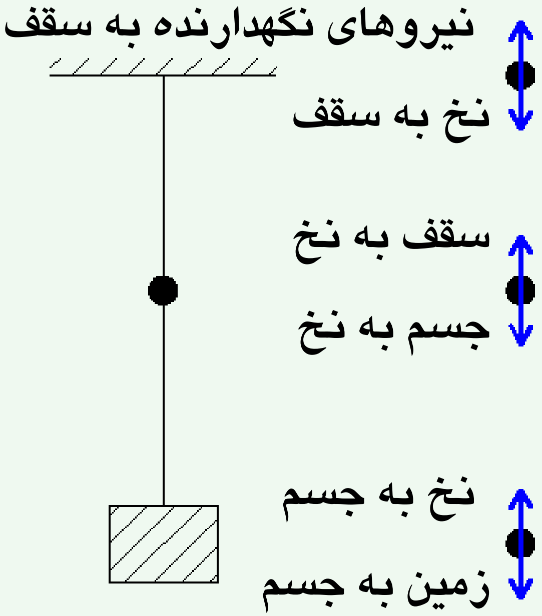
$$g = \frac{W}{m} \Rightarrow W = mg$$

وزن جسم کمیتی برداری است که درنقاط مختلف تغییر می کند درصورتیکه جرم جسم کمیتی اسکالر است که درنقاط مختلف تغییر نمی کند .

قانون سوم نیوتن



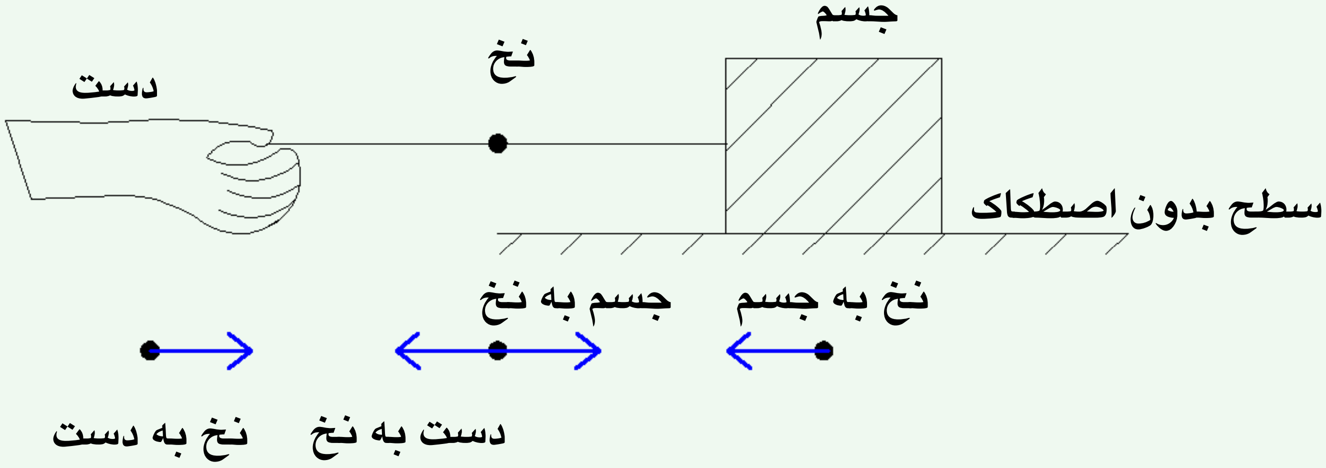
هر عملی عکس العملی دارد مساوی و مختلف الجهت با آن ، نیروهای عمل و عکس العمل به دو جسم مختلف وارد می شوند .



نیروهای عمل و عکس العمل:

- سقف به نخ با نخ به سقف
- جسم به نخ با نخ به جسم
- زمین به جسم با جسم به زمین

نیروهای عمل و عکس العمل در راستای افقی



برای نخ سبک و در حال کشش ، نخ فقط نقش انتقال دهنده نیرو را دارد و در حالت تعادل هر چهار نیرو برابرند .

همچنین کشش یک نخ در حال کشش در تمام قسمتهای نخ یکسان است .

روش حل مسائل دینامیک :

۱- رسم شکل ساده

۲- در نظرگرفتن اجسام ، نقاط مشخص ، گره نخها به عنوان نقاط جرم داری که بر آنها نیرو وارد می شود .

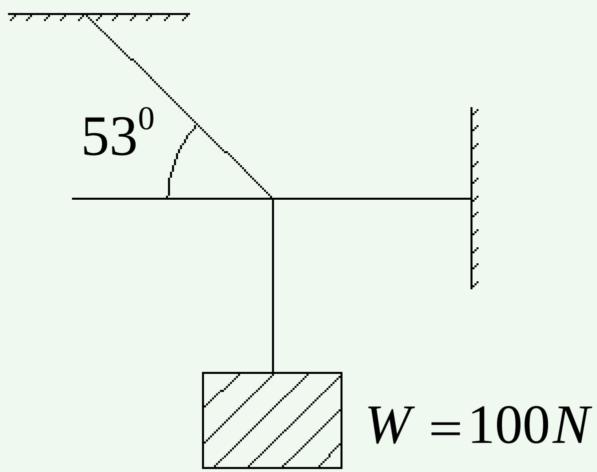
۳- رسم دیاگرام ازاد هر جسم یعنی مشخص کنیم به هر جسم از جانب سایر احسام چه نیروهایی وارد می شود .

۴- در نظر گرفتن محورهای مختصات مناسب و تصویر نیروها بر روی این محورها

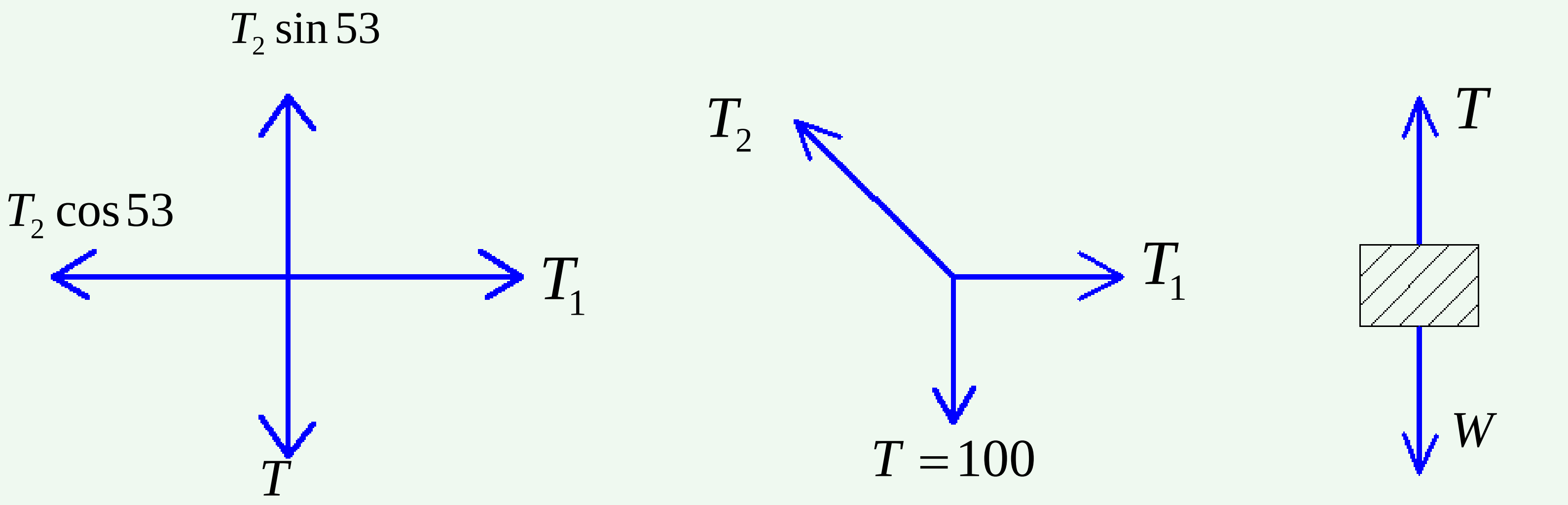
۵- استفاده از روابط سینماتیک و دینامیک

مثال ۱ :

کشش هر نخ در شکل زیر ؟



حل مثال ١ :

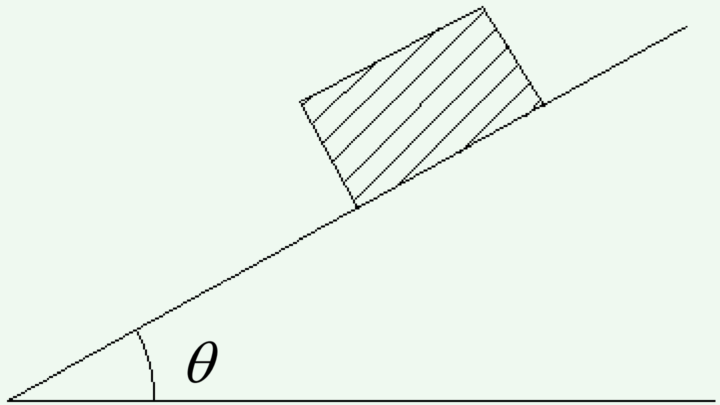


$$T - W = 0 \Rightarrow T = 100N$$

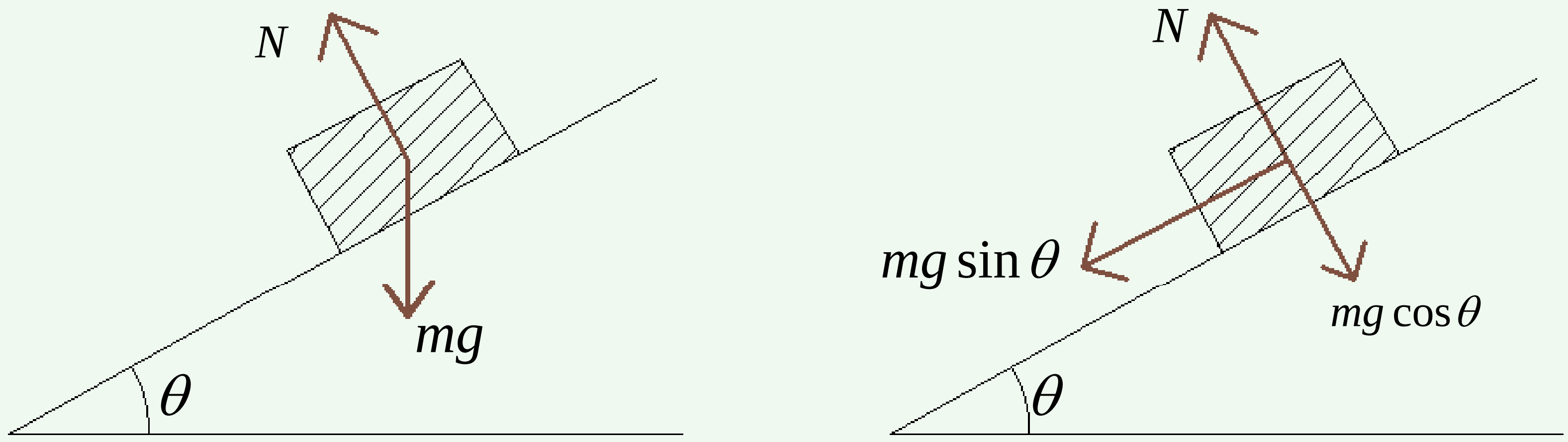
$$\begin{cases} \sum F_y = 0 \\ \sum F_x = 0 \end{cases} \begin{cases} T_2 \sin 53 = 100 \Rightarrow T_2 = 1256N \\ T_1 = T_2 \cos 53 \Rightarrow T_1 = 75N \end{cases}$$

مثال ۲ :

شتاب حرکت یک جسم بر روی سطح شیبدار بدون اصطکاک ؟



حل مثال ۲ :

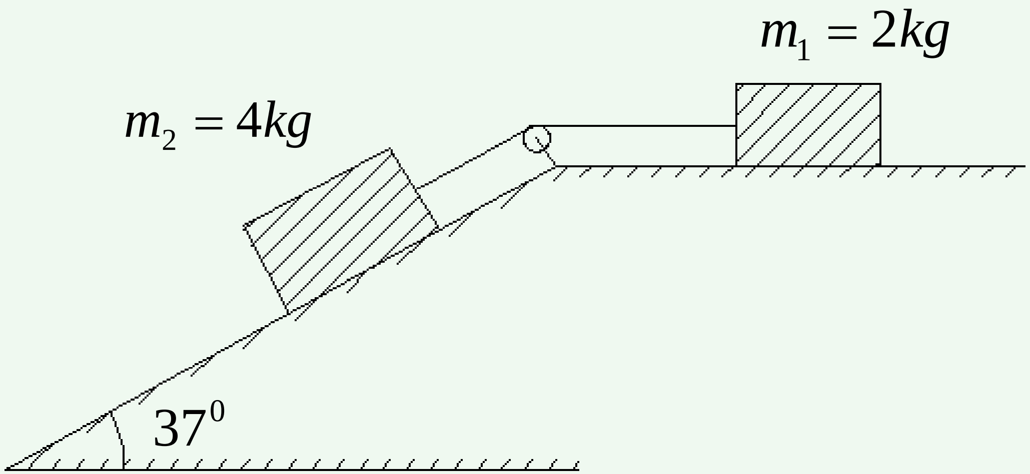


$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N = mg\cos\theta$$

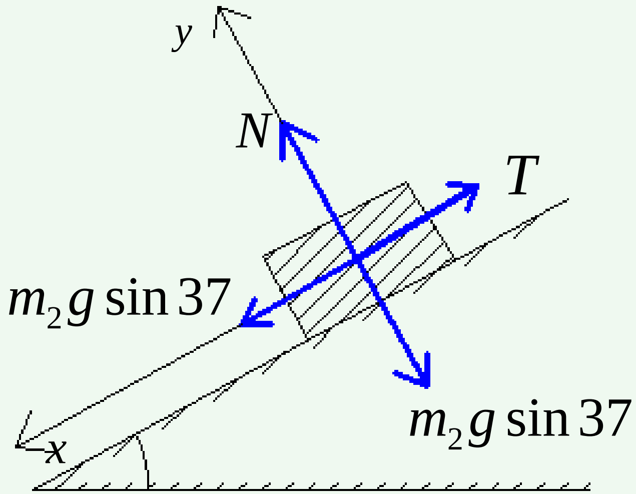
$$\sum F_x = ma \Rightarrow mg\sin\theta = ma \Rightarrow a = g\sin\theta$$

مثال ۳ :

در شکل زیر صطوح تماس بدون اصطکاک هستند ، شتاب حرکت دستگاه و کشش نخ را تعیین کنید ؟(g=10m/s2)

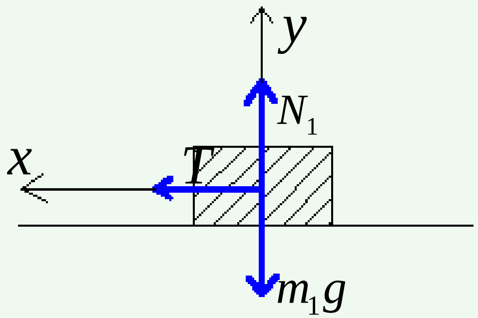


حل مثال ۲ :



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N = m_2 g \cos 37 = 32N$$

$$\sum F_x = m_2 a \Rightarrow m_2 g \sin 37 - T = m_2 a \Rightarrow 24 - T = 4a$$



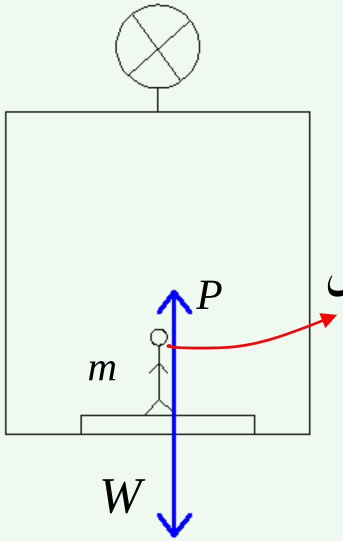
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_1 = m_1 g = 20N$$

$$\sum F_x = m_1 a \Rightarrow T = 2a$$

$$a = 4\frac{m}{s^2}$$

$$T = 8N$$

آسانسور و وزن ظاهری



وزن ظاهری=نیروسنج نشان می دهد=شخص به کف=کف به شخص

زمین به شخص

آسانسور با شتاب ثابت تند شونده بالا می رود .

آسانسور با شتاب ثابت کند شونده پایین می رود .

$$W - P = ma$$

آسانسور با شتاب ثابت تند شونده پایین می رود .

آسانسور با شتاب ثابت کند شونده بالا می رود .

$$P - W = ma$$

قرارداد :

حرکت به سمت بالا (مثبت)

حرکت به سمت پایین (منفی)

حرکت کند شونده (منفی)

حرکت تند شونده (مثبت)

در فرمول

$$P - W = ma$$

$a > 0$: تند شونده بالا، کند شونده پایین

$a < 0$: تند شونده پایین، کند شونده بالا

فصـــــل ششم

دینامیک ذره – قسمت دوم

اصطکاک

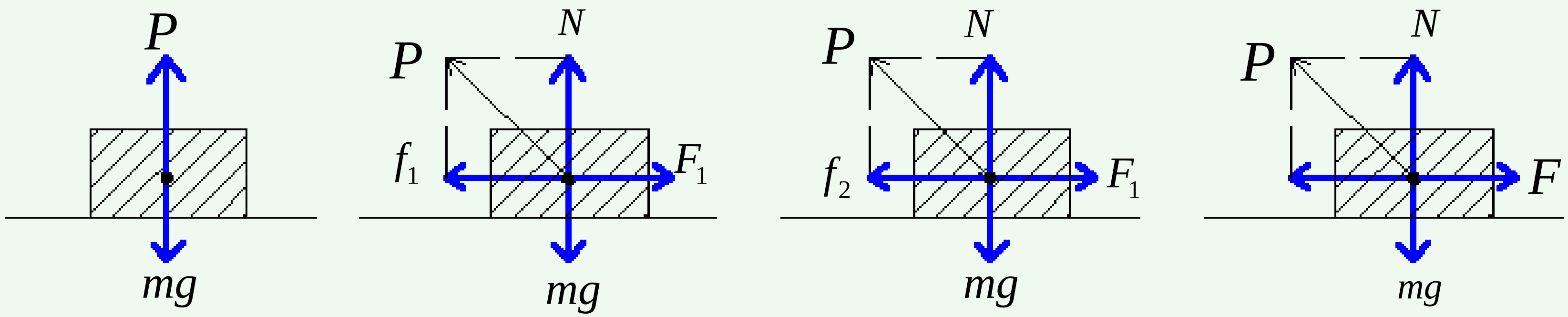
نیروی اصطکاک هم لازم و گاهی نیز مزاحم است ، هنگام نوشتن یا راه رفتن لازم و هنگام ایجاد ساییدگی یا خوردگی و سرو صدا زاید است و باید به طریقی کاهش یابد . دراینجا بیشتر اصطکاک لغزشی مورد نظر است و اصطکاک غلتشی به اختصار بیان می شود .

منشا نیروی اصطکاک نیروهای الکتریکی بین سطوح تماس استو در عین حال :

نیروی اصطکاک:

- به جنس سطوح تماس بستگی دارد .
- به اندازه واقعی سطوح تماس بستگی دارد .
- با مولفه عمودی نیروی عکس العمل سطح متناسب است .

ضریب اصطکاک ایستایی و دینامیکی μ_k , μ_s

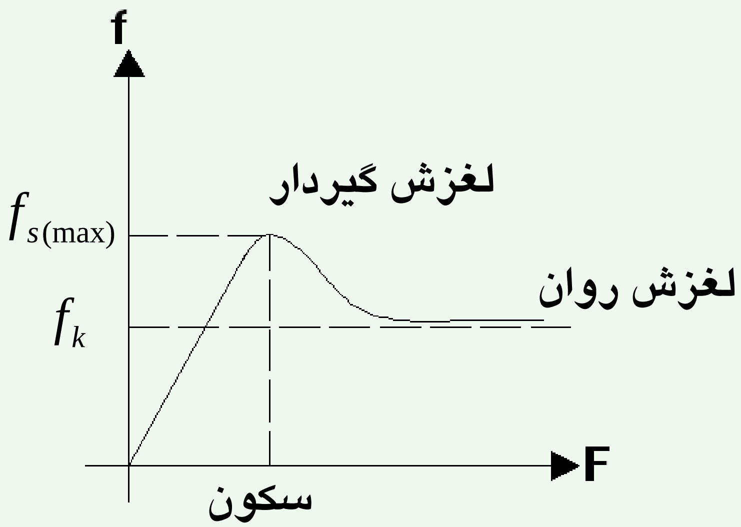


جسم در آستانه حرکت — جسم ساکن و F_2 بزرگتر — جسم ساکن و F_1 کوچک — جسم ساکن

در آستانه حرکت f_s حداکثر مقدارش رادارد و تجربه نشان می دهد که $f_s \times N$ و ضریب تناسب ضریب اصطکاک ایستایی نامیده می شود $f_s = \mu_s N$

$$f_s \le \mu_s N \quad \text{در حالت کلی} \quad \begin{cases} f_s < \mu_s N & \text{قبل از آستانه حرکت} \\ f_s = \mu_s N & \text{در آستانه حرکت} \end{cases}$$

در حالت که تحت تاثیر F جسم به حرکت در آید ، تجربه نشان می دهد که $f_k < f_s$, $\mu_k < \mu_s$ است .



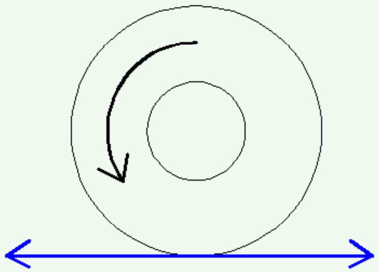
تغییر نیروی اصطکاک با نیروی اعمال شده

اصطکاک غلتشی

از اصطکاک جنبشی (لغزشی بسیار کوچکتر است .

غلتش

الف) واداشته : جهت اصطکاک غلتشی رو به جلو در جهت حرکت چرخ است .به جنس سطوح تماس بستگی دارد .



لاستیک به جاده

اصطکاک غلتشی (جاده به به لاستیک)

اگر نیروی چرخانده بیش از $f_s(\max)$ باشد ، غلتش با لغزش همراه است .

ب) آزاد : نیروی اصطکاک غلتشی به طرف عقب اثر می کند و حرکت چرخ را کند می کند .

مثال ۱ :

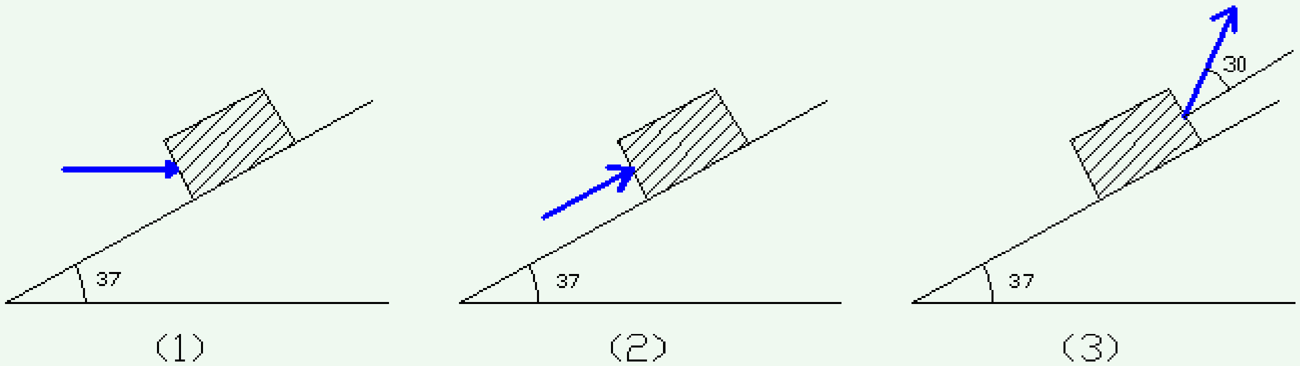
درهر یک از شکلهای زیر اگر جرم جسم m=4kg باشد ، اندازه نیروی F چقدر باشد تا جسم

الف) با شتاب a=1m/s2 به سمت بالا حرکت کند ؟

ب) باسرعت ثابت به سمت بالا حرکت کند ؟

$$\mu_k = 0.2$$

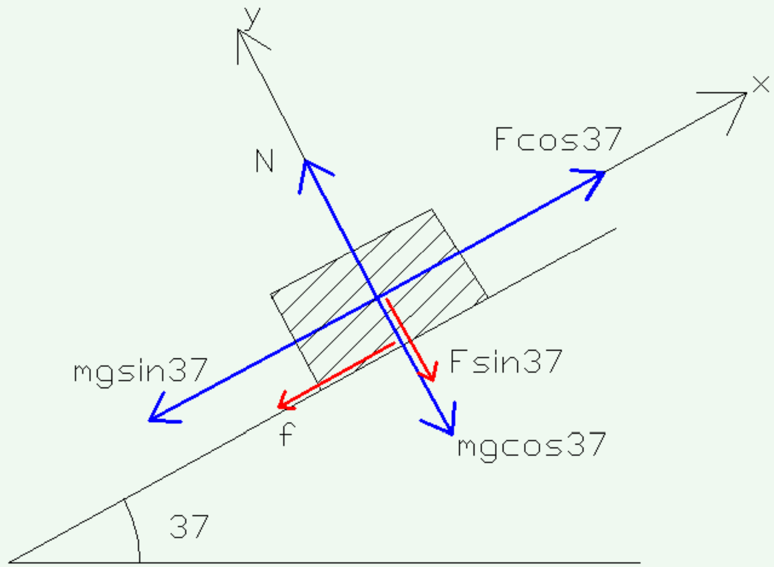
$$g = 10\frac{m}{s^2}$$



$$\sin 37^0 = 0.6, \cos 37^0 = 0.8, \sin 30^0 = 0.5, \cos 30^0 = 0.86$$

حل مثال ۱ :

شکل (۱) :



الف)

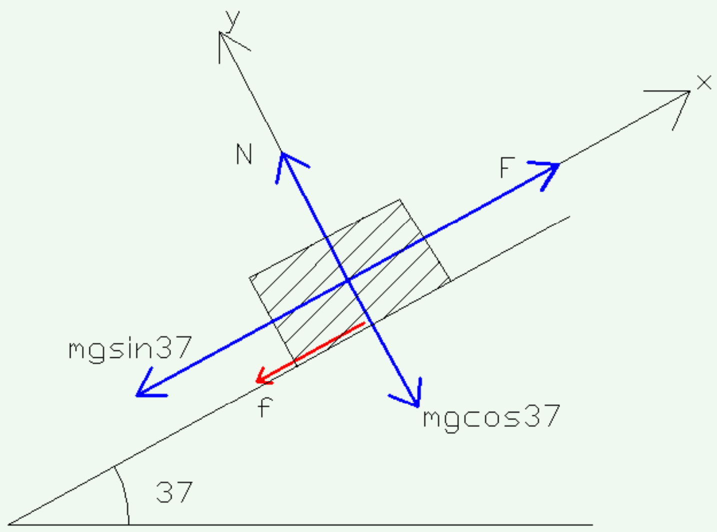
$$\left.\begin{aligned}\sum F_x &= ma \Rightarrow F\cos 37 - f - mg\sin 37 = ma\\ \sum F_y &= 0 \Rightarrow N = F\sin 37 + mg\cos 37\end{aligned}\right\} f = \mu N$$

ب)

$$\left.\begin{aligned}\sum F_x &= 0 \Rightarrow F\cos 37 - f - mg\sin 37 = 0\\ \sum F_y &= 0 \Rightarrow N = F\sin 37 + mg\cos 37\end{aligned}\right\} f = \mu N$$

حل مثال ۱ :

شکل (۲) :



الف)

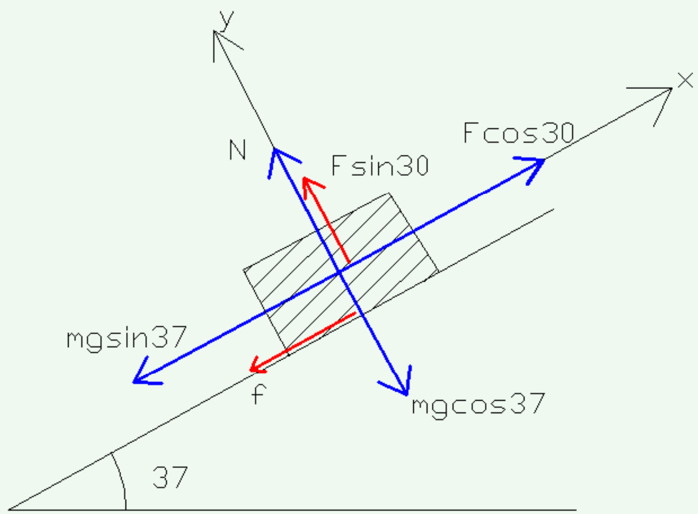
$$\left.\begin{array}{l}\sum F_x = ma \Rightarrow F\cos 37 - f - mg\sin 37 = ma \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow N = mg\cos 37\end{array}\right\} f = \mu N$$

ب)

$$\left.\begin{array}{l}\sum F_x = 0 \Rightarrow F - f - mg\sin 37 = 0 \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow N = mg\cos 37\end{array}\right\} f = \mu N$$

حل مثال ۱ :

شکل (۳) :



الف)

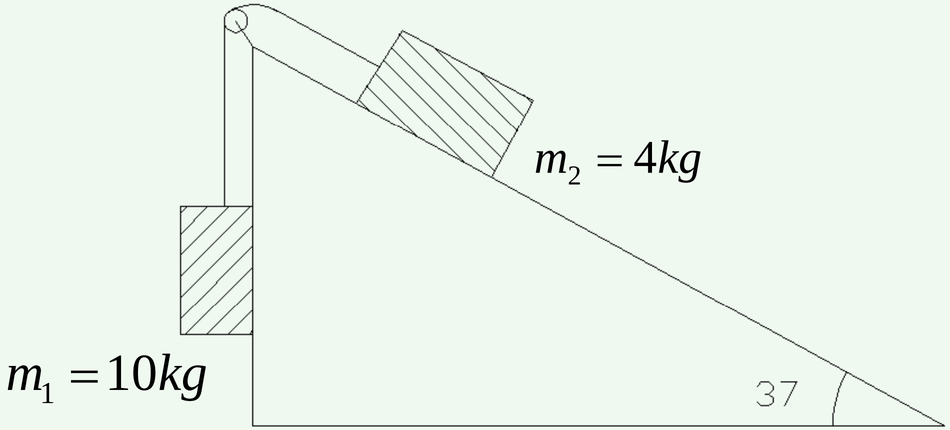
$$\left.\begin{aligned}\sum F_x &= ma \Rightarrow F\cos 30 - f - mg\sin 37 = ma \\ \sum F_y &= 0 \Rightarrow N = mg\cos 37 - F\sin 30\end{aligned}\right\} f = \mu N$$

ب)

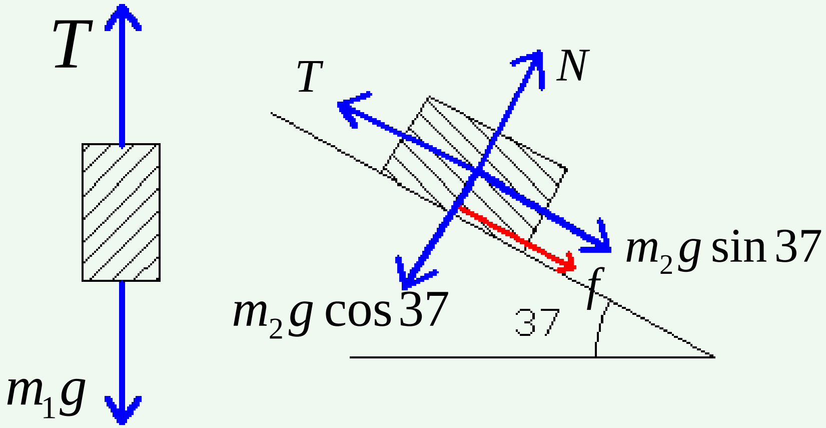
$$\left.\begin{aligned}\sum F_x &= 0 \Rightarrow F\cos 30 - f - mg\sin 37 = 0 \\ \sum F_y &= 0 \Rightarrow N = mg\cos 37 - F\sin 30\end{aligned}\right\} f = \mu N$$

مثال ۲ :

در شکل زیر اگر ضزیب اصطکاک سطح شیبدار $\mu_k = 0.5$ باشد ، شتاب حرکت و کشش نخ را تعیین کنید ؟



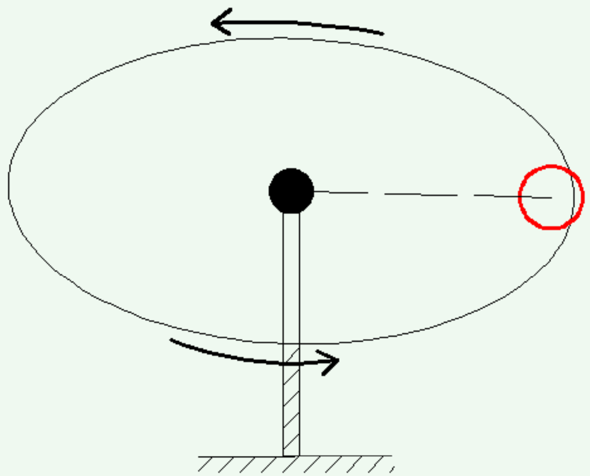
حل مثال ۲ :



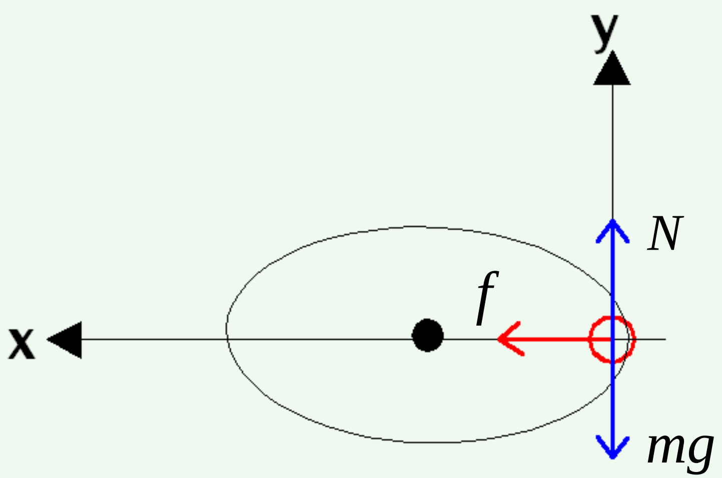
$$\left.\begin{aligned} &m_1g - T = m_1a \\ &T - m_2g\sin 37 - f = m_2a \\ &N = m_2g\cos 37 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a = \frac{30}{7}\frac{m}{s^2}, T = \frac{400}{7}N$$

مثال ۳ :

مهره کوچکی را روی لبه صفحه ای به شعاع 15 cm که با سرعت 30 دور در دقیقه می چرخد قرار می دهیم ، حداقل ضریب اصطکاک چقدر باشد تا مهره روی صفحه نلغزد ؟



حل مثال ۳ :

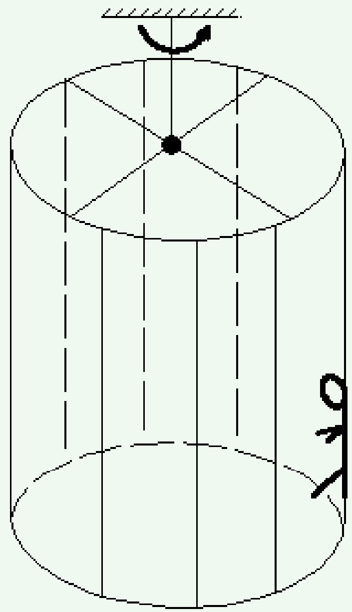


$$\left.\begin{array}{l}\sum F_y = 0 \Rightarrow N = mg \\ \sum F_x = ma_r \Rightarrow f = \dfrac{mv^2}{r}\end{array}\right\} \dfrac{mv^2}{r} = \mu mg \Rightarrow \mu = \dfrac{v^2}{rg}$$

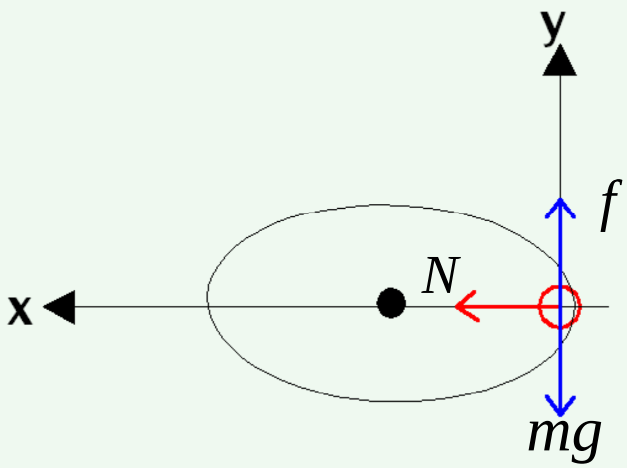
$$v = \pi r(\frac{m}{s}), \mu = \frac{\pi^2 r}{g} = \frac{(3.14^2)(0.15)}{10} \cong 0.15$$

مثال ۴ :

حداقل ضریب اصطکاک بین لباس شخصو دیواره گردونه ای به شعاع r و سرعتV چقدر باشد تا شخص سقوط نکند ؟



حل مثال ۴ :

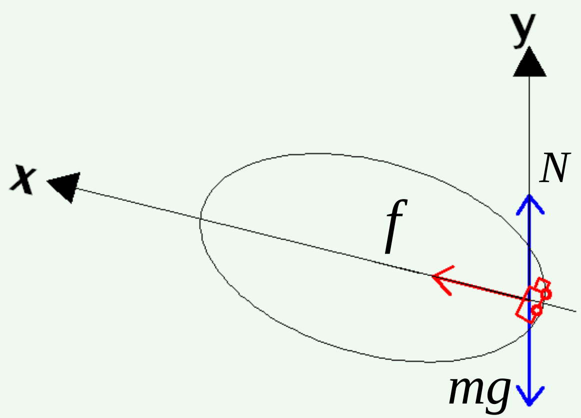


$$\left.\begin{aligned}\sum F_y = 0 \Rightarrow f = mg \\ \sum F_x = ma_r \Rightarrow N = m\frac{v^2}{r}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \mu = \frac{rg}{v^2}$$

حرکت در پیچ جاده :

الف) جاده شیب عرضی ندارد و دارای اصطکاک عرضی است .

رابطه بین سرعت اتومبیل و شعاع مسیربا ضریب اصطکاک عرضی چگونه است ؟

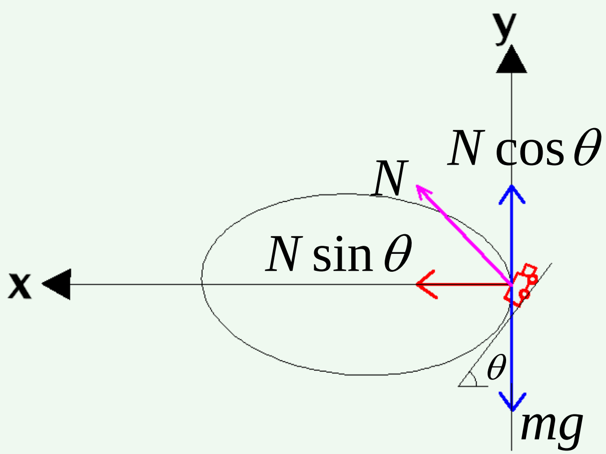


$$\left.\begin{array}{l}\sum F_x = ma_r \Rightarrow f = \dfrac{mv^2}{r} \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow N = mg\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{v^2}{r} = \mu g \Rightarrow \mu = \frac{v^2}{rg}$$

حرکت در پیچ جاده :

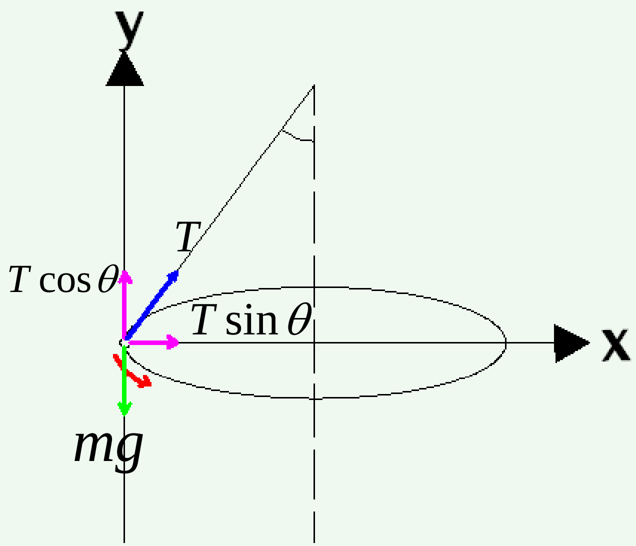
ب) جاده شیب عرضی ندارد و دارای شیب عرضی است .

رابطه بین سرعت اتومبیل و شعاع مسیرو زاویه شیب عرضی چگونه است ؟



$$\left.\begin{aligned}\sum F_y &= 0 \Rightarrow N\cos\theta = mg\\ \sum F_y &= ma_r \Rightarrow N\sin\theta = \frac{mv^2}{r}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \tan\theta = \frac{v^2}{rg}$$

محاسبه زمان تناوب آونگ مخروطی



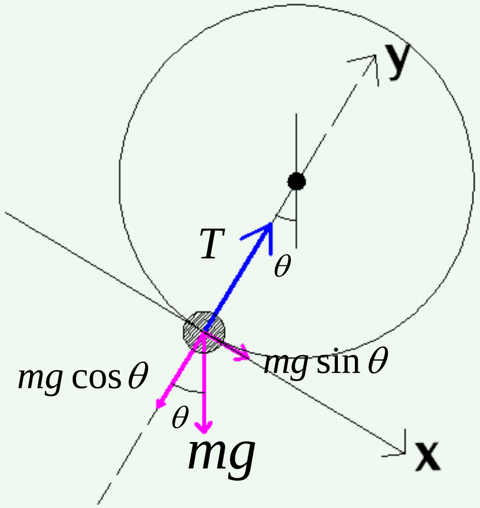
گلوله در سطح افقی در مسیر دایره ایحرکت یکنواخت دارد .

$$\left.\begin{array}{l}\sum F_y = 0 \Rightarrow T\cos\theta = mg \\ \sum F_x = \dfrac{mv^2}{r} \Rightarrow T\sin\theta = \dfrac{mv^2}{r}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{v^2}{rg}$$

$$\sin\theta = \frac{r}{l} \Rightarrow \frac{r}{l\cos\theta} = \frac{v^2}{rg} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{r^2 g}{l\cos\theta}}$$

$$\tau = \frac{2\pi r}{v} \Rightarrow \tau = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\theta}{g}}$$

دوران در سطح قائم



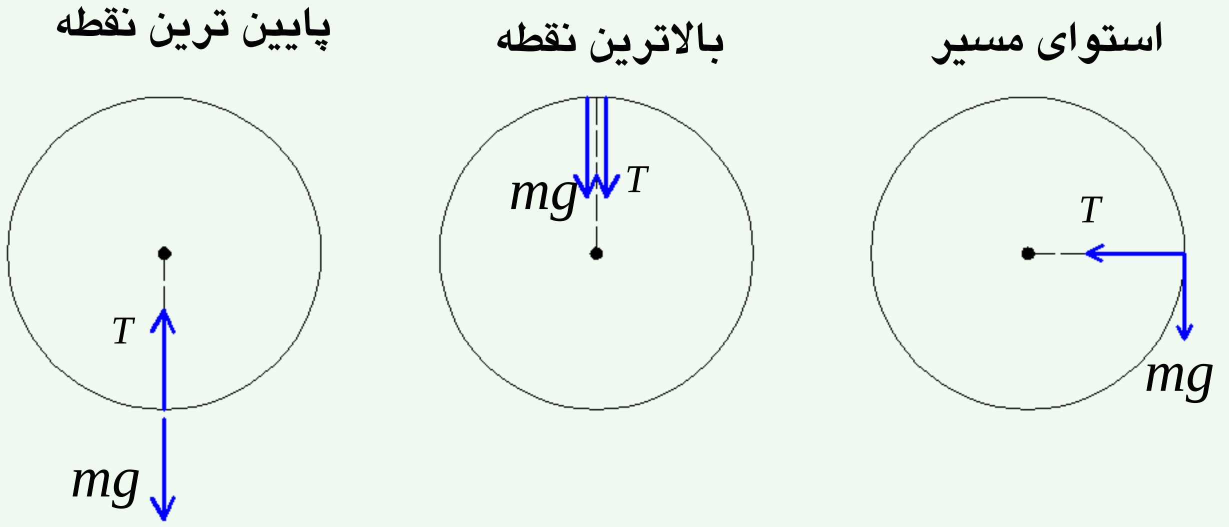
$$\sum F_x = ma_r \Rightarrow T - mg\cos\theta = ma_r$$

$$T = mg\cos\theta + \frac{mv^2}{R}$$ کشش نخ

$$\sum F_y = ma_t \Rightarrow mg\sin\theta = ma_t$$

$$a_t = g\sin\theta$$ شتاب مماسی

کشش نخ و شتاب مماسی در نقاط خاص از حرکت دورانی در سطح قائم

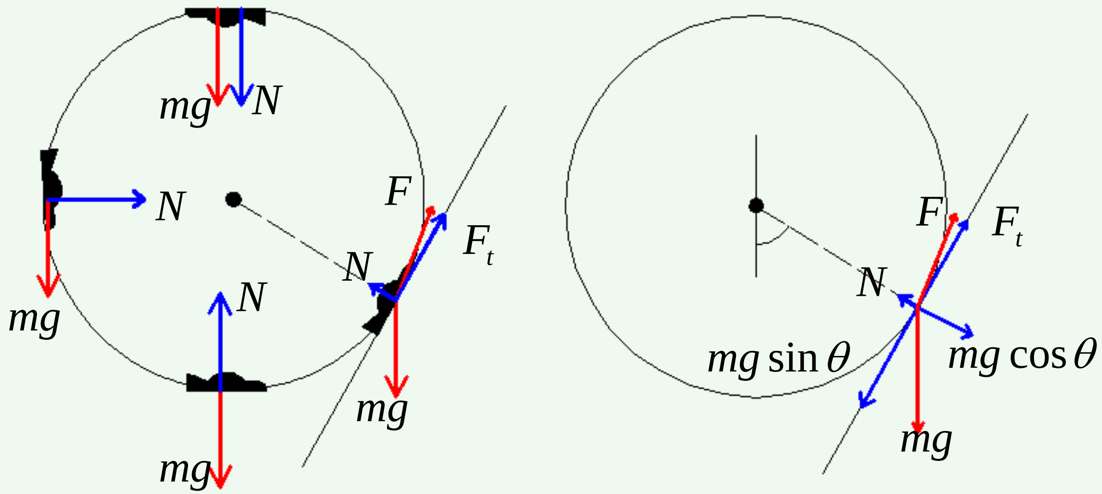


$$T = mg + \frac{mv^2}{R}$$
$$a_t = 0$$

$$T = -mg + \frac{mv^2}{R}$$
$$a_t = 0$$

$$T = \frac{mv^2}{R}$$
$$a_t = g$$

دوران در سطح قائم بدون نخ

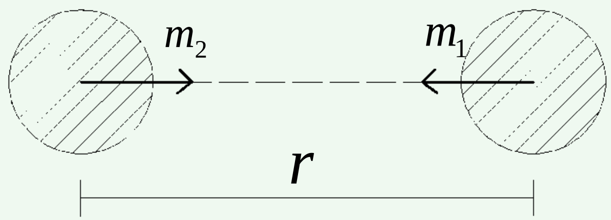


$$N - mg\cos\theta = \frac{mv^2}{R}$$

$$N = mg\cos\theta + \frac{mv^2}{R}$$

عکس العمل عمودی نیروی موتوریا عکس العمل صندلی خلبان

نیروی گرانشی



$$F_{gr} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$G = 6.67\times10^{-11}\ \frac{N.m^2}{kg^2}$$ ثابت جهانی گرانش

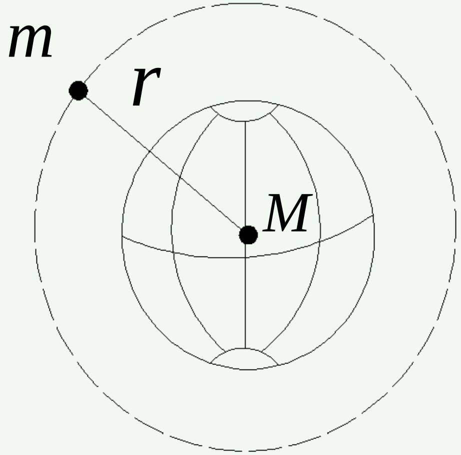
الف) برای جرمهای نقطه ای صادق است .

ب) از قانون عمل و عکس العمل پیروی میکند .

$$\left.\begin{array}{l} F = G\dfrac{Mm}{r^2} \\ F = mgt \end{array}\right\} \Rightarrow g = \frac{GM}{r^2}$$

شتاب جاذبه در نزدیکی زمین

سرعت مداری و زمان تناوب حرکت ماهواره



$$F = ma_r \Rightarrow \frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$T = \frac{2\pi r}{v} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3$$

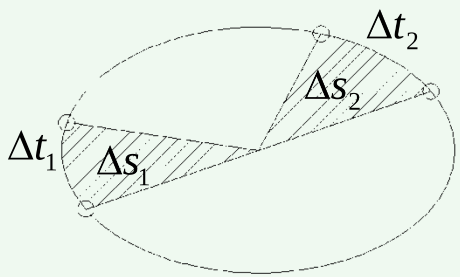
سرعت ماهواره ای که نزدیک سطح زمین دوران می کند .

$$\left.\begin{aligned} g &= \frac{GM}{r^2} \\ v &= \sqrt{\frac{GM}{r}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow v = \sqrt{rg}$$

قوانین کپلر در مورد حرکت سیارات به دور خورشید

۱) مدار سیارات به دور خورشید بیضی است که خورشید در یکی ازکانونهای آن قرار دارد .

۲) سطحی که خط واصل بین سیاره و خورشید در واحد زمان باروپ می کند ، مقداری است ثابت .



$$\frac{\Delta s_1}{\Delta t} = \frac{\Delta s_2}{\Delta t}$$

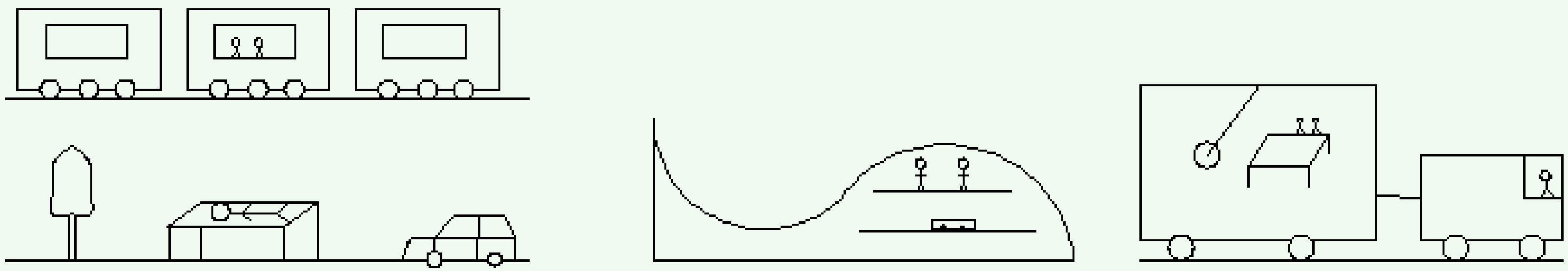
۳) مجذور زمان تناوب حرکت سیاره با مکعب شعاع متوسط مسیر حرکت متناسب است :

$$T^2 \propto kr^3$$

مختصات لخت (اینرسی) یا غیر لخت (غیراینرسی)

تمام دستگاههای مختصاتی که نسبت به ستارگان ثابت دور دست ساکن یا حرکت یکنواخت دارند دستگاه لخت یا اینرسی نامیده می شود .

تمام دستگاههای مختصاتی که حرکتشان شتابدار است ، مختصات غیر اینرسی یاغیرلخت نامیده می شود .



قوانین نیوتن در مورد دستگاههای مختصات لخت صادق است . اگر بخواهیم مساله ای را نسبت به دستگاه مختصات غیر اینرسی با استفاده از قوانین نیوتن حل کنیم بایستی از نیروهای اینرسی یا شبه نیرو در نظر بگیریم . (نیروی گریز ازمرکز یک شبه نیرو است)

فصـــــل هفتم

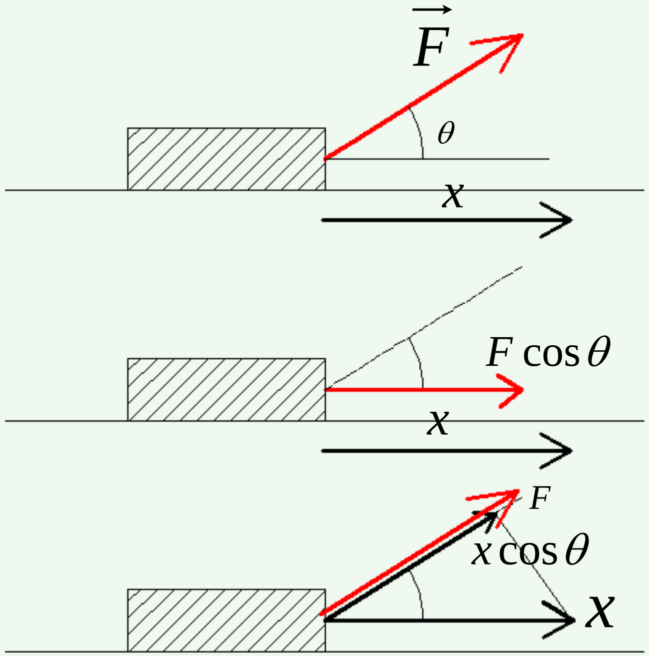
کـــــار و انــــــــرژی

اهمیت کار وانرژی

برخی از مسائل مکانیک از طریق کار و انرژی ساده تر حل می شود ، به خصوص وقتی که نیروهای وارد بر ذره متغیر باشند یا نسبت به زمان و مکان تغییر کند .

مطرح شدن اصل پایستگی انرژی ، که انرژی از بین نمی رود و تنها از صورتی به صورت دیگر تبدیل می شود .

کار نیروی ثابت



حاصلضرب نیرو ، تغییر مکان در کسینوس زاویه بین آن دو

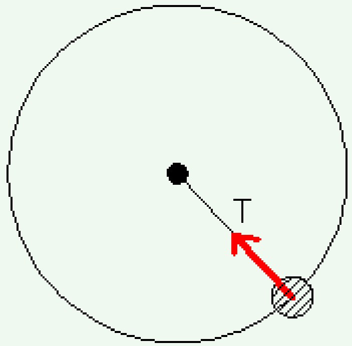
حاصلضرب تغییر مکان در تصویر نیرو در راستای تغییر مکان

حاصلضرب نیرو در تصویر مکان در راستای نیرو

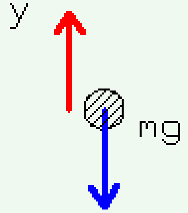
$$W = F.x\cos\theta$$

$$\overrightarrow{W} = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{x}$$

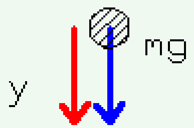
کارممکن است مثبت ، منفی یا صفر باشد .



کارنیروی کشش نخ در حرکت دورانی صفر است .



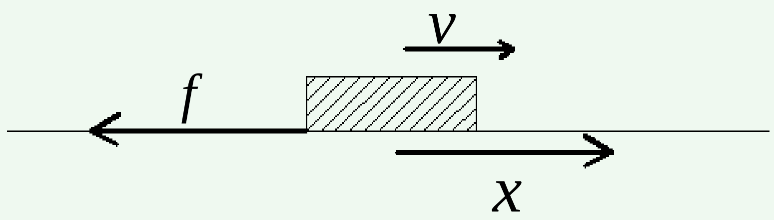
کار نیروی وزن در حرکت جسم به سمت بالا منفی است .



کار نیروی وزن در حرکت جسم به سمت پایین مثبت است .

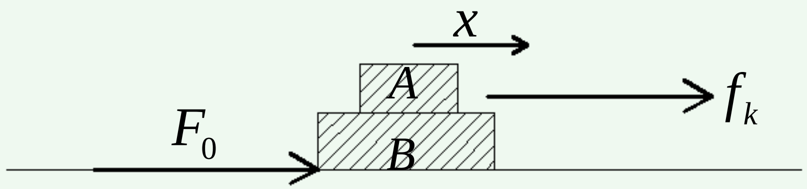
کار نیروی اصطکاک

کار نیروی اصطکاک با نیروی مقاوم در مقابل حرکت معمولا منفی است .



$$W_f = f.x.\cos 180 = -fx$$

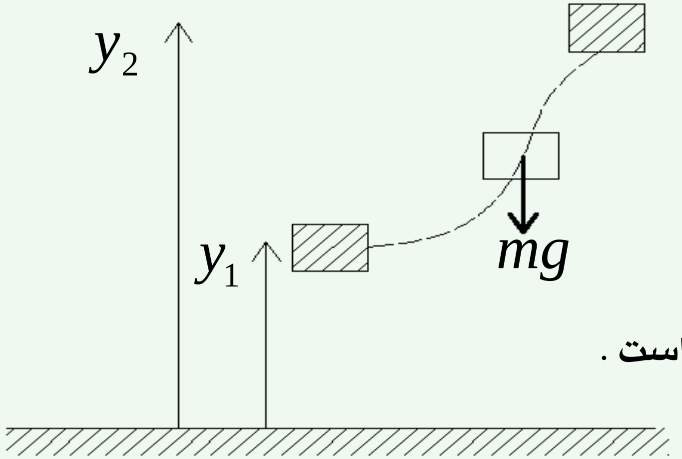
کارنیروی اصطکاک ممکن است در برخی موارد مثبت باشد .

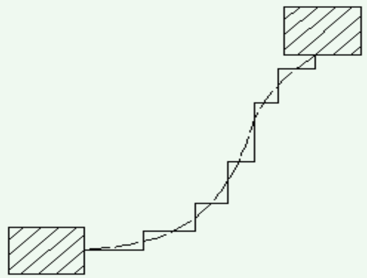


درشکل مقابل در حالی که اصطکاک ایستایی بین A,B به اندازه کافی نباشد ، A به سمت چپ می لغزد . در نتیجه اصطکاک مقاوم در مقابل حرکت آن به سمت راست و تغییر موقعیت A نسبت به میز نیز به سمت راست خواهد بود .

کار نیروی ثقل

جسمی به جرم m راàز ارتفاع y_1 ازسطح زمین تا ارتفاع y_2 باسرعت ثابت بالامی بریم ، دراین جابجایی کار نیروی ثقل چقدر است .



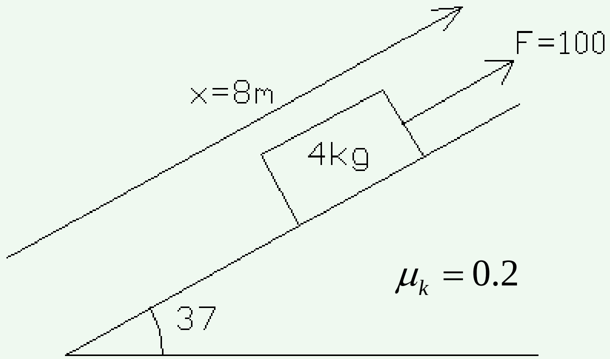


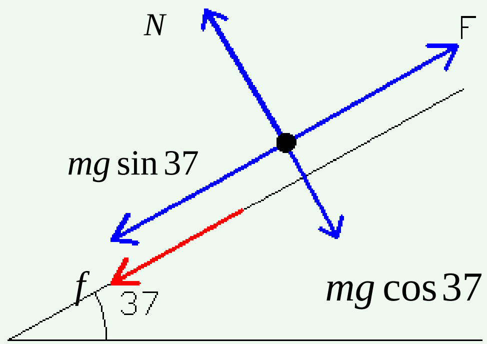
کار نیروی وزن در مسیرهای افقی صفر است .

$$W_g = -mg(y_2 - y_1)x$$

کار نیروی وزن فقط به مکانهای های اولیه ونهایی بستگی دارد و مستقل از مسیر است .
بعلاوه کارنیروی وزن در یک مسیر بسته صفر است .

کار برایند نیروهای وارد بر جسم برابر است با مجموع کارهای تک تک نیروها :



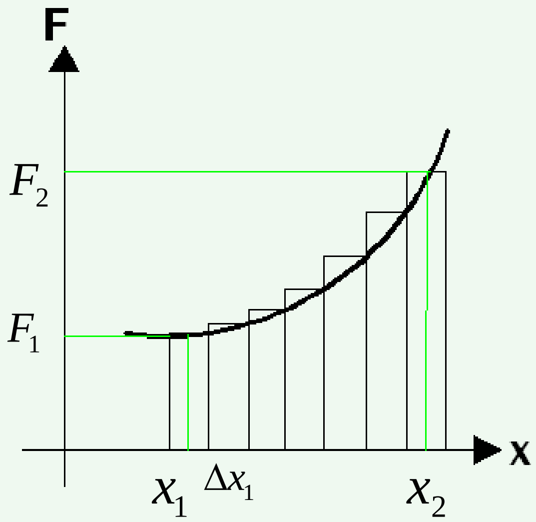


$$f = \mu N = 0.2(mg\cos 37) = 6.4N \Rightarrow \begin{cases} W_N = 0 \\ W_g = \begin{cases} W_{g\cos 37} = 0 \\ W_{g\sin 37} = (mg\sin 37)(8)(\cos 180) = -192J \end{cases} \\ W_F = F.x\cos 0 = 800J \\ W_f = -f.x = -51.2J \\ W_{total} = 800 - 192 - 51.2 = 556.8J \end{cases}$$

$$F_{\text{برایند}} = F - f - mg\sin 37 = 100 - 6.4 - 24 = 69.6N$$

$$W_{\text{برایند}} = F.x.\cos 0 = 69.6 \times 8 = 556.8J$$

کار نیروی متغیر :



$$\Delta W_1 = F_1 \Delta x_1 = \Delta s_1$$

$$\Delta W_2 = F_2 \Delta x_2 = \Delta s_2$$

....

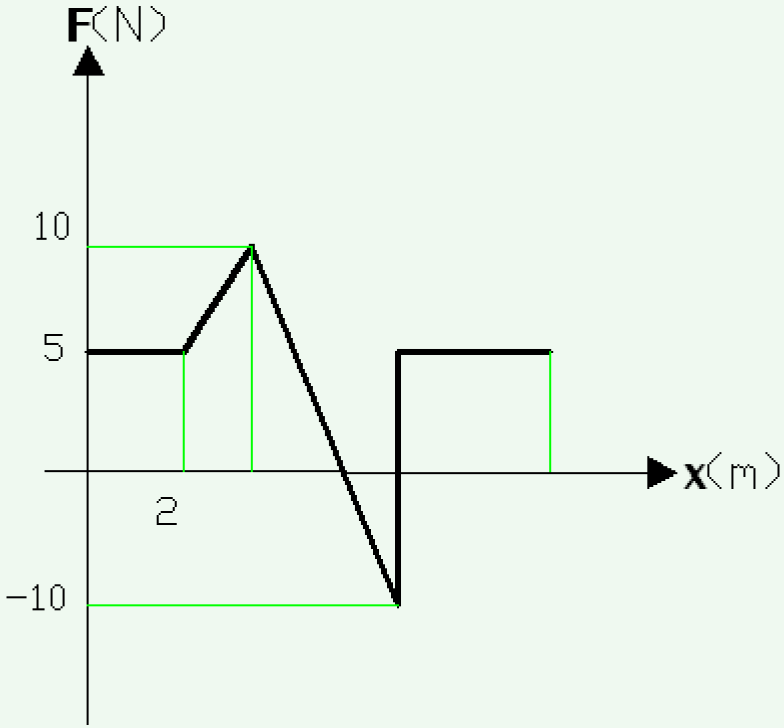
$$\overline{\lim \sum \Delta W_i = \lim \sum F_i \Delta x_i = \lim \sum \Delta s_i} \Rightarrow W = \int_{x_1}^{x_2} F.dx$$

= سطح زیر نمودار

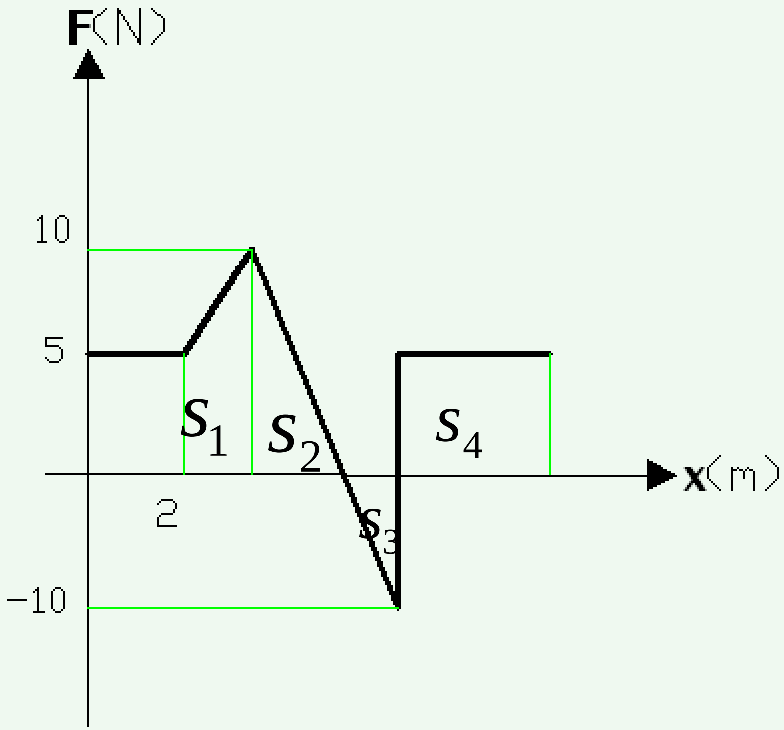
$$\Delta x_i \to 0 \qquad \Delta x_i \to 0$$

مثال ۱ :

بر جسمی نیروی متغیری در راستای محور X همجهت با تغییر مکان وارد می شود ، اگر نمودار نیرو بر حسب فاصله به صورت زیر باشد ، کار انجام شده بین دو مکان $x_2 = 12m, x_1 = 2m$ چقدر است ؟



حل مثال ١ :



$$W = s_1 + s_2 - s_3 + s_4 = 15 + 10 - 10 + 20 = 35J$$

مثال ۲ :

معادله تغییرات F بر حسب X برای جسمی که در راستای محور X ها عبارت است از: $F = 3x^2 + 2x + 1$
کار نیروی F را بین دو مکان $x_2 = 4m, x_1 = 2m$ **تعیین کنید ؟**

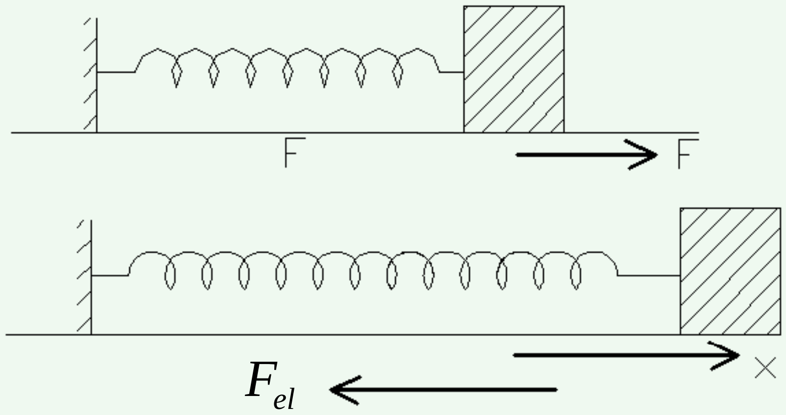
حل مثال ۲ :

$$W=\int_{x_1}^{x_2}\overrightarrow{F}dx \Rightarrow W=\int_{2}^{4}(3x^2+2x+1)dx$$

$$\Rightarrow W==[x^3+x^2+x]_2^4=(64+16+4)-(8+4+2)=70J$$

قانون هوک

هر گاه فنری را از وضعیت تعادل به اندازه x بکشیم یا متراکم کنیم نیروی بازگرداننده فنر با جابجایی در دو جهت مختلف و با یکدیگر متناسبند .

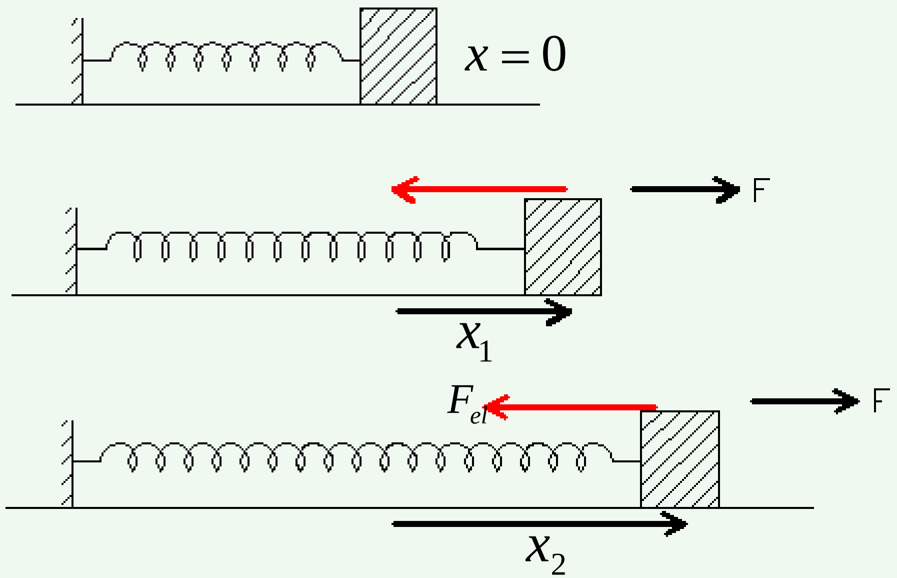


$$F_{el} \propto x \Rightarrow F_{el} = -kx$$

یکای ضریب ثابت فنر **N/m** و به جنس وابعاد فنر بستگی دارد . علامت منفی فقط نشان می دهد که جهت نیروی فنر با تغییر مکان مخالف است .

کار نیروی فنر

فنری به ضریب ثابت **k** را از مکان x_1 از وضعیت تعادل تا مکان x_2 بر روی سطح بدون اصطکاک با سرعت ثابت می کشیم ، در این جابجایی کار نیروی فنر چقدر است ؟



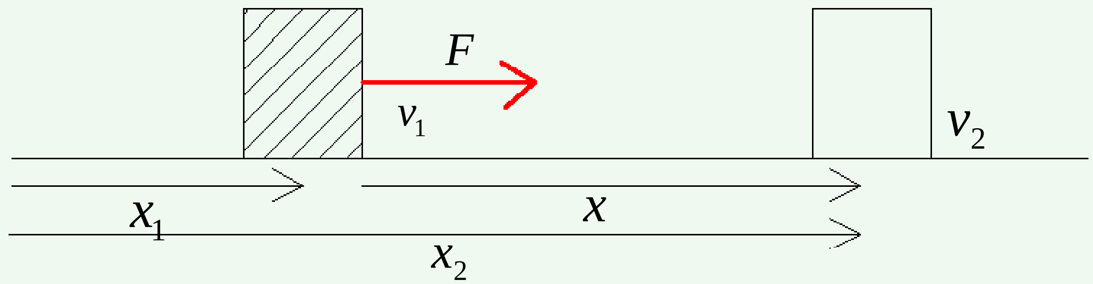
$$W_{el} = \int_{x_1}^{x_2} F_{el}.dx = -\int_{x_1}^{x_2} kx.dx = -\frac{1}{2}K(x_2{}^2 - x_1{}^2)$$

کار نیروی فنر فقط به مکانهای اولیه و نهایی بستگی دارد و مستقل از مسیر است ، بعلاوه کار نیروی فنر در یک مسیربسته صفر است .

قضیه کارو انرژی یا قضیه انرژی جنبشی در یک بعد

کار برآیند نیروهای وارد بر جسم برابر است با تغییرات انرژی جنبشی جسم

الف) وقتی نیرو ثابت است :



$$\left.\begin{aligned} W = F.x \Rightarrow W = m.a.x \\ ax = \frac{v_2{}^2 - v_1{}^2}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow W = \frac{1}{2} m v_2{}^2 - \frac{1}{2} m v_1{}^2$$

ب) وقتی نیرو متغیر است :

با فرض هم جهت بودن نیرو وتغییر مکان

$$W = \int_{x_1}^{x_2} \overrightarrow{F}.\overrightarrow{dx}$$

$$W = \int_{x_1}^{x_2} m\frac{dv}{dt}.dx = m\int_{v_1}^{v_2} vdv = \frac{1}{2}mv_2{}^2 - \frac{1}{2}mv_1{}^2$$

اگر انرژی جنبشی ، $K = \frac{1}{2}mv^2$ باشد .

$$W = K_2 - K_1 = \Delta K$$

توان

توان متوسط :

$$\overline{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

توان لحظه ای ، مقدار حدی $\overline{P}$ وقتی $\Delta t \to 0$ میل می کند .

$$P = \frac{dW}{dt}$$

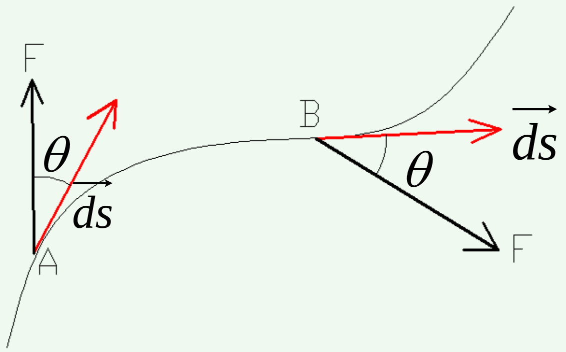
برای یک جابجایی بینهایت کوچک $\overrightarrow{ds}$ کار نیروی **F** روی جسم :

$$dW = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{ds} \Rightarrow P = \frac{dW}{dt} = \overrightarrow{F}.\frac{\overrightarrow{ds}}{dt} = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{V}$$

در حالت کلی : آهنگ انتقال انژی از یک جسم به جسم دیگر یا آهنگ تبدیل انرژی از شکلی به شکل دیگر :

$$P = \frac{dE}{dt}$$

کار و انرژی در سه بعدی



در فضای سه بعدی ذره ای تحت اثر نیرویی متغیر روی مسیرمنحنی در حرکت است ، کار این نیرو در جابجایی بینهایت کوچک $\overrightarrow{ds}$:

$$dW = \vec{F}.\overrightarrow{ds}$$

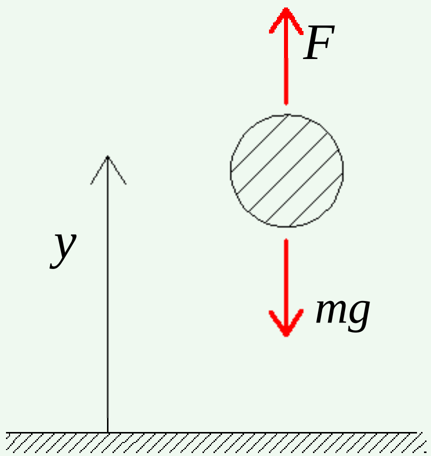
کار کل در مسیر A تا B :

$$\left.\begin{aligned} W_{A\to B} &= \int_A^B \vec{F}.\overrightarrow{ds} \\ \vec{F}.\overrightarrow{ds} &= F_x dx + F_y dy + F_z dz \end{aligned}\right\} \Rightarrow W_{A\to B} = \int_A^B F_x dx + \int_A^B F_y dy + \int_A^B F_z dz$$

فصـــــل هشتم

پایستگـــــــــی انرژی

جسمی رااز سطح زمین با سرعت ثابت تا ارتفاع y بالا می بریم در این جابجایی ما چقدر کار انجام داده ایم ؟



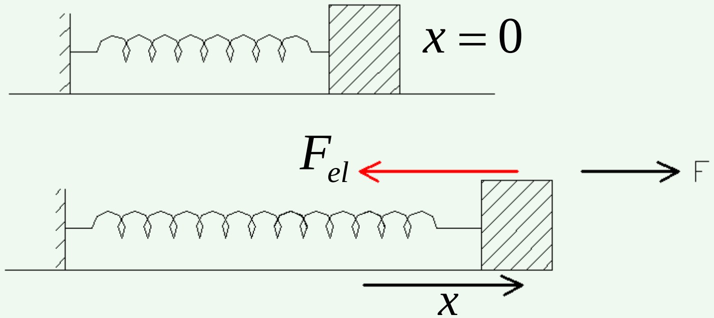
$$\left.\begin{array}{l} W = \vec{F}.\vec{y} = Fy \\ F = mg \end{array}\right\} \Rightarrow W = mgy = U_g$$

انرژی پتانسیل ثقلی عبارت است از کاری که لازم است انجام دهیم تا جسمی را از سطح زمین باسرعت ثابت باارتفاع y بالا ببریم .

بنابراین کار نیروی ثقل در جابجایی از ارتفاع y_1 **تا** y_2 **عبارت است از :**

$$W_g = -mg(y_2 - y_1) \Rightarrow W_g = -(U_{g2} - U_{g1}) \Rightarrow W_g = -\Delta U_g$$

فنری را با سرعت ثابت از وضعیت تعادل به اندازه x منبسط یا متراکم می کنیم ، در این جابجایی ما چقدر کار انجام داده ایم ؟



$$\left.\begin{array}{l} W = \int_0^x \vec{F}.\vec{dx} = Fdx \\ F = kx \end{array}\right\} \Rightarrow W = \int_0^x kxdx \Rightarrow W = \frac{1}{2}kx^2 = U_{el}$$

انرژی پتانسیل کشسانی فنر عبارت است از کاری که لازم است انجام دهیم تا فنری را از وضعیت تعدل به اندازه x منبسط یا متراکم کنیم .

بنابراین کار نیروی ثقل در جابجایی از x_1 تا x_2 عبارت است از :

$$W_{el} = -\frac{1}{2}k(x_2{}^2 - x_1{}^2) \Rightarrow W_{el} = -(U_{el2} - U_{el1}) = -\Delta U_{el}$$

نیروهای پایستار

نبروهایی که کار آنها به مسیر بستگی ندارد و فقط به نقاط ابتدایی و انتهایی بستگی دارد یا نیروهایی که کار آنها در مسیر بسته صفر است .

یا نیروهایی که کار آنها در مسیر بسته صفر است .

یا نیروهایی که انری جنبشی را در یک رفت و برگشت کامل ثابت نگاه می دارند .

نیروهای وزن ، کشسانی فنر ، گرانش و ... نیروهای پایستارند .

نیروهای مقاوم نیروی اصطکاک که یکی از شرایط فوق را ندارند ، نیروهای غیر پایستارند .

اصل پایستگی انرژی مکانیکی وقتی که فقط نیروی وزن کار انجام دهد و کار سایر نیروها صفر باشد.

$$\left.\begin{array}{l} W = W_g + 0 + 0 \\ W = \Delta K \end{array}\right\}, W_g = \Delta K, W_g = -\Delta U_g$$

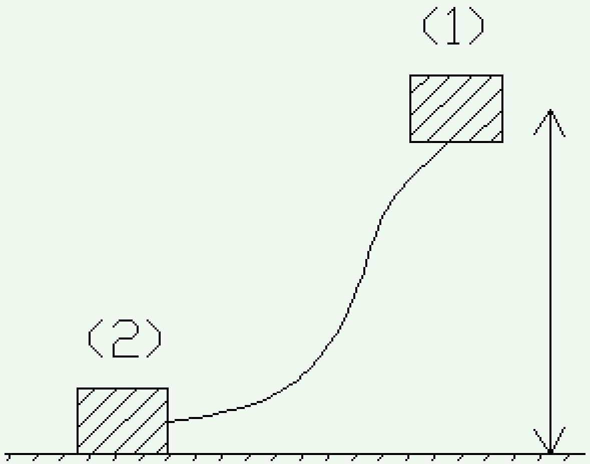
کاهش انرژی پتانسیل ثقلی برابر است با افزایش انرژی جنبشی

$$\Rightarrow \Delta(K + U_g) = 0 \Rightarrow \Delta E_{M_g} = 0 \Rightarrow E_M = \text{ثابت}$$

$$\Delta K = -\Delta U_g \Rightarrow \frac{1}{2} m {v_1}^2 + mgy_1 = \frac{1}{2} m {v_2}^2 + mgy_2$$

مثال ۱ :

جسمی را از بالای مسیر منحنی بدون اصطکاکی به ارتفاع 20 متر بدون سرعت اولیه رها می شود ، سرعت جسم در پایین مسیر چقدر است ؟ $g = 10\frac{m}{s^2}$



حل مثال ۱ :

$$mgy_1 + 0 = \frac{1}{2} m{v_2}^2 + 0 \Rightarrow v_2 = \sqrt{2gh}$$

$$\Rightarrow v_2 = \sqrt{2(10)(20)} = 20\frac{m}{s}$$

مثال ۲ :

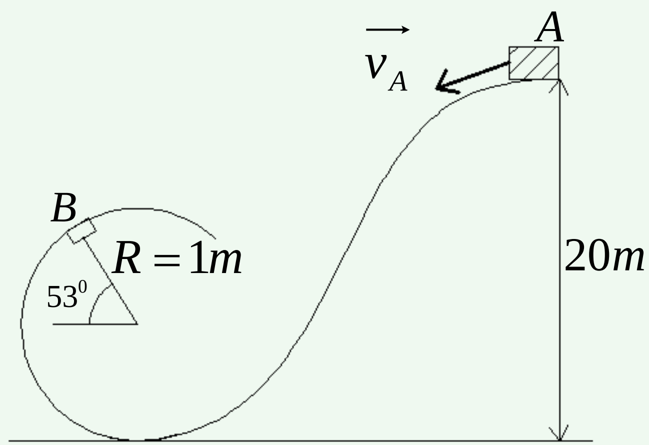
در شکل زیر جسمی به جرم **2kg** را از ارتفاع **20** متری روی مسیر منحنی با سرعت $2\frac{m}{s}$ به سمت پایین می لغزانیم در نقطه **B** :

$g = 10\frac{m}{s^2}$

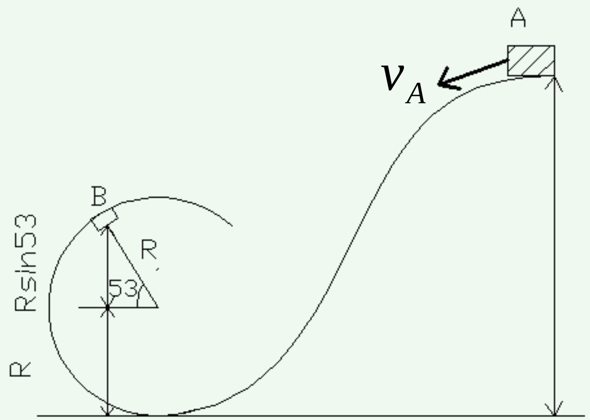
سرعت جسم چقدر است ؟

عکس العمل مسیر چقدر است ؟

شعاع قسمت دایره ای انتهای مسیر یک متر است .



حل مثال ۲ :

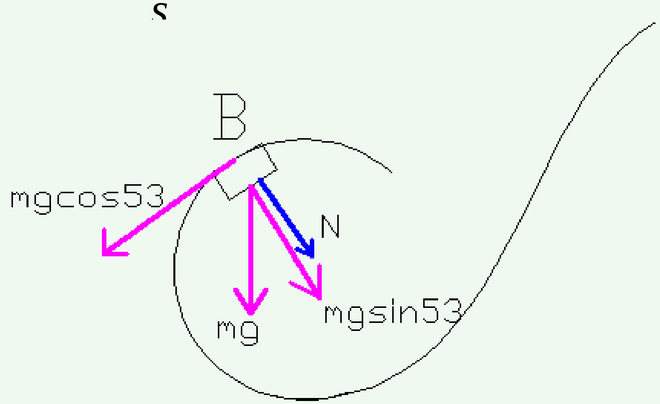


$$y_B = R(1+\sin 53) = 1.8$$

$$y_A = 20$$

$$mgy_A + \frac{1}{2}mv_A{}^2 = mgy_B + \frac{1}{2}mv_B{}^2$$

$$200 + \frac{1}{2}(4) = 10(1.8) + \frac{1}{2}v_B^2 \Rightarrow v_B = \sqrt{368}\,\frac{m}{s}$$



$$N + mg\sin 53 = \frac{mv_B{}^2}{R} \Rightarrow N = 2\frac{368}{1} - 2(10)(0.8) = 720N$$

اگر علاوه بر نیروی وزن نیروی اصطکاک نیز کار انجام دهد و کار سایر نیروها صفرباشد آیا اصل پایستگی انرژی مکانیکی برقرار است ؟

$$\left.\begin{array}{l} W_{\text{برایند}} = W_g + W_f + 0 + 0 \\ W_{\text{برایند}} = \Delta K \end{array}\right\} \Delta K = W_g + W_f \, , W_g = -\Delta U_g \Rightarrow W_f = \Delta K + \Delta U_g$$

اصل پایستگی انرژی برقرار نیست ؟

$$\Rightarrow W_f = \Delta E_M = E_2 - E_1$$

بنابراین :

$$W_f = (\frac{1}{2} m {v_2}^2 + mgy_2) - (\frac{1}{2} m {v_1}^2 + mgy_1)$$

اصل پایستگی انرژی مکانیکی وقتی که فقط نیروی کشسانی فنر کار انجام دهد و کار سایر نیروها صفر باشد .

$$\left.\begin{aligned} &W_{\text{برایند}} = W_{el} + 0 + 0 \\ &W_{\text{برایند}} = \Delta K \end{aligned}\right\} W_{el} = \Delta K , W_{el} = -\Delta U_{el} \Rightarrow \Delta K = -\Delta U_{el}$$

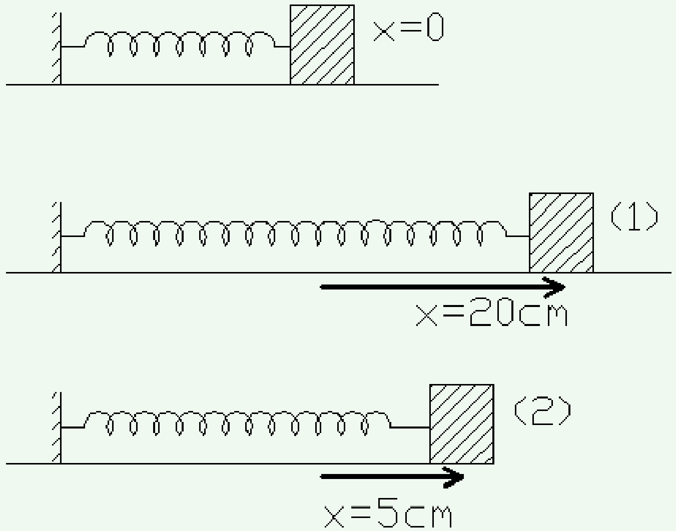
کاهش انرژی پتانسیل برابر است با افزایش انرژی جنبشی

$$\Rightarrow \Delta(K + U_{el}) = 0 \Rightarrow \Delta E_{M_{el}} = 0 \Rightarrow E_{M_{el}} = \text{ثابت}$$

$$\Delta K = -\Delta U_{el} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_1{}^2 + \frac{1}{2}Kx_1{}^2 = \frac{1}{2}mv_2{}^2 + \frac{1}{2}Kx_2{}^2$$

مثال ۳ :

فنری به ضریب ثابت $K = 500\frac{N}{m}$ را از یک انتها روی سطح افقی بدون اصطکاک مطابق شکل به نقطه ای متصل کرده ایم ، اگر جرم 0.2kg منصل به انتهای دیگر فنر را که ابتدا به اندازه بیست سانتیمتر منبسط کرده ایم ، رها کنیم در فاصله پنج سانتیمتری وضعیت تعادی چه سرعتی خواهد داشت ؟



حل مثال ۳ :

هنگام رها کردن جسم ، تنها نیروی کشسانی فنر کار انجام می دهد و کار سایر نیروها صفر است . بنابراین :

$$\frac{1}{2}Kx_1^{\ 2} + \frac{1}{2}mv_1^{\ 2} = \frac{1}{2}Kx_2^{\ 2} + \frac{1}{2}mv_2^{\ 2}$$

$$\frac{1}{2}(500)(0.2)^2 + 0 = \frac{1}{2}(500)(0.5)^2 + \frac{1}{2}(0.2)v_2^{\ 2} \Rightarrow v_2 \approx 9.7\frac{m}{s}$$

انرژی پتانسیل و نیروهای پایستار

در حالت کلی تغییر انرژی پتانسیل را می توانیم بر حسب کار نیروی پایستار (کنسرواتیو با علامت c) نشان دهیم :

$$W_c = -\Delta U_c$$

علامت منفی نشان می دهد که کار مثبت نیروی پایستار منجر به کاهش انرژی پتانسیل وابسته به آن می شود .

در حالت سه بعدی که نیروی پایستار می تواند هم از نظر اندازه و هم جهت تغییر کند ، برای یک تغییر بسیار کوچک در انرژی پتانسیل که در اثر جابجایی کوچک ds ایجاد می شود ، داریم :

$$dU = -dW_c = -\overrightarrow{F_c}.\overrightarrow{ds}$$

و تغییر انری پتانسیل وقتی جسم از A به B حرکت می کند برابر منفی کاری است که نیروی پایستار انجام می دهد .

$$U_B - U_A = -\int_A^B \overrightarrow{F_C}.\overrightarrow{ds}$$

تعیین نیروی پایستاروابسته به یک تابع انرژی پتانسیل

در یک بعد ، مثلا در مورد توابعی که شامل یک مختصه اند ،مثل $U(x)$ یا $U(r)$:

هر مولفه نیروی پایستار برابر منفی مشتق تابع انرژی پتانسیل در جهت همان محور است ، علامت منفی نشان می دهد که نیرو در جهت کاهش انرژی پتانسیل است .

$$dU == -\overrightarrow{F_c}.\overrightarrow{ds} \Rightarrow F_x = -\frac{dU}{dx}$$

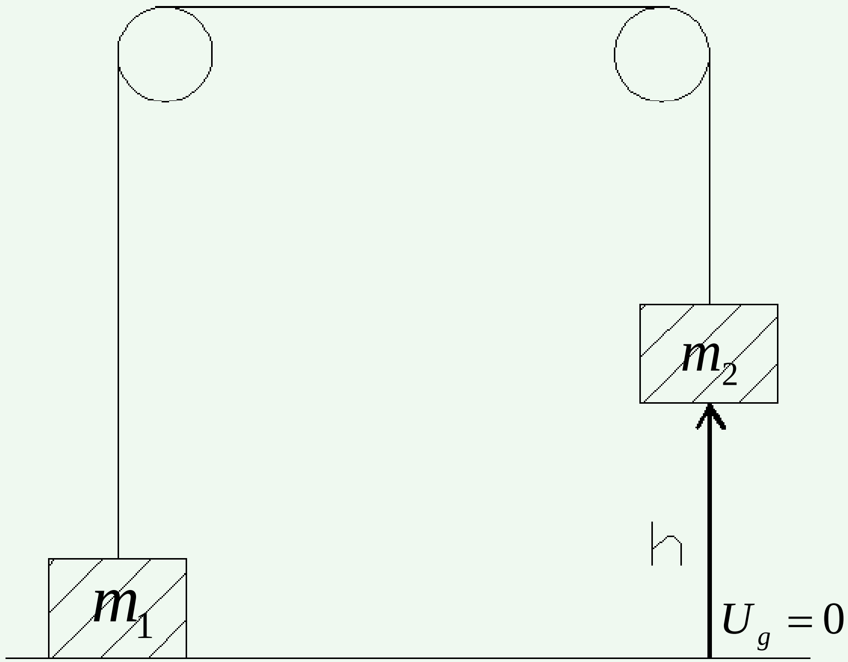
با داشتن انرژی پتانسیل ثقلی و انرژی پتانسیل کشسانی فنر ، نیروی پایستار مربوط به این نیروها عبارتند از :

$$U_g = mgy \Rightarrow F_y = -\frac{dU_g}{dy} = -mg$$

$$U_{el} = \frac{1}{2}Kx^2 \Rightarrow F_x = -\frac{dU_{el}}{dx} = -Kx$$

مثال ۴ :

در سیستم شکل زیر جرم نخ ناچیز و قرقره هابدون اصطکاک هستند $m_2 = 5kg, m_1 = 3kg$ و در ابتدا m_1روی زمین و m_2 در فاصله $h = 5m$ از زمین قرار دارد ، اگر m_2 را رها کنیم با چه سرعتی به زمین می خورد ؟



حل مثال ۴ :

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2+m_1gh=0+m_2gh$$

$$\Rightarrow v=\left(\frac{2(m_2-m_1)gh}{m_1+m_2}\right)^{0.5}\Rightarrow v=5\frac{m}{s}$$

مثال ۵ :

تخته ای به جرم $m=0.8kg$ به یک فنری با ثابت $K=20N/m$ متصل است و روی سطح بدون اصطکاکی قرار دارد ، فنر را به اندازه $12cm$ می کشیم و رها می کنیم :

الف) بیشترین سرعت تخته چقدر است ؟

ب) وقتی فنر هشت سانتیمتر متراکم شده باشد سرعت تخته چقدر است ؟

ج) در چه مکانهایی انرژی جنبشی تخته با انرژی پتانسیل فنر برابر است ؟

د) در چه نقاطی سرعت تخته نصف سرعت ماکزیمم آن است ؟

حل مثال ۵ :

الف)

$$\frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}mv_{\max}{}^2$$

$$\Rightarrow v_{\max} = (\frac{K}{m})^{0.5}A = \pm 0.6\frac{m}{s}$$

حل مثال ۵ :

ب) با استفاده از اصل پایستگی انرژی مکانیکی

$$0+\frac{1}{2}KA^2=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}Kx^2$$

$$\Rightarrow v=\left(\frac{K(A^2-x^2)}{m}\right)^{0.5}=\pm 0.45\frac{m}{s}$$

حل مثال ۵ :

ج) اگر انرژی های پتانسیل و جنبشی با هم برابر باشند ، هر یک باید نصف انرزی کل باشد ، یعنی $K = U = \frac{1}{2}E$

$$U = \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}KA^2)$$

$$\Rightarrow x = \pm\frac{A}{\sqrt{2}} = \pm 0.085m$$

حل مثال ۵ :

د) می خواهیم نقاطی را پیدا کنیم که در آنها $v = \frac{1}{2} v_{\max} = \pm 0.3 \frac{m}{s}$ باشد ، (با توجه به قسمت الف) .

با استفاده از اصل پایستگی انرژی داریم :

$$\frac{1}{2} KA^2 = \frac{1}{2} Kx^2 + \frac{1}{2} mv^2$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{KA^2 - mv^2}{K}} = \pm 0.1m$$

پس به ازای هر سرعتی دو نقطه داریم که به طور قرینه در دو طرف مبدا واقع شده اند .

فصل نهم

تکانه خطی

تکانه خطی یک ذره به جرم **m** و سرعت $\vec{v}$

$$\vec{P} = m\vec{v}$$

جهت : جهت سرعت ذره

اندازه : mv

یکا : $kg\frac{m}{s}$

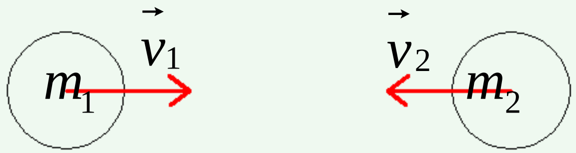
اصل پایستگی تکانه خطی در مورد یک ذره (وقتی که جرم ثابت باشد)

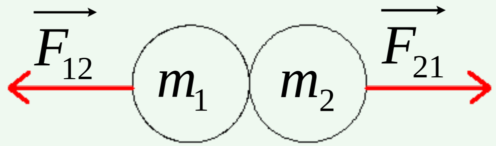
$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

اگر برایند نیروهای خارجی وارد بر ذره صفر باشد .

$$\vec{F} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{P =}$$ ثابت

پایستگی تکانه خطی در مورد دو ذره ، در صورتی که نیروها فقط نیروهای داخلی باشند :





نیروی وارد از m_2 به m_1

$$\overrightarrow{F_{12}} = \frac{d\overrightarrow{P_1}}{dt}$$

نیروی وارد از m_1 به m_2

$$\overrightarrow{F_{21}} = \frac{d\overrightarrow{P_2}}{dt}$$

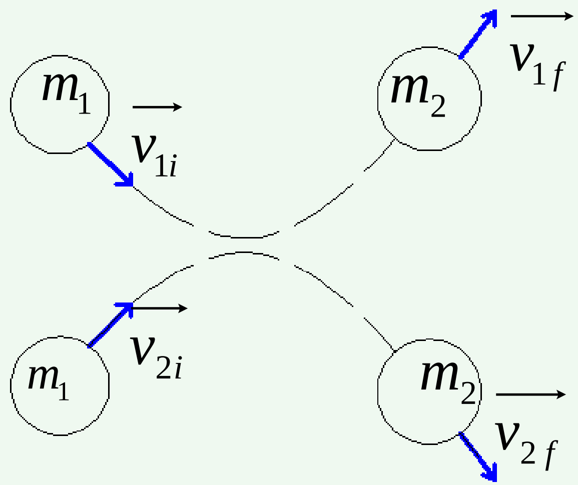
$$\left.\begin{array}{l} \Delta P_1 = \int_t \vec{F}_{12} dt = \vec{F}_{12} \Delta t \\ \Delta P_2 = \int_t \vec{F}_{21} dt = \overrightarrow{F_{21}} \Delta t \\ \overrightarrow{F_{12}} = -\overrightarrow{F_{21}} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta\overrightarrow{P_1} + \Delta\overrightarrow{P_2} = 0 \Rightarrow P = P_1 + P_2 =$$ ثابت

وقتی توپ تنیسی را به دیوار می زنیم از لحظه پرتاب تا بازگشت آن ممکن است ده ثانیه طول بکشد ولی زمان تاثیرمتقابل یا برخورد توپ و دیواریعنی زمان برخورد بسیار کوتاه است و نسبت به کل زمان ازمایش بسیار کوتاه است که در این زمان کوتاه تاثیر نیروهای خارجی (اصطکاک و جاذبه زمین) وارد بر سیستم ناچیز و اصل پایستگی تکانه خطی برقرار است .

همچنین منظور از برخورد تماس فیزیکی در جسم نیست (آزمایش راترفورد)

رابطه پایستگی تکانه خطی یک رابطه برداری است و می توان این رابطه را برحسب مولفه هایش نوشت :

$$m_1\overrightarrow{v_{1i}} + m_2\overrightarrow{v_{2i}} = m_1\overrightarrow{v_{1f}} + m_2\overrightarrow{v_{2f}}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} m_1 v_{1ix} + m_2 v_{2ix} = m_1 v_{1fx} + m_2 v_{2fx} \\ m_1 v_{1iy} + m_2 v_{2iy} = m_1 v_{1fy} + m_2 v_{2fy} \\ m_1 v_{1iz} + m_2 v_{2iz} = m_1 v_{1fz} + m_2 v_{2fz} \end{cases}$$

اصل پایستگی تکانه خطی در مورد یک سیستم ذرات :

اگر در برخورد دو ذره نیروهای خارجی $\overrightarrow{F_{2e}}, \overrightarrow{F_{1e}}$ هم به ترتیب به m_2, m_1 وارد شوند در برخورد این دو ذره :

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{F_{1e}} + \overrightarrow{F_{12}} &= \frac{d\overrightarrow{P_1}}{dt} : \quad m_1 \text{ برای} \\ \overrightarrow{F_{2e}} + \overrightarrow{F_{21}} &= \frac{d\overrightarrow{P_2}}{dt} : \quad m_2 \text{ برای} \end{aligned}\right\} \xrightarrow[\overrightarrow{F}_{12} + \overrightarrow{F}_{21} = 0]{\text{چون}} \overrightarrow{F_{1e}} + \overrightarrow{F_{2e}} = \frac{d(\overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{P_2})}{dt} :$$

$$\Rightarrow \sum \overrightarrow{F_{ie}} = \frac{d}{dt} \sum \overrightarrow{P_i}$$

$$\overrightarrow{F}_{ext} = \frac{d\overrightarrow{P}_{\text{کل}}}{dt}$$

اگر $\overrightarrow{F}_{ext} = 0$ باشد در نتیجه ، ثابت $= \overrightarrow{P}_{\text{کل}}$

انواع برخورد

الف) برخورد الاستیک و یا کشسان

$$m_1\overrightarrow{v_{1i}} + m_2\overrightarrow{v_{2i}} = m_1\overrightarrow{v_{1f}} + m_2\overrightarrow{v_{2f}}$$

$$\frac{1}{2}m_1{v_{1i}}^2 + \frac{1}{2}m_2{v_{2i}}^2 = \frac{1}{2}m_1{v_{1f}}^2 + \frac{1}{2}m_2{v_{2f}}^2$$

الف) برخورد غیر کشسان ، فقط اصل پایستگی تکانه خطی صادق است زیرا انرژی جنبشی کل ذرات تغییر می کند و مقداری از آن صرف تغییر شکل یا تغییر ساختار یا تبدیل به سایر انرژیها می شود .

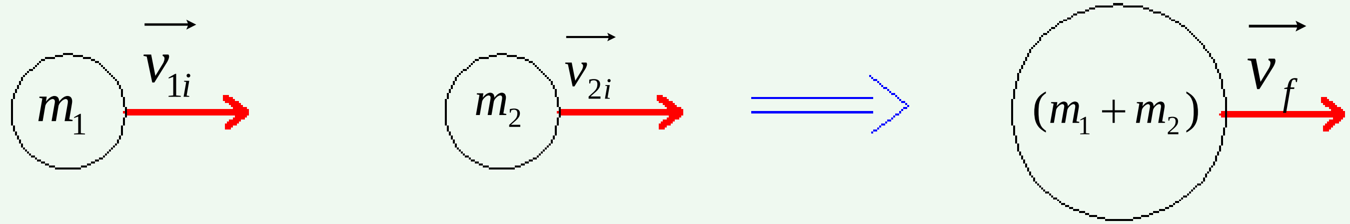
$$m_1\overrightarrow{v_{1i}} + m_2\overrightarrow{v_{2i}} = m_1\overrightarrow{v_{1f}} + m_2\overrightarrow{v_{2f}}$$

اصل پایستگی انرژی را در صورتی می توانیم بنویسیم که بخشی از انرژی تغییر شکل یافته را نیز در نظر بگیریم .

$$\frac{1}{2}m_1{v_{1i}}^2 + \frac{1}{2}m_2{v_{2i}}^2 = \frac{1}{2}m_1{v_{1f}}^2 + \frac{1}{2}m_2{v_{2f}}^2 + Q$$

الف) برخورد غیر کشسان کامل ، در این نوع برخورد ، دو جسم کاملا به یکدیگر جفت شده یا می چسبند و فقط اصل پایستگی تکانه خطی برقرار است .

$$m_1\overrightarrow{v_{1i}} + m_2\overrightarrow{v_{2i}} = (m_1 + m_2)\overrightarrow{v_f}$$



راهنمای حل مسائل مربوط به پایستگی تکانه خطی

۱) طرحی از سیستم کشیده و در آن جهت همه سرعتها را قبل و بعد از برخورد مشخص کنید ، محورهای مختصات را انتخاب کنید .

۲) تکانه خطی برداری است ، باید قانون پایستگی را برای هر مولفه بنویسید ، انرژی جنبشی اسکالر است و فقط برای برخوردهای الاستیک پایسته می ماند .

۳) علامت سرعتها ، در معادلات مولفه ای باید با جهتهایی که در طرح برخورد برای سرعتها مشخص کرده اید سازگار باشد ؛ سرعت مجهول به صورت $\vec{v} = \overrightarrow{v_{xi}} + \overrightarrow{v_{yj}}$ نوشته می شود و علامتها ی درست v_y, v_x از حل معادلات معلوم می شود .

مثال ۱ :

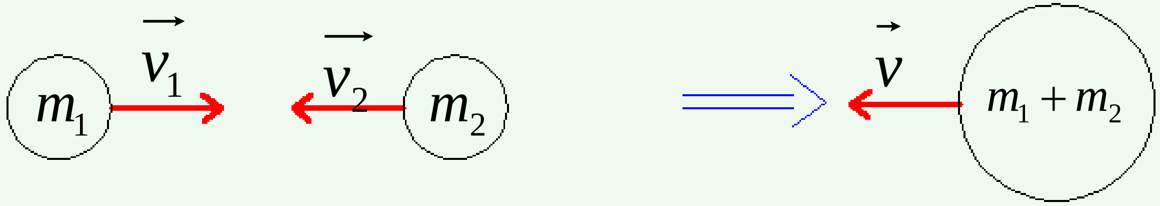
اتومبیل ۱ به جرم $m=2000kg$ که با سرعت $10m/s$ به طرف شرق در حرکت است با اتومبیل ۲ به جرم $m=1000kg$ که با سرعت $25m/s$ به طرف غرب می رود به طور کاملا غیر الاستیک برخورد می کند ، اگر از اصطکاک جاده صرفنظر شود :

الف) سرعت مشترک دو اتومبیل پس از برخورد چقدر و در چه جهتی خواهد بود ؟

ب) چه کسری از انرژی جنبشی تلف می شود ؟

حل مثال ۱ :

الف)



$$m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2} = (m_1 + m_2)\vec{v}$$

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = -(m_1 + m_2)v$$

$$(2000)(10) - 1000(25) = -(3000)v \Rightarrow v = \frac{5000}{3000} = \frac{5}{3}$$

جهت سرعت نهایی به طرف غرب است ، در صورتی که سرعت نهایی منفی به دست می آید به معنای اشتباه گرفتن جهت سرعت نهایی است .

حل مثال ۱ :

ب)

$$K_i = \frac{1}{2}m_1{v_1}^2 + \frac{1}{2}m_2{v_2}^2 = 412500J$$

$$K_i = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = \frac{12500}{3}$$

تغییر نسبی انرژی جنبشی

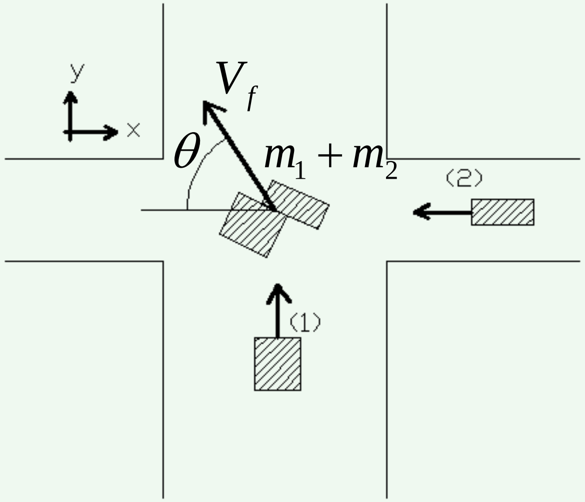
$$\frac{\Delta K}{K_i} = \frac{K_f - K_i}{K_i} \cong 0.98$$

98 درصد از انرژی جنبشی اولیه در برخورد از میان رفته است .

مثال ۲ :

اتومبیل ۱ به جرم $m=1400kg$ که با سرعت $72m/s$ به طرف شمال در حرکت است با اتومبیل ۲ به جرم $m=1600kg$ که با سرعت $108m/s$ به طرف غرب می رود این دو اتومبیل در سر چهار راهی به طور غیر کشسان کامل با یکدیگر برخورد می کنند ، اندازه و جهت سرعت دو اتومبیل را بعد از برخورد تعیین کنید .

حل مثال ۲ :



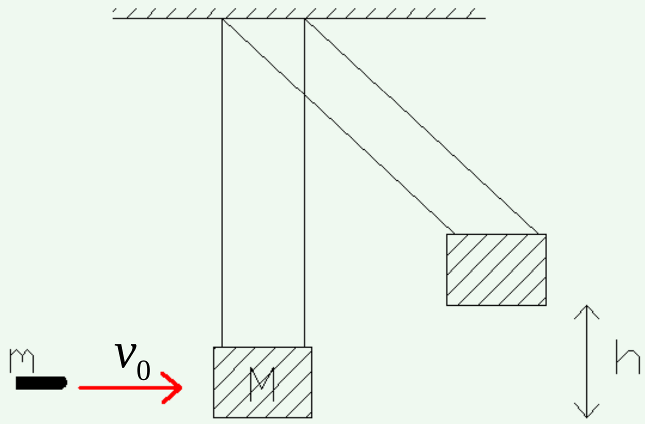
$$m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2} = (m_1 + m_2)\overrightarrow{V_f}$$

$$\begin{cases} 0 - m_2 v_2 = -(m_1 + m_2)V_f \cos\theta \\ m_1 v_1 + 0 = -(m_1 + m_2)V_f \sin\theta \end{cases} \begin{cases} 1600(30) = 3000V_f \cos\theta \\ 1400(20) = 3000V_f \sin\theta \end{cases}$$

$$\tan\theta = \frac{7}{12}, V_f \cong 18.6\frac{m}{s}$$

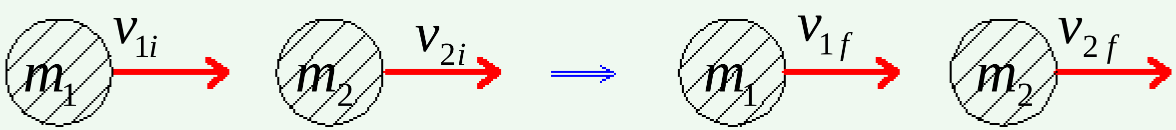
آونگ بالستیک

تعیین سرعت گلوله از روی ارتفاعی که آونگ بالا می رود .



$$\left.\begin{aligned} mv_0 &= (m+M)n \\ \frac{1}{2}(m+M)v^2 &= (m+M)gh \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_0 = \frac{m+M}{m}\sqrt{2gh}$$

در برخورد الاستیک یک بعدی سرعت نسبی قبل از برخورد با سرعت نسبی بعد از برخورد برابر است .



$$\left.\begin{aligned} & m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \\ & \frac{1}{2} m_1 {v_{1i}}^2 + \frac{1}{2} m_2 {v_{2i}}^2 = \frac{1}{2} m_1 {v_{1f}}^2 + \frac{1}{2} m_2 {v_{2f}}^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_{2f} - v_{1f} = -(v_{2i} - v_{1i})$$

در یک برخورد الاستیک اگر جرمها مساوی باشند نتیجه می شود که دو جسم در برخورد سرعتهایشان را عوض می کنند .

تکانه :

سرعت نسبی :

$$\begin{cases} m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \\ v_{2f} - v_{1f} = -(v_{2i} - v_{1i}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{2i} + v_{1i} = v_{1f} + v_{2f} \\ v_{1i} - v_{2i} = v_{2f} - v_{1f} \end{cases} \Rightarrow v_{2f} = v_{1i}, v_{1f} = v_{2i}$$

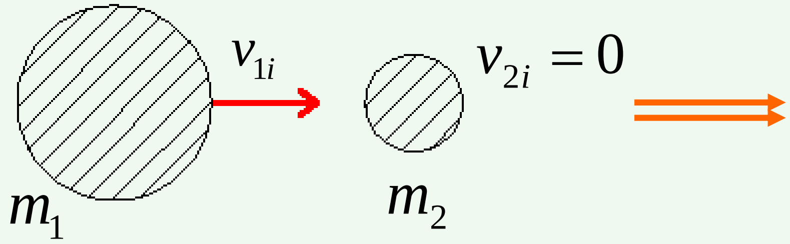
در یک برخورد الاستیک اگر جرمها نامساوی باشند و گلوله دوم ساکن باشد $v_{2i} = 0$ سرعتها بعد از برخورد از چه روابطی به دست می آیند ؟

تکانه :
سرعت نسبی :

$$\begin{cases} m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \\ v_{2f} - v_{1f} = v_{1i} \end{cases}$$

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{1i}, \quad v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i}$$

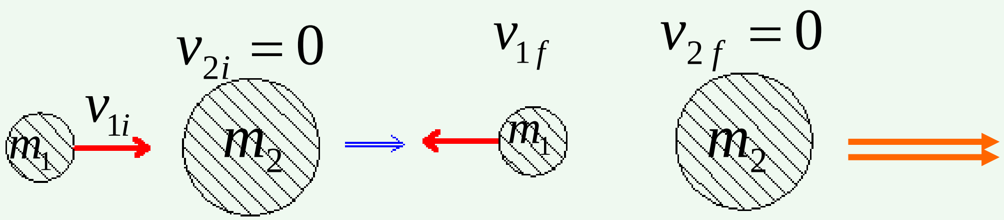
در یک برخورد الاستیک اگر گلوله دوم ساکن باشد و $m_1 >> m_2 , v_{2i} = 0$ فرض شود ، نتیجه می شود :



$$v_{1f} \cong v_{1i} , v_{2f} \cong 2v_{1i}$$

جسم سنگین پس از برخورد با همان سرعت اولیه اش به حرکت ادامه می دهد و جسم خیلی سبک که ساکن بوده است با دو برابر سرعت گلوله سنگین به راه می افتد .

در یک برخورد الاستیک اگر گلوله دوم ساکن باشد و $m_1 << m_2, v_{2i} = 0$ فرض شود ، نتیجه می شود :



$$v_{1f} = -v_{1i}, v_{2f} = 0$$

یعنی جسم سبک سرعتش معکوس می شود و جسم سنگین ثابت می ماند .

ضربه : $\vec{I}$

$$\vec{I} = \Delta\vec{P} = \vec{P}_f - \vec{P}_i$$

ضربه وارد بر یک ذره عبارت است از تغییر تکانه آن ذره :

ضربه کمیتی برداری است ، یکای آن همان یکای تکانه خطی و جهت آن جهت تغییر تکانه است .

رابطه ضربه ای که یک ذره در یافت می کند با نیروی خالص وارد بر آن

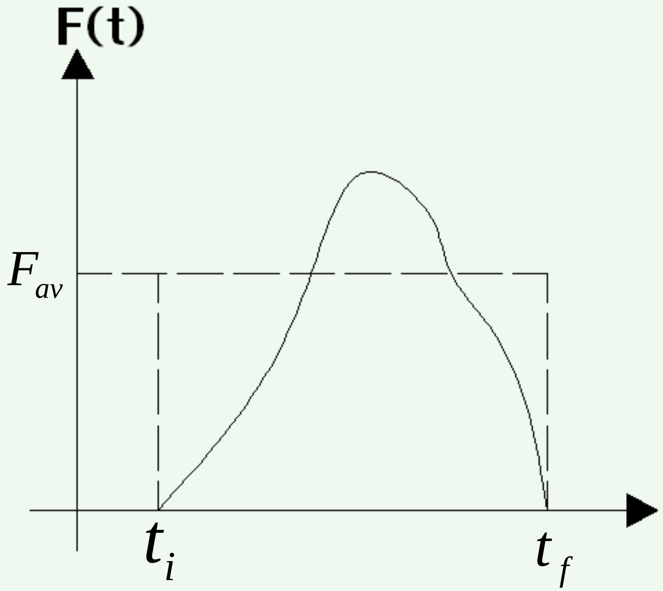
$$d\vec{P} = \vec{F}.dt$$

$$\Rightarrow \int_{P_i}^{P_f} d\vec{P} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}dt \Rightarrow \Delta\vec{P} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}dt \Rightarrow \vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}dt$$

د ربرخورد ، اگر زمان تاثیر نیرو یا تداوم ضربه (Δt) خیلی کوتاه باشد ، نیروی ضربه ای آنقدر بزرک است که در مقابل آن از بقیه نیروهایی که ممکن است به ذره اثر کند می توانیم صرفنظر کنیم.۰

ضربه به عنوان مساحت زیر نمودار F بر حسب t

هرگاه نمودار F بر حسب t را برای یک نیروی ضربه ای در بازه زمانی Δt رسم کنیم ، شکل نمودار روشن نیست ، بنابراین معمولا نیروی متوسطی را در نظر می گیرند که در آن بازه زمانی اثر کند به طوری که مساحت زیر نمودار $F_{av} - t$ با مساحت زیر منحنی واقعی مساوی باشد .



تعبیر مساحتی ضربه نشان می دهد که یک تغییر تکانه معین می تواند از نیروی بزرگی که در مدت زمان کوتاهی اثر می کند ، یا از نیروی کوچکی که در زمان درازی اثر می کند ناشی شده باشد یعنی در یک ضربه معین هرچه زمان کوتاهتر باشد نیرو بزرکتر است و برعکس .

مقایسه تکانه خطی با انرژی جنبشی

هر چند هر دو تابعی از جرم و سرعتند ولی :

۱) پایستگی تکانه در مورد تمام برخوردها و پایستگی انرژی جنبشی فقط در مورد برخوردهای الاستیک صادق است .

۲) تکانه خطی برداری و انرژی جنبشی اسکالر است .

۳) تکانه خطی و انرژی جنبشی به نحوی به تلاش لازم برای تغییر دادن سرعت ذره مربوط می شود .

نیرو به عبارتی آهنگ تغییر تکانه خطی نسبت به زمان است و به عبارتی آهنگ تغییر انرژی جنبشی نسبت به مکان است .

$$\Delta\vec{P} = \vec{F}\Delta t \Rightarrow F = \frac{\Delta P}{\Delta t}$$

$$\Delta K = F\Delta x \Rightarrow F = \frac{\Delta K}{\Delta x}$$

اگر نیرو ثابت نباشد ، از دو عبارت اخیر برای متوسط نیرو مقادیر متفاوتی به دست می آید ، جون یکی میانگین زمانی است و یکی میانگین مکانی

در حرکت دورانی یکنواخت می توانیم بدون تغییر انرژی جنبشی ، تکانه خطی ذره در حال دوران را تغییر دهیم . ولی نمی توانیم انرژی جنبشی ذره ای را بدون تغییر تکانه اش تغییر دهیم .

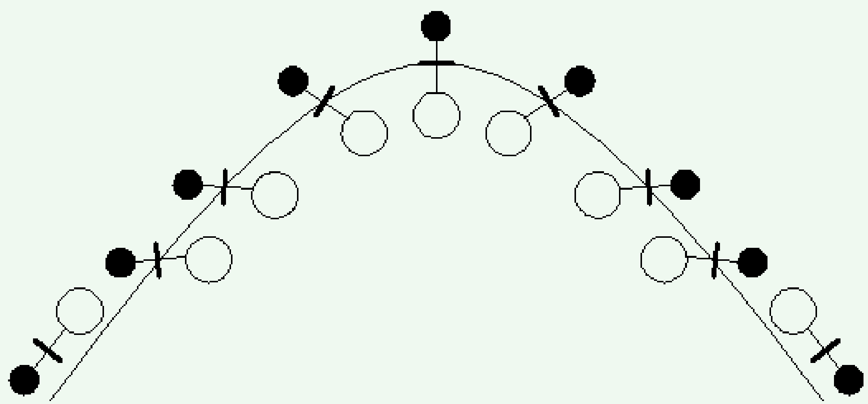
$$K = \frac{P^2}{2m}$$

فصل دهم

سیستم ذرات

وقتی حرکت انتقالی باشد مدل ذره ای کفایت می کند ، اگر حرکتی شامل دوران و ارتعاش باشدباید جسم را به عنوان سیستم یا مجموعه مشخصی از ذرات دانست .

با آنکه ذرات یک سیستم می تواند حرکتهای پیچیده ای داشته باشد امادر هر سیستم نقطه خاصی وجود دارد که حرکت انتقالی ساده ای دارد که به آن نقطه مرکز جرم سیستم می گوییم. بنابراین جسم را می توانیم به صورت ذره ای با جرم کل سیستم مستقر در مرکز جرم در نظر بگیریم .

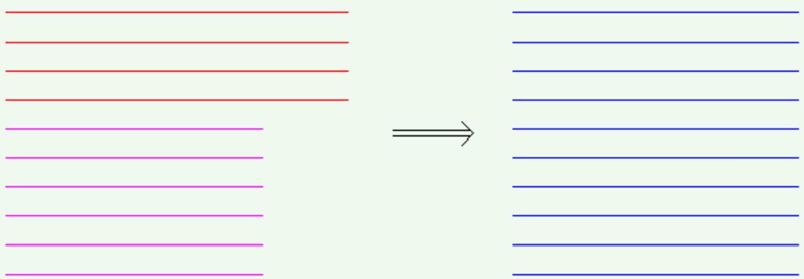


میانگین طولی

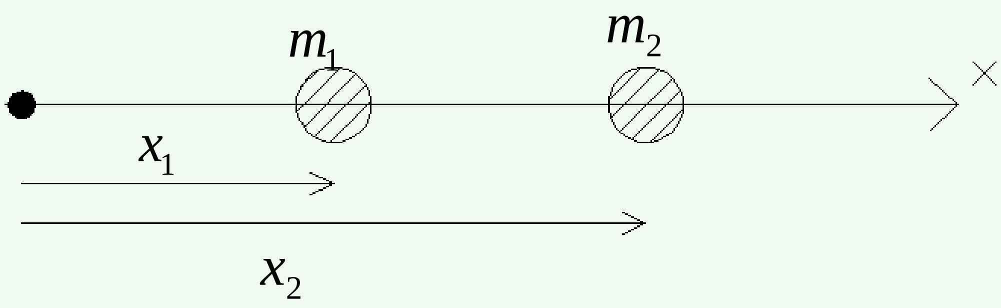
هرگاه چهار میله هر یک به طول 10cm و 6 میله هر یک به طول هشت سانتیمتر داشته باشیم و بخواهیم این ده میله را دنبال هم چیده و از آنهاده میله با طول مساوی (طول میانگین) بسازیم ، این طول میانگین به صورت زیر به دست می آید .

$$\bar{l} = \frac{n_1 l_1}{n_1 + n_2} + \frac{n_2 l_2}{n_1 + n_2} = \frac{n_1 l_1 + n_2 l_2}{n_1 + n_2}$$

$$\bar{l} = \frac{(4)(10) + (6)(8)}{4 + 6} = \frac{88}{10} = 8.8cm$$

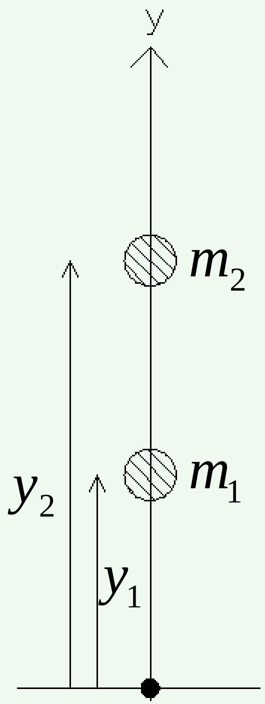


مختصه مرکز جرم دو جسمی در راستای محور x



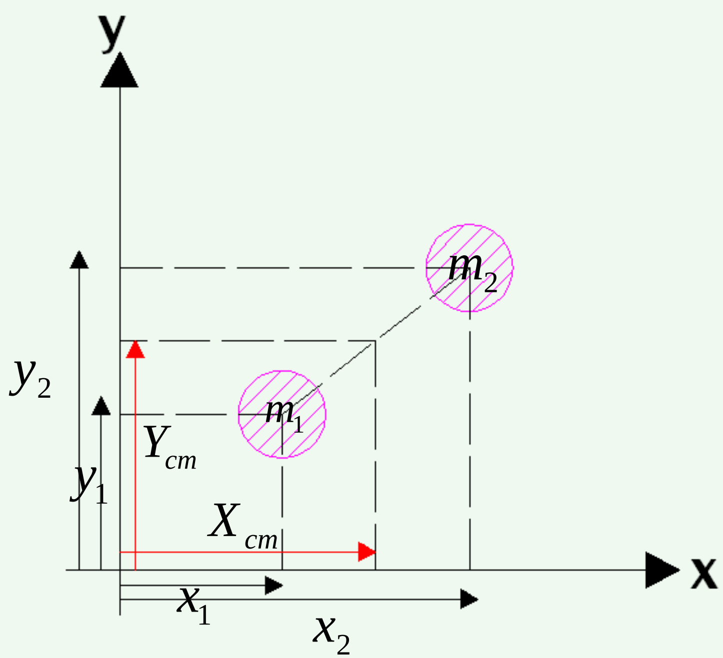
$$X_{cm} = \frac{m_1 x_1}{m_1 + m_2} + \frac{m_2 x_2}{n_1 + n_2} \Rightarrow X_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

مختصه مرکز جرم دو جسمی در راستای محور **y**



$$Y_{cm} = \frac{m_1 y_1}{m_1 + m_2} + \frac{m_2 y_2}{n_1 + n_2} \Rightarrow Y_{cm} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}$$

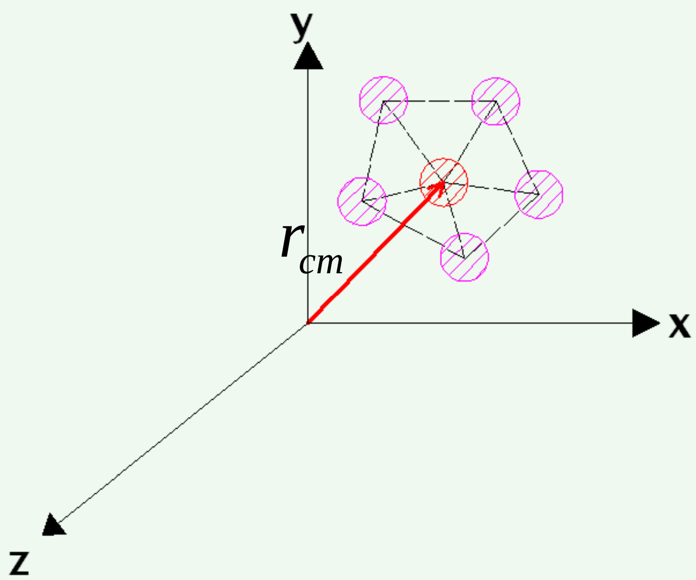
مختصه مرکز جرم دو جسمی در راستای محور x,y



$$X_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

$$Y_{cm} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}$$

مختصه مرکز جرم یک سیستم ذرات در حالت سه بعدی

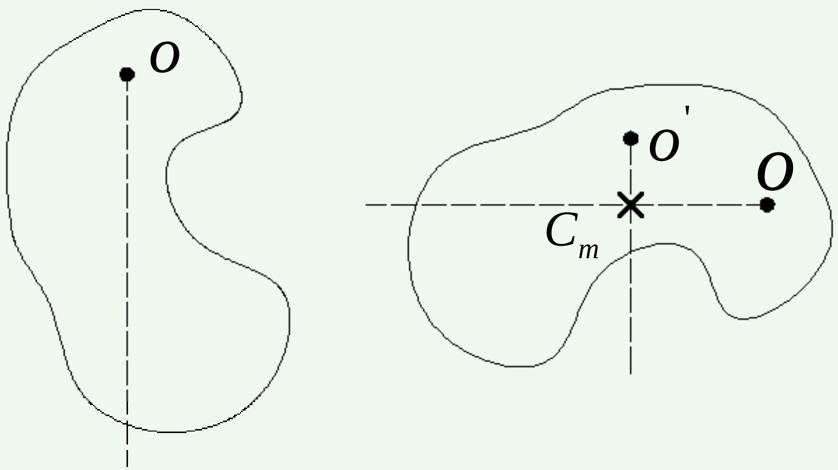


$$X_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, Y_{cm} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}, Z_{cm} = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m_1 + m_2}$$

مرکز جرم اجسام یکنواختی که شکل منظم هندسی داشته باشند همان مرکز هندسی آنهاست .

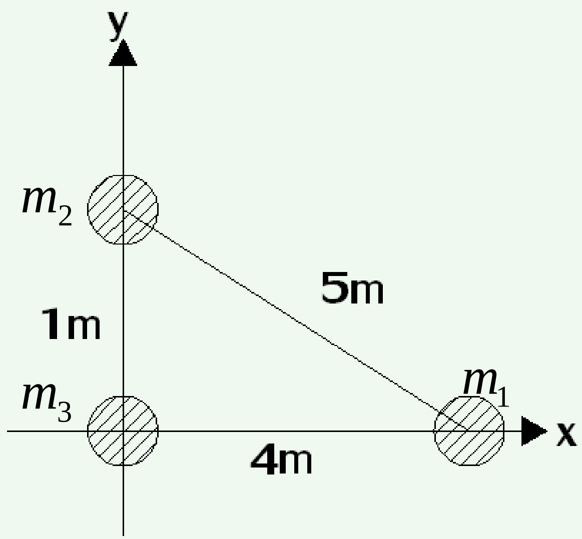
مرکز جرم جسم یکنواختی که محور تقارن داشته باشد ، در نقطه ای روی این محور است .

مرکز جرم صفحه ای که شکل هندسی ندارد به روش تجربی با آویختن آن از دو نقطه متفاوت (که روی مرکز جرمش نباشد) و تعیین محل تلاقی دو خطی که از نقاط تعلیق می گذرند ، به دست می آید .



مثال ۱ :

بردار مکان مرکز جرم یک سه جسمی به جرمهای $m_3 = 3kg, m_2 = 2kg, m_1 = 1kg$ را مطابق شکل زیر در سه راس یک مثلث قائم الزاویه قرار دارند ، به دست آورید .



حل مثال ١ :

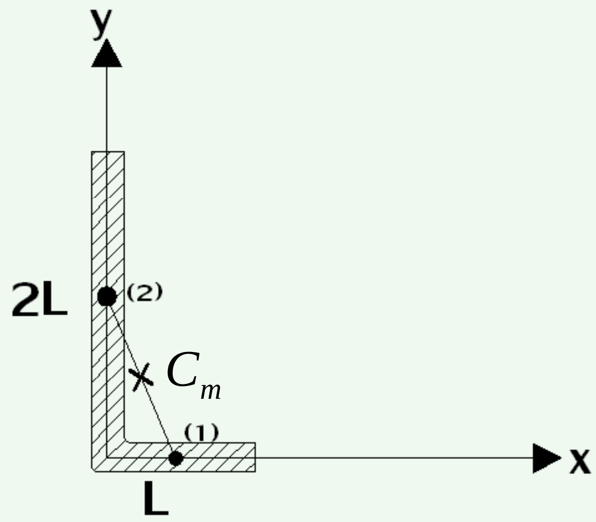
$$m_1\begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 0 \end{cases}, m_2\begin{cases} x_2 = 0 \\ y_2 = 3 \end{cases}, m_3\begin{cases} x_3 = 0 \\ y_3 = 0 \end{cases}$$

$$X_{cm} = \frac{(1)(4)+(2)(0)+0(3)}{6} = \frac{2}{3}, Y_{cm} = \frac{1(0)+2(3)+3(0)}{6} = 1$$

$$\Rightarrow r_{cm} = \frac{2}{3}\vec{i} + \vec{j}$$

مثال ۲ :

میله باریک یکنواختی به طول 3 L را در یک سوم طولش طوری خم کرده ایم که زاویه قائمه ای تشکیل شده است ، محل مرکز جرم را نسبت به راس زاویه پیدا کنید ؟ (L=2m)



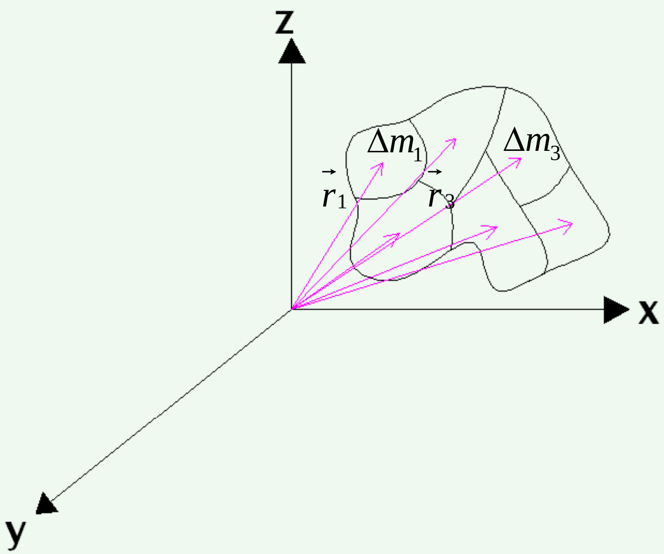
حل مثال ۲ :

مرکز جرم هر بازو درست در وسط آن است ، هر بازو را جرمی نقطه ای واقع در مرکز جرمش در نظر می گیریم ، بنابراین :

$\begin{cases} x_1 = \frac{L}{2} \\ y_1 = 0 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 0 \\ y_2 = L \end{cases}$, **اگر** $M = 3m, m_2 = 2m, m_1 = m$ **(جرم کل) باشد .**

$$\left.\begin{aligned} X_{cm} &= \frac{m(\frac{L}{2}) + 2m(0)}{3m} = \frac{L}{6} = 0.2m \\ Y_{cm} &= \frac{m(0) + 2m(L)}{3m} = \frac{2L}{3} = 0.8m \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{r}_{cm} = 0.2\vec{i} + 0.8\vec{j}$$

مرکز جرم اجسام جامد (توزیع پیوسته جرم)



$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \vec{r}_i$$

که Δm_i جرم **i** امین جزء و r_i فاصله آن از مبدا مختصات است ، در حد که $\Delta m \to 0$ یا $n \to \infty$

داریم :

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\int \vec{r} dm$$

$$X_{cm} = \frac{1}{M}\int xdm, Y_{cm} = \frac{1}{M}\int ydm, Z_{cm} = \frac{1}{M}\int zdm$$

درمحاسبه انتگرالهای مربوط به تعیین مرکز جرم توزیعهای پیوسته جرم را بایستی بر حسب مختصات x,y,z بیان کنیم برای این منظور از تعریف چگالی استفاده می کنیم :

چگالی خطی یا جرم واحد طول :

$$\lambda = \frac{dm}{dx}$$

چگالی سطحی یا جرم واحد سطح :

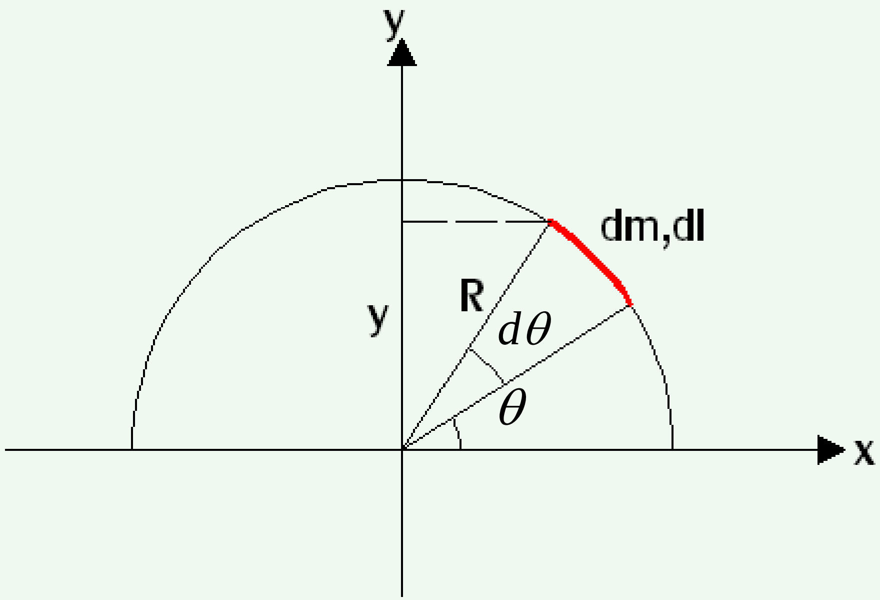
$$\sigma = \frac{dm}{dA}$$

چگالی حجمی یا جرم واحد حجم :

$$\rho = \frac{dm}{dV}$$

مثال ۳ :

میله باریک یکنواختی به چگالی خطی λ کیلوگرم برمتر را خم کرده و به صورت نیمدایره ای به شعاع R در آورده ایم ، مرکز جرم این جسم را پیدا کنید .



حل مثال ۳ :

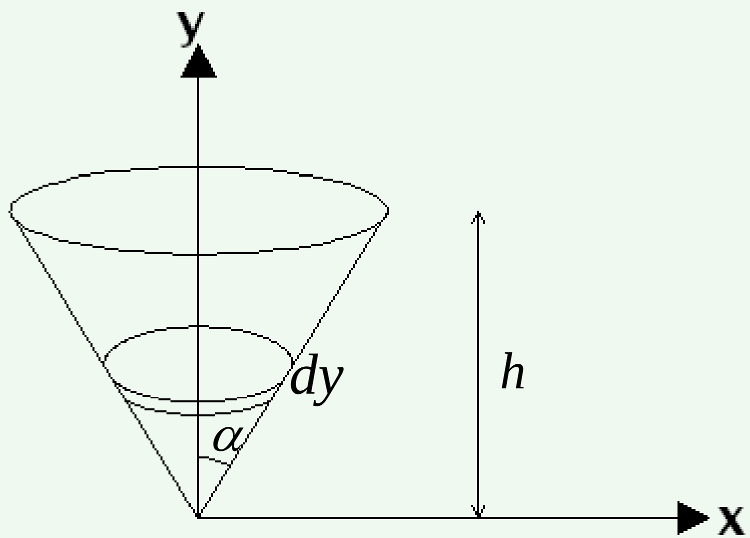
با توجه به تقارن مساله داریم : $x_{cm}=0$ **یعنی مرکز جرم روی محور y ها قرار دارد .**

$$\left.\begin{array}{l} y_{cm}=\dfrac{1}{M}\int y\,dm \\ dm=\lambda dl,\, dl=Rd\theta,\, y=R\sin\theta \end{array}\right\}\Rightarrow y_{cm}=\frac{\lambda R^2}{M}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta=\frac{2\lambda R^2}{M}$$

$$\lambda=\frac{M}{\pi R}\Rightarrow y_{cm}=\frac{2R}{\pi}$$

مثال ۴ :

مرکز جرم مخروطی توپر و یکنواخت به ارتفاع **h** و زاویه نیم راس α را پیدا کنید ؟



حل مثال ۴ :

مرکز جرم با توجه به تقارن مساله روی محور y ها است ، مخروط را به قرصهایی به شعاع x و ضخامت dy تقسیم می کنیم .

جرم قرص $dm = \int dV = \int \pi \tan^2 \alpha y^2 dy$

حجم قرص $dV = \pi x^2 dy = \pi (y \tan\alpha)^2 dy$

$M = \int dm$

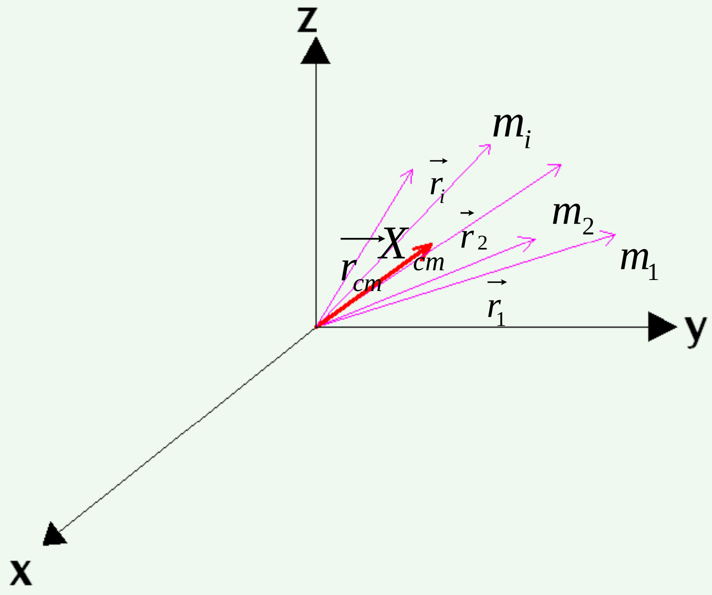
$$\Rightarrow M = \pi\rho \tan^2\alpha \int_0^h y^2 dy = \pi\rho \tan^2\alpha \frac{h^3}{3}$$ جرم کل مخروط

$$y_{cm} = \frac{1}{M}\int y dm = \frac{1}{M}\pi\rho \tan^2\alpha \frac{h^4}{4}$$

با قرار دادن مقدار M نتیجه می شود :

$$y_{cm} = \frac{3h}{4}$$

رابطه بین بردار مکان مرکز جرم سیستمی از ذرات $\vec{r}_{cm}$ با بردار های مکان تک تک ذرات سیستم



$$x_{cm} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}, y_{cm} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}, z_{cm} = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}$$

$$\vec{r}_{cm} = x_{cm}\vec{i} + y_{cm}\vec{j} + z_{cm}\vec{k}$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\sum m_i \vec{r}_i$$

تکانه خطی مرکز جرم سیستم ذرات

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\sum m_i \vec{r}_i$$

$$\vec{v}_{cm} = \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} \Rightarrow \vec{v}_{cm} = \frac{1}{M}\sum m_i \vec{v}_i$$ **یا** $$Mv_{cm} = m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2} + \ldots$$

$$\Rightarrow \vec{P} = M\overrightarrow{v_{cm}}$$

تکانه خطی کل یک سیستم ذرات با تکانه خطی ذره ای فرضی به جرم M که با سرعت v_{cm} حرکت می کند برابر است .

شتاب مرکز جرم یک سیستم ذرات

$$M\vec{v}_{cm} = m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2} + \ldots$$

$$\frac{d(M\vec{v}_{cm})}{dt} = \frac{d}{dt}(m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2} + \ldots) = \sum m_i\vec{a}_i = \sum \overrightarrow{F_i}$$

$$\Rightarrow M\overrightarrow{a_{cm}} = \sum \overrightarrow{F_i}$$

$\vec{F}_i$نیروی خالص وارد بر ذره i ام است با فرض این که نیروهای داخلی بین ذرات سیستم یکدیگر را خنثی کنند .

$$\sum \overrightarrow{F}_i = \overrightarrow{F_{ext}} \Rightarrow \overrightarrow{F_{ext}} = M\vec{a}_{cm}$$

یعنی مرکز جرم سیستم طوری شتاب می گیرد که انگار تک ذره ای فرضی به جرم **M** در مرکز جرم قرار گرفته و بر آیند نیروهای خارجی بر آن اثر می کند .

قانون اول نیوتن در مورد یک سیستم ذرات

اگربرایند نیروهای خارجی وارد بر سیستمی صفر باشد ، سرعت مرکز جرم سیستم ثابت می ماند (مکان مرکز جرم ثابت می ماند)

$$\overrightarrow{F_{ext}} = M\vec{a}_{cm} \quad \text{یا} \quad \overrightarrow{F_{ext}} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

یعنی آهنگ تغییر تکانه خطی یک سیستم ذرات برابراست با نیروی خالصی که از خارج به سیستم اثر می کند .

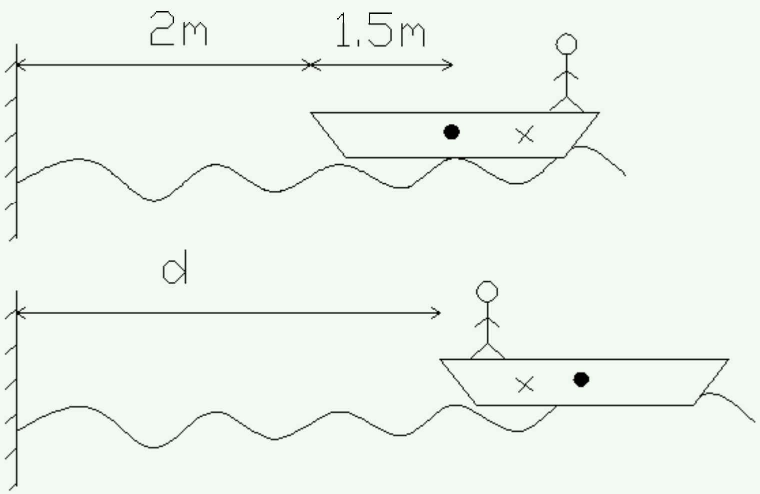
اگر $\overrightarrow{F}_{ext} = 0$ درنتیجه :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \Rightarrow M\frac{d\overrightarrow{V_{cm}}}{dt} = 0$$

$$\vec{P} = \text{ثابت} \quad V_{cm} = \text{ثابت}$$

مثال۵ :

شخصی به جرم شصت کیلوگرم در قسمت عقب قایق ساکنی به جرم 40 kg که 3 متر طول دارد ایستاده است . در این حالت فاصله سر قایق از ساحل 2 متر است . اگر این شخص تا قسمت جلول قایق قدم بزند ، فاصله سر قایق با ساحل چقدر می شود ؟



حل مثال ۵ :

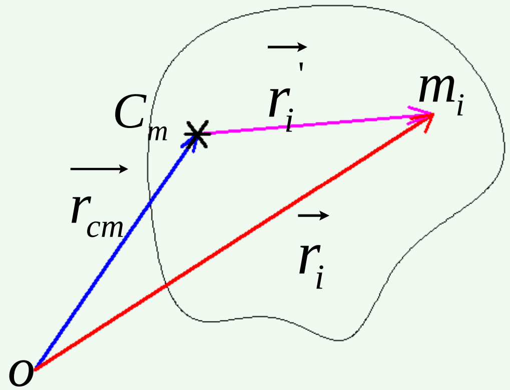
چون بر ایند نیروهای وارد بر سیستم صفر است ، مکان مرکز جرم ثابت است (یا حرکت یکنواخت دارد) ، از طرفی چون تکانه خطی کل سیستم نیز ثابت است ، قایق باید درخلاف جهت حرکت شخص جابجا شود .

$$(1) \Rightarrow x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M} = \frac{(60)(5) + (40)(3.5)}{100} = 4.4m$$

$$(2) \Rightarrow x_{cm} = \frac{m_1 d + m_2 (d + 1.5)}{100}$$

از مساوی قرار دادن دو عبارت نتیجه می شود : $d = 3.8m$

انرژی جنبشی ذره i ام از یک سیستم ذرات نسبت به مبدا ثابت



مکان ذره i ام نسبت به مبدا ساکن o :

$$\vec{r_i} = \vec{r_{cm}} + \vec{r_i'}$$

مشتق می گیریم ، در نتیجه :

$$\vec{V_i} = \vec{V_{cm}} + \vec{V_i'}$$

انرژی جنبشی ذره I ام نسبت به o

$$K_i = \frac{1}{2} m_i (\vec{V_i} . \vec{V_i}) = \frac{1}{2} m_i [\vec{V}_{cm} + \vec{V_i'}] . [\vec{V}_{cm} + \vec{V_i'}]$$

$$K_i = \frac{1}{2} m_i (V_{cm}{}^2 + V_i'^2 + 2 V_{cm} . V'_i)$$

انرژی جنبشی یک سیستم ذرات نسبت به مبدا ثابت مجموع دو انرژی است ، یکی انرژی جنبشی مرکز جرم نسبت به مبدا ثابت و دیگری انرژی جنبشی ذرات سیستم نسبت به مرکز جرم :

انرژی جنبشی کل سیستم :

$$K = \sum K_i = \frac{1}{2}(\sum m_i)V_{cm}{}^2 + \frac{1}{2}(\sum m_i)V_i^{'2} + \vec{V}_{cm}(\sum m_i V_i^{'})$$

در جمله آخر تکانه کل سیستم ذرات نسبت به مرکز جرم یا $M\overrightarrow{V_{cm}^{'}}$ است و چون سرعت مرکز جرم نسبت به خو.دش صفر است ، پس جمله اخر حذف می شود ، در نتیجه :

$K^{'}$ انرژی جنبشی ذرات سیستم نسبت به مرکز جرم می تواند شامل دوران ، نوسان یا انتقال نسبت به مرکز جرم باشد .

$$K = K_{cm} + K^{'}$$


پایان

www.salampnu.com