فیزیک پایه ۱(مکانیک)

درس ۴ واحدی

(رشته های ریاضی ، شیمی و کامپیوتر)

درس ۳واحدی (حذف فصل ۱۲ و۱۳)

(رشته کامپیوتر)

هریس بنسون

ترجمه و تدوین: محمد رضا بهاری

تهیه پاورپوینت:

محمود جنوبی

عضوهیئت علمی – مرکز ارومیه

بسم الله الرحمن الرحیم

هدفهای کلی درس

آشنایی با:

- فیزیک ، مفهوم، مدل ، قانون ونظریه
- بردارها: ضرب نرده ای وبرداری
- ا نواع حرکت: یک بعدی و دوبعدی
- حرکت سقوطی آزاد و دایره ای
- حرکت نسبی
- دینامیک ذره : قوانین نیوتن و اصطکاک
- مفاهیم کار ، انرژی وتوان
- پایستگی انرژِ ی : نیروهای پایستارو غیر پایستار
- انرژی جنبشی و پتانسیل
- تکانه خطی و قانون پایستگی تکانه خطی
- سیستم ذرات : مرکز جرم ، حرکت مرکز جرم
- دوران جسم صلب حول محورثابت : سینماتیک دورانی
- دینامیک دورانی :تکانه زاویه ای و پایستگی آن
- گرانش : قانون گرانش نیوتن
- حل مسائل فیزیک مکانیک

راهنمایی کلی

- **این درس دارای چند بخش است:**
  - **آموزش سنتی : حضور در کلاسهای رفع اشکال**
  - **بحث و حل مسئله در کلاس**
  - **تمرین در منزل**
  - **آزمایشگاه و بررسی عملی پدیده های مربوط به درس**
  - حضور در کلاسهای عملی اجباری است
- درکلاسهای حضوری می توانید اشکالات خودرا که در ضمن مطالعه با آن برخورد کرده اید از مدرس خود بپرسید وحضور پویا داشته باشید . دراین کلاسها نکات مهم و کلیدی درس توضیح داده می شود.

ساختار درس

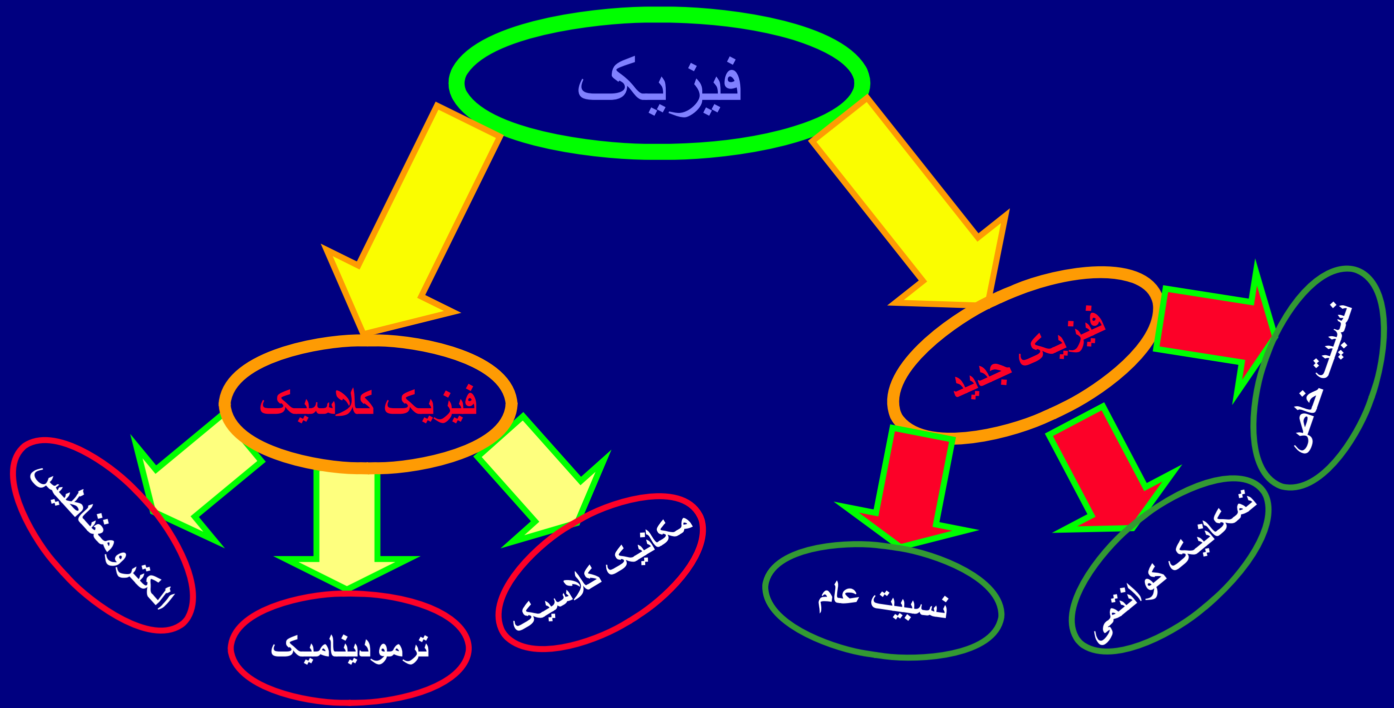
- عنا صر درس :
  - درهر درس مواد و نکات مهم درس مورد بررسی قرار می گیرد
    - » از این نکات نت برداری کنید.
  - در هر درس در صورت امکان کلیپ های صوتی و تصویری گنجانیده شده است .
    - » بدون شک چیزی را که می بیند بیشتر آنرا باور می کنید!!
  - با دانشجویان هم کلاسی خود در بحث گروهی شرکت کرده و آموزش خودرا پویا کنید
    - »

فصل اول

مقدمات

هدف های رفتاری این فصل:

❖ فیزیک چیست ؟



ادامه...

- مفهوم ، مدل، قانون واصل و نظریه
- یکاها و اندازه گیری
  - یکاهای اصلی
  - دستگاه یکاها
  - تبدیل بین دستگاه یکاها
  - تحلیل ابعادی

فيزيک چيست ؟

فيزيك چيست؟ فيزيك, بنيادي ترين علم فيزيكي با اصول اساسي جهان سروكار دارد و پايه اي است كه علوم فيزيكي ديگر مانند نجوم, شيمي, زمين شناسي بر آن بنا نهاده شده است.

زيبايي فيزيك در سادگي نظريه هاي بنيادي آن و نيز تعداد كم اصول بنيادي, معادلات و فرضيه هاي آن كه نظر ما را درباره جهان اطراف گسترش مي دهد قرار دارد.

فيزيك با رفتار و اجزاي سازنده ماده و برهم كنشهای آن در بنيادي ترين سطوح سروكار دارد و شامل دو شاخه فيزيك كلاسيك و فيزيك جديد مي باشد.

فيزيك كلاسيك شامل سه شاخه عمده زير است:

۱- **مكانيك:** كه در آن حركت اجسام مادي بررسي مي شود .

۲- **ترموديناميك:** كه به مطالعه حرارت, دما و رفتار انبوهه هاي ذرات مي پردازد.

۳- **الكترومغناطيس:** كه به مطالعه نظريه هاي الكتريسيته, مغناطيس و امواج الكترومغناطيسي مي پردازد.

فيزيك جديد كه از اول قرن بيستم بوجود آمد و شامل مباحث زير است:

۱- **نسبيت** - كه رفتار ذراتي كه با سرعتهاي بسيار بالا حركت مي كنند بررسي مي كند

۲- **مكانيك كوانتمي** - كه رفتار ذرات را در سطح بسيار ريز (زير ميكروسكپي) بررسي مي كند.

٤- **نسبيت عام:** نظريه اي كه نيروي گرانشي را به خواص هندسي فضا مربوط مي كند.

كليه پديده هاي فيزيك را مي توان بر حسب چهار نيروي گرانشي, الكترومغناطيسي, قوي و ضعيف توضيح داد.

محدوده فیزیک پایه یک :

- **فیزیک کلاسیک:**
  - **مکانیک : اجسام چگونه و چرا حرکت می کنند؟**
  - **از نظر نظریه کلاسیک :**
    - » اجسام نه خیلی سریع حرکت می کنند: $(v << c)$
    - » نه خیلی کوچک هستند: $(d >> atom)$
- بیشتر مواردی که در زندگی روزمره با آن برخورد می کنیم را می توانیم برحسب :
  - مسیر یک توپ بیس بال
  - مدار سیاره ها
  - وغیره

  بیان کنیم .

مفهوم، مدل ، قانون واصل ونظریه

مفهوم: هرنگاره یا کمیت فیزیکی که برای تحلیل پدیده های طبیعی بکارمی رود.

قانون: رابطه فیزیکی بین کمیت های فیزیکی

اصل: یک گزاره بسیار کلی در باره رفتار طبیعت که مغایرتی با آن یافت نشده است .

مدل: مشابه ساده ومناسبی که از آن برای "نمایش " و توصیف یک سیستم فیزیکی بکار می رود

نظریه: مجموعه ای از اصول و فرض های اولیه (یا اصل موضوع ها) که برای رسیدن به نتایج یا قوانین خاصی درقالب یک مدل با هم ترکیب شده باشند.

یکاها

- چگونه اشیا را اندازه می گیریم!
- درمکانیک کلاسیک همه اشیا را می توانیم برحسب یکاهای اصلی اندازه بگیریم :

← طول L
← جرم M
← زمان T

- به عنوان مثال :

← تندی دارای یکای L / T یعنی متر بر ثانیه است .
← نیرو دارای یکای ML / T^2 وغیره ...(بعدا خواهید دید!).

طول:

فاصله ___	طول(m)
شعاع جهان	1×10^{26}
تاکهکشان اندرومدا	2×10^{22}
تانزدیک ترین ستاره	4×10^{16}
زمین تاخورشید	1.5×10^{11}
شعاع	6.4×10^{6}
میدان فوتبال	1.0×10^{2}
قد یک فرد بلند قد	2×10^{0}
ضخامت کاغذ	1×10^{-4}
طول موج نور آبی	4×10^{-7}
قطر اتم هیدرزن	1×10^{-10}
قطر پروتون	1×10^{-15}

زمان:

طول زمانی ____	زمان(s)
عمر جهان	5×10^{17}
عمر گراند کانیون در امریکا	3×10^{14}
۳۲ سال	1×10^{9}
یک سال	3.2×10^{7}
یک ساعت	3.6×10^{3}
مدت زمان سیر نوراز زمین تا ماه	1.3×10^{0}
یک چرخه سیم گیتار	2×10^{-3}
یک چرخه FM موج رادیویی	6×10^{-8}
طول عمر pi مزون	1×10^{-16}
طول عمر یک ذره کوارک	4×10^{-25}

جرم:

جسم	جرم(kg)
کهکشان راه شیری	4×10^{41}
خورشید	2×10^{30}
زمین	6×10^{24}
بوئینگ ۷۴۷	4×10^{5}
اتومبیل	1×10^{3}
یک دانشجو	7×10^{1}
یک ذره غبار	1×10^{-9}
یک ذره کوارک	3×10^{-25}
پروتون	2×10^{-27}
الکترون	9×10^{-31}
نوترینو	1×10^{-38}

یکاها...

- **یکاهای(دستگاه بین المللی SI) :**

  ← mks: L = متر (m), M = کیلوگرم (kg), T = ثانیه(s)

  ← cgs: L = سانتی متر (cm), M = گرم (gm), T = ثانیه(s)

- **یکاهای انگلیسی :**

  ← اینچ ,فوت ,مایل,پوند,اسلاگ...

- ما ازسیستم SI استفاده می کنیم . درموارد خاصی که با این یکاها برخورد می کنید باید بتوانید آنها را به هم تبدیل کنید.

تبدیل یکاها از دستگاههای مختلف به هم دیگر:

- چند ضریب تبدیل مفید:

1 m	=	3.28	ft
1 inch	=	2.54	cm
1 mile	=	5280	ft
1 mile	=	1.61	km

- مثال : مایل بر ساعت را به متر بر ثانیه تبدیل کنید:

$$1\frac{mi}{hr}=1\frac{mi}{hr}\times 5280\frac{ft}{mi}\times\frac{1}{3.28}\frac{m}{ft}\times\frac{1}{3600}\frac{hr}{s}=0.447\frac{m}{s}$$

تحلیل ابعادی

- تحلیل ابعادی برای بررسی کاری که انجام می دهید بسیار مهم است
  ← ودر عین حال بسیار ساده است !
- مثال :

مسئله ای را حل می کنید و برای سرعت این عبارت را می یابید:

$d = vt^2$ (velocity x time^2)

یکاهای سمت چپ = L

یکاهای سمت راست $L / T \times T^2 = L \times T$

- یکاهای سمت چپ و راست مساوی نیستند بنابراین جواب شما نادر است !

تمرین درس یک : تحلیل ابعادی

- زمان تناوب P یک آونگ نوسانگر به طول d وشتاب جادبه g بستگی *دارد*.

➔کدام فورمول برای زمان تناوب P ***میتواند*** درست باشد؟

(a) $P = 2\pi\,(dg)^2$ (b) $P = 2\pi \dfrac{d}{g}$ (c) $P = 2\pi \sqrt{\dfrac{d}{g}}$

می دانیم d: دارای واحد (L) و g دارای یکای (L / T^2) است.

تمرین درس یک
پاسخ

- می دانیم طرف چپ P دارای یکای (T) است
- معادله اول را تحلیل کیند:

(a) $\left(L\cdot\frac{L}{T^2}\right)^2 = \frac{L^4}{T^4} \neq T$ نادرست است!!

(a) $\boxed{P = 2\pi(dg)^2}$ (b) $P = 2\pi\frac{d}{g}$ (c) $P = 2\pi\sqrt{\frac{d}{g}}$

درس یک –تمرین
پاسخ:

- معادله دوم را تحلیل کنید:

(b) $$\frac{L}{\frac{L}{T^2}} = T^2 \neq T$$

نادرست است !!

(a) $P = 2\pi(dg)^2$ (b) $\boxed{P = 2\pi\frac{d}{g}}$ (c) $P = 2\pi\sqrt{\frac{d}{g}}$

درس یک – تمرین
پاسخ:

- معادله سوم را تحلیل کنید:

(c) $\sqrt{\dfrac{L}{\dfrac{L}{T^2}}} = \sqrt{T^2} = T$

دارای یکاهای درست است !!

پاسخ همین است !!!

(a) $P = 2\pi(dg)^2$ (b) $P = 2\pi\dfrac{d}{g}$ (c) $\boxed{P = 2\pi\sqrt{\dfrac{d}{g}}}$

فصل دوم

بردارها

هدف های رفتاری :

- تعریف کمیت های فیزیکی : کمیت های نرده ای و برداری
- نمایش یک بردار
- جمع بردارها
- نمایش تحلیلی یک بردار به وسیله بردارهای واحد
- ضرب بردارها : ضرب یک عدد در یک بردار، ضرب نرده ای دو
- بردار ، ضرب برداری دو بردار
- ضرب مختلط سه بردار

كميت هاى فيزيک

كمّيت هاي فيزيكي :

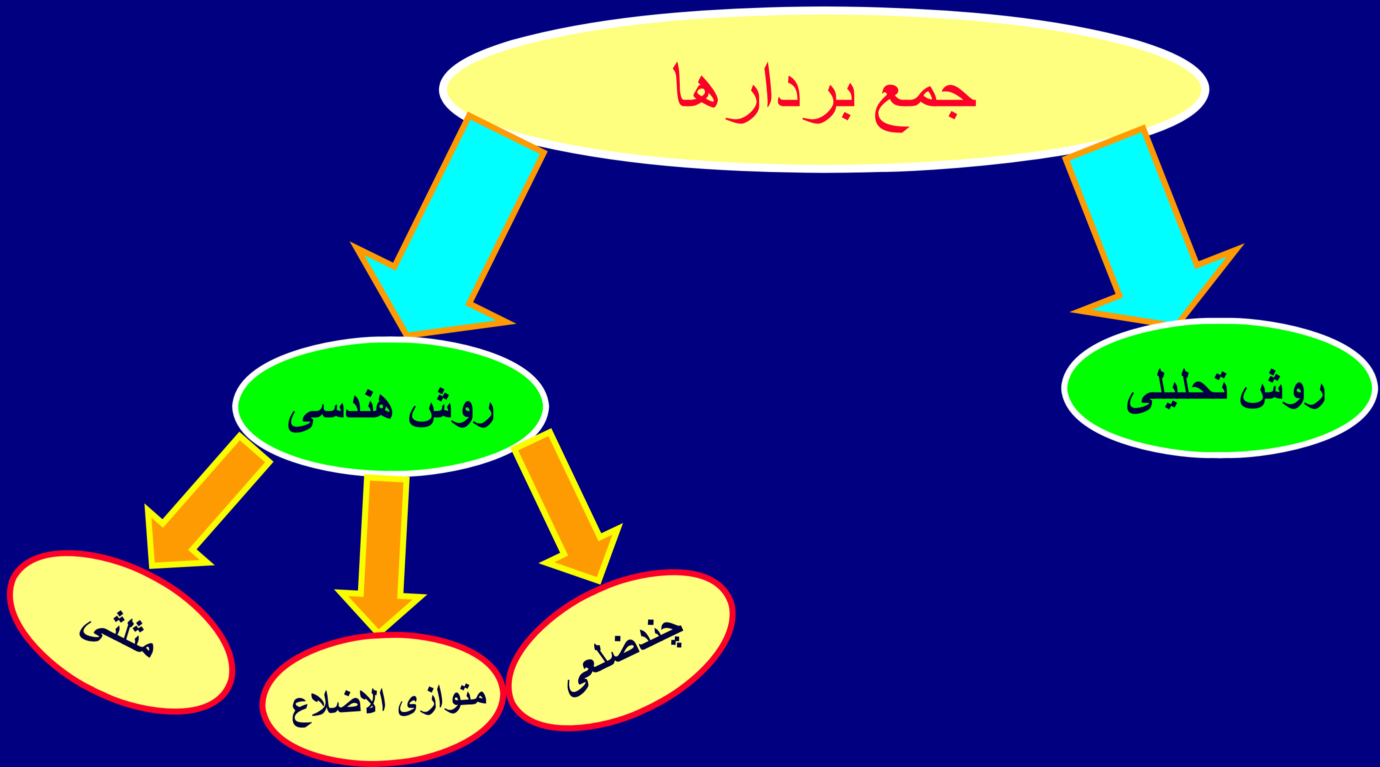
الف- كمّيت اسكالر يا نرده اي: كميتهايي هستند كه فقط داراي بزرگي هستند و طبق قوانين حسابي با همديگر جمع و تفريق مي شوند مانند: تندي (اندازه سرعت), فاصله, جريان, بار, جرم, چگالي, پتانسيل, كار و انرژي و غيره

ب- كميت هاي برداري: اين كميت ها داراي بزرگي و جهت هستند و طبق قوانين فيزيك مانند قاعده متوازي الضلاع و مثلثي با هم جمع و تفريق مي شوند مانند سرعت, جابجائي چگالي جريان, نيرو گشتاور يا تورك , تكانه, شدت ميدان الكتريكي, تكان يا ضربه و غيره

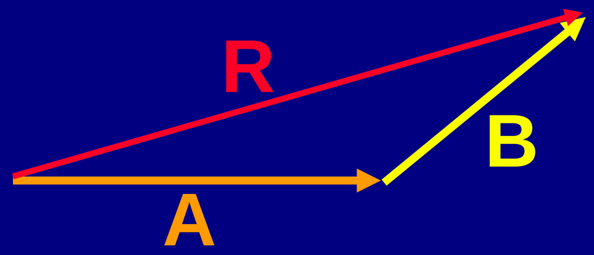
نمايش يك بردار: با يك پيكان نمايش داده مي شوند كه طول پيكان اندازه بردار وسر پيكان جهت آنرا نمايش مي دهيم: يك بردار را معمولا" بصورت $\vec{A}$ واندازه آن را با $|\vec{A}|$ يا A نمايش می دهند.

بردار واحد یا یکه: بردار واحد در راستاي يك بردار برابر يا بردار تقسيم بر بزرگي آن بردار مي باشد.
به عبارتديگر, برداري كه داراي بزرگي واحد باشد بردار واحد ناميده مي شود بردار واحد راستاي A برابر است با:

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

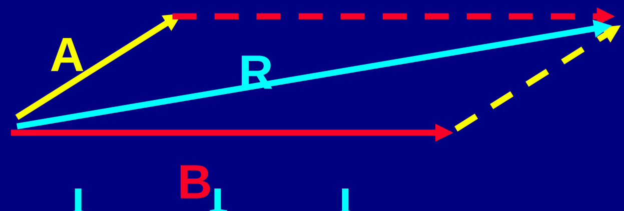


روش مثلثی



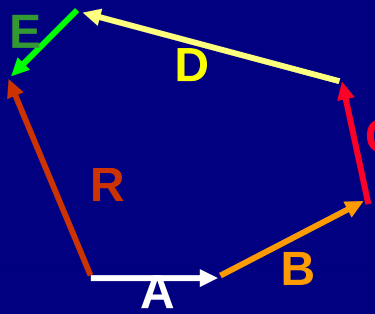
$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$$

روش متوازی الاضلاع

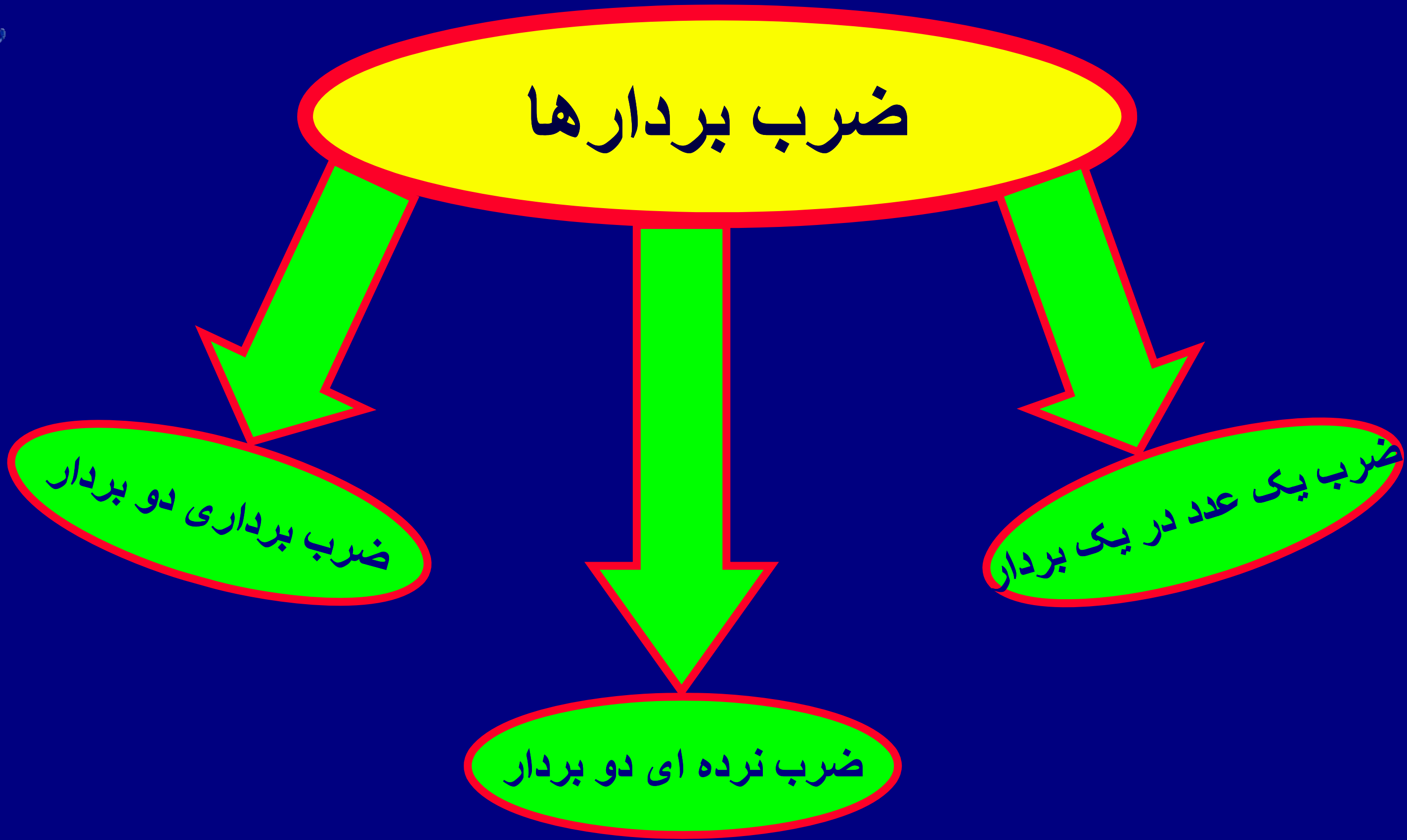


$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$$

روش چندضلعی



$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} + \vec{E}$$


ضرب بردارها
ضرب برداری دو بردار
ضرب نرده ای دو بردار
ضرب یک عدد در یک بردار

ضرب یک عدد در یک بردار

- حاصل یک بردار است در جهت یا خلاف جهت آن بردار.
- اگر عدد مثبت باشد درجهت بردار واگر منفی باشد درخلاف جهت آن خواهد بود.

مثال :

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad , \vec{P} = m\vec{v} \quad , \vec{x} = \vec{v}t$$

ضرب نرده ای دو بردار

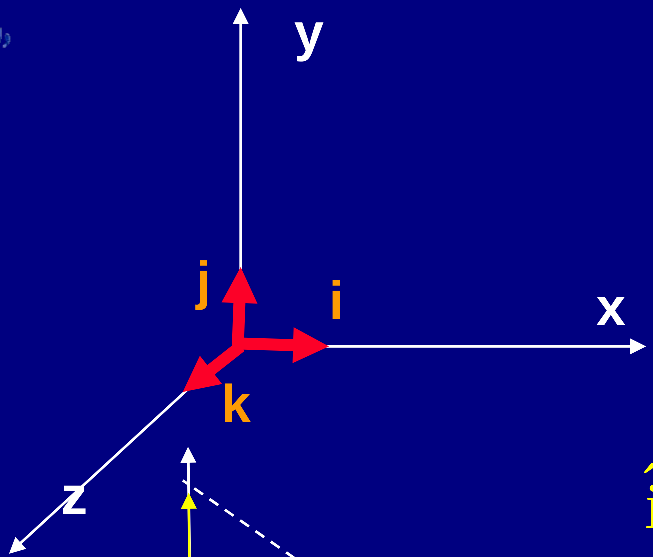
بنا به تعریف:

❖ نتیجه این ضرب یک کمیت نرده ای است.

❖ اگر زاویه بین دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ برابر با θ باشد :

$$\boxed{\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B \cdot \cos\theta}$$

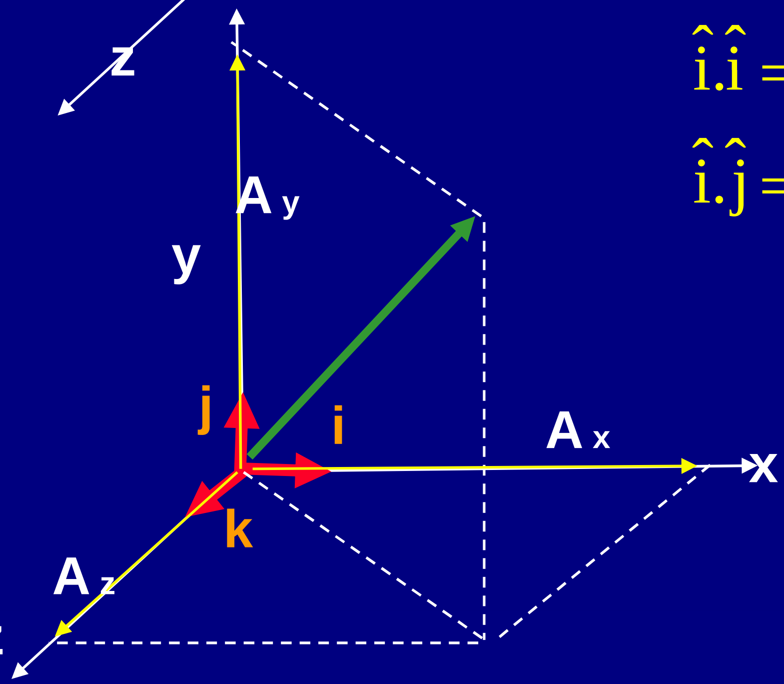
روش تحلیلی:



ضر ب نرده ای بردارهای واحد:

$$\hat{i}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 1\times1\times\cos 0 = 1$$

$$\hat{i}.\hat{j} = \hat{j}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{i} = 1\times1\times\cos 90 = 0$$



بیان تحلیلی یک بردار:

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

بزرگی یک بردار:

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

ضرب نرده ای دو برداربه طریق تحلیلی:

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$

$$\vec{A}.\vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}).(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$

$$\boxed{\vec{A}.\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}$$

زاویه بین دو بردار:

$$\cos\theta = \frac{A_x.B_x + A_y.B_y + A_z.B_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \times \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}}$$

چند نکته:

- ضرب نرده ای خاصیت جابه جایی دارد:

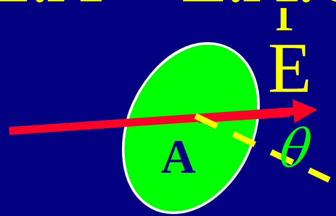
$$\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$$

- ضرب نرده ای دوبردار موازی بیشینه است.
- ضرب نرده ای یک بردار درخودش برابر است با مجذور بزرگی آن بردار.
- اگر زاویه بین دوبردار بیش از ۹۰ درجه باشد این حاصل ضرب منفی است.

مثال :

❖ شار میدان الکتریکی :

$$\Phi = \vec{E}.\vec{A} = E.A.\cos\theta$$



کار:

$$W = \vec{F}.\vec{d} = F.d.\cos\theta$$

توان:

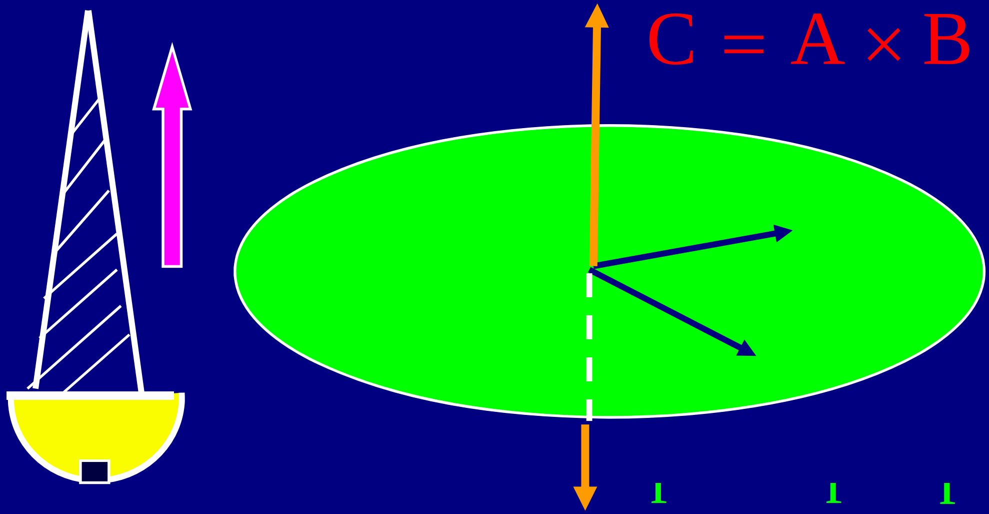
$$P = \vec{F}.\vec{v}$$

ضرب برداری دو بردار:

طبق تعریف :این حاصل ضرب یک بردار است :

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = A.B.\sin\theta\ \hat{n}$$

که $\hat{n}$ بردار واحدی است که برصفحه دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ عمود است.



$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

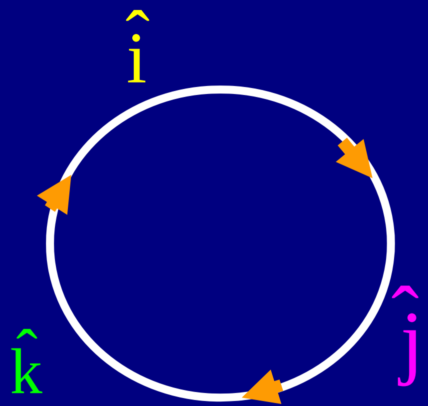
$$\vec{C} = -\vec{A} \times \vec{B}$$

ضرب برداری بردارهای واحد:

$$\hat{i}\times\hat{i}=\hat{J}\times\hat{J}=\hat{k}\times\hat{k}=1\times1\times\sin 0=0$$

$$\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k} \quad , \quad \hat{j}\times\hat{k}=\hat{i} \quad , \quad \hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}$$

$$\hat{j}\times\hat{i}=-\hat{k} \quad , \quad \hat{k}\times\hat{j}=-\hat{i} \quad , \quad \hat{i}\times\hat{k}=-\hat{j}$$



ضرب بردار به روش تحلیلی:

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = (A_z\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}) \times (B_z\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}) =$$

$$(A_yB_z - A_zB_y)\hat{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{k}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

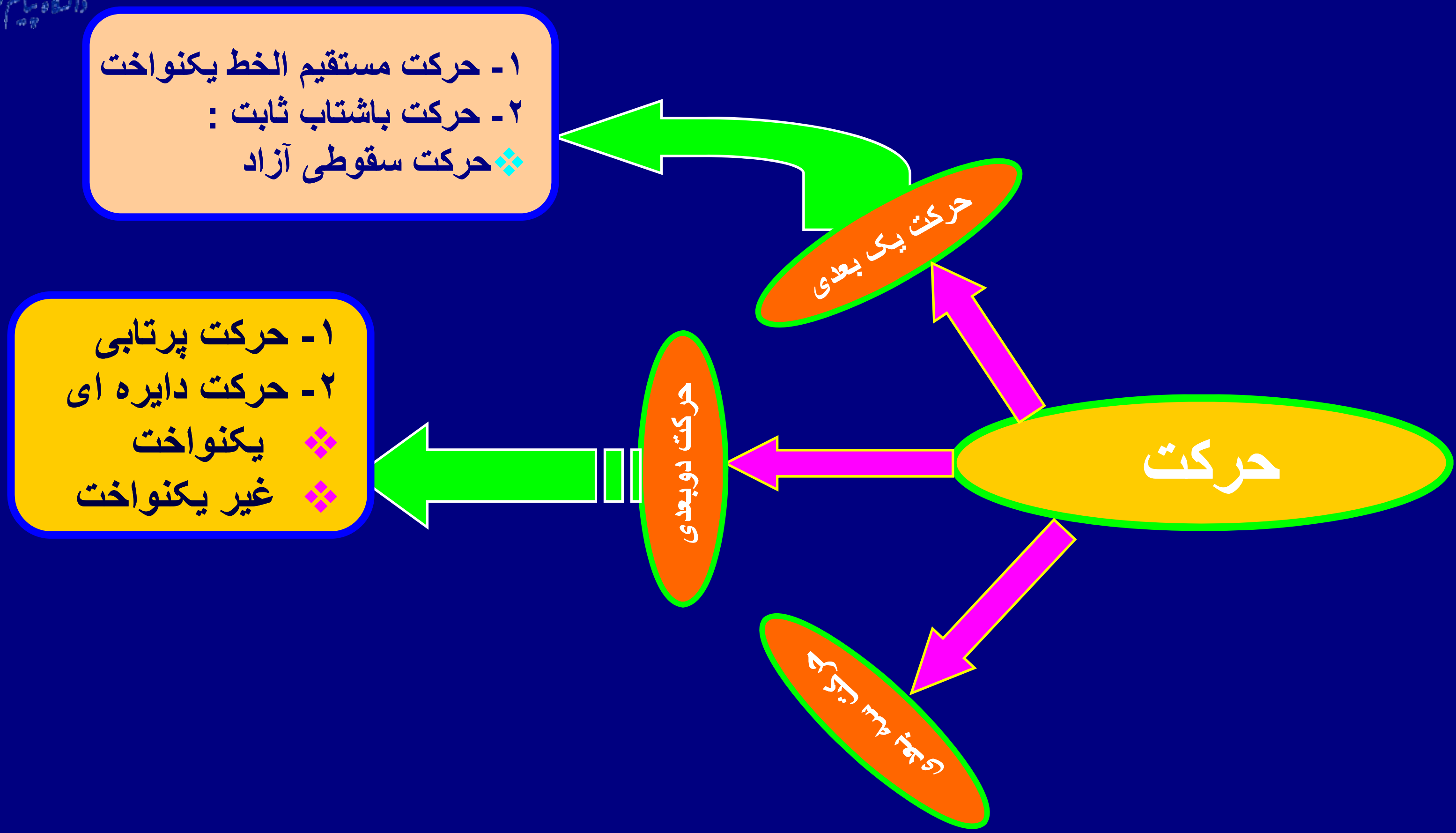
چند نکته:

- $$\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$$
- سطح متوازی الاضلاعی که روی دوبردار ساخته می شود برابراست با بزرکی ضرب برداری آن دو بردار.
- حجم متوازی السطوحی که روی سه بردار ساالخته می شود برابراست با:

$$V = \vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

ادامه فصل ۲ ....

حرکت یک بعدی


۱- حرکت مستقیم الخط یکنواخت
۲- حرکت باشتاب ثابت :
حرکت سقوطی آزاد
۱- حرکت پرتابی
۲- حرکت دایره ای
یکنواخت
غیر یکنواخت
حرکت یک بعدی
حرکت دوبعدی
حرکت

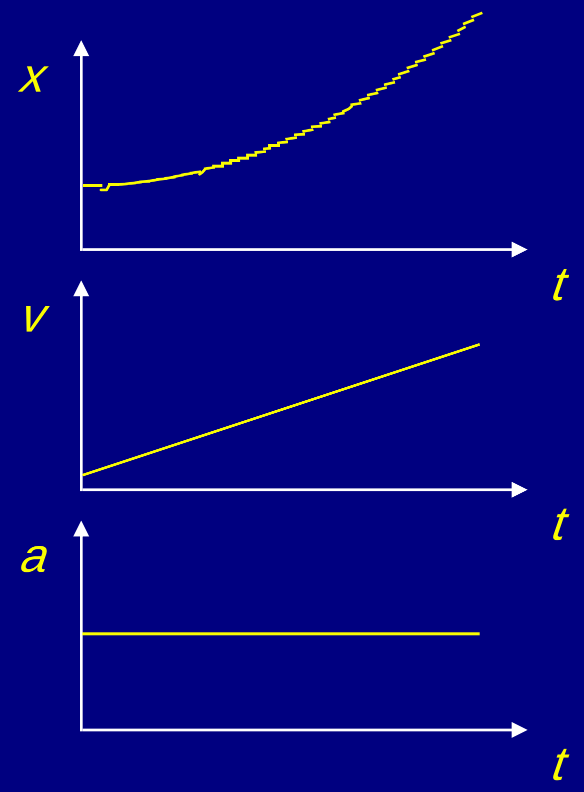
فیزیک پایه ۱
درس امروزما...

- خلاصه حرک با شتاب ثابت
- حرکت سقوطی آزاد
  - یک مثال
- مروری بر بردارها
- سینماتیک سه بعدی
  - تیراندازی به میمون
  - بیسبال
  - مستقل بودن مولفه های x و y

مرور:

- در مورد حرکت با شتاب ثابت پیداکردیم:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$
$$v = v_0 + at$$
$$a = const$$

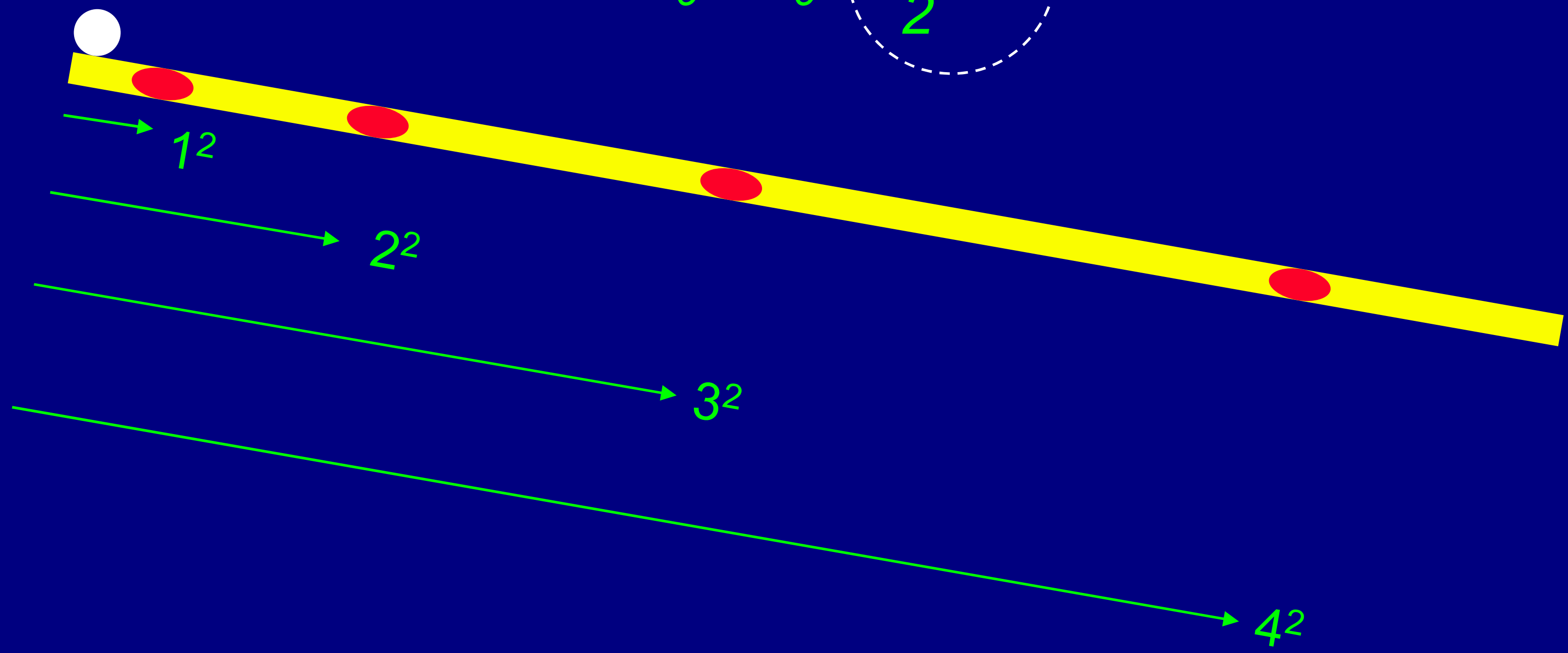


- و از آن رابطه زیر را پیداکردیم:

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$
$$v_{av} = \frac{1}{2}(v_0 + v)$$

به خاطر داشته باشید:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$



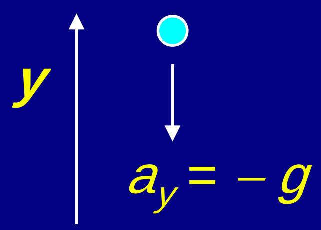
حرکت سقوطی آزاد:

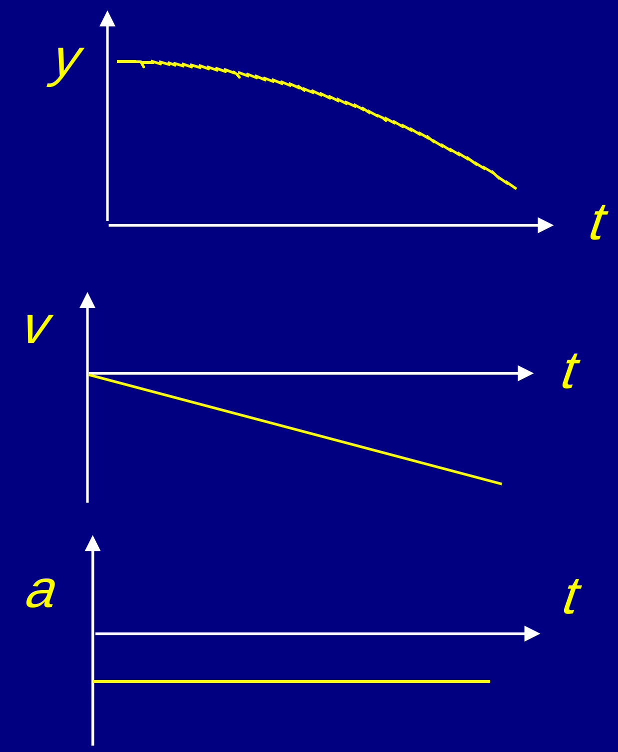
- مثال زیبایی از حرکت با شتاب ثابت است (تحت نیروی گرانش)
- دراین حالت شتاب به وسیله جاذبه زمین ایجاد می شود.
  - عموما محور -y را“ به سمت بالا”انتخاب می کنند
  - شتاب جاذبه به “ پایین ” است

$$a_y = -g$$

$$v_y = v_{0y} - gt$$

$$y = y_0 + v_{0y}\, t - \frac{1}{2} g\, t^2$$





واقعیت هایی در باره جاذبه:

- g بستگی به ماهیت اجسام ندارد

 گالیله (1564-1642)بدون ساعت دقیق و خط کش این نتایج را بدست آورد!

- به آزمایش پرو سکه و یا توجه کنید

- رسما $g = 9.81\ m/s^2$,

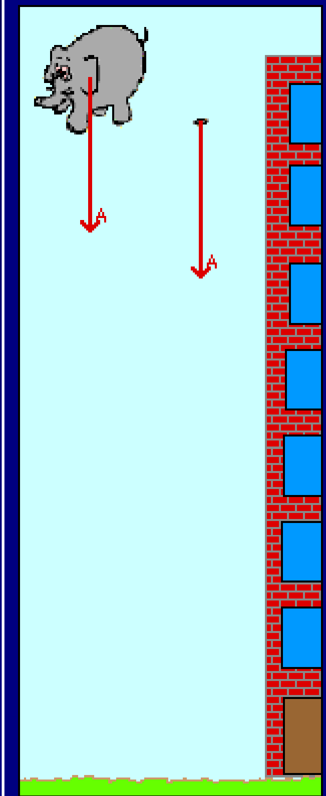
 در استوا $g = 9.78\ m/s^2$

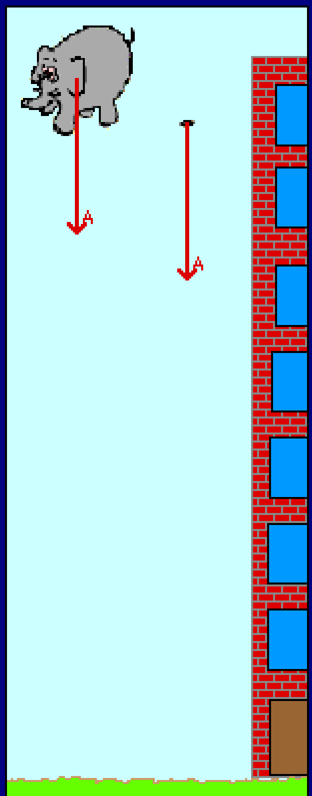
 در قطب شمال $g = 9.83\ m/s^2$

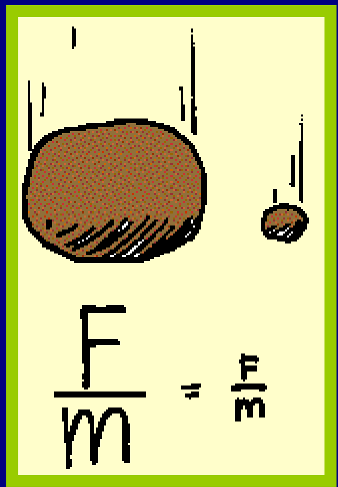
- حقایق بیشتر در مورد جاذبه را در درسهای بعد خواهید آموخت.

آزمایش فیل وپر: یک سنگ کوچک و یک سنگ بزرگ اگر از ارتفاع مساوی رها شوند با همدیگر به زمین می رسند.

یک فیل و یک پرهم در غیا ب نیروهای مقاومت با هم دیگر به زمین خواهند رسید ولی درصورت حضور نیروهای مقاومت هوا پر تقریبا با یک تاخیر ۳ دقیقه ای به زمین می رسد.

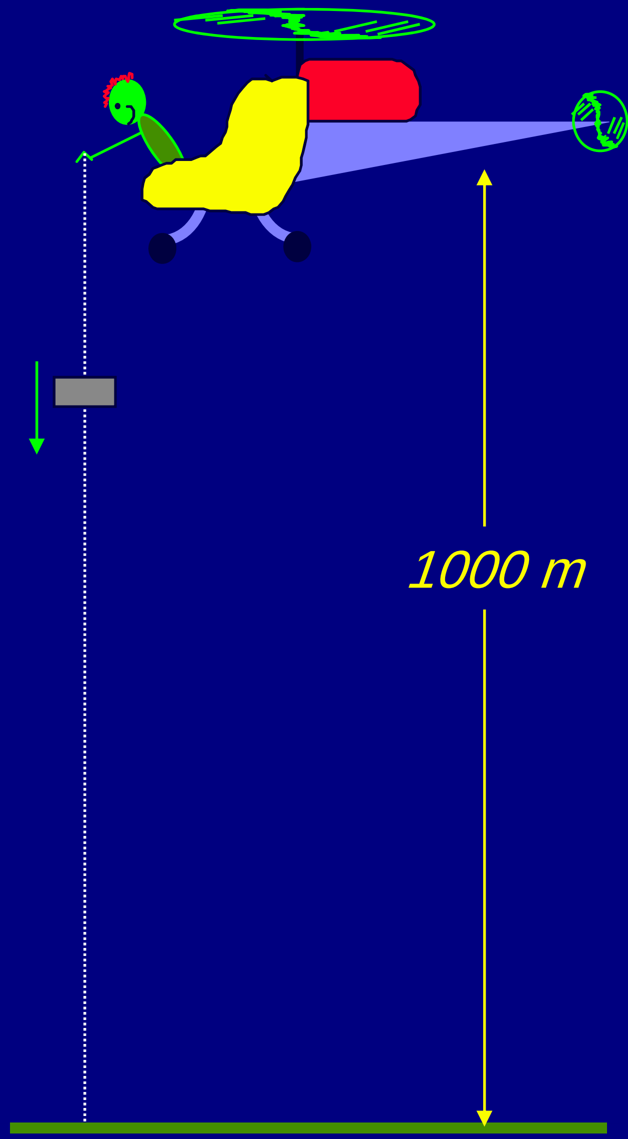






یک مسئله :

- خلبا ن یک هلی کوپتر مانور کننده در ارتفاع **1000 m** یک قالب فلزی را رها می کند . چه مدت طول می کشد تا به زمین برسد؟ وبا چه سرعتی به زمین می رسد؟(مقاومت هوا ناچیز است).



ادامه مسئله :

- ابتدا دستگاه مختصات را انتخاب کنید:

  ←مبدا وجهت y .

- معادله موقعیت قالب را بنویسید:

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

- به خاطر داشته باشید که: $v_{0y} = 0$.

$$y = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

$$y = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

ادامه مسئله :

- معادله رابرحسب زمان t حل کنیدوقتی که

$y = 0$ می دانیم که: $y_0 = 1000\ m.$

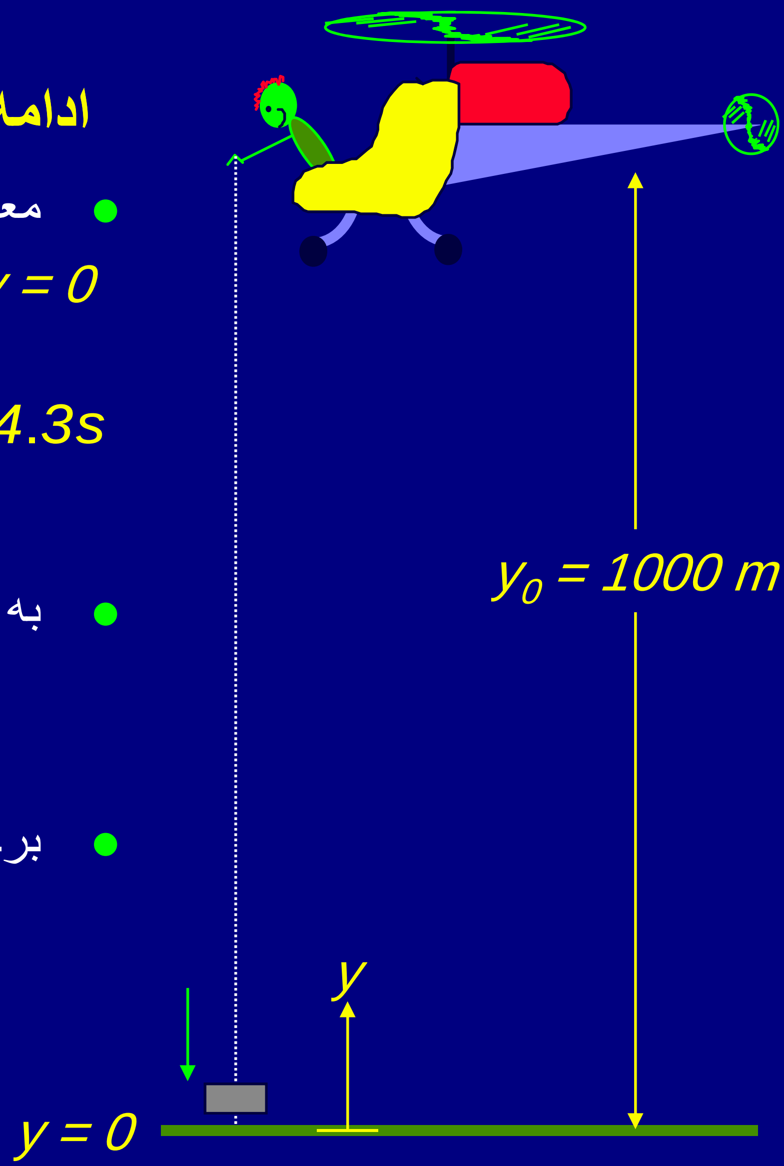
$$t = \sqrt{\frac{2y_0}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 1000m}{9.81\,m/s^2}} = 14.3s$$

- به خطر داشته باشید:

$$v_y^2 - v_{0y}^2 = 2a(y - y_0)$$

- برحسب v_y حل کنید :

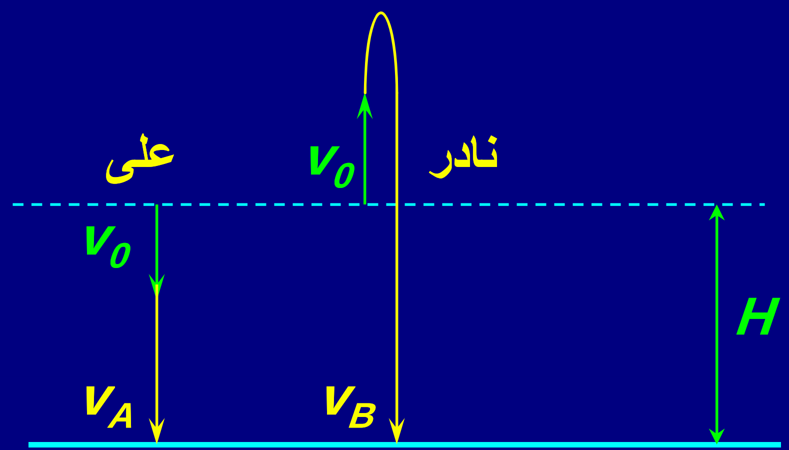
$$v_y = \pm\sqrt{2gy_0}$$
$$= -140\ m/s$$



مسئله :

- علی و نادر در بالای یک صخره به ارتفاع H *ایستاده اندو هر درو توپی را باسرعت* اولیه v_0 پرتاب می کنند علی مستقیما به پایین و نادر مستقیما به بالا .سرعت این توپها هنگام رسیدن به زمین به ترتیب v_A و v_B .کدام گزینه درست است ؟

(a) $v_A < v_B$ (b) $v_A = v_B$ (c) $v_A > v_B$



ادامه مسئله :حل

- حرکت پرتاب به بالا و پایین از یک تقارن برخورداراست لذا باید $v = v_0$ باشد
  ➔اثبات می کنیم که این حدس درست است:

$$v^2 - v_0^2 = 2(-g)(H - H) = 0 \qquad : \text{معادله}$$

مانند این است که نادر توپ را با سرعت
v_0 به پایین پرتاب کرده باشدبنابراین سرعت
دو توپ هنگام رسیدن به زمین برابر است.

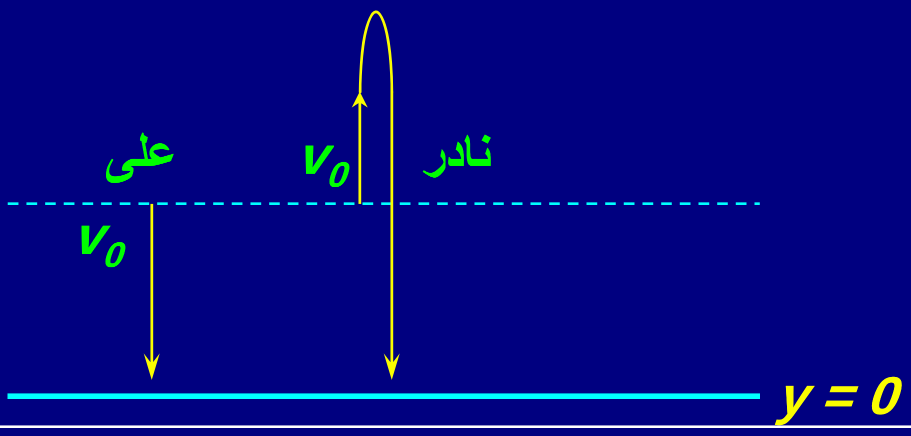
ادامه مسئله:

- می توانیم مستقیما معادلات زیر را بکار بریم :

علی: $v^2 - v_0^2 = 2(-g)(0 - H)$

نادر: $v^2 - v_0^2 = 2(-g)(0 - H)$

کاملا یکسان!!

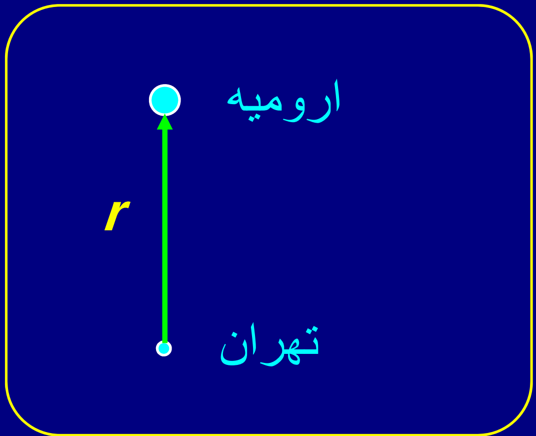


بردارها(مرور)

- در **1** بعد جهت را با علامت **+** یا **–** مشخص می کنیم.مثلا در مثال قبل $a_y = -g$ می باشد.
- در **2** یا **3** برای مشخص کردن جهت نیاز داریم .بعدما به چیزی بیش ا ز علامت نیاز داریم .
- برای بیان این موضوع *بردار موقعیت* r را در **2**بعد درنظر بگیرید.

مثال :ارومیه کجاست؟

- مبدا را در تهران در نظر بگیرید.
- فاصله ارومیه –تهران (کیلومتر) وجهت (N,S,E,W) را درنظر بگیرید.
- دراین حالت r برداری است به طول **700 km** وبه طرف شمال غربی .



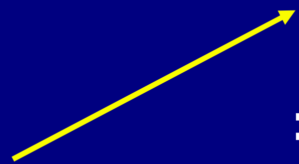
بردارها...

- به دو طریق می توانیم یک بردار را نشان بدهیم :

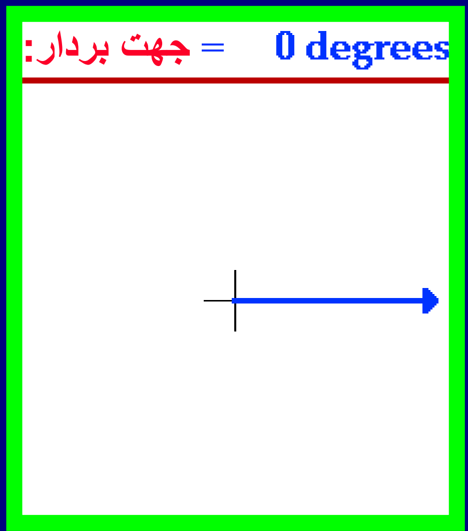
 ←با نماد حرف بزرگ توپر ***A*** :

$$\mathbf{A} = \vec{A}$$

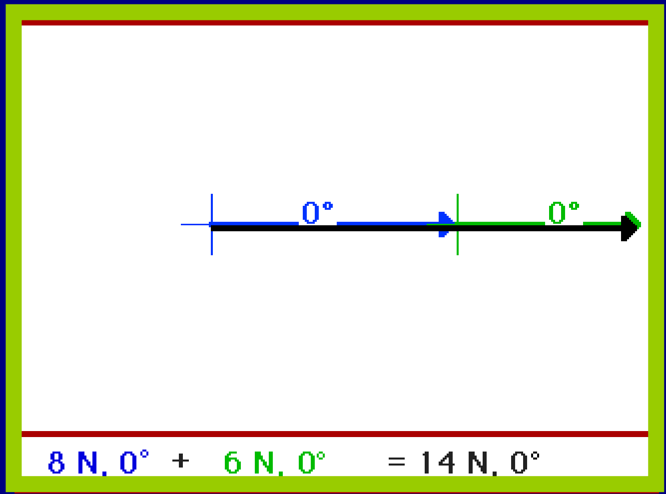
 ←بانماد "پیکان " :



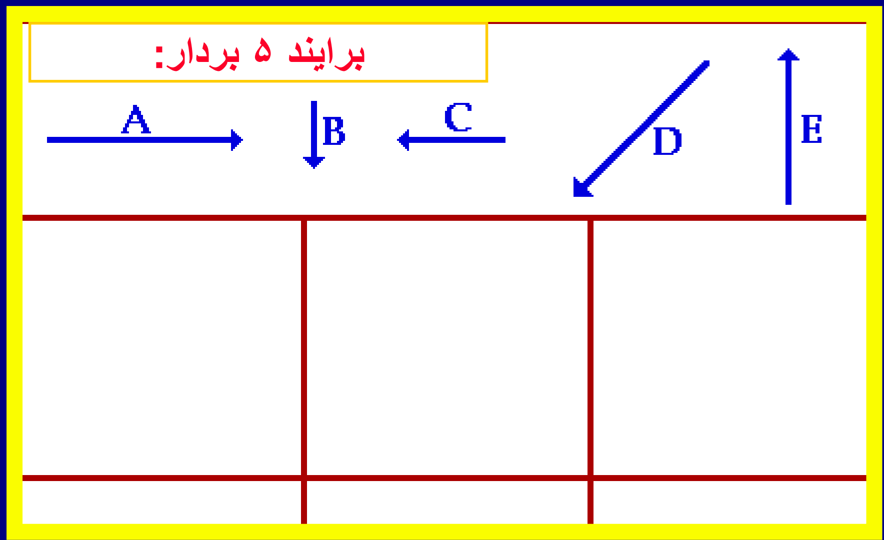
$\vec{A}$



برآیند دو بردار :



برآیند پنج بردار :



مرور بردارها....

- مولفه های بردار r در یک دستگاه قائم عبارتنداز (x,y,z)

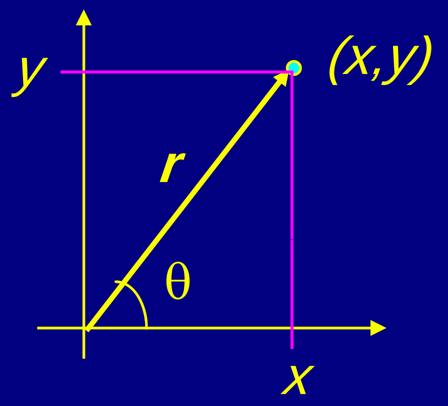
$$\Leftarrow r = (r_x, r_y, r_z) = (x,y,z)$$

- یک بردار را دردو بعد در نظر بگیرید(زیرا کشیدن آن ساده تر ا ست):به طوریکه:

$$r = |r|$$

$$\Leftarrow r_x = x = r\cos\theta$$

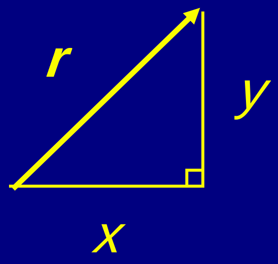
$$\Leftarrow r_y = y = r\sin\theta$$



$$\theta = \arctan(y / x)$$

ادامه بردارها...

- بزرگی بردار (طول) ***r*** با استفاده از قضیه فیثاغورث برابر است با::



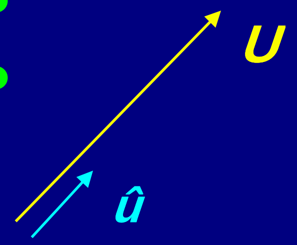
$$|\boldsymbol{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- بدیهی است که طول یک بردار به جهت آن بستگی **ندارد**. .

بردارهای واحد:

- بردار **واحد** برداری است به طول ۱ و **بدون یکا**
- این بردار برای مشخص کردن **جهت** بکار می رود.
- بردار واحد u در جهت بردار U است

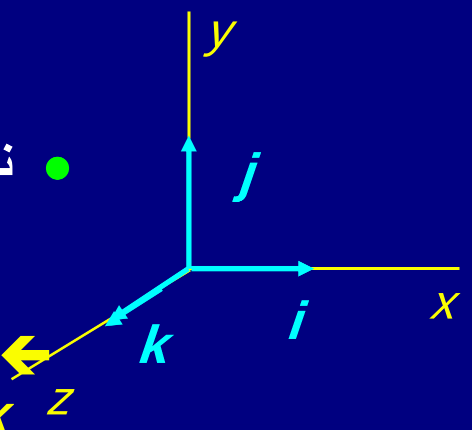
➔ اغلب با کشیدن "کلاهی " روی آن مشخص می شود $u = \hat{u}$:



- نمونه ای از بردارهای واحد در دستگاه مختصات کارتزین(قائم) عبارتنداز:

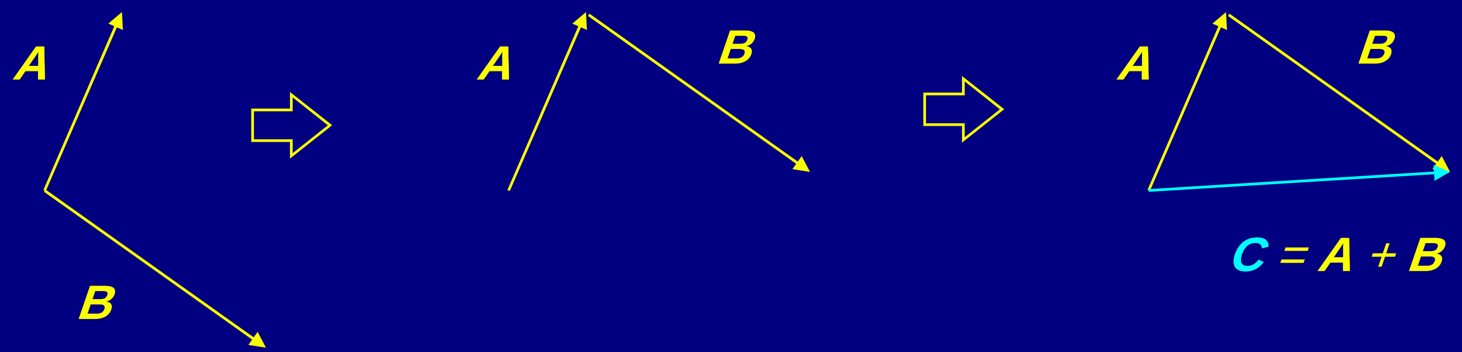
[i, j, k]

➔ این بردارهای واحد(یایکه) در جهت محورهای y, x و z می باشند.



جمع بردا‌ها:

- دوبردار *A* و*B* را در نظربگیرید . *A + B* را پیداکیند .



- این بردارها را می توانیم به دلخواه خود در فضا رسم کنیم . فقط باید بخاطر
- داشت باشید که جهت و بزرگی آنها را تغییر ندهید.

جمع بردارها باستفاده از مولفه های دو بردار:

- فرض کنید. $C = A + B$

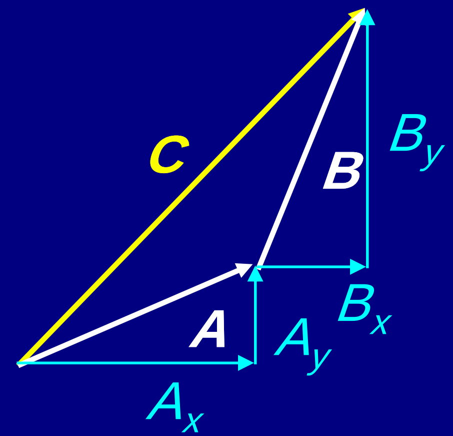
(a) $C = (A_x i + A_y j) + (B_x i + B_y j) = (A_x + B_x) i + (A_y + B_y) j$

(b) $C = (C_x i + C_y j)$

- مولفه های بردار برایند با استفاده از مولفه های دوبردار (a) و (b) :

← $C_x = A_x + B_x$

← $C_y = A_y + B_y$



مسئله :

- بردار $A = (0,2,1)$
- بردار $B = (3,0,2)$
- بردار $C = (1,-4,2)$

بردار برایند D, که از جمع این سه بردار بدست می آید چقدر است ؟ $A+B+C$?

(a) *(3,5,-1)* (b) *(4,-2,5)* (c) *(5,-2,4)*

حل مسئله :

$$D = (A_X i + A_Y j + A_Z k) + (B_X i + B_Y j + B_Z k) + (C_X i + C_Y j + C_Z k)$$

$$= (A_X + B_X + C_X) i + (A_Y + B_Y + C_Y) j + (A_Z + B_Z + C_Z) k$$

$$= (0 + 3 + 1) i + (2 + 0 - 4) j + (1 + 2 + 2) k$$

$$= \{4,-2,5\}$$

سینماتیک سه بعدی

- بردار موقعیت ,سرعت, و شتاب یک ذره در 3 بعد را چنین می توان بیان کرد:

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v} = v_x\,\mathbf{i} + v_y\,\mathbf{j} + v_z\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} = a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} + a_z\,\mathbf{k}$$

(بردارهای واحد $\mathbf{i}\,, \mathbf{j}\,, \mathbf{k}$)

- قبلا در سینماتیک یک بعدی دیدیم:

$$\boxed{x = x(t) \qquad v = \frac{dx}{dt} \qquad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}}$$

سینماتیک سه بعدی

- در سینماتیک سه بعدی معادلات مربوط به سینماتیک یک بعدی را در مورد هر یک از ابعاد می نویسیم .:

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad z = z(t)$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v_y = \frac{dy}{dt} \qquad v_z = \frac{dz}{dt}$$

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} \qquad a_z = \frac{d^2z}{dt^2}$$

- که بر حسب بردار موقعیت چنین می توان نوشت :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \qquad \mathbf{v} = d\mathbf{r} / dt \qquad \mathbf{a} = d^2\mathbf{r} / dt^2$$

سینماتیک سه بعدی

- در مورد حرکت با شتاب ثابت در فضا(سه بعد) داریم :

$\Leftarrow a = const$

$\Leftarrow v = v_0 + a\,t$

$\Leftarrow r = r_0 + v_0\,t + {}^1\!/_2\,a\,t^2$

(که a, v, v_0, r, r_0 همگی بردار هستند)

سینماتیک دو بعدی

- در حرکت در صفحه(دوبعدی)با شتاب ثابت :

← محور y را در جهت شتاب در نظر بگیرید:

← محور x در جهت "دیگر" حرکت خواهد بود.

- مثال :توپی را پرتاب کنید (از مقاومت هوا صرفنظر کنید)

← محور y به سمت بالا است : $a_y = -g$

← شتاب ثابت است (شتاب جاذبه)

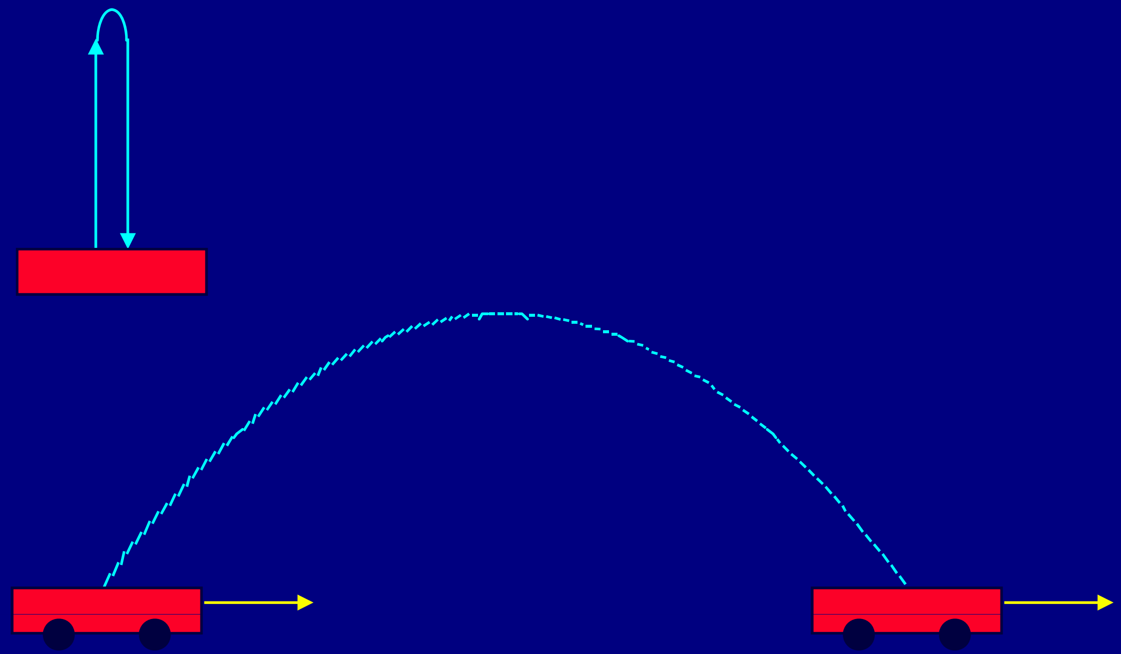
← محور x روی زمین و در جهت پرتاب است

مولفه های “x”و “y” حرکت مستقل هستند.

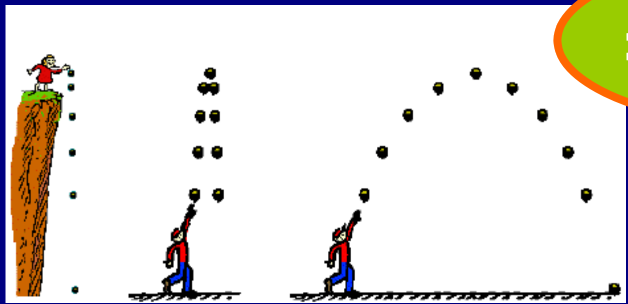
- شخصی روی قطار توپی را مستقیما با بالا پرتاب می کنید
  ← در دو دستگاه مختصات مسیر توپ را بررسی کنید

چار چوپ رو قطار

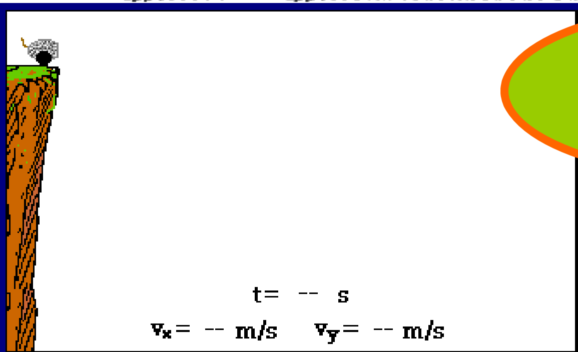
چارچوب متصل به زمین.



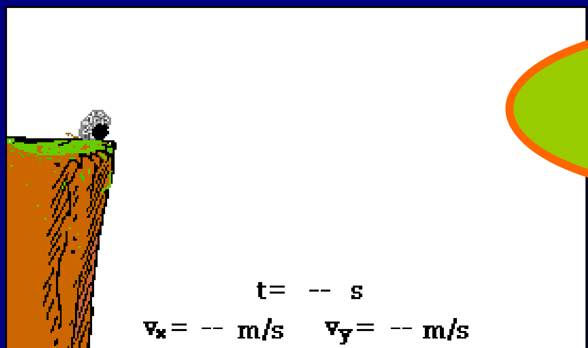
ا نواع حرکت پرتابی:



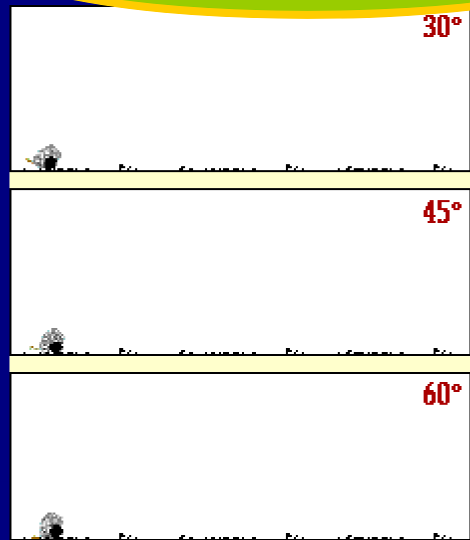
پرتاب افقی :



پرتاب تحت زاویه:



بیشینه برد تحت زاویه ۴۵ درجه:

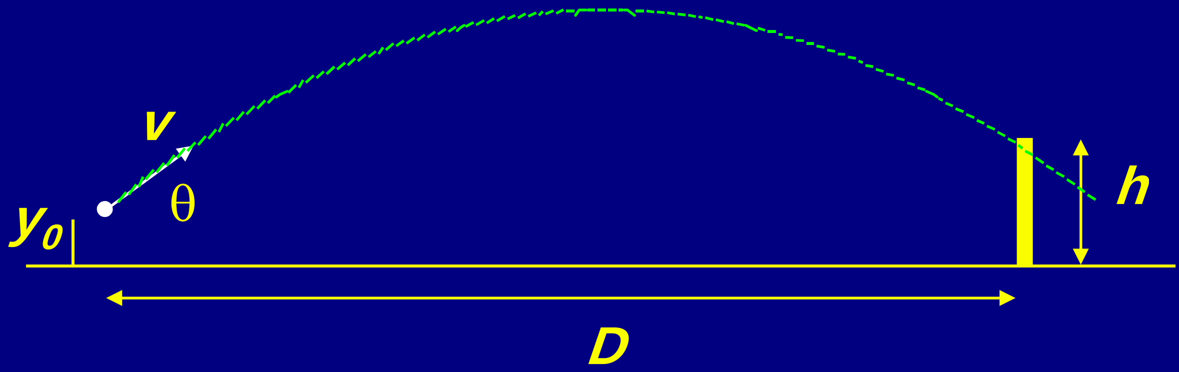


مسئله:

- محمود توپی را از ارتفاع یک متر (y_o) ازسطح زمین و باسرعت اولیه 36.5 m/s (v) تحت زاویه (θ) 30° بالای سطح افق به طرف دیواری در فاصله 113 m (D) وبه ارتفاع 3 m (h) پرتاب می کند.high

⬅ این توپ بعد از چه مدت به دیوار می رسد؟

⬅ آیا از بالای دیوار می گذرد؟



حل مسئله...

- محور y را به بالا انتخاب کنید.
- محور x روی سطح زمین و در جهت پرتاب امنخاب کنید .
- مبدا $(0,0)$ وروی سطح زمین انتخاب می شود.
- فرض کنید که لحظه پرتاب $t = 0,\ x = x_0 = 0$ باشد.

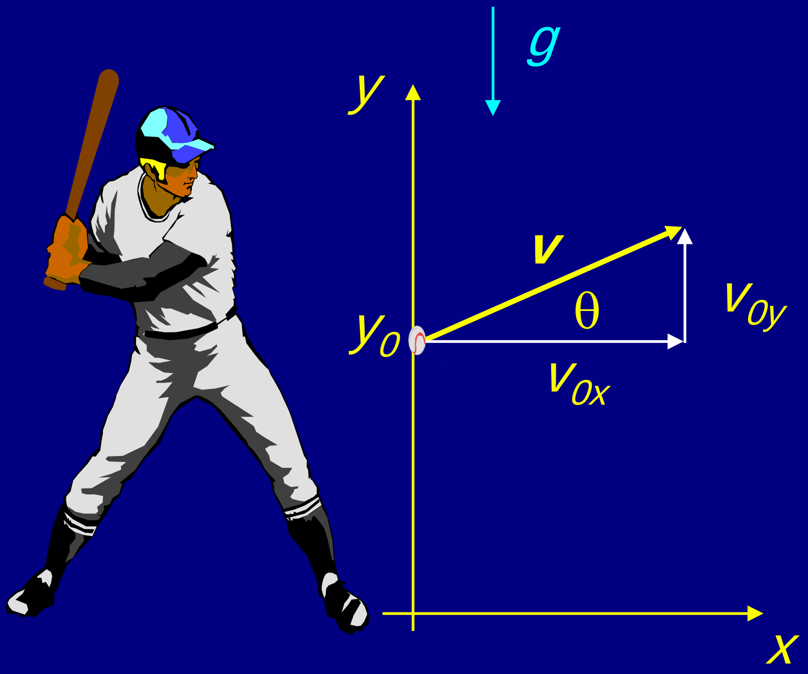
➔معادلات حرکت عبارتنداز:

$$v_x = v_{0x} \qquad v_y = v_{0y} - gt$$

$$x = v_x t \qquad y = y_0 + v_{0y}\,t - {}^{1}/_{2}\,gt^2$$

ادامه مسئله...

- مولفه های $\boldsymbol{v}_{0x}$ و $\boldsymbol{v}_{0y}$ را بدست می آوریم:



$$v_{0x} = |\mathbf{v}| \cos\theta.$$

و

$$v_{0y} = |\mathbf{v}| \sin\theta.$$

ادامه مسئله...

- زمان رسیدن توپ به دیوار $t = D / v_x$:(خیلی ساده!)
- ازاین معادله استفاده می کنیم: $y(t) = y_0 + v_{0y}\, t + a\, t^2 / 2$
- بنابراین عدد گذاری می کنیم::

- پیدامی کنیم::

← $v_x = 36.5 \cos(30)$ m/s = 31.6 m/s

← $v_y = 36.5 \sin(30)$ m/s = 18.25 m/s

← t = (113 m) / (31.6 m/s) = 3.58 s

← $y(t)$ = (1.0 m) + (18.25 m/s)(3.58 s) - (0.5)(9.8 m/s^2)(3.58 s)^2

= (1.0 + 65.3 - 62.8) m = 3.5 m

← چون ارتفاع دیوار ۳ متر است پس از بالای آن می گذرد.!!

یک سئوال:

- دوتوپ را از یک نقطه روی سطح زمین پرتاب می کنیم .زاویه پرتاپ برای هردو 30^o بالای افق است اگر توپ اول مسافت افقی D_1 را طی کند توپ ۲ چه مسافتی را, D_2, طی می کند تندی اولیه توپ ۲ دوبرابر تندی اولیه توپ ۱ است .

(a) $D_2 = 2D_1$ (b) $D_2 = 4D_1$ (c) $D_2 = 8D_1$

حل مسئله

مسافت افقی که توپ اول طی می کندبرابراست با:

$x =$ (تندی افقی) x (زمان پرواز) $= v_{0x}\, t$

برای بدست آوردن زمان پرواز (مدت زمانی که توپ در هوا حرکت می کند):

$$y = y_0 + v_{0y}\, t - \frac{1}{2} g\, t^2$$

هنگام رسیدن توپ به زمین: $y = y_0$ ⟹ $v_{0y}\, t - \frac{1}{2} g\, t^2 = 0$

⟹ $t\left(v_{0y} - \frac{1}{2} g\, t\right) = 0$ ⟹ دوجواب

$t = 2\frac{v_{0y}}{g}$ (زمان پرواز)

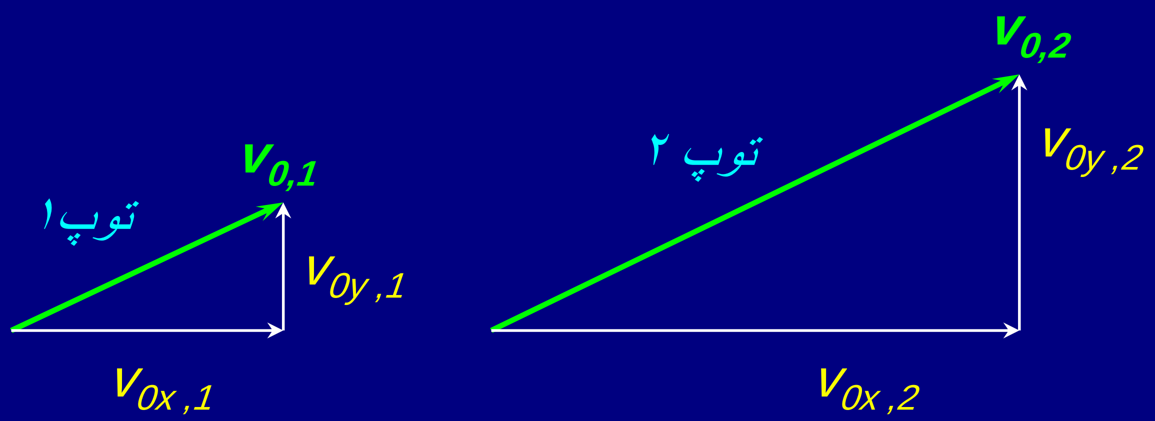
$t = 0$ (لحظه پرتاب)

حل مسئله :

- بنابراین زمان حر کت توپ در هوا متناسب است با:: v_{0y}

$$x = v_{0x}\, t \qquad t = 2\frac{v_{0y}}{g}$$

- چون زاویه پرتاپ یکسان است پس , v_{0y} و v_{0x} برای توپ ۲ دوبرابر توپ ۱ است .



- زمان پرواز توپ ۲ دوبرابر زمان پرواز توپ ۱ است ,تندی افقی ان دوبرابر و لذا ,برد افقی آن ۴ برابر است!!

میمون و نگهبان باغ وحش

میمون بامزه ای در یک باغ وحش زندگی می کند و بیشتر وقت خودرا روی درخت می گذراند.نگهبان باغ وحش به وسیله تفنگ مخصوصی برای انداختن موز به طرف او میمون را تغذیه می کند. میمون عادت دارد به محض شلیک موز خود را از درخت رها می کند. نگهبان با این مشکل مواجه است که موز را چگون پرتاب کند و کجا را هد ف قرار دهد تا میمون به تواند موز را بگیرد؟ ابتدا روی این مسئله فکر کنید که نیروی جاذبه وجود نداشته باشد ؟؟

به تصاویر زیر توجه کنید و راه حل ریاضی آنرا نیز ببیند!

تیراندازی به میمون

روی تصویر کلیک کنید!

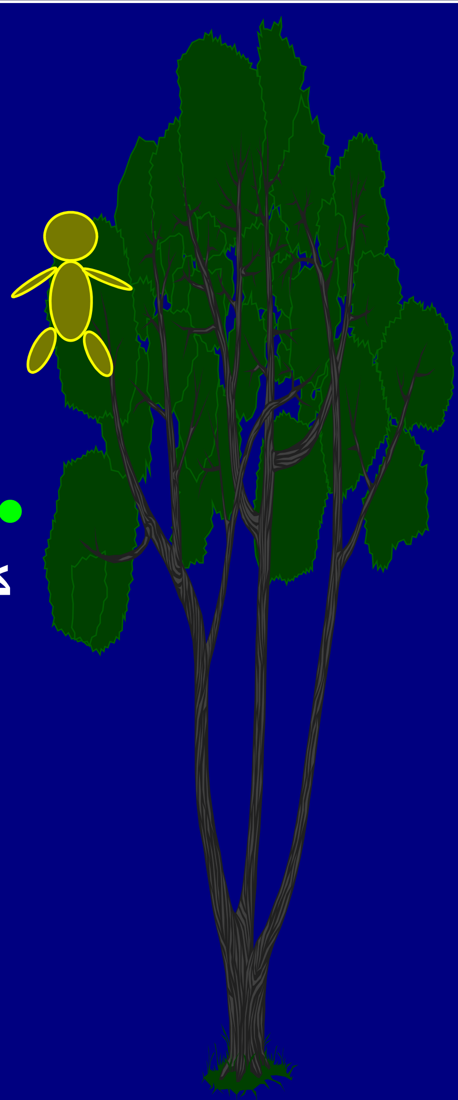

باسرعت کم موز را پرتاب
می کند


درغیاب نیروی جاذبه

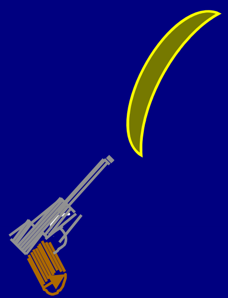

بالای سر میمون را هدف قرار
می دهد


به محض پرتاب خودرا
رها می کند

تیراندازی به میمون روی درخت !

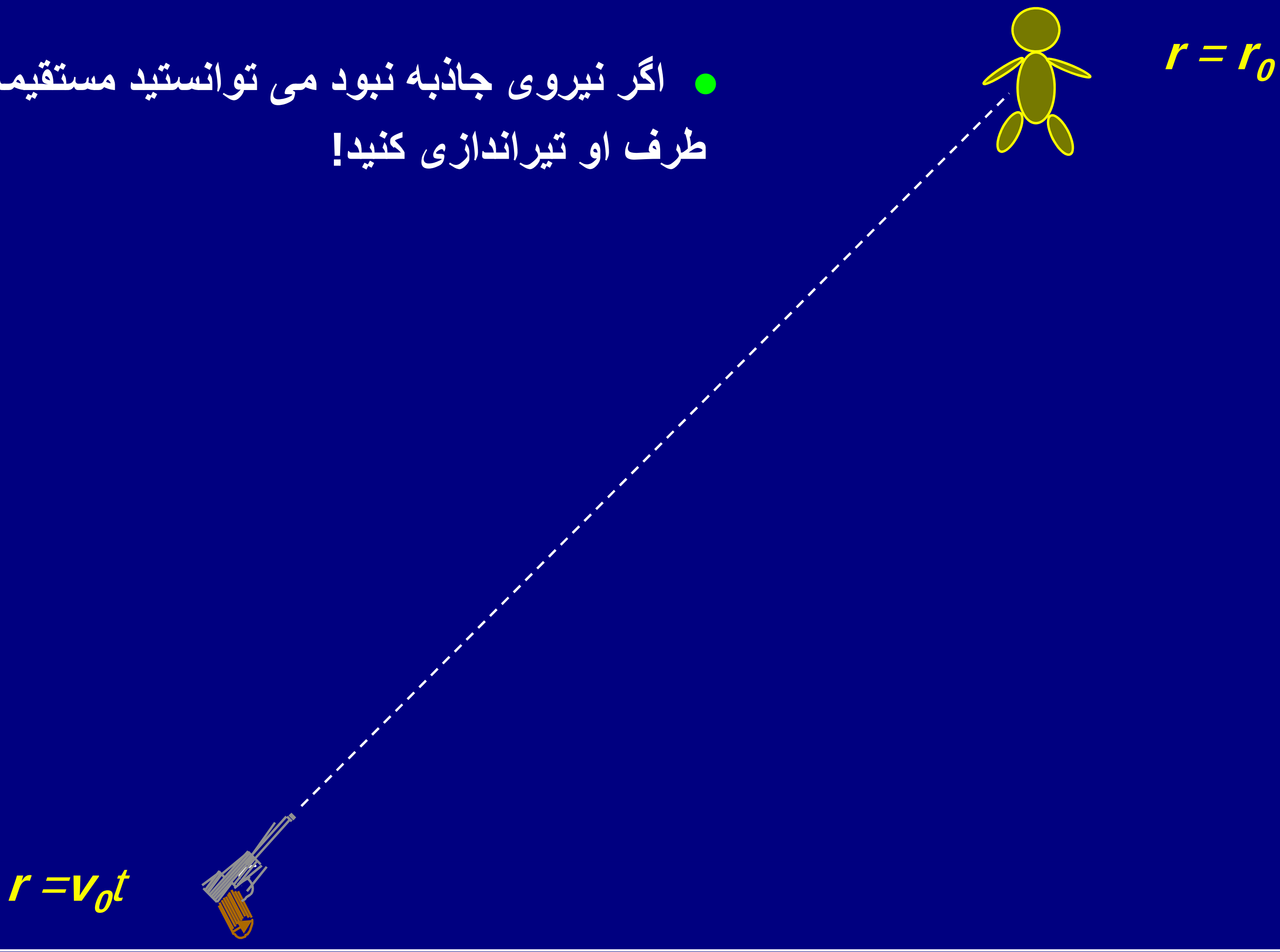


- مسئول باغ وحش تحت چه زاویه ای به طرف میمون تیراندازی کند اگر بداند که به محض شلیک میمون خودرا به پایین رها می کند



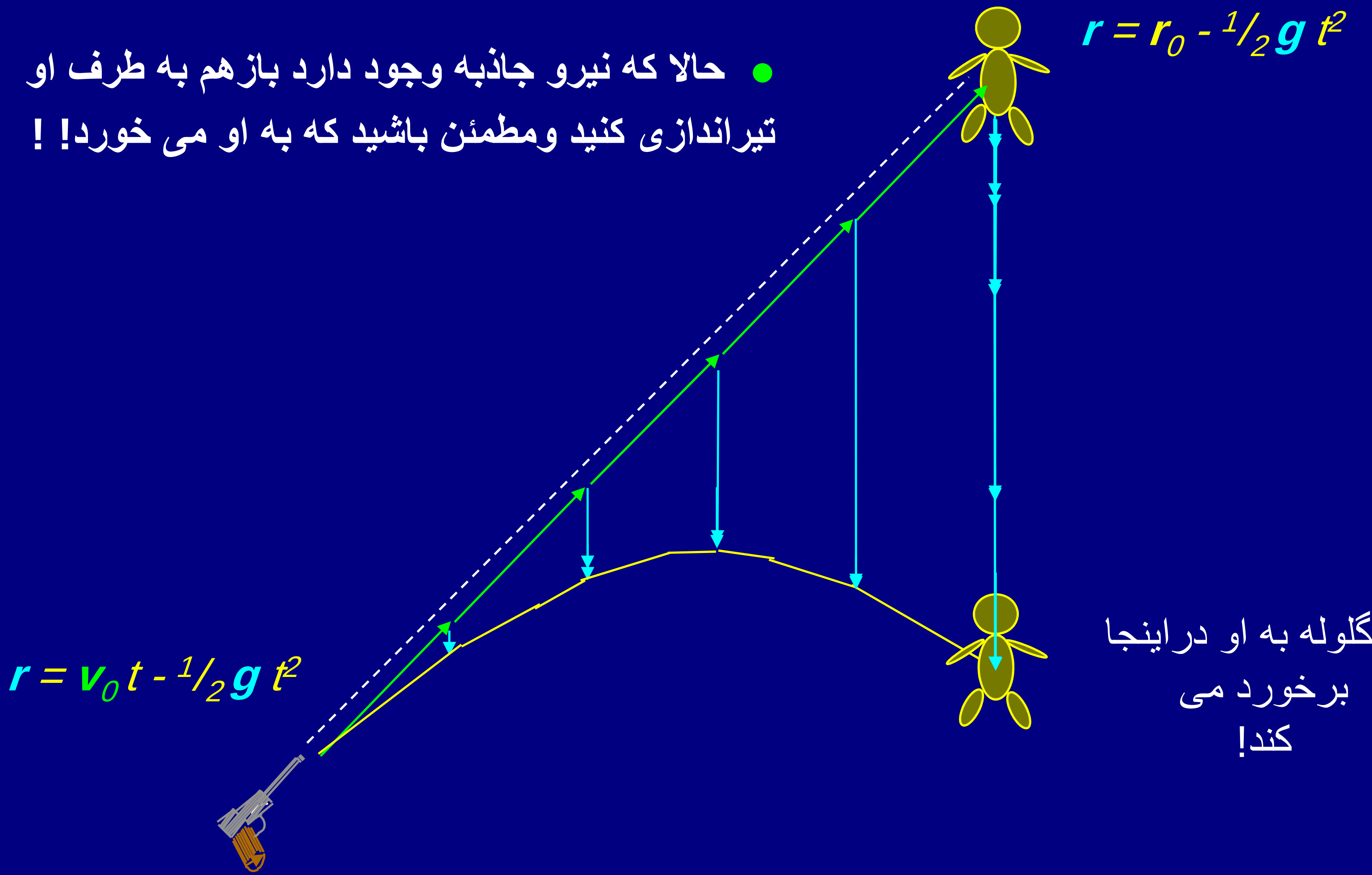
ادامه.....

- اگر نیروی جاذبه نبود می توانستید مستقیما به طرف او تیراندازی کنید!

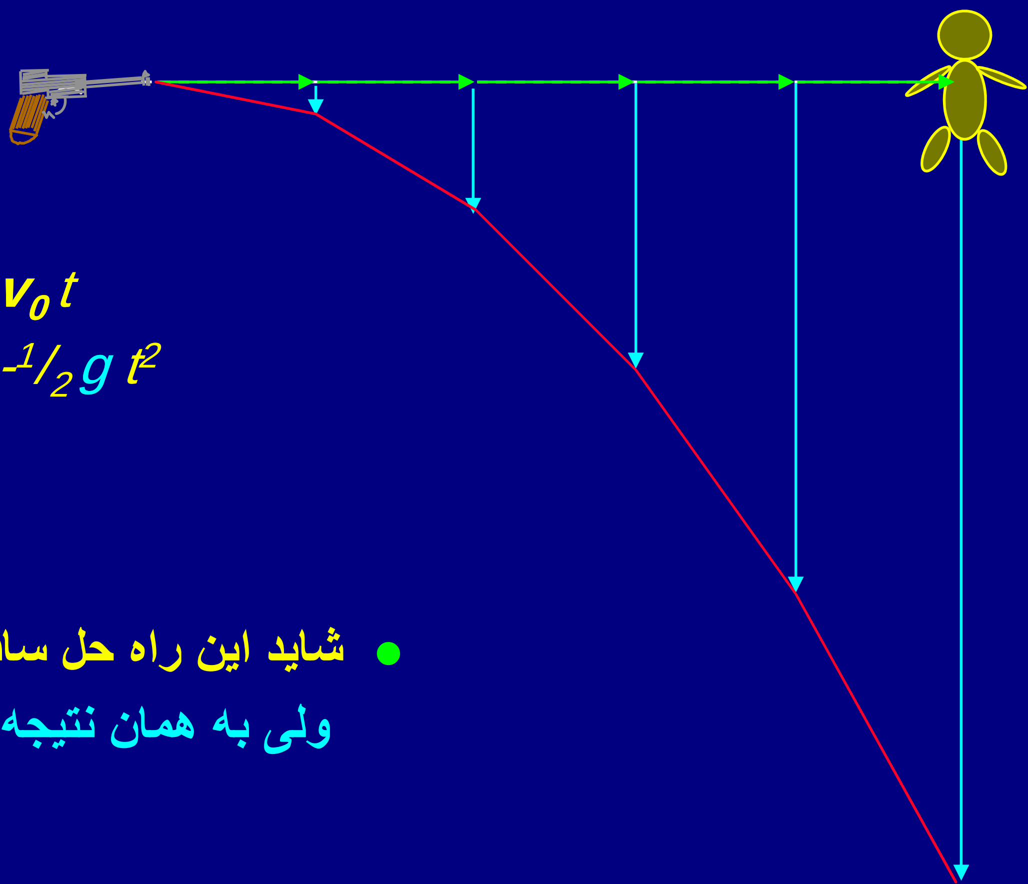


ادامه...

- حالا که نیرو جاذبه وجود دارد بازهم به طرف او تیراندازی کنید ومطمئن باشید که به او می خورد! !



ادامه ....



$x = \mathbf{v_0}\, t$

$y = -{}^{1}/_{2}\, g\, t^2$

- شاید این راه حل ساده تری باشد
ولی به همان نتیجه می رسید!!

$x = x_0$

$y = -{}^{1}/_{2}\, g\, t^2$

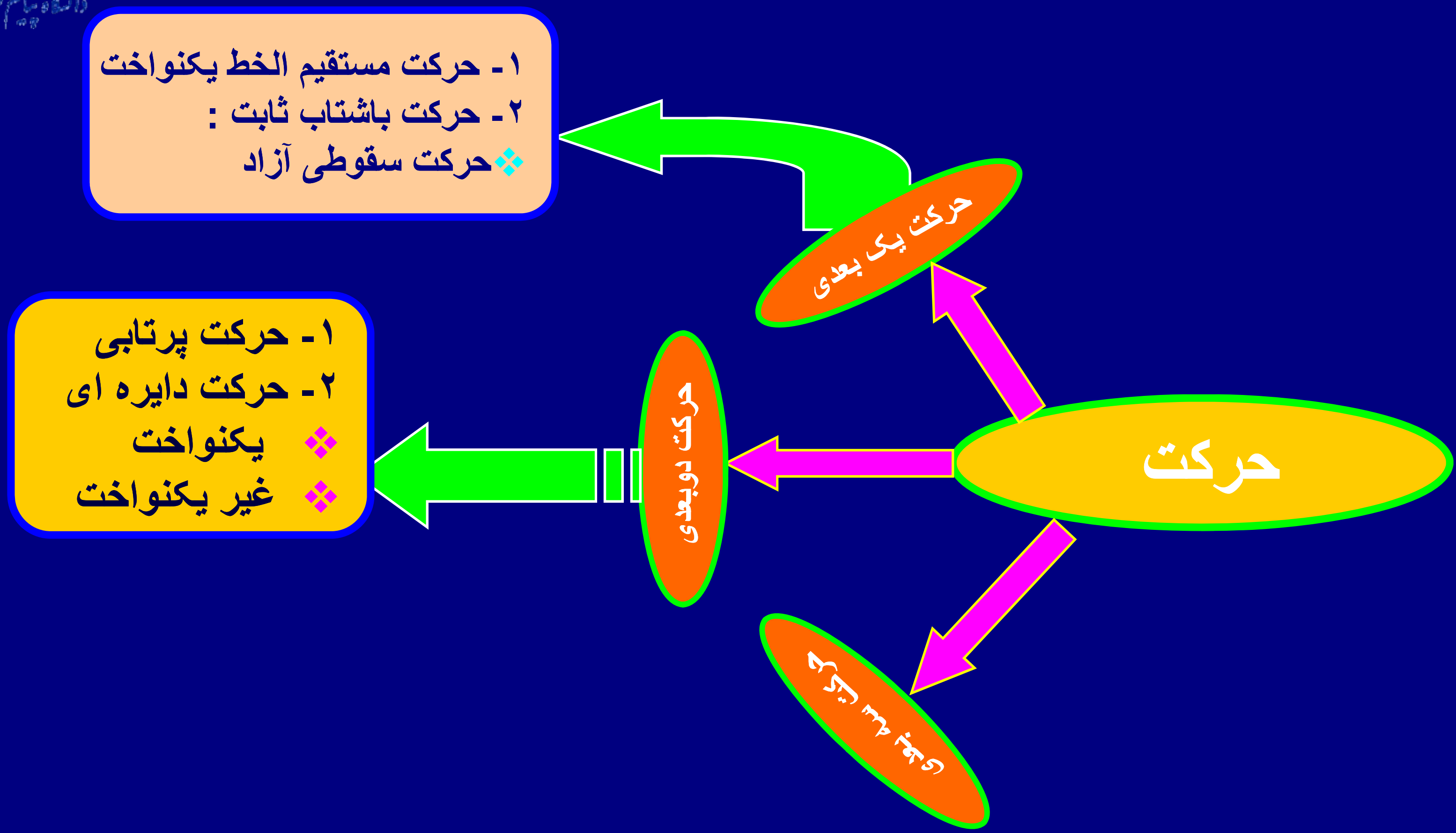
یادآوری

- یادآوری حرکت باشتاب ثابت یک بعدی .
- حرکت سقوطی آزاد
  - ← مثال
- مرور بردارها

- سینماتیک سه بعدی
  - ← تیراندازی به طرف میمون
  - ← مسئله بیس بال
  - ← استقلال مولفه های x و y
- روی مسئله های کتاب هم فکر کنید

فصل سوم

حرکت یک بعدی



حرکت
حرکت یک بعدی
۱- حرکت مستقیم الخط یکنواخت
۲- حرکت باشتاب ثابت :
حرکت سقوطی آزاد
حرکت دوبعدی
۱- حرکت پرتابی
۲- حرکت دایره ای
یکنواخت
غیر یکنواخت
حرکت سه بعدی

- جابه جایی
- تندی
- سرعت
  - سرعت متوسط
  - سرعت لحظه ای
- شتاب
  - شتاب متوسط
  - شتاب لحظه ای

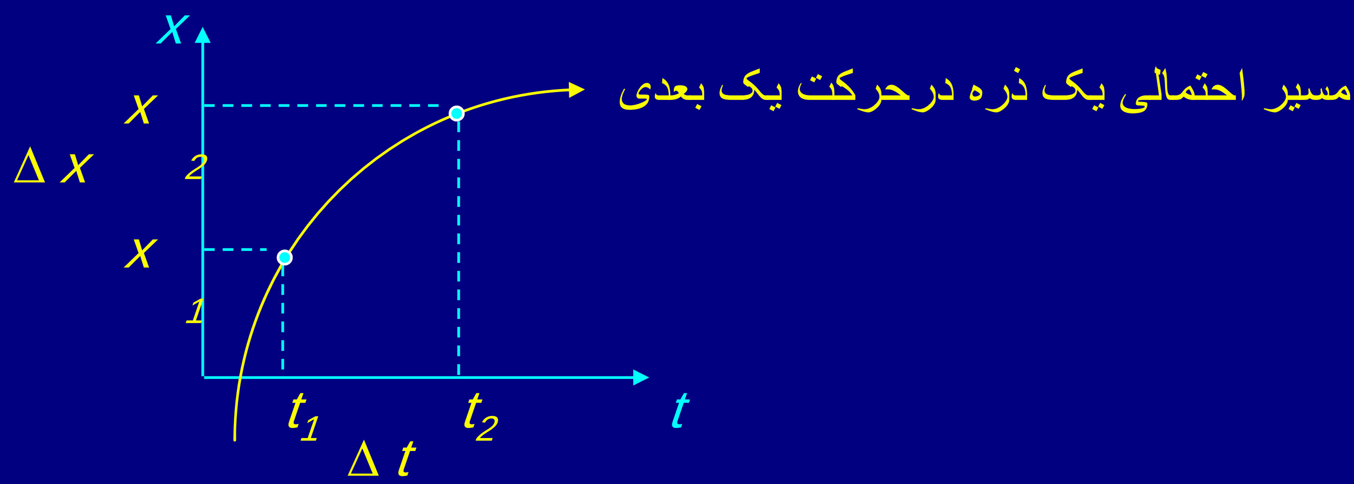
پارامترهای حرکت

حرکت یک بعدی

- در حرکت یک بعدی جابه جایی را چنین می نویسیم:. $x(t_1)$
- در حرکت یک بعدی جهت + یا - است .

➔ جابه جایی در زمان $\Delta t = t_2 - t_1$ برابراست با:

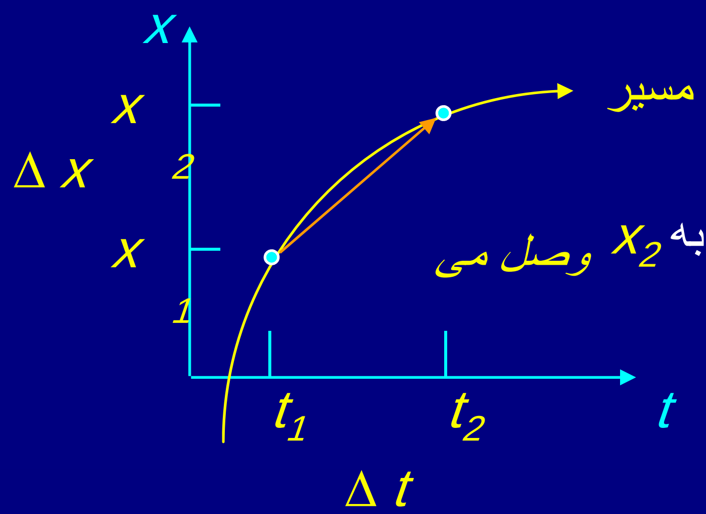
➔ $\Delta x = x(t_2) - x(t_1) = x_2 - x_1$



سینماتیک یک بعدی

- سرعت v " آهنگ تغییر موقعیت ذره است "
- سرعت متوسط v_{av} در مدت زمان $\Delta t = t_2 - t_1$ برابراست با :

$$v_{av} \equiv \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$



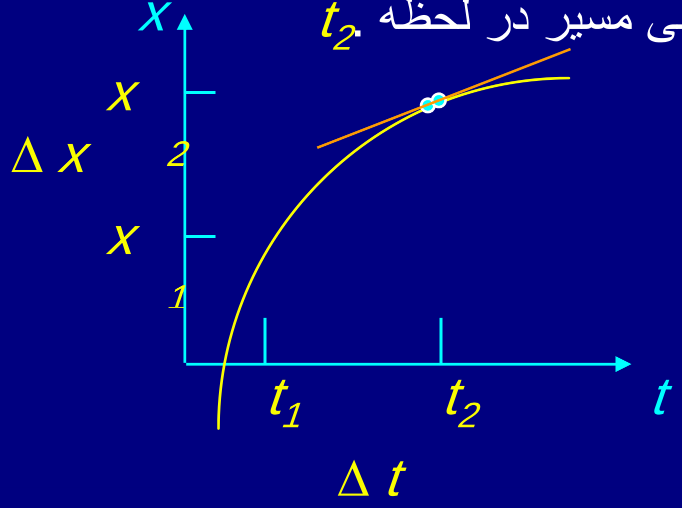
$V_{av} =$ شیب خطی که x_1 را به x_2 وصل می کند .

سینماتیک یک بعدی ...

- حد سرعت متوسط را بین دو لحظه t_1 و t_2 **حساب کنید:**
- سرعت **لحظه ای** v چنین تعریف می شود:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

لذا $= v(t_2)$ شیب خط مماس بر منحنی مسیر در لحظه t_2.



سینماتیک یک بعدی....

- شتاب a " آهنگ تغییر سرعت است "
- شتاب متوسط a_{av} درمدت زمان t_1 - $\Delta t = t_2$ برابراست با :

$$a_{av} \equiv \frac{v(t_2)-v(t_1)}{t_2-t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

- و شتاب لحظه ای a چنین تعریف می شود:

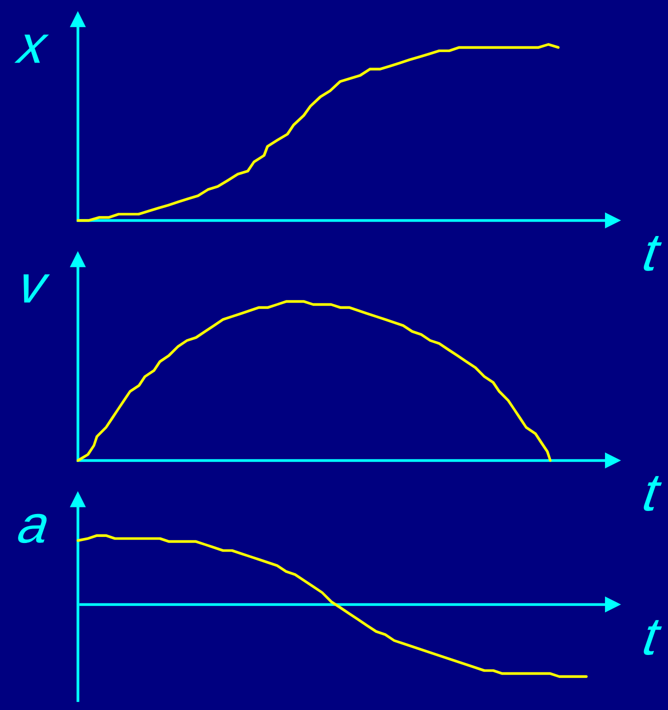
$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

با جانشین کردن این در فورمول فوق $v(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$

یک نکته!

- اگر موقعیت x برحسب زمان مشخص باشد دراین صورت می توانیم سرعت v وهم شتاب a جسم را برحسب تابعی از زمان پیدا کنیم!

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x(t) \\ v &= \frac{dx}{dt} \\ a &= \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \end{aligned}}$$

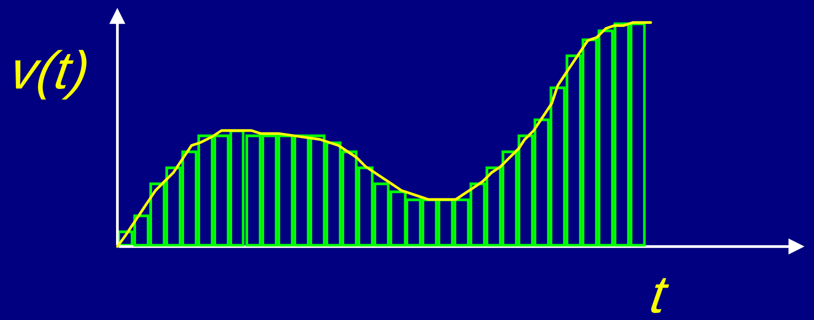


بازهم در باره سینماتیک یک بعدی ذره ....

- نشان دادیم: $v = dx / dt$
- به زبان "حسابان" می توان نوشت: $dx = v\,dt$, وبا انتگرال گیری از این رابطه داریم:

$$x(t_2) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$$

- ازنظر نموداری این معادل است با جمع کردن مساحت تعداد زیادی مستطیل زیر نمودار(شکل زیر):



□ + □ + ... + □

= جابه جایی

حرکت یک بعدی باشتاب ثابت

- از "حسابان" دبیرستان به یادداریم:

$$\int t^n dt = \frac{1}{n+1} t^{n+1} + const$$

- همچنین می دانیم که:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

- چون a ثابت است با استفاده از قاعده فوق می توانیم از این رابطه انتگرال بگیریم:

$$\boxed{v = \int a\, dt = a\int dt = at + v_0}$$

- به طریق مشابه چون $v = \frac{dx}{dt}$ است با انتگرال گیری مجدد داریم:

$$\boxed{x = \int v\, dt = \int (at + v_0)dt = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0}$$

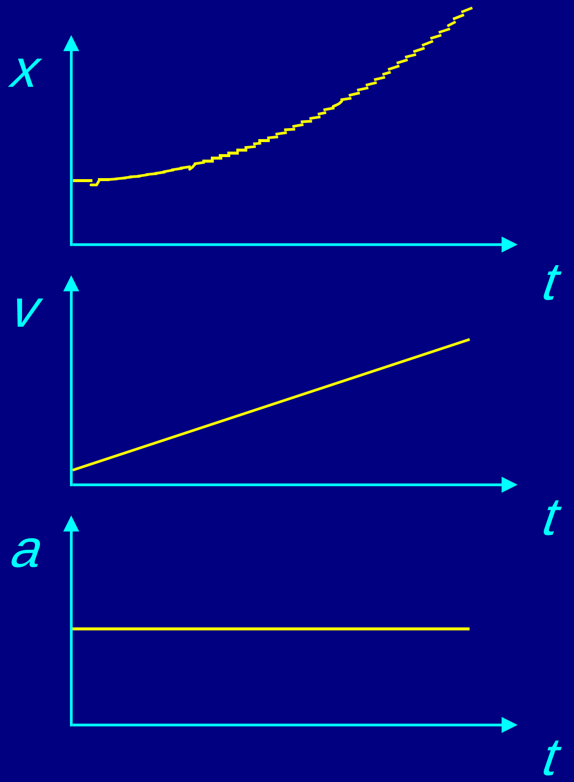
یک نکته!

- بنابراین برای شتاب ثابت بدست آوردیم:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

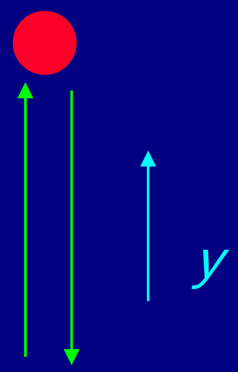
$$v = v_0 + at$$

$$a = const$$



درس ۱ – تمرین ۲

- جسمی را در امتداد قائم به بالا پرتاب می کنیم کدام رابطه در باره شتاب a
و سرعت v آن در بالاترین نقطه مسیر پرتابه درست است؟



الف $v = 0$ و $a = 0$

ب- $v \neq 0$ و $a = 0$

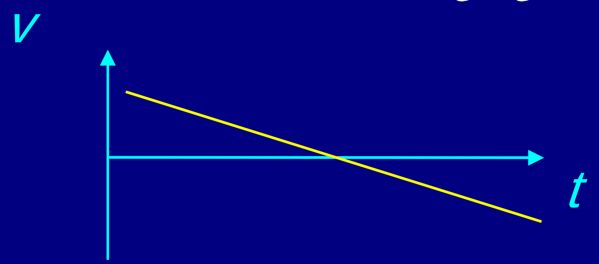
ج - $v = 0$ ولی $a \neq 0$

درس ۱ – تمرین ۲
پاسخ:

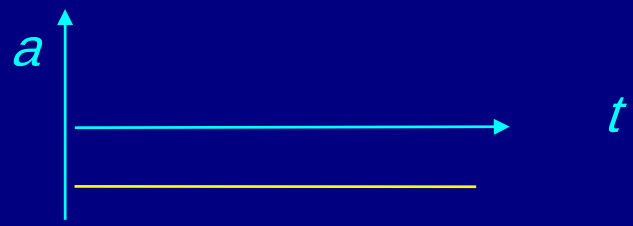
- گلوله هنگام بالارفتن سرعت آن مثبت و هنگام پایین آمدن سرعت آن منفی است و در بالاترین نقطه سرعت آن به طور لحظه ای صفر می شود.
- چون سرعت گلوله به طور پیوسته تغییر می کند پس باید دارای شتاب باشد.

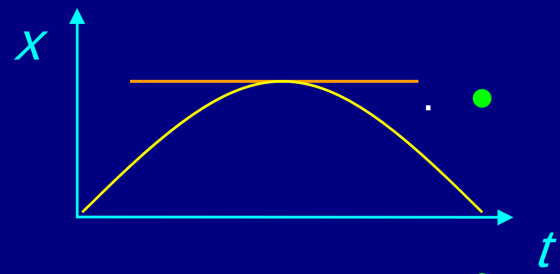
← درواقع شتاب جسم از جاذبه زمین یعنی گرانش ناشی می شود ($g = 9.81$ m/s^2).

← (در درس های بعد بیشتر درباره جاذبه زمین صحبت می کنیم)



- پاسخ این است : $v = 0$ ولی $a \neq 0$





- .
-

چند فورمول مهم:

$$v = v_0 + at \qquad x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

- باحل معادله برحسب t:

$$t = \frac{v - v_0}{a}$$

- و باقراردادن به جای t :

$$x = x_0 + v_0\left(\frac{v - v_0}{a}\right) + \frac{1}{2}a\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2$$

$$\boxed{v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)}$$

محاسبه براساس "حسابان"

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$ (قاعده زنجیری)

$$a = v \cdot \frac{dv}{dx} \quad \Rightarrow \quad a \cdot dx = v \cdot dv$$

$$\int_{x_0}^{x} a\, dx = a \int_{x_0}^{x} dx = \int_{v_0}^{v} v \cdot dv$$ (a = ثابت)

$$\Rightarrow \quad a(x - x_0) = \frac{1}{2}(v^2 - v_0^2)$$

$$\boxed{v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)}$$

خلاصه:

- برای شتاب ثابت :

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$v = v_0 + at$$

$$a = const$$

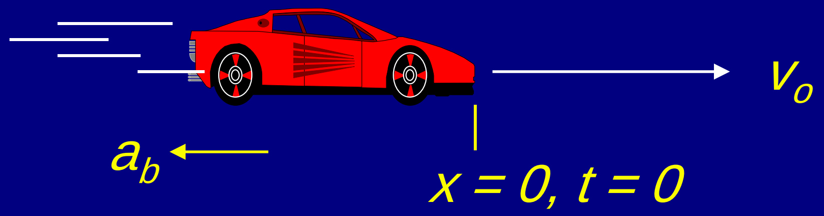
- باتوجه به آن می دانیم:

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

$$v_{av} = \frac{1}{2}(v_0 + v)$$

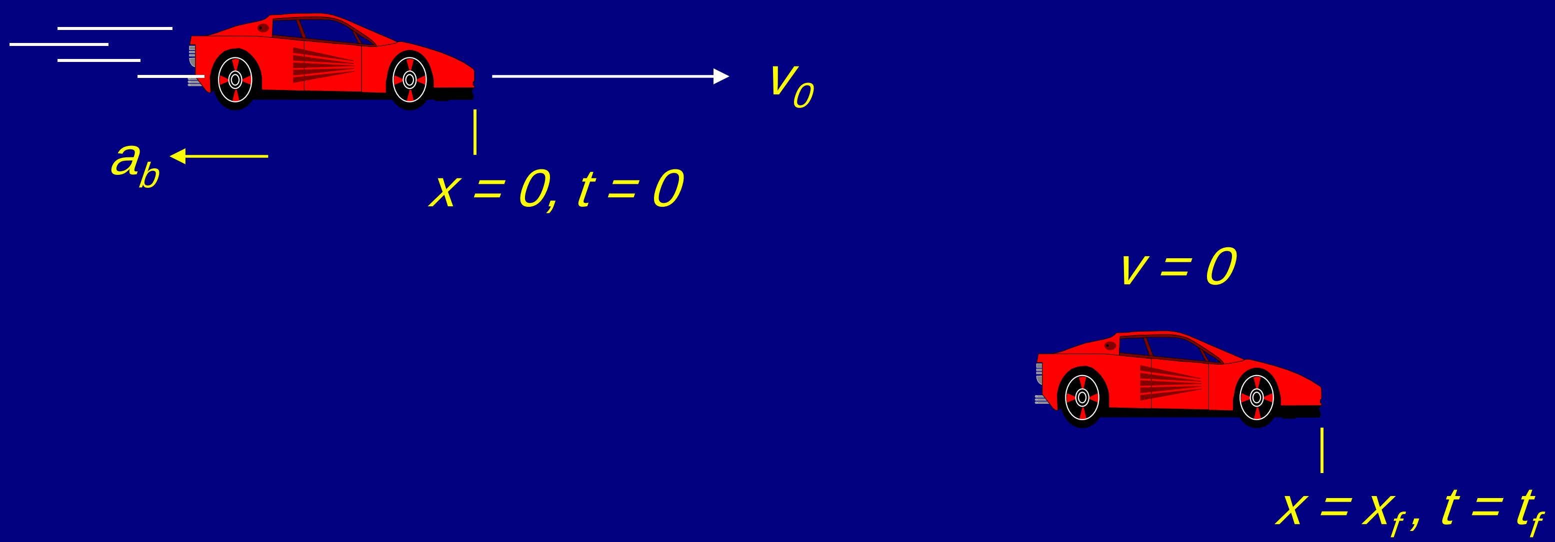
یک مسئله:

- اتومبیلی با سرعت ثابت v_0 حرکت می کند. راننده در لحظه $t = 0$ ترمز می گیرد و باشتاب ثابت a_b حرکت آن کند می شود:



ادامه مسئله ۱ ....

- درکدام لحظه t_f اتومبیل متوقف شده و چه مسافت x_f را قبل از توقف طی می کند؟



ادامه مسئله یک ...

- قبلا بدست آوردیم : $v = v_0 + at$
- می دانیم که: $a = -a_b$
- همچنین می دانیم که در لحظه $v = 0$, $t = t_f$:

بنابراین : $0 = v_0 - a_b t_f$ یا:

$$\boxed{t_f = v_0 / a_b}$$

ادامه مسئله ۱ ....

- برای پیداکردن فاصله توقف :

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

- دراین مورد $x = x_f$ و $v = v_f = 0$, $x_0 = 0$

$$-v_0{}^2 = 2(-a_b)x_f$$

$$\boxed{x_f = \frac{v_0{}^2}{2a_b}}$$

ادامه مسئله ۱...

- پیدا کردیم :

$$t_f = \frac{v_0}{a_b}, \;\; x_f = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{a_b}$$

- فرض کنید که : $v_o = 65\ mi/hr \;\; = 29\ m/s$
- همچنین فرض کنیدکه: $a_b = g = 9.81\ m/s^2$

➔ لذا: $t_f = 3\ s$ و $x_f = 43\ m$

راهنمای حل مسئله در فیزیک:

- **صورت مسئله را بدقت بخوانید!**

قبل از حل بدقت صورت مسئله را بخوانیدو از فهمیدن اطلاعات بکار رفته مطمئن شوید. از شما چه چیزی خواسته شده است؟ ایا مفهوم واژه های بکار رفته را می فهمید؟

- **یکاها را رعایت کنید!**

یکاهای پاسخ مسئله را مد نظر قرار دهید. در ضمن قرار دادن اعداد هنگام محاسبه مواظب یکاهای بکار رفته باشید

- **محدوده مسئله را بفهمید!**

بیشتر معادلات حالتهای خاصی از قوانین عمومی فیزیک هستند. فهم چگونگی بدست آمدن آنها به شناخت حدود مسئله به شما کمک می کند(مثلا تشخیص حالت حرکت با شتاب ثابت)

مرور درس امروز ما...

- هدف درس :
- حرکت یک بعدی
- پارامترهای حرکت: جابه جایی ، تندی ، سرعت متوسط ، سرعت لحظه ای ، شتا ب متوسط و لحظه ای
- انواع حرکت
  - حرکت مستقیم الخط یکنواخت
  - حرکت با شتاب ثابت
  - حرکت سقوطی آ زا د
- سینماتیک یک بعدی

- مسئله اتومبیل
- حل مسائل اخر کتاب در منزل

فصل چهارم

لختی

حرکت دوبعدی

درس امروز ما:
حرکت نسبی و چهارچوب های مرجع

- چها رچوب مرجع وحرکت نسبی
- حرکت دایره ای یکنواخت

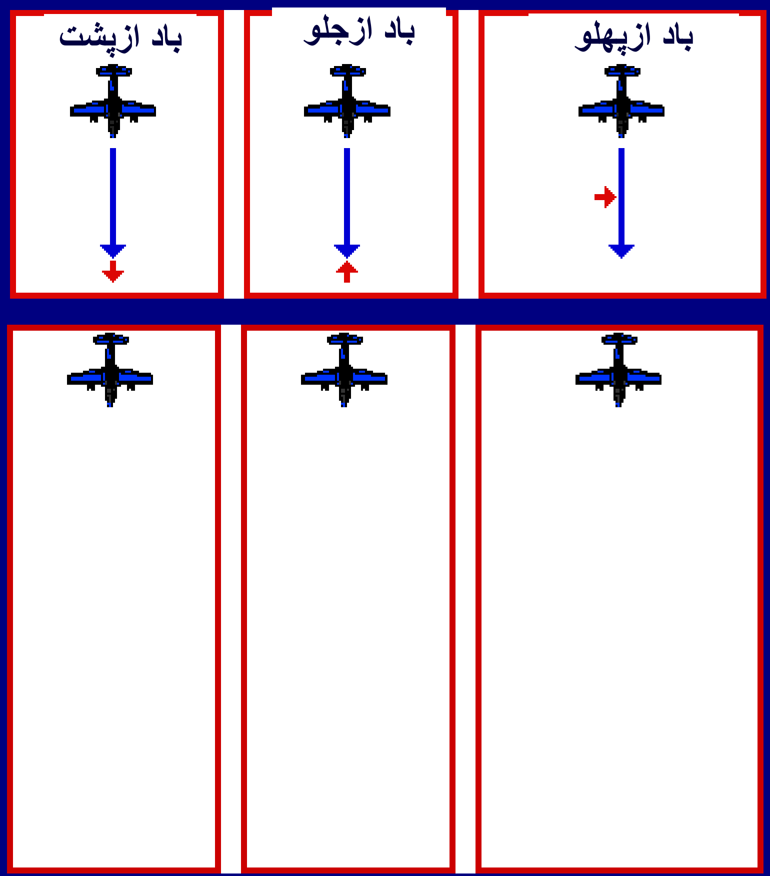
چارچوب های مرجع لخت

- چارچوب مرجع جایی است که شما درآن اندازه گیری را انجام می دهید.
  - جایی است که درآن محورهای مختصات (x,y,z) را برپامی کنید!

- چارچوب مرجع لخت (IRF) چارچوبی است که شتاب ندارد..
  - دراین جا فقط چارچوب های مرجع لخت مورد نظر ما است.
- چارچوب های IRF نسبت به همدیگر دارای سرعت ثابت هستند.
  - هنگام بحث روی نیروها دراین باره بیشتر صحبت خواهیم کرد.
  - فقط بخاطر داشته باشید که عمل اندازه گیری را در بهترین و ارجحترین دستگاه مختصات انجام می دهیم.

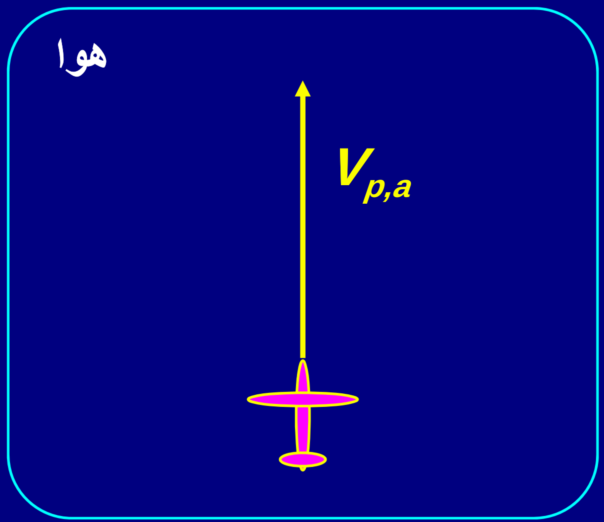
حرکت نسبی

- مسئله ای را بادو چارچوب مرجع در نظربگیرید:
  - هواپیمایی در هوای طوفانی پرواز می کند.
  - خلبان می خواهد از شهر اوربانا به شیگاگو پرواز کند. شیکاگو در ۱۲۰ کیلومتری اوربانا قرار دارد.او به هنگام ظهر از فرودگاه بلند میشود.این هواپیما دارا ی یک قطب نما و یک نشان دهنده سرعت هوا است.
  - به کمک قطب نما دماغه هواپیما در راستای شمال قرار داده می شود..
  - سرعت سنج نشان می دهد که هواپیما با سرعت120 مایل در ساعت نسبت به هوا حرکت می کند.


باد ازپهلو
باد ازجلو
باد ازپشت

ادامه حرکت نسبی ...

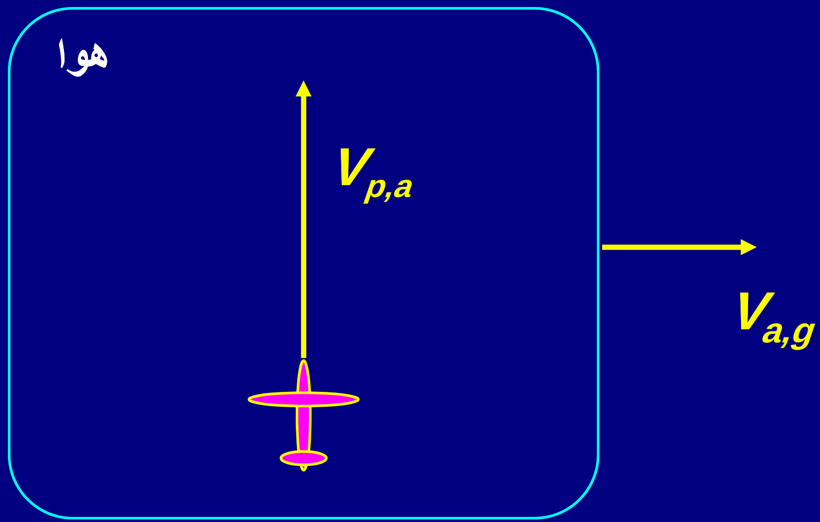
- هواپیما نسبت به چارچوب مرجع متصل به هوا به سمت شمال حرکت می کند.:
  ← $V_{p,\,a}$ سرعت هواپیما نسبت به هوا است.



ادامه حرکت نسبی ...

- فرض کنید که هوا نسبت به چاچوب مرجع متصل به زمین به سمت شرق حرکت می کند.

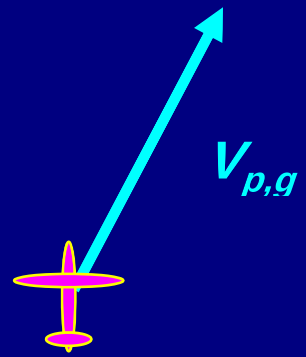
  ← $V_{a,g}$ سرعت هوا نسبت به زمین است(یعنی سرعت باد).



ادامه حرکت نسبی ...

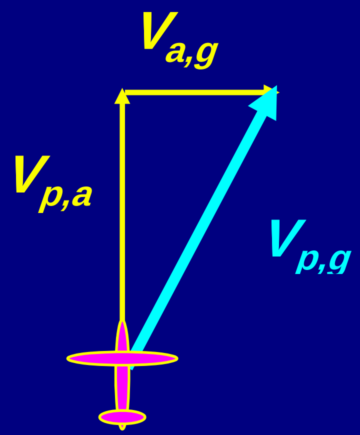
- سرعت هواپیما نسبت به چارچوب متصل به زمین چقدراست؟

  ← $V_{p,g}$ سرعت هواپیما نسبت به چارچوب متصل به زمین است.



ادامه حرکت نسبی ...

$V_{p,g} = V_{p,a} + V_{a,g}$ این یک رابطه برداری است که سرعت هواپیما را درچارچوب های مختلف به همدیگر ربط می دهد..



یک سئوال در مورد حرکت نسبی:

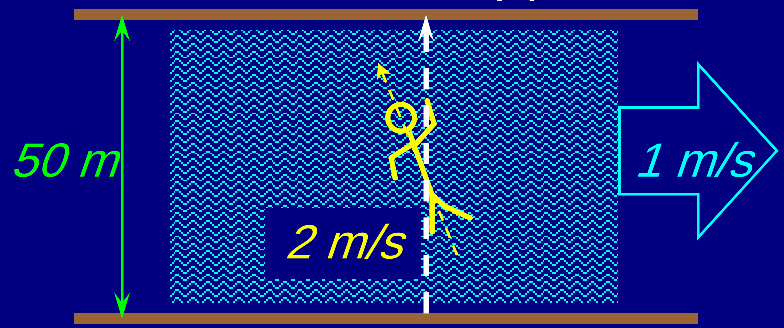
- فرض کنید که در عرض رودخانه ای به عرض ***50m*** که آب رودخانه با سرعت ***1 m/s*** نسبت به ساحل حرکت می کند شنا می کنید .سرعت شنای شما نسبت آب ***2 m/s*** است .
اگر مسیر شما مستقیم و عمود برساحل رودخانه باشد.

➔چند ثانیه طول می کشد تا عرض رودخانه را طی کنید؟

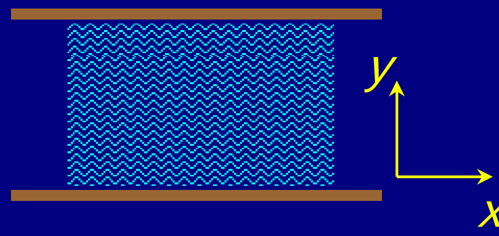
(a) $50/\sqrt{3} = 29$

(b) $50/1 = 50$

(c) $50/\sqrt{2} = 35$

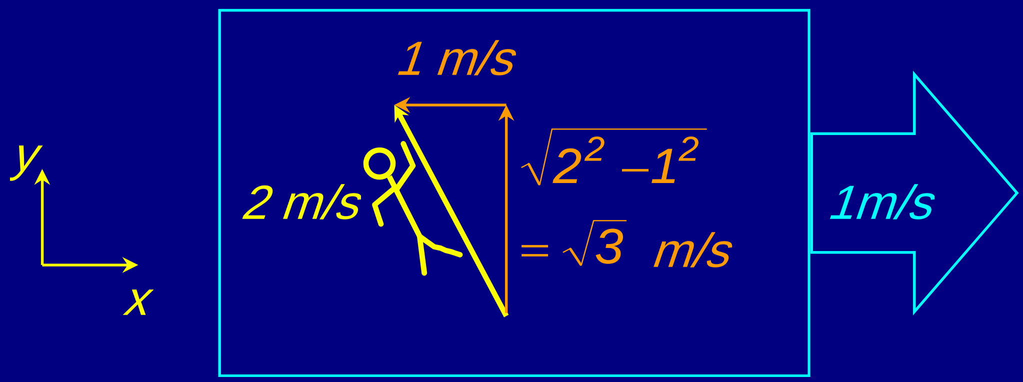


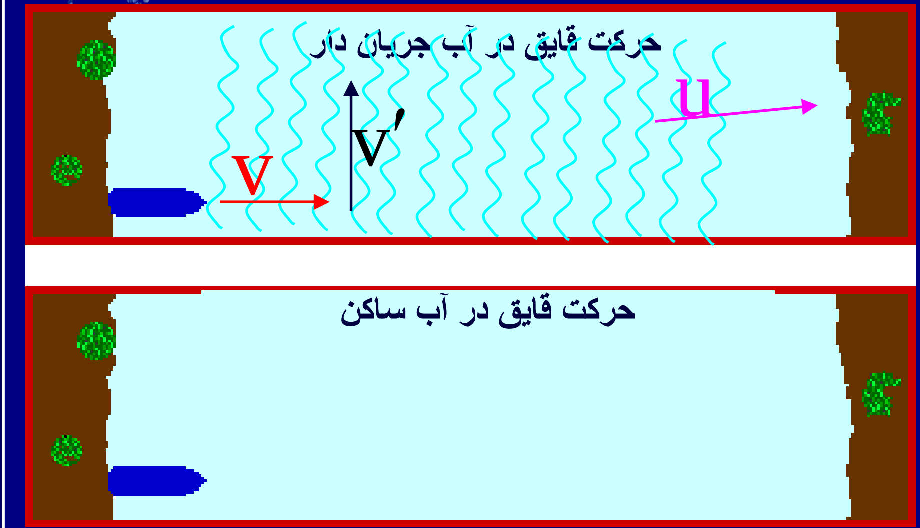
حل مسئله :

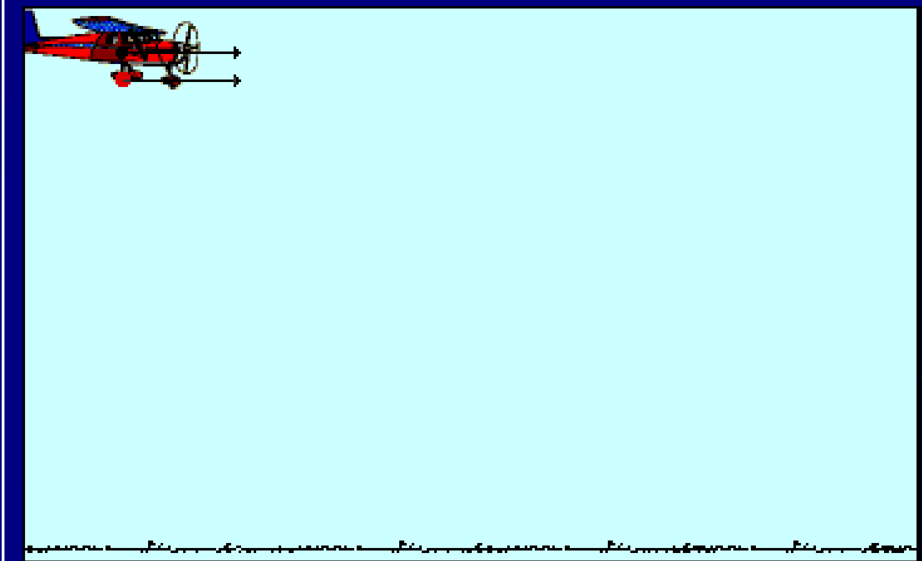


فرض کنید محور **x** درطول ساحل ومحور **y** عمود برآن باشد.

- زمان لازم برای طی مسیر مفروض برابر با ***(vy) /(فاصله عرضی رودخانه)***
- چون درجهت عمود بر ساحل شنامی کنید باید مولفه **x** سرعت شما نسبت به آب باید دقیقا
- سرعت آب را درجهت **x** ***خنثی کند.***



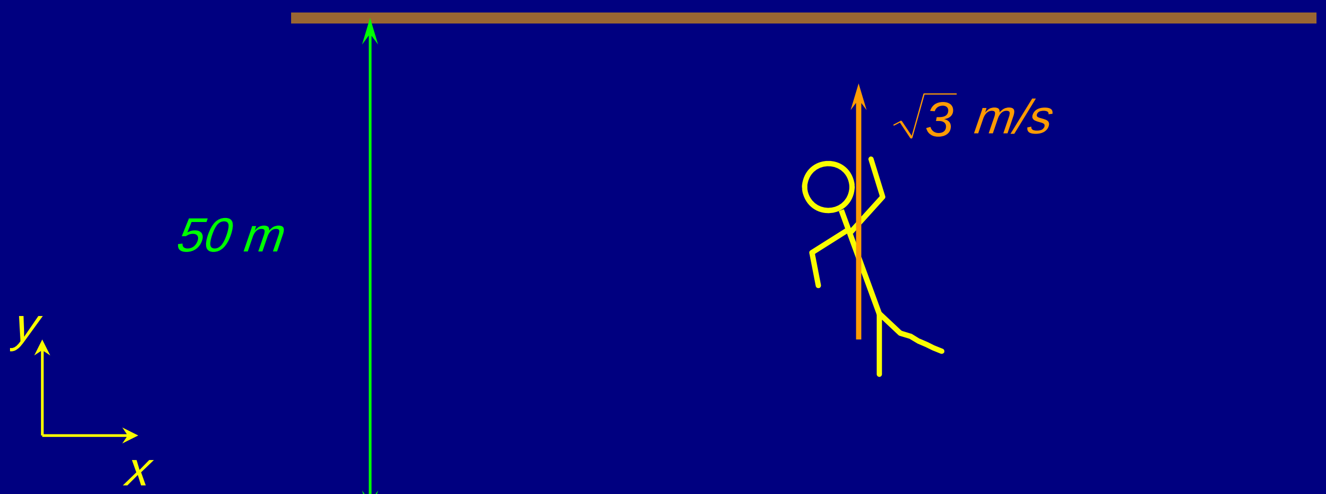




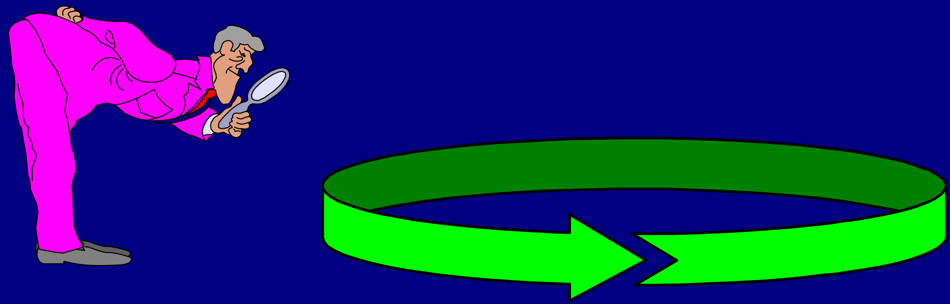
مسیر جسمی که از هلی کوپتر رها می شود
از دید خلبان یک خط مستقیم و از دید ناظر
زمینی یک سهمی است .توجه
کنید که خلبان همواره جسم رها شده را
زیر پای خود می بیند.

ادامه حل مسئله:

- بنابراین مولفه y سرعت نسبت به آب برابراست با: $\sqrt{3}\ m/s$
- لذا زمان لازم برای عبور از عرض رودخانه برابراست با: $\dfrac{50m}{\sqrt{3}\,m/s} = 29s$

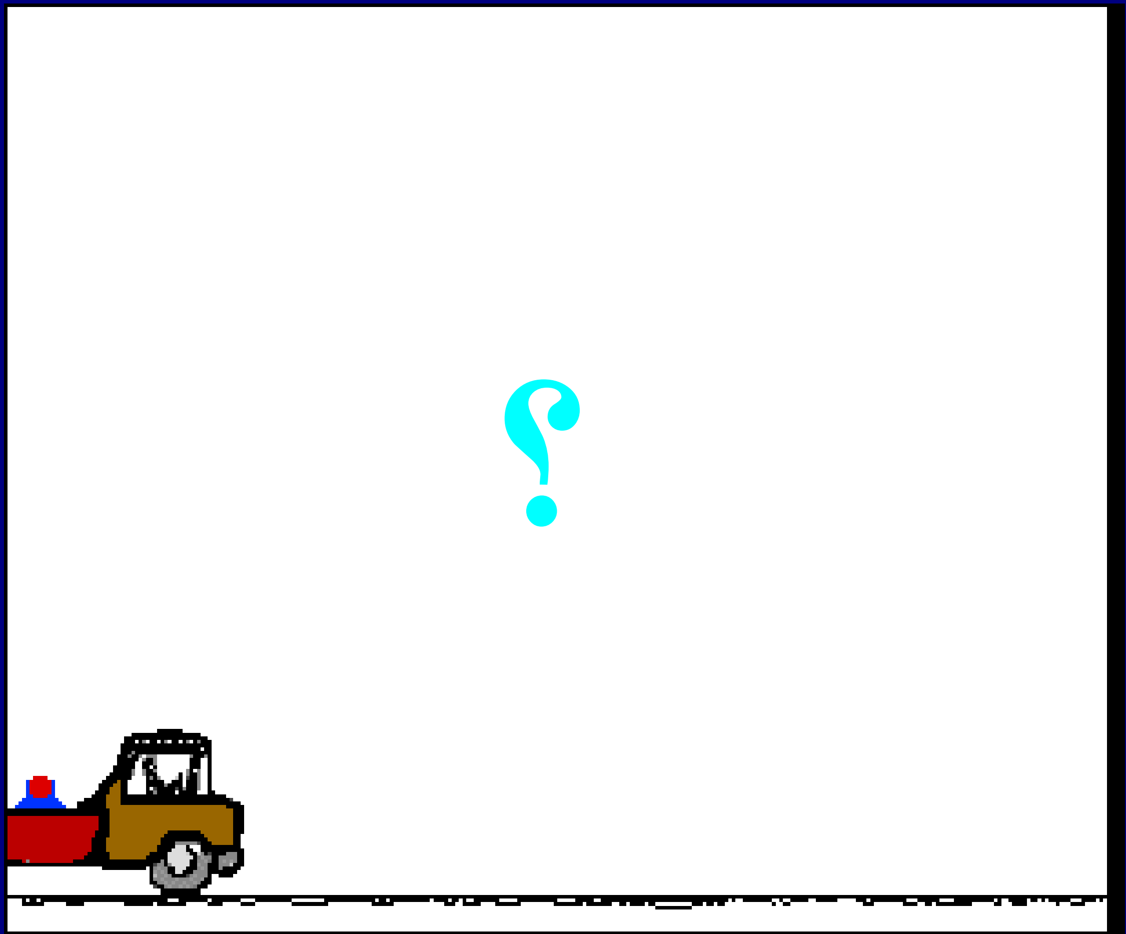


حرکت دایره ای یکنواخت



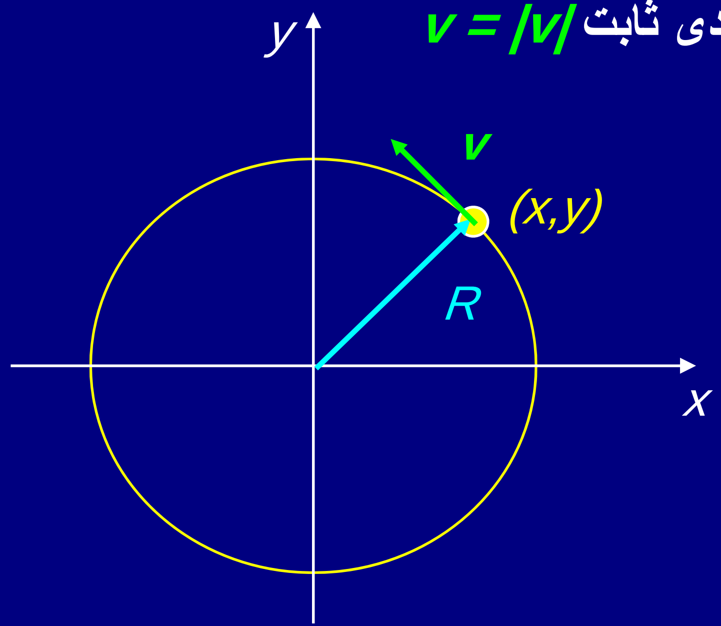
- منظور ازحرکت دایره ای یکنواخت چیست ؟
- چگونه آنرا تعریف کنیم؟
- چه چیزی درباره آن یاد بگیریم؟

توجه کنید: گلوله ای از داخل کامیونی که روی خط مستقیم به طور یکنواخت حرکت می کند پرتاب می شود. به نقطه فرود گلوله توجه کنید. آیا می دانید که گلوله به طور چرا در همچون نقطه ای فرود می آید؟ درچهارچوب مرجع داخل کامیون فکر کنید.



حرکت دایره ای یکنواخت چیست ؟

- حرکتی است روی محیط یک دایره با:
  - شعاع ثابت R
  - وتندی ثابت $v = |\mathbf{v}|$



حرکت دایره ای یکنواخت را چگونه بیان کنیم؟

- به طور کلی هیچ دستگاه مختصاتی بردیگری ارجحیتی ندارد:

  ← چارچوب قائم :

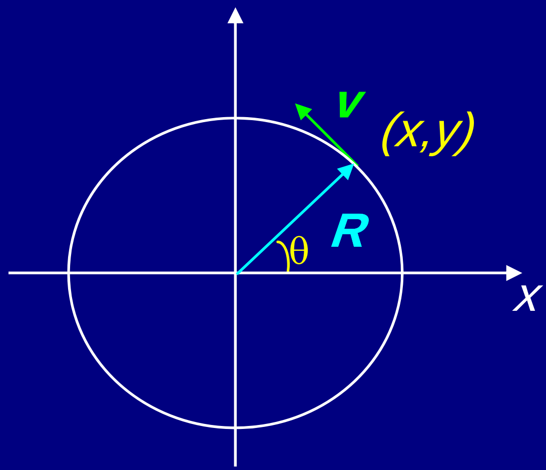
  » (x,y) {موقعیت}

  » (v_x, v_y) {سرعت}

  ← قطبی:

  » (R,θ) {موقعیت}

  » (v_R, ω) {سرعت}



- درحرکت دایره ای:

  ← R ثابت است) لذا.$v_R = 0$)

  ← ω) سرعت زاویه ای (ثابت است .

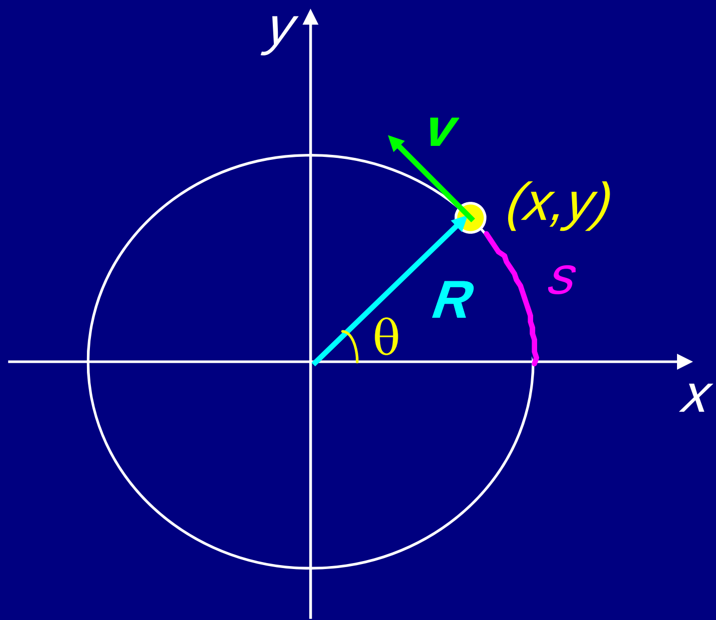
  ← دستگاه مختصات قطبی دستگاه مناسبی برای بیان این نوع حرکت است !

مختصات قطبی:

- طول قوس s (قسمتی ازمحیط دایره) رابطه ساده ای با زاویه مرکزی روبروی آن دارد:

$s = R\theta$, که θ جابه جایی زاویه ای است.

یکای θ رادیان نامیده می شود.



- برای یک دور کامل داریم::

$$2\pi R = R\theta_c$$

$$\theta_c = 2\pi$$

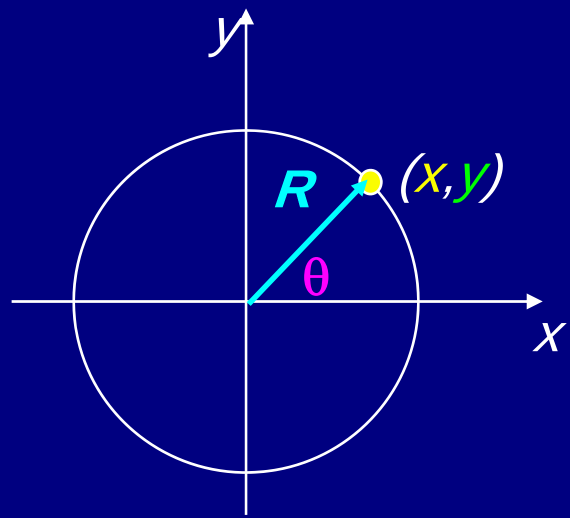
θدوره 2π است.

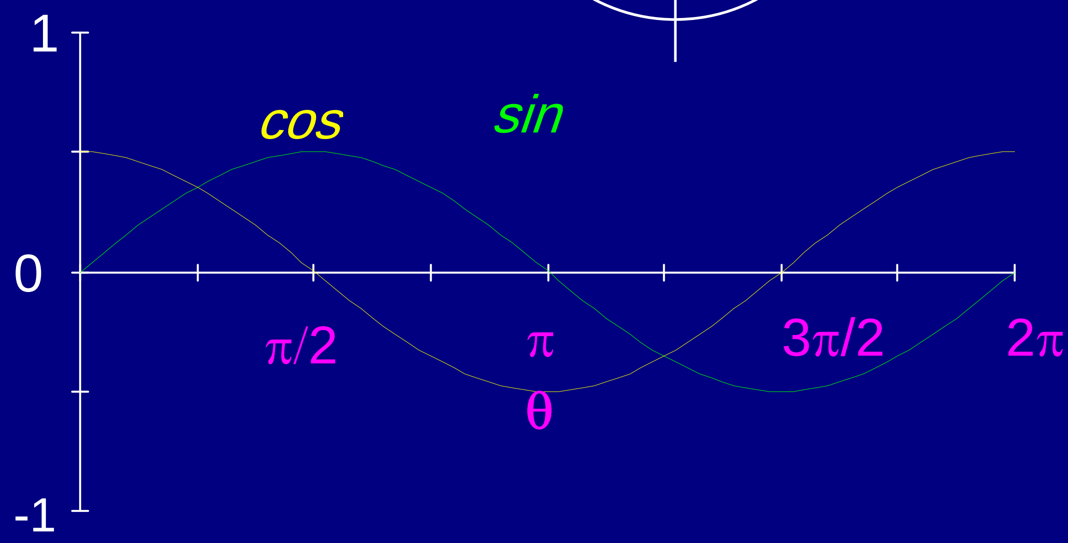
1دور $= 2\pi$ رادیان

مختصات قطبی....

$$x = R\cos\theta$$

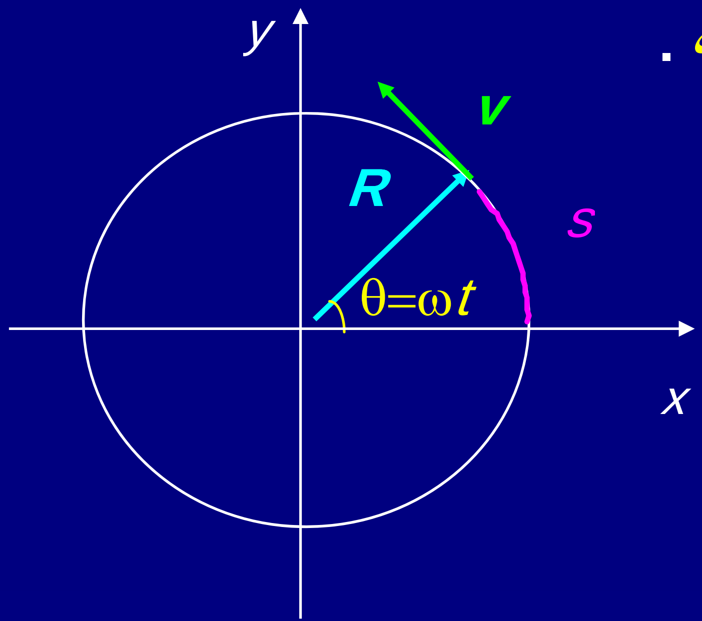
$$y = R\sin\theta$$





مختصات قطبی ....

- درمختصات قائم سرعت برابراست با:. $dx/dt = v$
  $\Leftarrow x = vt$
- درمختصات قطبی سرعت زاویه ای برابر است با: $d\theta/dt = \omega$
  $\Leftarrow \theta = \omega t$
  $\Leftarrow \omega$ دارای یکای *رادیان بر ثانیه است* .

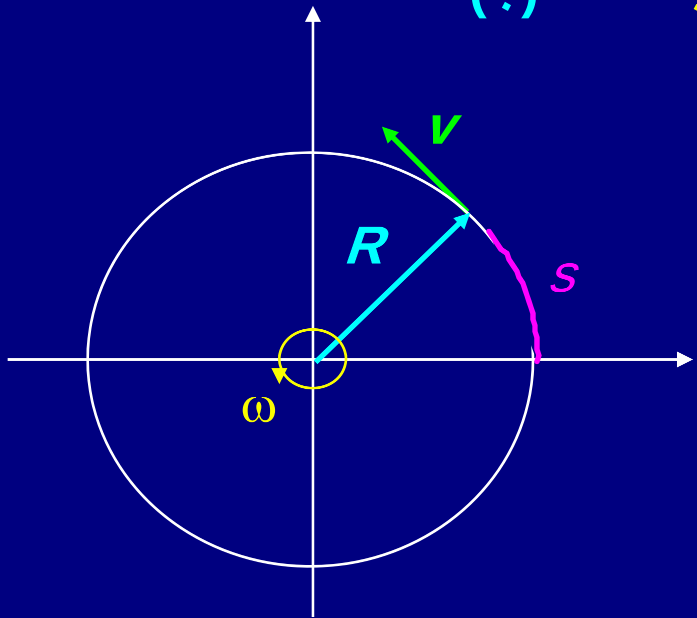


- جابه جایی برابر است با: $s = vt$
  اما $s = R\theta = R\omega t,$ بنابراین :

$$\boxed{V = \omega R}$$

دوره وبسامد

- به خاطر داشته باشید که 1 دور 2π = رادیان
  - ← بسامد = (f) دور برثانیه (الف)
  - ← سرعت زاویه ای = (ω) رادیان بر ثانیه (ب)
- باترکیب (الف) and (ب) داریم:
  - ← $\omega = 2\pi f$



- به خاطر داشته باشید که:
  - ← دوره = (T) ثانیه بر دور
  - ← لذا: $T = 1 / f = 2\pi/\omega$

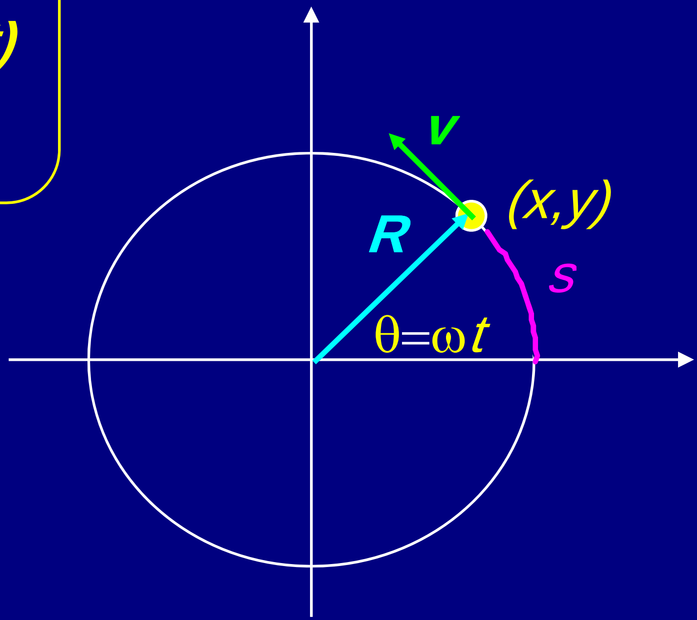
$$\boxed{\omega = 2\pi / T = 2\pi f}$$

یادآوری:

$$x = R\cos(\theta) = R\cos(\omega t)$$
$$y = R\sin(\theta) = R\sin(\omega t)$$
$$\theta = \arctan(y/x)$$

$$\theta = \omega t$$
$$s = v\,t$$
$$s = R\theta = R\omega t$$

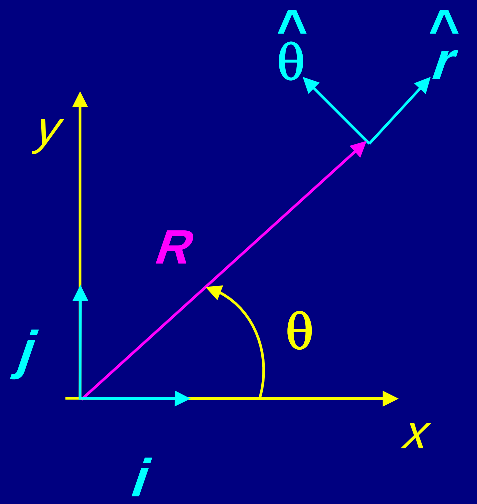
$$v = \omega R$$



بردارهای یکه در دستگاه قطبی:

- بابردارهای یکه در دستگاه قائم آشناهستید: $i \quad j \quad k$
- اکنون
"بردارهای واحد دستگاه قطبی $\hat{r}$, $\hat{\theta}$" معرفی می کنیم::
  - $\hat{r}$ درجهت شعاع دایره به بیرون
  - $\hat{\theta}$ درجهت مماس بردایره است.

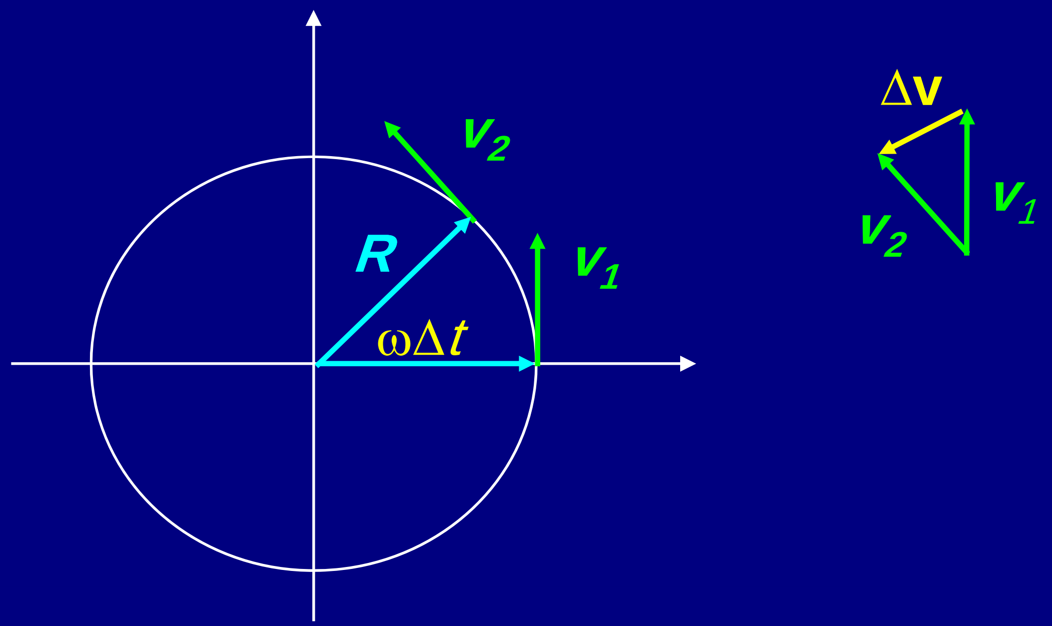
(خلاف عقربه های ساعت)



شتاب در حرکت دایره ای یکنواخت:

- اگرچه تندی ثابت است ولی سرعت ثابت نیست زیرا جهت آن مدام تغییر می کند.لذا این حرکت باید دارای شتاب باشد:!

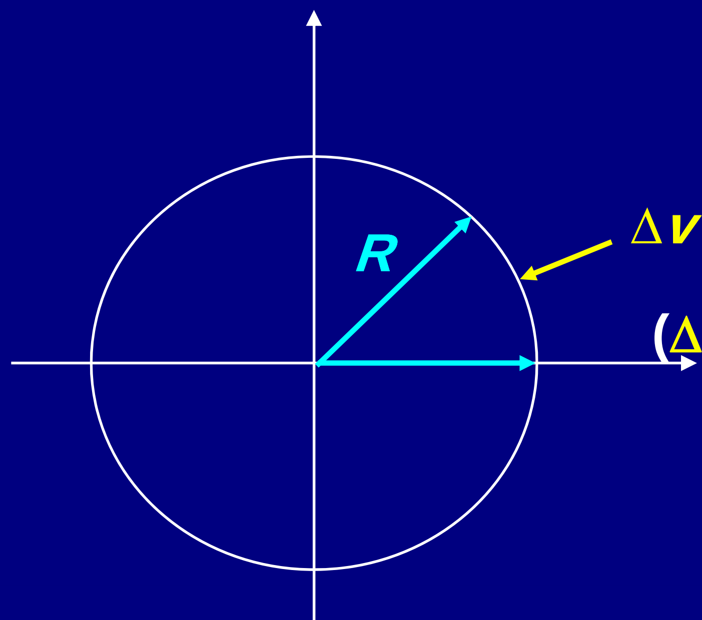
شتاب متوسط را در زمان Δt برابر است با: $a_{av} = \Delta v / \Delta t$:



شتاب درحرکت دایره ای یکنواخت:

- اگرچه تندی ثابت است ولی سرعت ثابت نیست زیرا جهت آن مدام تغییر می کند.لذا این حرکت باید دارای شتاب باشد:!

← شتاب متوسط را در زمان Δt برابر است با : $a_{av} = \Delta v / \Delta t$:

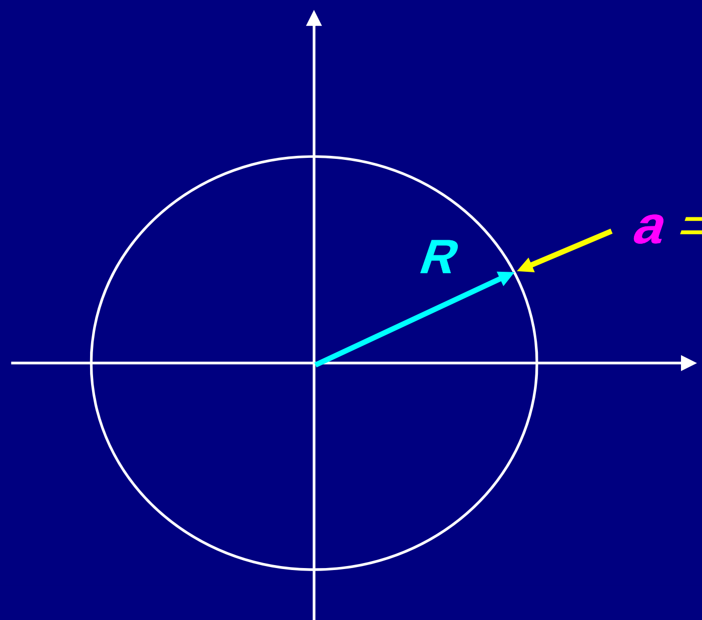


به نظر می رسد که Δv (بنابراین $\Delta v/\Delta t$)
به سمت مبدا است.!

شتاب درحرکت دایره ای یکنواخت:

- اگرچه تندی ثابت است ولی سرعت ثابت نیست زیرا جهت آن مدام تغییر می کند.لذا این حرکت باید دارای شتاب باشد:!

➔ شتاب متوسط را در زمان Δt برابر است با Δt : $a_{av} = \Delta v / \Delta t$:



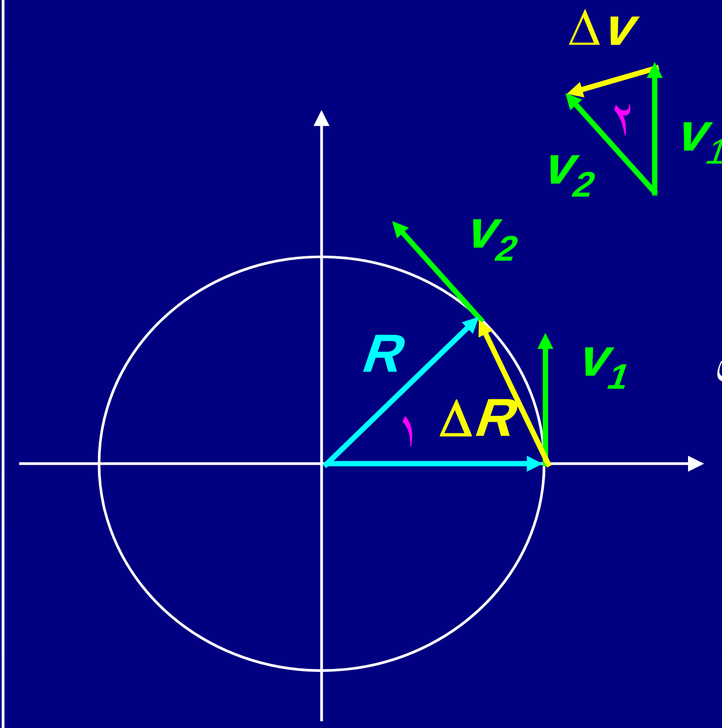
$a = dv / dt$

ملاحظه می کنید که a درجهت $-R$ است.

شتاب درحرکت دایره ای یکنواخت:

- این شتاب را **شاب مرکز گرا** می گویند..
- اکنون مقدار این شتاب را محاسبه می کنیم:

ازتشابه دو مثلث۱و۲ در شکل زیر:



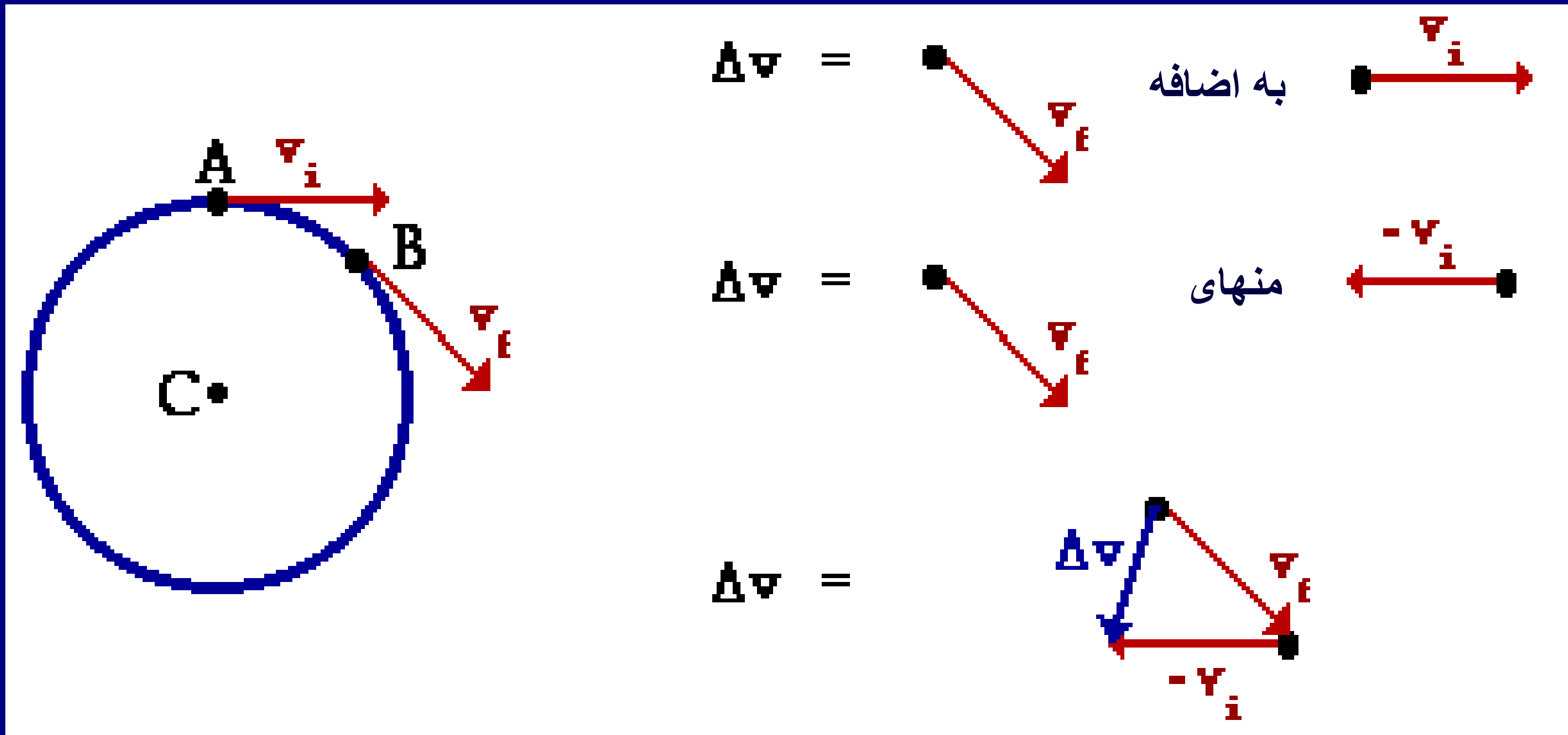
$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta R}{R}$$

بازای Δt کوچک $\Delta R = v\Delta t$ ولی:

بنابراین : $\Rightarrow \dfrac{\Delta v}{v} = \dfrac{v\Delta t}{R} \Rightarrow \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{v^2}{R}$

$$\boxed{a = \frac{v^2}{R}}$$

حرکت دایره ای:تغییرات سرعت

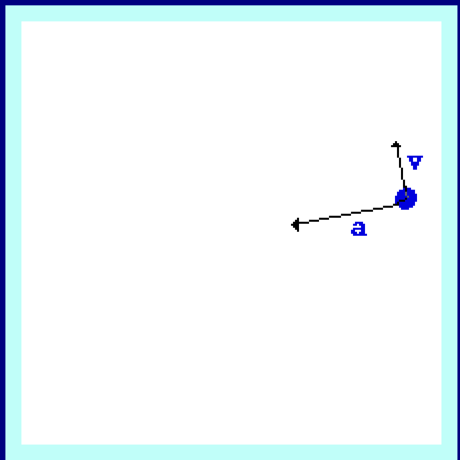


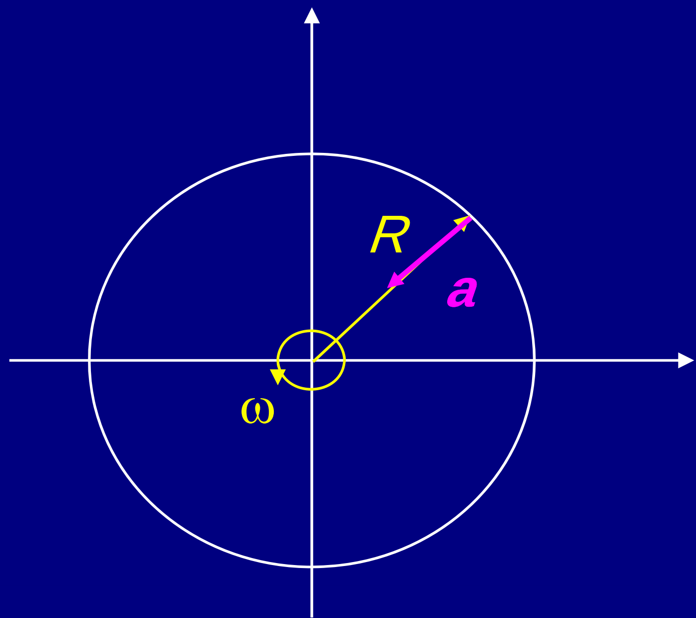
شتاب مرکزگرا:

- د رحرکت دایره ای یکنواخت::

بزرگی شتاب : $a = v^2 / R$

جهت شتاب: $-\hat{r}$ (به طرف مرکز دایره)





یک رابطه مفید:

می دانیم $a = \frac{v^2}{R}$ و $v = \omega R$

باجایگزین کردن مقدار v دررابطه فوق:

$$a = \frac{(\omega R)^2}{R}$$

$$\boxed{a = \omega^2 R}$$

یک سئوال:

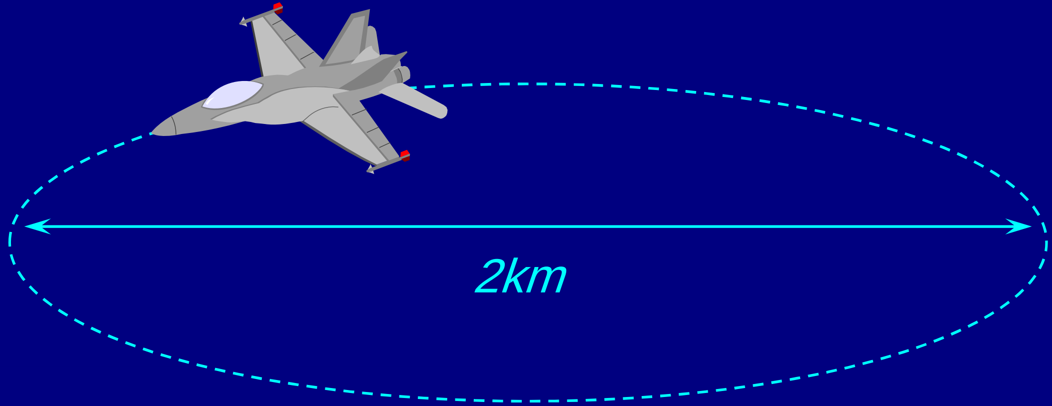
- خلبان یک جنگنده دایره ای را باشتا ب ۹ برابر شتاب جاذبه دور می زند.اکر تندی جنگنده او 300 m/s باشد شعاغ این دایره چقدر می تواند باشد تا به سلامت دور بزند

(a) *500 m*
(b) *1000 m*
(c) *2000 m*

حل:

$$a = \frac{v^2}{R} = 9g \quad \Rightarrow \quad R = \frac{v^2}{9g} = \frac{90000\,\frac{m^2}{s^2}}{9 \times 9.81\,\frac{m}{s^2}}$$

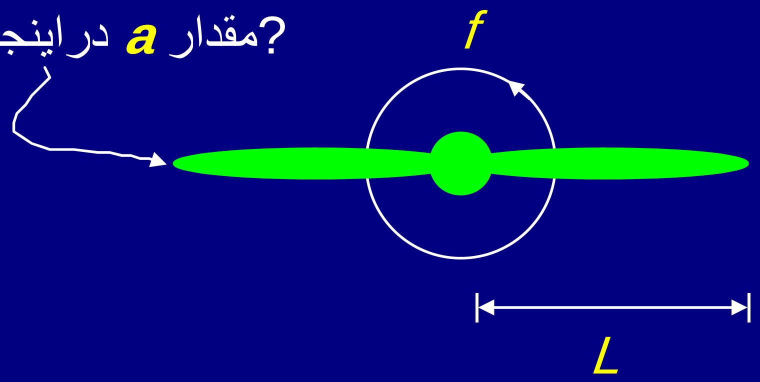
$$\Rightarrow \quad R = \frac{10000}{9.81} m \approx 1000m \quad \Rightarrow \quad D = 2R \approx 2000m$$



مثال : سر پروانه

- بسامد زاویه ای چرخش ملخ یک هواپیما $f = 3500\ rpm$ است. طول تیغه ملخ $L = 80cm$ است. شتاب مرکز گرای یک نقطه روی نک تیغه چقدر است؟?

?مقدار a دراینجا چقدراست؟



حل:

- ابتدا سرعت زاویه ای ملخ را حساب می کنیم:

$$1\ rpm = 1\frac{rot}{min} x\ \frac{1}{60}\frac{min}{s} x\ 2\pi\frac{rad}{rot} = 0.105\frac{rad}{s} \equiv 0.105\ s^{-1}$$

← لذا $\boldsymbol{3500\ rpm}$ یعنی $\boldsymbol{\omega = 367\ s^{-1}}$

- اکنون شتاب را حساب کنید: .

← $\mathbf{a} = \omega^2 R = (367s^{-1})^2 \times (0.8m) = 1.1 \times 10^5\ m/s^2$
$= 11{,}000\ g$

← جهت $\boldsymbol{a}$ بسوی مرکز ملخ است..($-\hat{r}$)

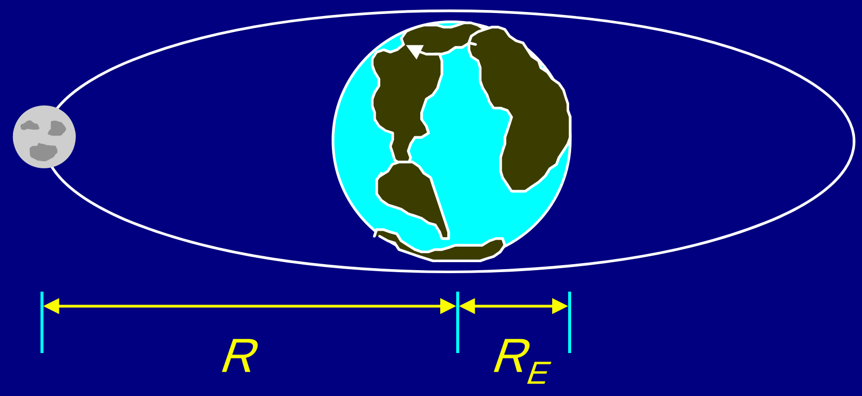
مثال نیوتن و کره ماه:

- شتاب کره ماه به دور زمین چقدر است ؟
- می دانیم(نیوتن نیز می دانست):

$T = 27.3$ days $= 2.36 \times 10^6$ s ← (دوره ماه ~ 1 ماه)

$R = 3.84 \times 10^8$ m ← (فاصله از ماه)

$R_E = 6.35 \times 10^6$ m ← (شعاع زمین)



ماه...

- سرعت زاویه ای را حساب کنید:

$$\frac{1}{27.3}\frac{rot}{day}x\ \frac{1}{86400}\frac{day}{s}x\ 2\pi\frac{rad}{rot}=2.66x10^{-6}\ s^{-1}$$

- بنابراین:. $\omega = 2.66 \times 10^{-6}\ s^{-1}$

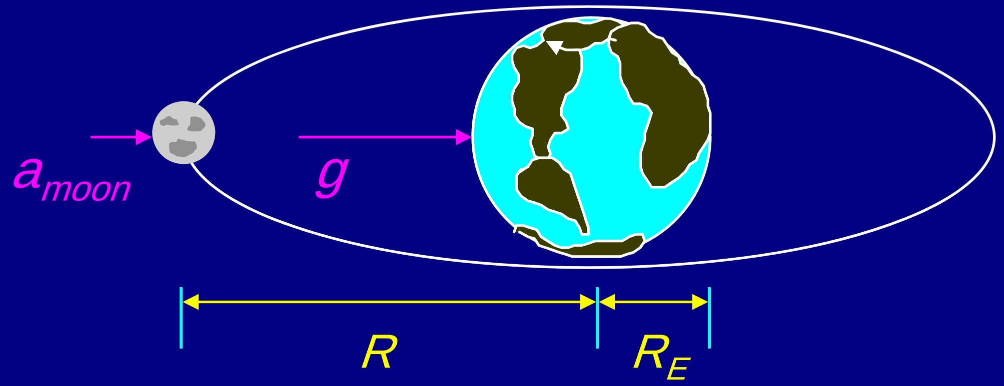
- اکنون شتاب را حساب کنید: .

$a = \omega^2 R = 0.00272\ m/s^2 = 0.000278\ g$ ←

← جهت a به سوی مرکز زمین است. $(-\hat{r})$

ماه...

- بنابراین $a_{moon} / g = 0.000278$
- نیوتون توجه کردکه: $R_E^2 / R^2 = 0.000273$



- واین الهام بخش او برای فرض $F_{Mm} \propto 1 / R^2$ بود.

➔(بعدا دراین مورد بیشتر می خوانیم)

شتاب مرکز گرا:

- یک شاتل فضایی در فاصله *300 km* ازسطح زمین قرار دارد. زمان چرخش این شاتل به دور زمین *91 min* *است*. شتاب یک فضانورد در شاتل در چارچوب مرجع روی زمین چقدراست؟(شعاع زمین $6.4 \times 10^6\ m$ *است*).

(a) $0 \quad m/s^2$

(b) $8.9\ m/s^2$

(c) $9.8\ m/s^2$

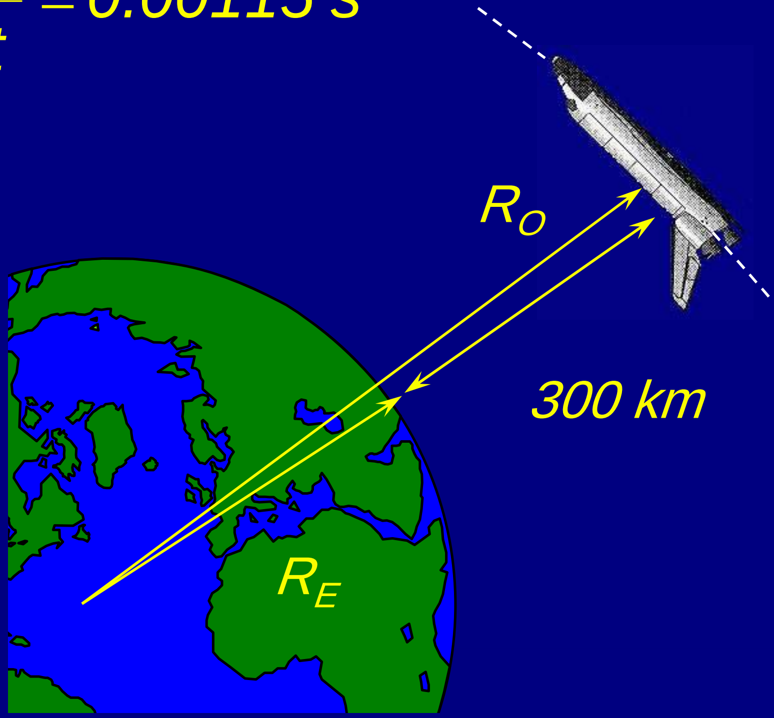
حل:

- ابتدا بسامد زاویه ای را حساب می کنیم: ω:

$$\omega = \frac{1\ \text{rot}}{91\ \text{min}}\ x\ \frac{1\ \text{min}}{60\ \text{s}}\ x\ 2\pi\ \frac{\text{rad}}{\text{rot}} = 0.00115\ s^{-1}$$

توجه کنید که:

$$R_O = R_E + 300\ km$$
$$= 6.4 \times 10^6\ m + 0.3 \times 10^6\ m$$
$$= 6.7 \times 10^6\ m$$



حل:

- اکنون شتاب را حساب کنید::

$$a = \omega^2 R$$

$$a = (0.00115\ s^{-1})^2 \times 6.7 \times 10^6\ m$$

$$a = 8.9\ m/s^2$$

یاد آوری نهایی

- چارچوب مرجع و حرکت نسبی
- حرکت دایره ای یکنواخت
- در ضمن حل مسائل کتاب را فراموش نکنید

ادامه فصل چهارم

قوانین نیوتن

درس امروز ما

- یادآوری حرکت دایره ای یکنواخت
- قوانین نیوتن

← اجسام چگونه حرکت می کنند؟

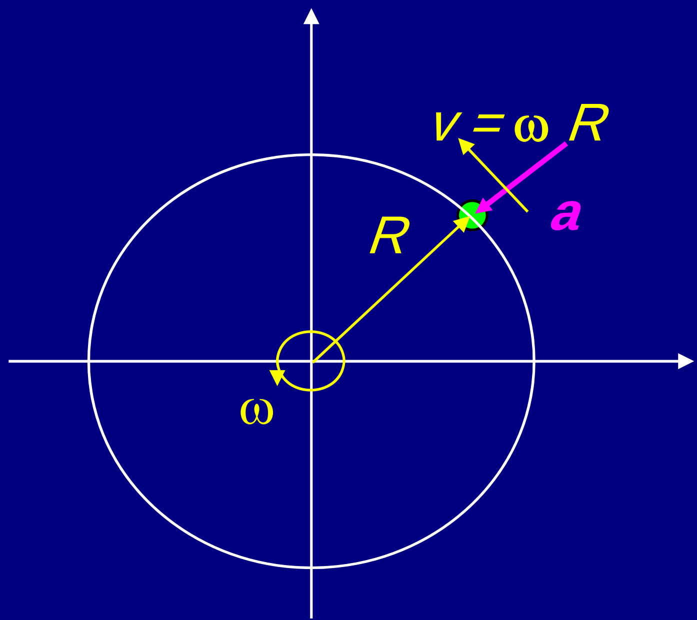
← دینامیک

مرور: شتاب مرکز گرا

- حرکت دایره ای دارای شتاب است :

بزرگی شتاب : $|a| = v^2 / R = \omega^2 R$

جهت شتاب $-\hat{r}$ (بسوی مرکز دایره)

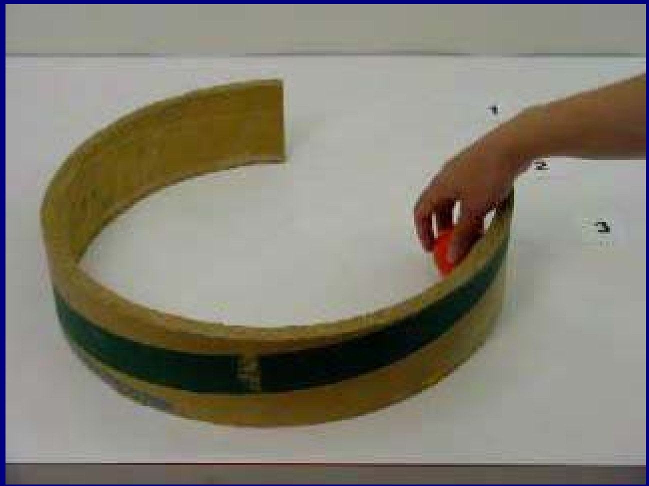


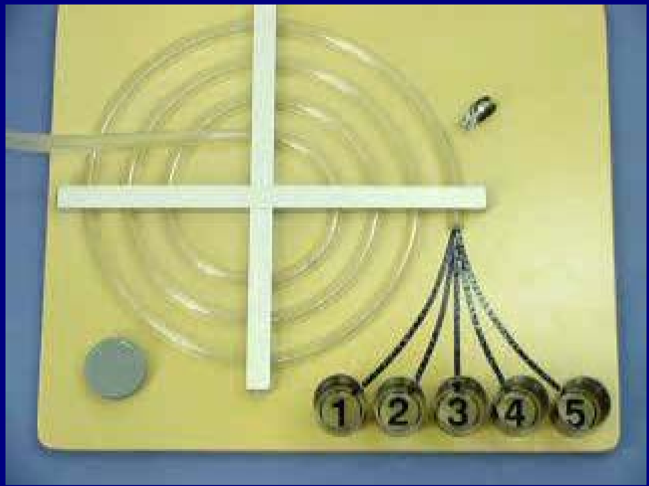
کمیت های مفید:

f = دور بر ثانیه

$T = 1 / f$

$\omega = 2\pi / T = 2\pi f = rad/sec$





توجه کنید:

برای اینکه جسم حرکت دایره ای داشته باشید باید نیروی جانب مرکز یا مرکز گرایی به آن وارد شود . روی هر یک از دو تصویر روبرو به ترتیب کلیک کنید . متوجه می شوید که وقتی نیروی جانب مرکز ازبین می رود جسم روی مماس بر مسیر دایره ای و روی خط مستقیم به حرکت خود ادامه می دهد.

دینامیک

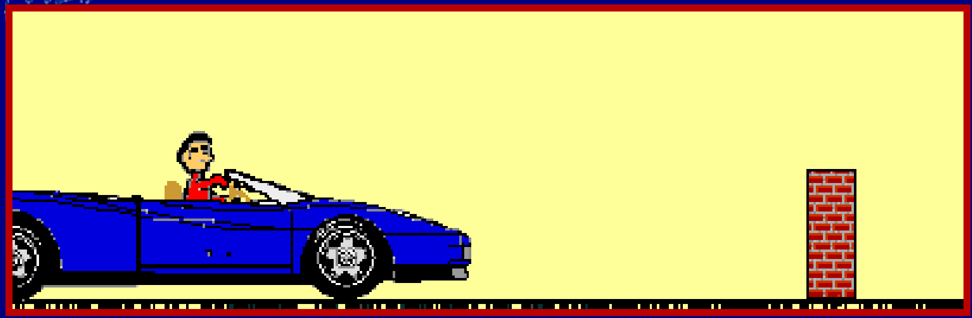
- اسحاق نیوتن (1727 - 1643) کتاب اصول ریاضی رادرسال 1687 منتشر کرد .دراین کتاب او سه " قانون حرکت " رابیان نمود

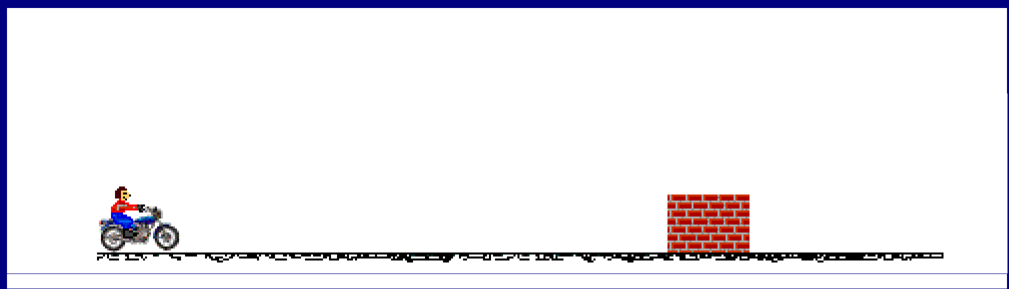
قانون اول : اگر به جسمی ازخارج نیرو وارد نشود و اگر از یک چارچوب مرجع لخت به آن نگاه کنیم ساکن می ماند و یا حرکت مستقیم الخط یکنواخت خواهد داشت.

قانون دوم : برای یک جسم : $F_{NET} = \Sigma F = ma$

قانون سوم : نیروها به صورت جفت روی می دهند : $F_{A,B} = - F_{B,A}$

(برا ی هر عملی عکس العملی مساوی ودرخلاف جهت وجود دارد)





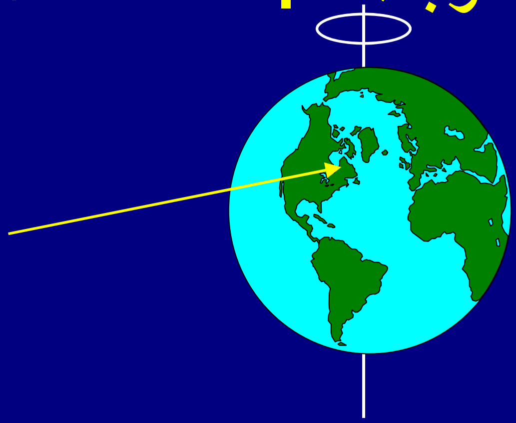
به این تصاویر نگاه کنید و
ببینید وقتی که نردبان محکم
بسته نشده باشدو یا اشخاص
از کمربند ایمنی استفاده
نکرده باشند چگونه در اثر تصادف
ومتوقف شدن وسیله نقلیه به
حرکت خود ادامه می دهند.
طبق قانون اول نیوتن در غیاب
نیروهای خا رجی یک جسم
به حرکت خود با تندی ثابت
و در راستای ثابت ادامه می دهد
هر جسم در مقابل تغییرحرکت
خود مقاومت می کند این
قانون را قانون لختی یا اینرسی
می گویند.

قانون اول نیوتن

- **قانون اول :** اگر به جسمی ازخارج نیرو وارد نشود و اگر از یک چارچوب مرجع لخت به آن نگاه کنیم ساکن می ماند و یا حرکت مستقیم الخط یکنواخت خواهد داشت..
  - اگر به جسمی نیرو وارد نشود آن جسم شتابی هم نخواهد داشت>

- تعریف چارچوب مرجع لخت (IRF) :
  - چارچوبی است که نسبت به " ستارگان ثابت " فاقد شتاب و یا چرخش است.
  - اگر یک چارچوب لخت (IRF) وجود دشته باشد دراینصورت تعداد بسیارزیادی چاچوب لخت دیگر که نسبت به هم با سرعت ثابت حرکت می کنند وجود خواهد داشت !

آیا تهران یک چارچوب مرجع لخت خوب است.؟



- آیا تهران داری $\vec{\text{شتاب}}$ است؟
- بلی !
  - ←تهران روی کره زمین قراردارد
  - ←زمین دارای حر کت چرخشی است .

- شتاب مرکز گرای تهران چقدراست؟

$$a_U = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R$$

← $T = 1\ day = 8.64 \times 10^4\ sec,$

← $R \sim R_E = 6.4 \times 10^6\ meters.$

- بنابراین : a_U = .034 m/s^2 (~ 1/300 g)
- نزدیک به صفر است و می توان از آن صرفنظر کرد
- تهران یک چارچوب لخت مناسب است

قانون دوم نیوتن

- برای هر جسمی: $F_{NET} = \Sigma F = ma$.

  ← شتاب جسم a متناسب با نیروی خالص F_{NET} که به جسم واردمی شود است.

  ← ثابت تناسب "جرم" است و با m نشان داده می شود.

  » این تعریف جرم است ..

  » جرم یک جسم یک خاصیت ثابت جسم بوده و مستقل از تاثیرات خارجی است

- نیرو دارا یکای $N = kg\ m/s^2 = [M]x[L / T^2]$ (نیوتن)

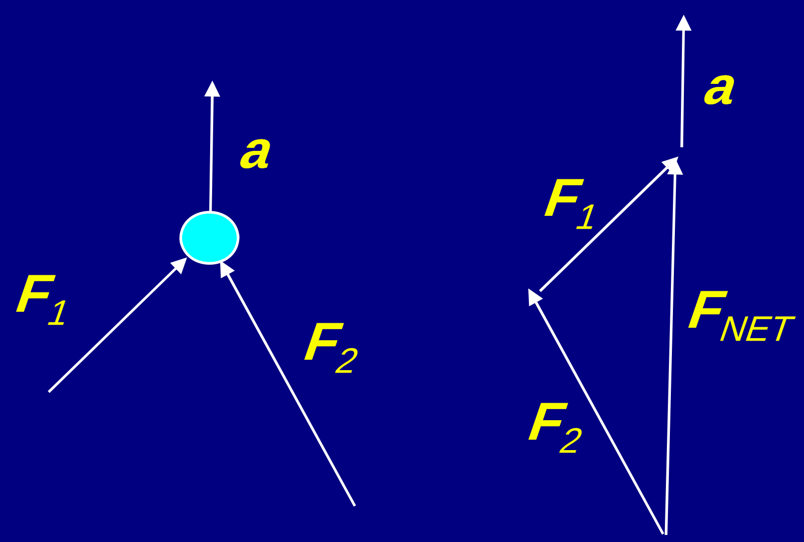
قانون دوم نیوتن

- نیرو چیست؟

←نیرو **کشیدن** یا **هل** دادن است

←نیرو دارا بزرگی و جهت است.(بردار است).

←جمع نیروها مانند جمع بردارها است



$$\boxed{F_{NET} = ma}$$

قانون دوم نیوتن...

- مولفه های نیروی : $F = ma$

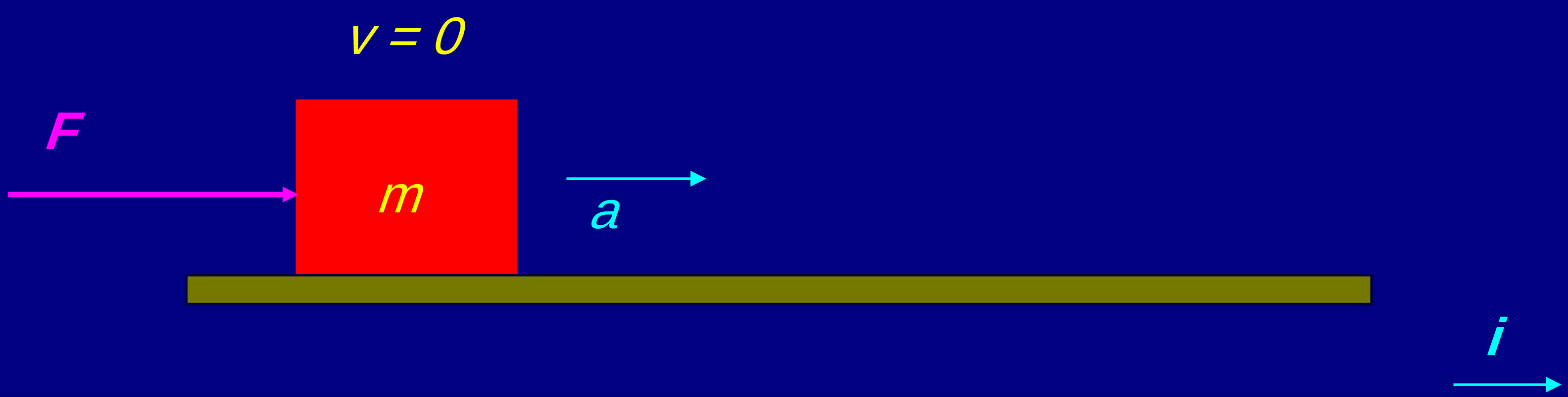
$$F_X = ma_X$$
$$F_Y = ma_Y$$
$$F_Z = ma_Z$$

- فرض کنید m و F_X رابدانیم دراین صورت می توانیم a_X را حساب کرده و روابط سینماتیکی زیر را که قبلا بررسی کردیم بکارمی بریم.

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$
$$v_x = v_{0x} + a_x t$$

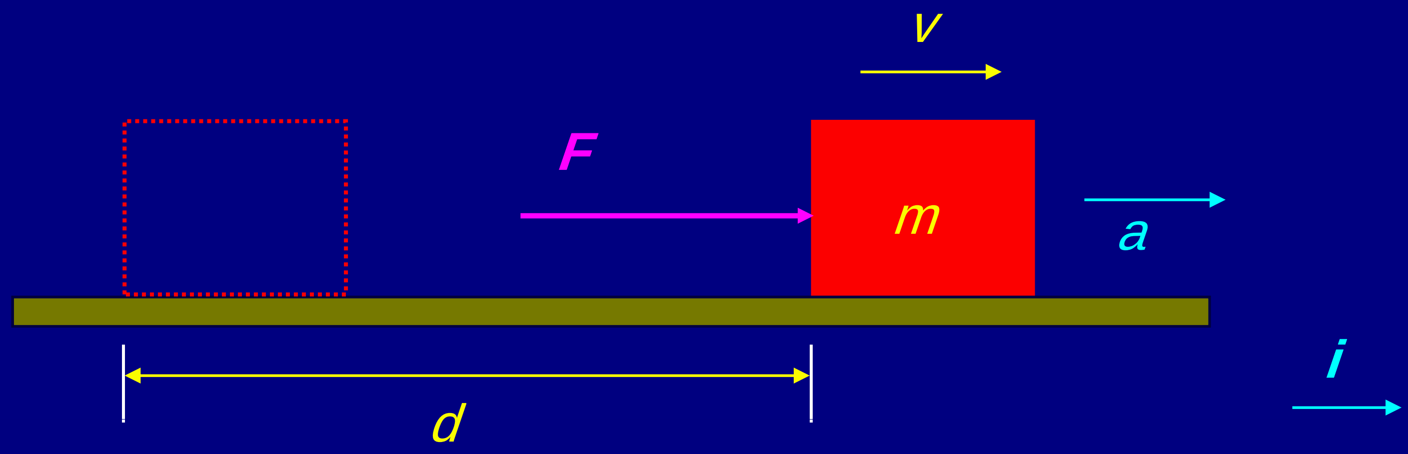
مثال : هل دادن یک جسم روی یخ

- جعبه سنگینی به جرم $m = 100\ kg$ روی یک سطح یخی(افقی و بدون اصطکاک) هل می دهیم . .نیروی وارده شده به جعبه 50 N درجهت i است . اگر جعبه از حالت سکون شروع به حرکت کند سرعت v بعداز طی مسافت $d = 10\ m$ چقدراست.



ادامه...

- جعبه سنگینی به جرم $m = 100\ kg$ روی یک سطح یخی(افقی و بدون اصطکاک) هل می دهیم . .نیروی وارده شده به جعبه $50\ N$ درجهت i است . اگر جعبه از حالت سکون شروع به حرکت کند سرعت v بعداز طی مسافت $d = 10\ m$ چقدراست؟



ادامه...

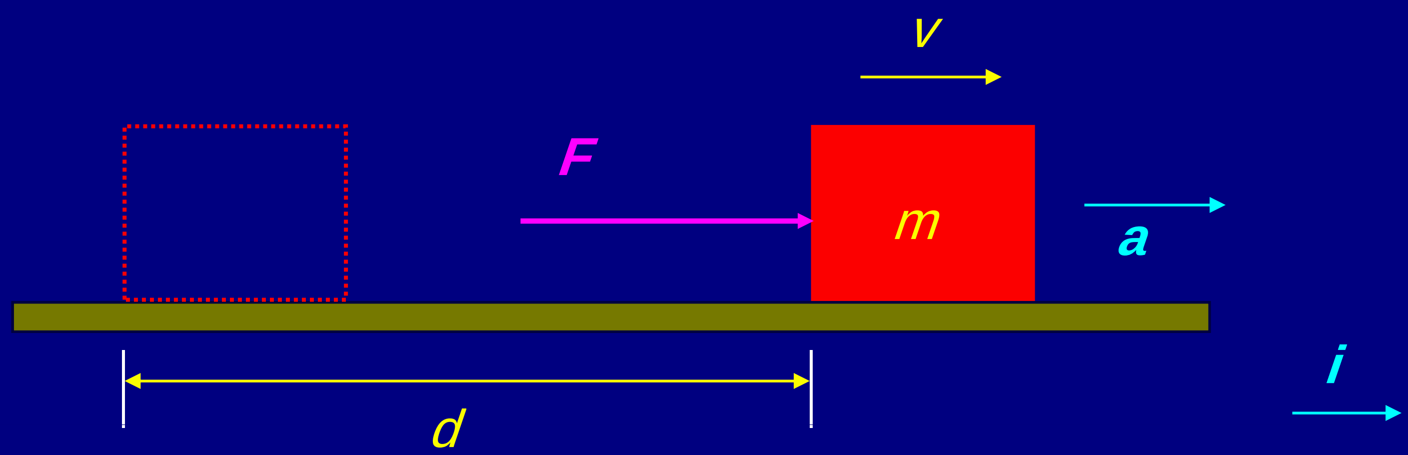
- با این فورمول $F = ma$ شروع می کنیم.

$a = F / m$.

به خاطر دارید: $v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$

لذا: $v^2 = 2Fd / m$

$$v = \sqrt{\frac{2Fd}{m}}$$

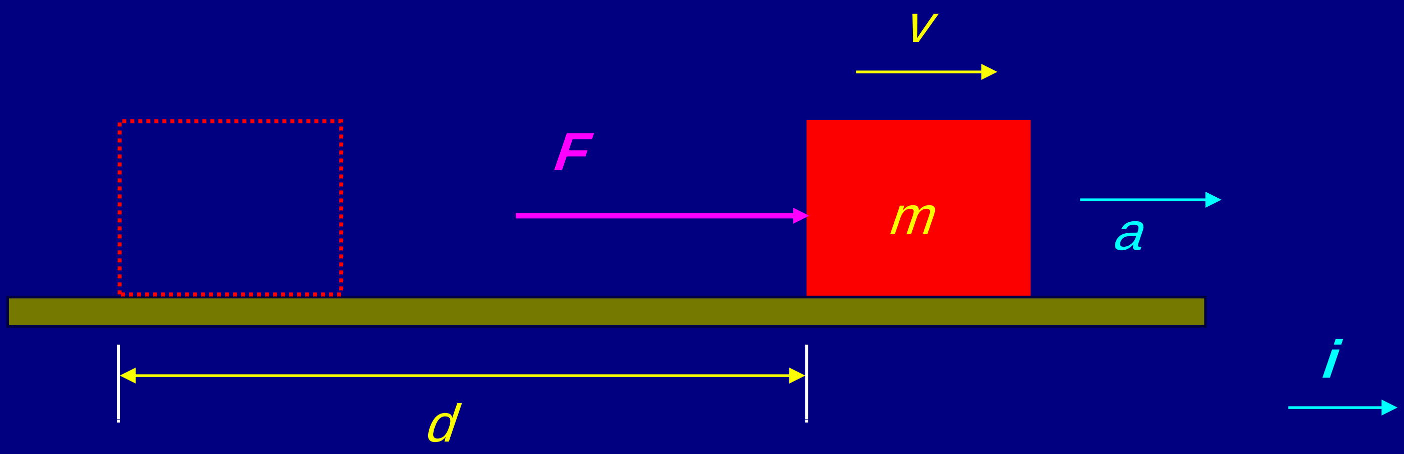


ادامه...

$$v = \sqrt{\frac{2Fd}{m}}$$

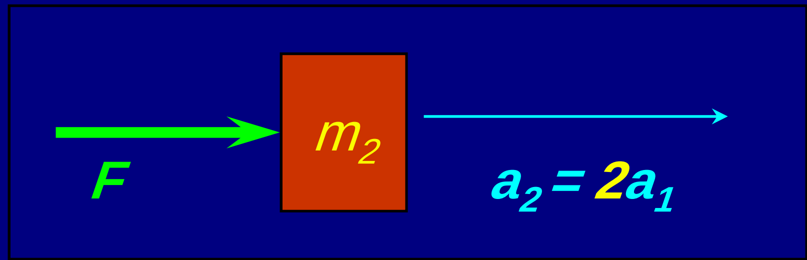
- با جاگذاری : $F = 50\text{ N},\ d = 10\text{ m},\ m = 100\text{ kg}$

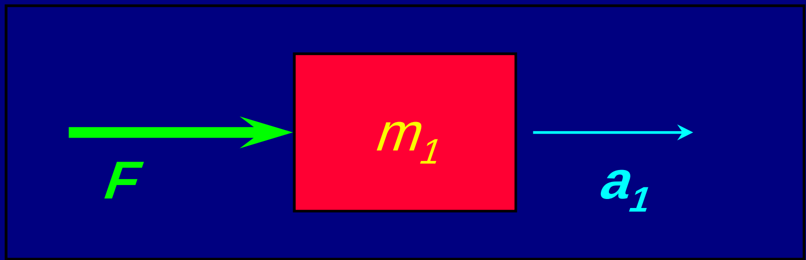
خواهیم داشت: $v = 3.2\text{ m/s}$



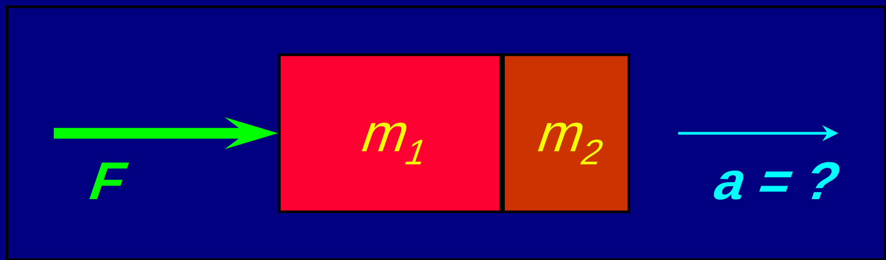
نیرو و شتاب

- نیروی F به جسمی به جرم m_1 وارد شده و به آن شتاب a_1 می دهد .
همیین نیرو به جسمی به جرم m_2 شتاب $a_2 = 2a_1$ می دهد.





- اگر m_1 و m_2 به همدیگر به چسبند و همان نیروی F به آنها وارد شود شتاب این این مجموعه چقدر خواهد شد؟



(الف) $3/4\ a_1$　　(ب) $3/2\ a_1$　　(ج) $2/3\ a_1$

نیرو و شتاب

$a = F/(m_1 + m_2)$

- چون $a_2 = 2a_1$ است برای یک نیروی اعمالی $m_2 = (1/2)m_1$ است!

  $\Leftarrow$ $m_1 + m_2 = 3m_1/2$

- بنابراین $a = (2/3)F/m_1$ $\Leftarrow$ ولی $F/m_1 = a_1$

$\Leftarrow$ $\boxed{a = 2/3\ a_1}$

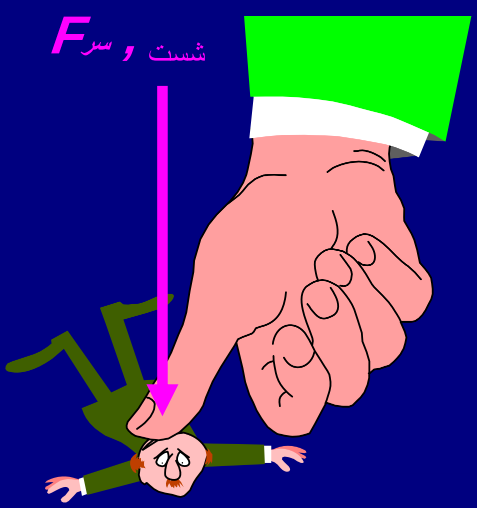
(الف) $3/4\ a_1$ (ب) $3/2\ a_1$ (ج) $2/3\ a_1$

نیروها

- دو نوع نیرو را در نظر می گیریم:
  - نیروی ثابت :
    - این نوع نیرو آشناترین نیرو است:.
      - نیروی که من به میز وارد می کنم
      - نیرویی که زمین به صندلی وارد می کند
  - اثر از دور:
    - جاذبه
    - الکتریسیته

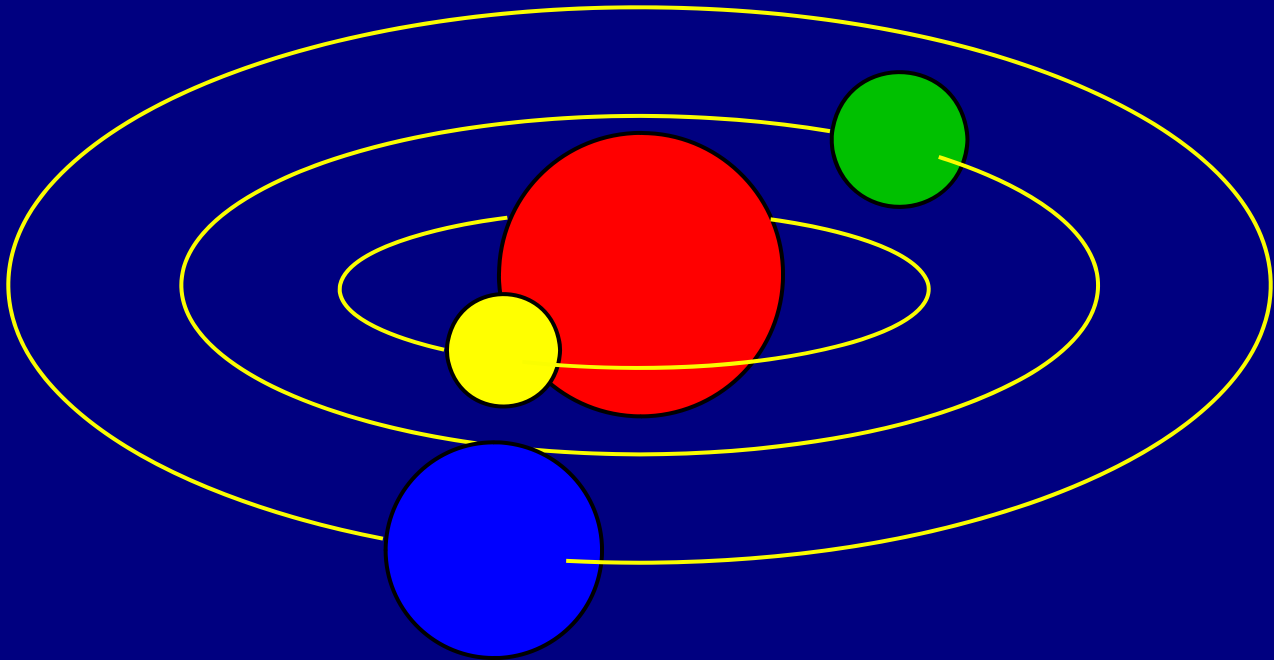
نیروی تماس:

- اجسام در تماس با هم به همدیگر نیرو وارد می کنند:
- یک قرارداد $F_{a,b}$:یعنی " نیرویی که *a* به *b* *وارد می‌کند*."
- *لذا* $F_{\text{سر}\,,\,\text{شست}}$ یعنی " نیرویی که سر به شست دست وارد می کند."



اثر از دور :

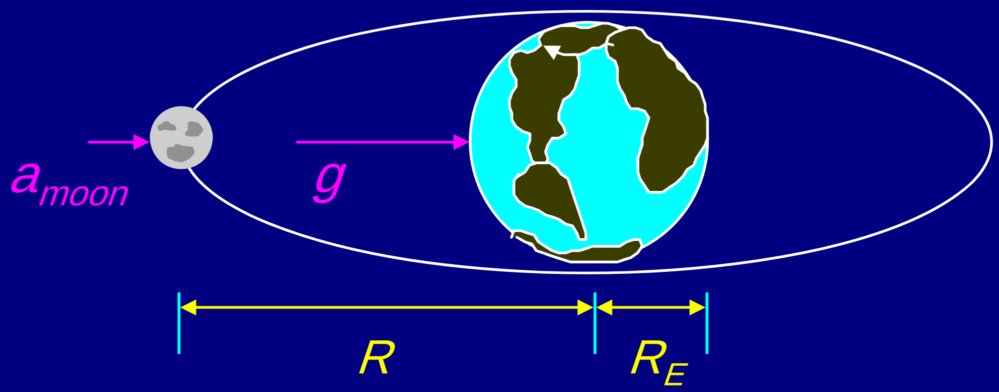
- جاذبه :



جاذبه
(به افتخار نیوتن)

نیوتن کشف کرد که : $a_{\text{کره ماه}} / g = 0.000278$

- ودریافت که : $R_E^2 / R^2 = 0.000273$



- واین برای او الهام بخش
قانون جاذبه عمومی شد:

$$F_{Mm} = G\,Mm/R^2$$

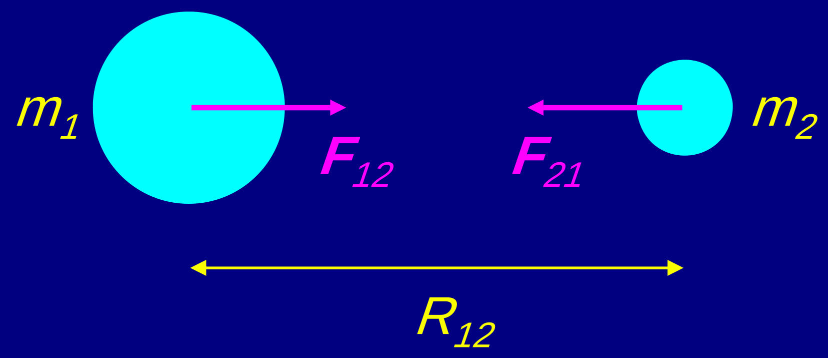
و $G = 6.67 \times 10^{-11}\ m^3\, kg^{-1}\, s^{-2}$

جاذبه....

- بزرگی نیروی جاذبه F_{12} که به جسمی به جرم m_1 که از طرف جسم m_2 در فاصله R_{12} وارد می شود برابراست با:

$$|F_{12}| = G\frac{m_1 m_2}{R_{12}^2}$$

- نیروی F_{12} جاذبه است ,ودر راستای خطی که مرکز دوجرم را به هم وارد می کند قرار دارد.

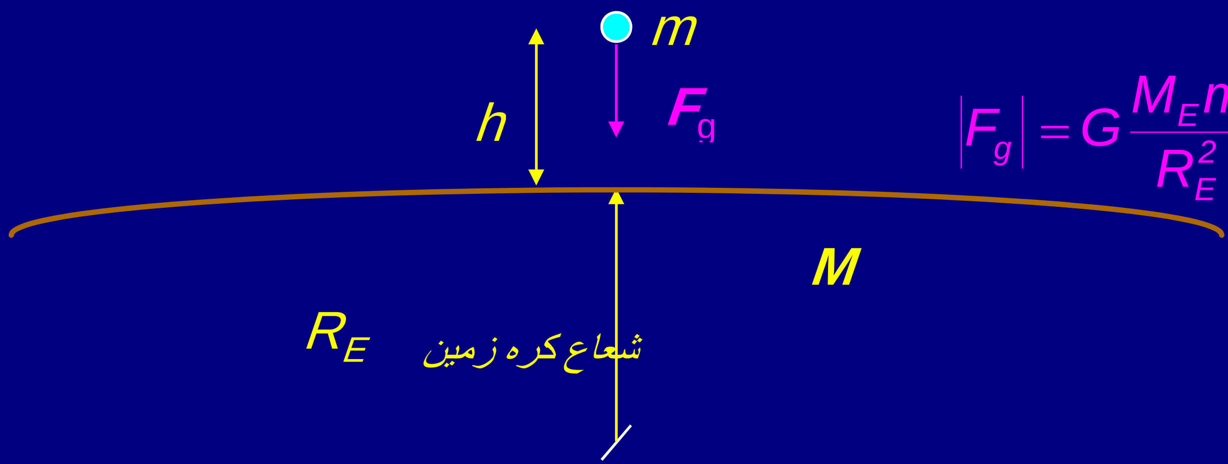


ادامه جاذبه ...

- مجاور سطح زمین :

← $R_{12} = R_E$

» دراین حالت چون : $R_E >> h,\ R_E + h \sim R_E$ است پس:



$$|F_g| = G\frac{M_E m}{R_E^2}$$

جاذبه...

- مجاور سطح زمین...

123

$$|F_g| = G\frac{M_E m}{R_E^2} = m\left(G\frac{M_E}{R_E^2}\right)$$

$=g$

- بنابراین:

$|F_g| = mg = ma$

همه اجسام دارای شتاب ,g بدون توجه به جرمشان خواهند بود! و:

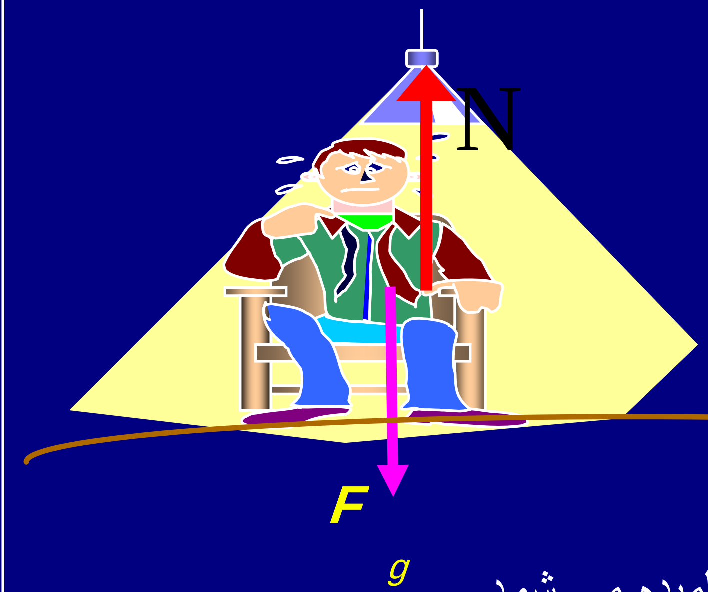
a=g

که :

$$g = G\frac{M_E}{R_E^2} = 9.81\, m/s^2$$

:یک مسئله در مورد جاذبه

- چه نیرویی از طرف زمین بردانشجویی که روی صتدلی نشسته است وارد می شود؟



جرم دانشجو: $m = 55kg$

$g = 9.8\ m/s^2$

$F_g = mg = (55\ kg)x(9.8\ m/s^2\ )$

$F_g = 539\ N$

- نیروی جاذبه وارد بر اجسام همان وزن اجسام نامیده می شود

$W = 539\ N$

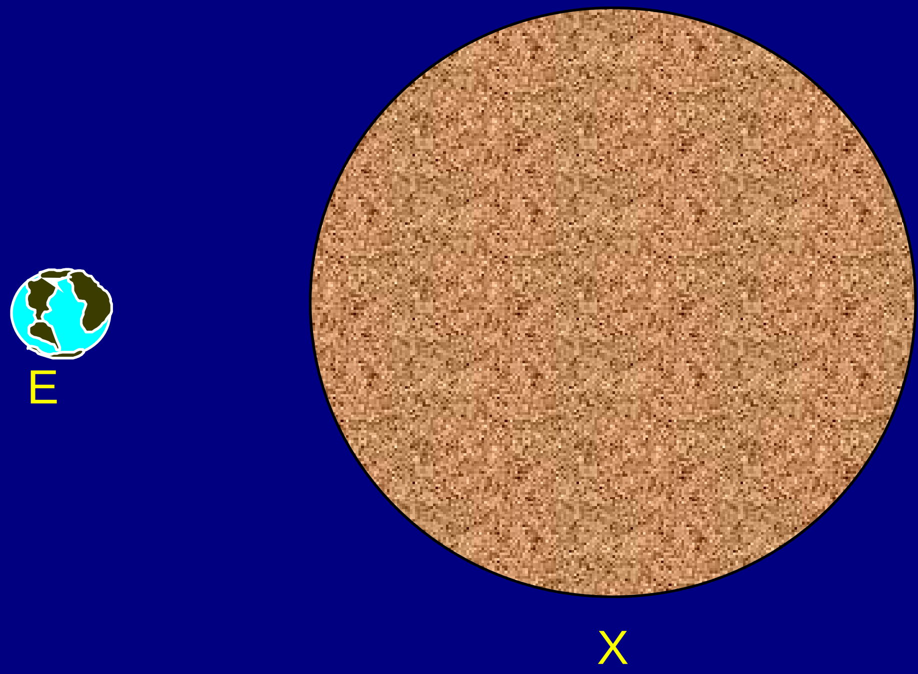
ادامه نیرو و شتاب

- فرض کنید که روی ترازویی ایستاده اید و وزن شما را W *نشان می دهد*. همین ترازو وزن شمارا در سیاره X نشان می دهد ?
- فرض کنید که : $R_X \sim 20\ R_{Earth}$ and $M_X \sim 300\ M_{Earth}$

(الف) $0.75\ W$

(ب) $1.5\ W$

(ج) $2.25\ W$



پاسخ:

- نیروی گرانشی وارد برجرم m از طرف جرم (مثلا یک سیاره) M برابر است با:

$$F = G\frac{Mm}{R^2}$$

- نسبت جرم ها = نسبت نیروها :

$$\frac{W_X}{W_E} = \frac{F_X}{F_E}$$

$$= \frac{G\frac{M_X m}{R_X^2}}{G\frac{M_E m}{R_E^2}} \Rightarrow = \frac{M_X}{M_E}\cdot\left(\frac{R_E}{R_X}\right)^2$$

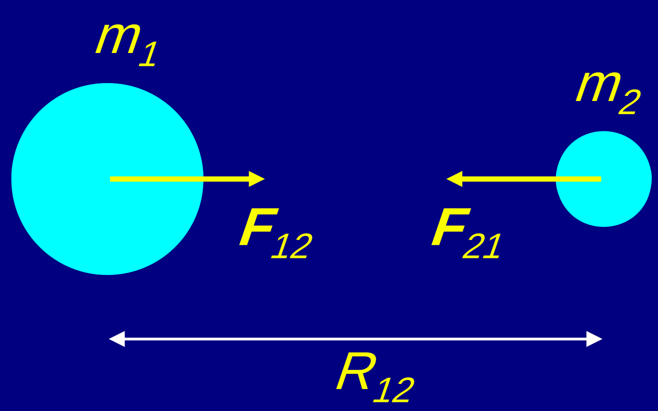
$$\Rightarrow \frac{W_X}{W_E} = 300\cdot\left(\frac{1}{20}\right)^2 = .75$$

قانون سوم نیوتن:

- نیروها به صورت جفت ظاهر می شوند : $F_{A,B} = -F_{B,A}$

➔ بازای هر " عمل " " عکس العملی" مساوی و در خلاف جهت وجود دارد.

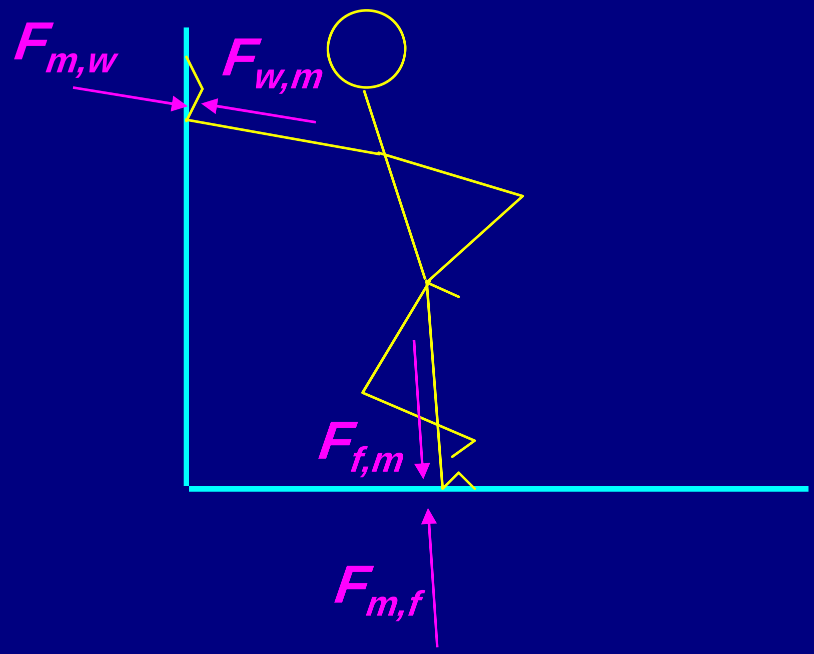
- قبلا این موضوع را در بحث مربوط به جاذبه مشاهده کردیم :



$$|F_{12}| = G\frac{m_1 m_2}{R_{12}^2} = |F_{21}|$$

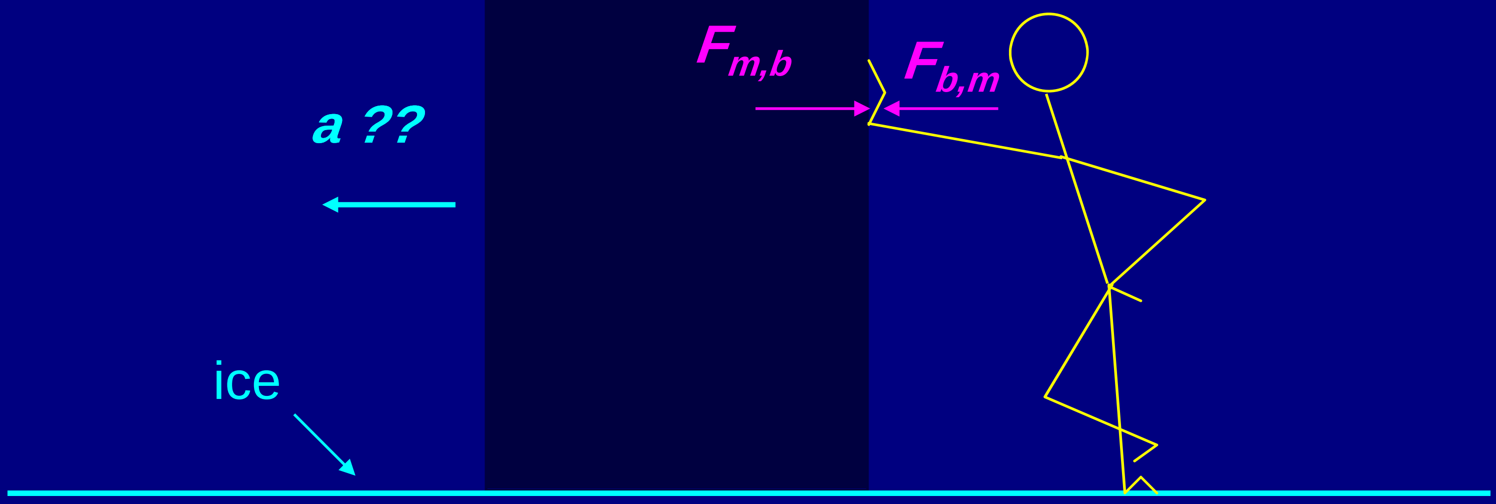
قانون سوم نیوتن ...

- $\mathbf{F}_{A,B} = -\mathbf{F}_{B,A}$. این رابطه برای نیروها ی تما س نیز درست است :به نیروهای عمل و عکس العمل زیر توجه کنید:



یک طرز اندیشیدن بد!

- اگر $F_{m,b} = -F_{b,m}$ است پس چرا $F_{net} = 0$ نبوده و $a = 0$ نیست ؟

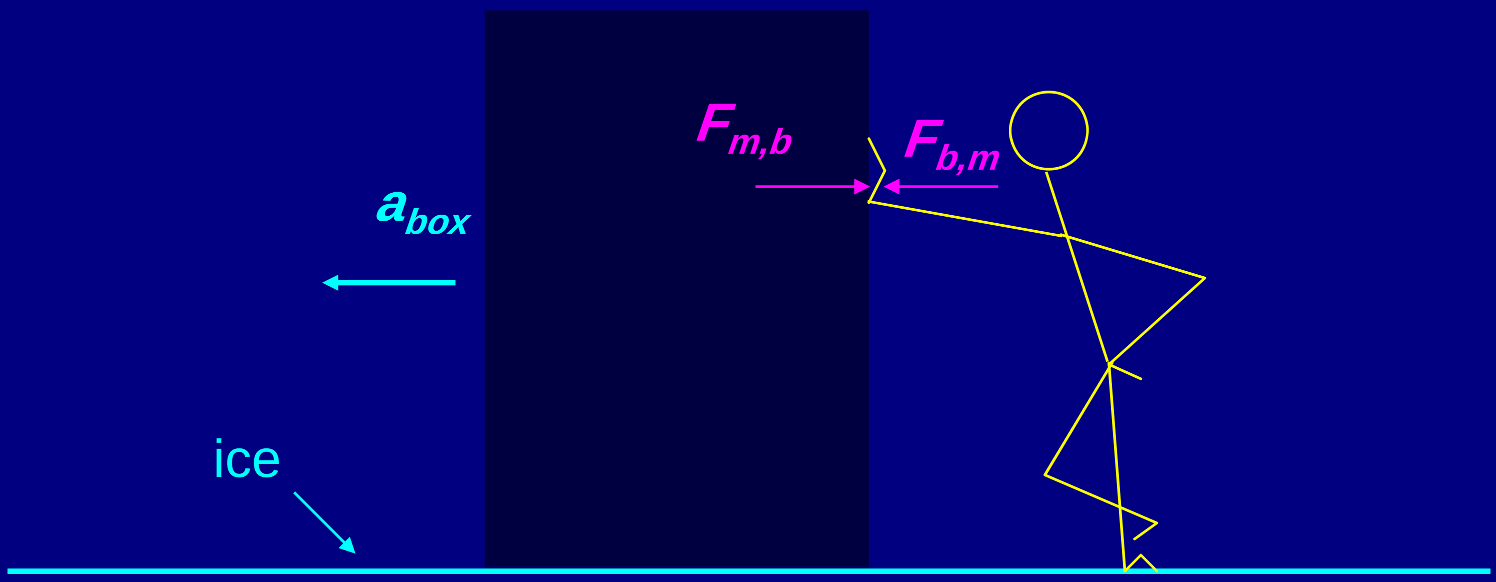


اندیشیدن درست:

- جعبه را به عنوان یک سیستم درنظر بگیرید ! پس:

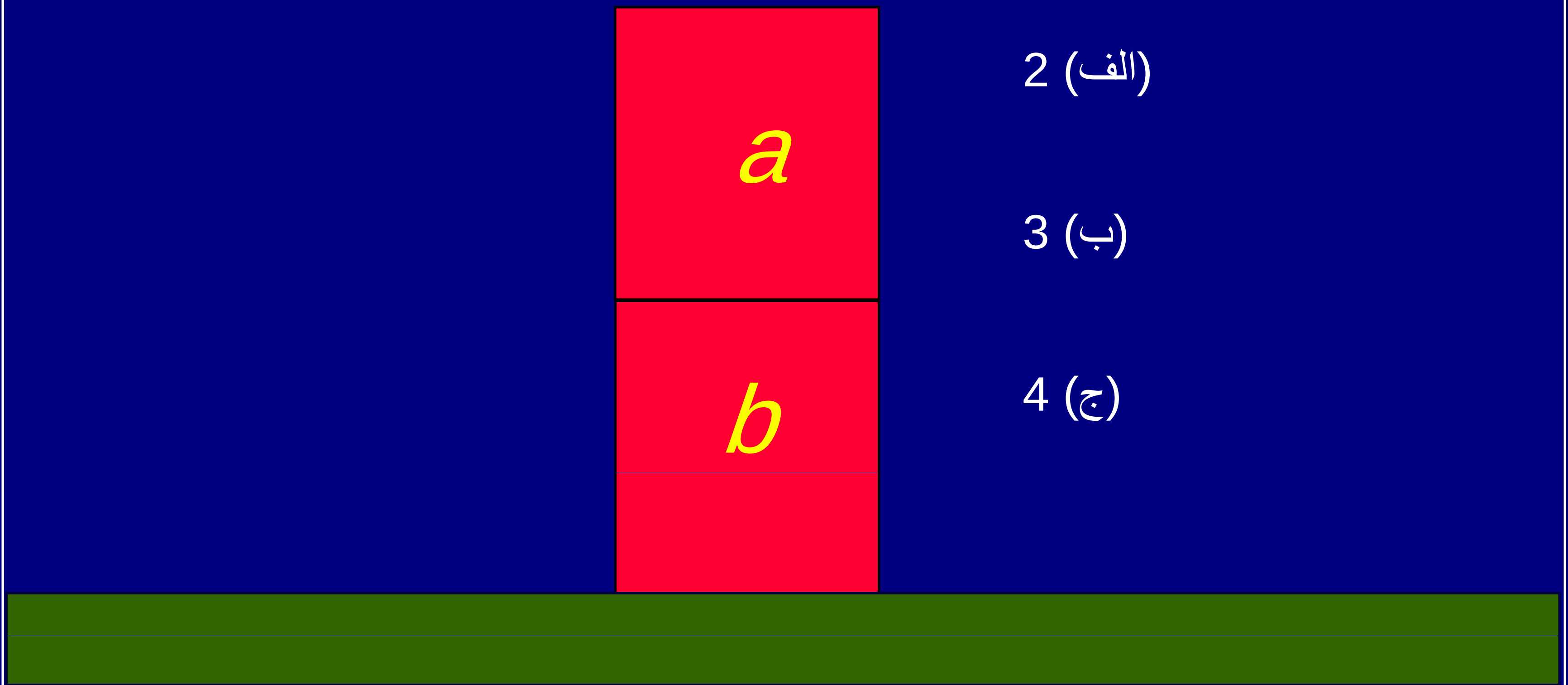
$$F_{\text{on box}} = ma_{box} = F_{b,m}$$

دیاگرام جسم آزاد :



قانون سوم نیوتن: یک سوال

- دوجعبه را روی هم مطابق شکل زیر قرارداده ایم. دراین سیستم چند جفت نیروی عمل و عکس العمل وجود دارد؟ .

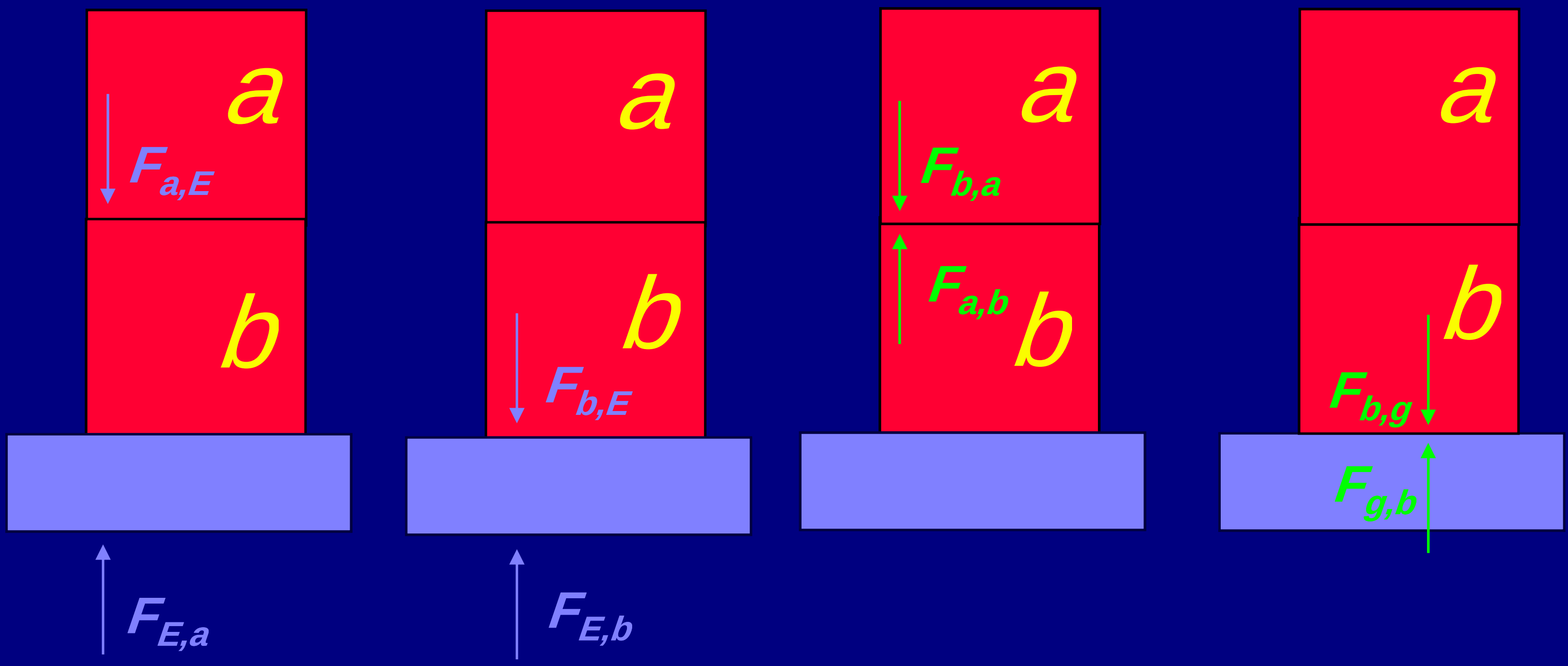


الف) 2

ب) 3

ج) 4

حل مسئله:



(c) *4*

یادآوری نهایی:

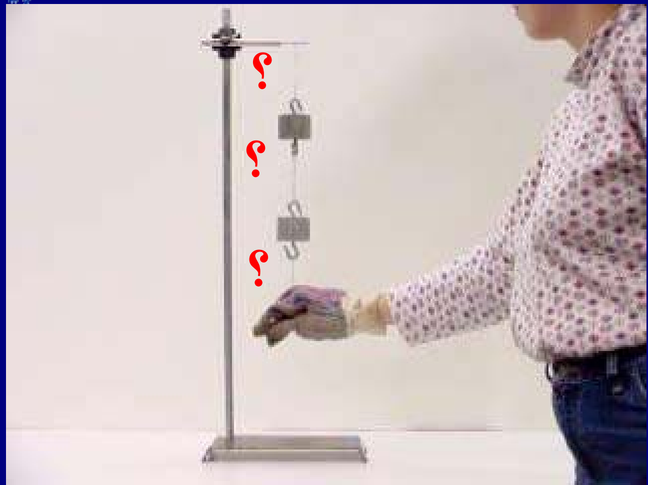
- سه قانون نیوتن :

قانون اول نیوتن : اگر به جسمی ازخارج نیرو وارد نشود و اگر از یک چارچوب مرجع لخت به آن نگاه کنیم ساکن می ماند و یا حرکت مستقیم الخط یکنواخت خواهد داشت.

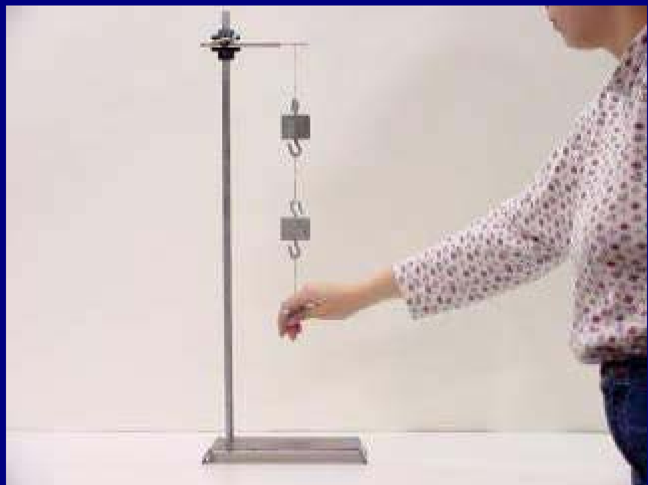
قانون دوم نیوتن : برای هر جسم : $F_{NET} = \Sigma F = ma$

قانون سوم نیوتن : نیروها به صورت جفت روی می دهند. $F_{A,B} = - F_{B,A}$:

- **حل** مسائل کتاب را فراموش نکنید!



یک سئوا ل: دووزنه مطابق تصویر روبرو به همدیگر متصل و روی پایه ای آویزان هستند.آگر نخ متصل به وزنه پایین را به آرامی بکشیم نخ وسط دو وزنه یا نخ متصل به وزنه پایینی یا نخ متصل به وزنه بالایی کدام یک پاره می شود؟
اکنون روی تصویر کلیک کرده و با جوابی که داده اید درستی پاسخ خود را بسنجید.



اکنون اگر نخ را سریعا بکشیم کدام نخ پاره می شود؟
روی تصویر برای درستی جوابی که داده اید کلیک کنید.
دلیلی برای آن بیاورید.

فصل پنجم

دینامیک ذره

قسمت اول

درس امروز ما:

- بحث بیشتری در مورد دینامیک

یادآوری

دیاگرام جسم آزاد

ابزاری برای طرح مسئله و حل آن:

» طناب و قرقره(کشش)

» قانون هوک(فنرها)

مرور قوانین نیوتن :

قانون اول : اگر به جسمی ازخارج نیرو وارد نشود و اگر از یک چارچوب مرجع لخت به آن نگاه کنیم ساکن می ماند و یا حرکت مستقیم الخط یکنواخت خواهد داشت.

قانون دوم : برای یک جسم : $F_{NET} = \Sigma F = ma$

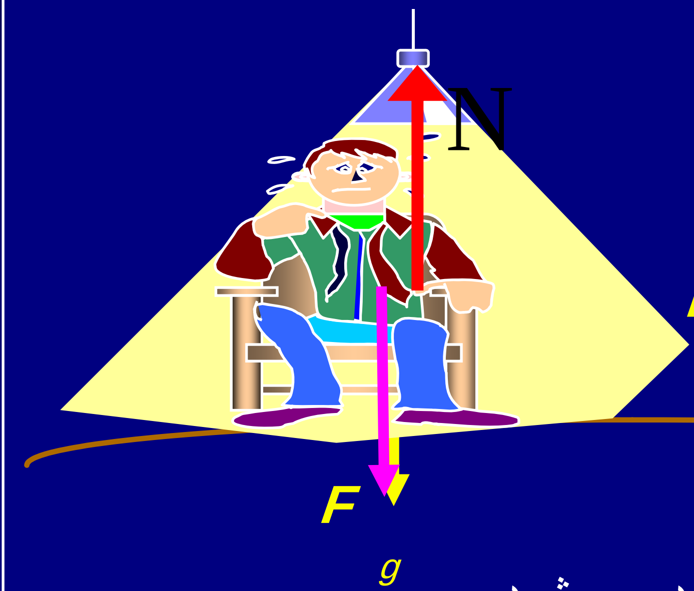
قانون سوم : نیروها به صورت جفت روی می دهند : $F_{A,B} = - F_{B,A}$

(برا ی هر عملی عکس العملی مساوی ودرخلاف جهت وجود دارد)

$F_{A,B}$ نیرویی است که جسم A به جسم B وارد می‌کند و $F_{B,A}$ نیرویی است که جسم B به جسم A وارد می‌کند.

یک مسئله در مورد جاذبه:

- چه نیرویی از طرف زمین بردانشجویی که روی صتدلی نشسته است وارد می شود؟



- جرم دانشجو: $m = 55kg$
- $g = 9.8\ m/s^2$.
- $F_g = mg = (55\ kg)x(9.8\ m/s^2)$
- $F_g = 539\ N$

- نیروی جاذبه وارد بر اجسام همان وزن اجسام نامیده می شود

$W = 539\ N$

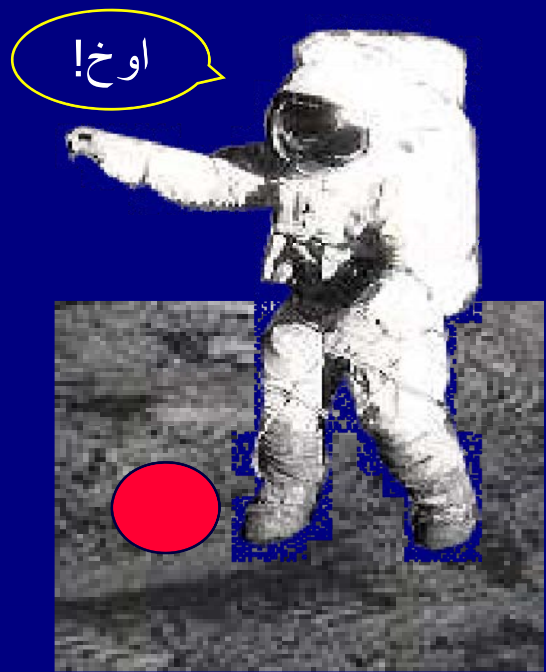
جرم و وزن :

- فضانوردی به توپ بولینگ در روی کره زمین لگد می زند و پایش درد می گیرد همین فضانورد با نیروی مساوی به همین توپ در روی کره ماه لگد می زند دراینصورت : پایش درد می گیرد:

الف) بیشتر

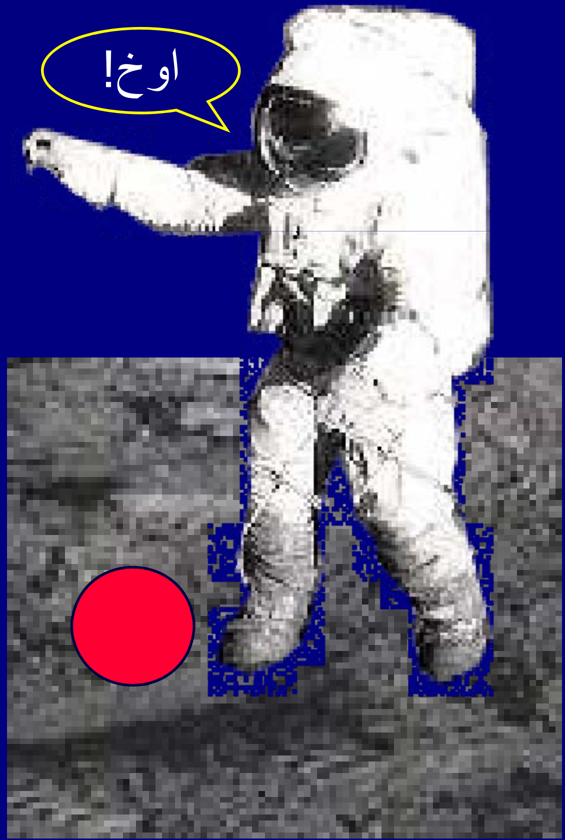
ب) کمتر

ج) به همان اندازه



پاسخ:

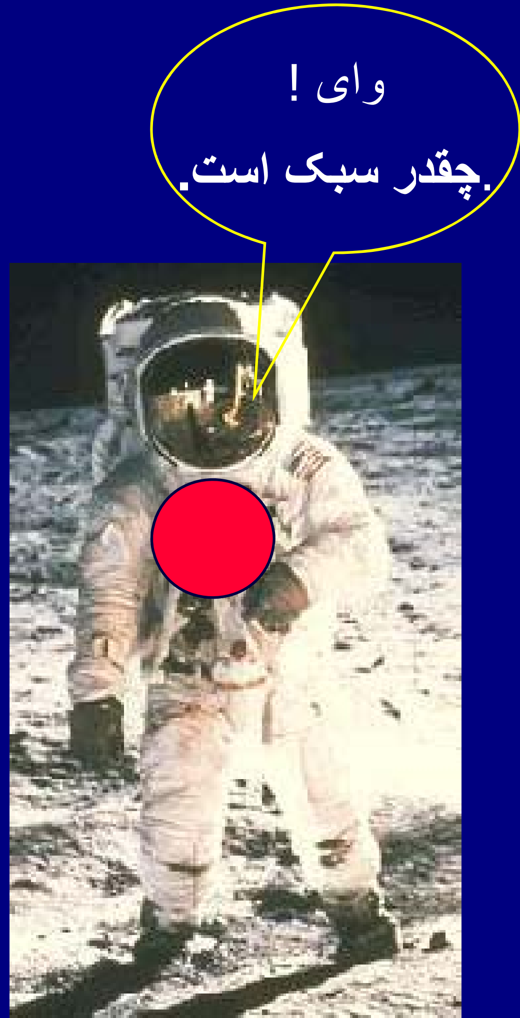
- ***جرم*** *توپ در هر دو جا یکسان است لذا* ***مقاومت*** **توپ در مقابل لگد یکسان بوده و پای او به همان اندازه درد می گیرد!.**



ادامه پاسخ:

- ولی وزن فضانورد و توپ کمتر است:
- بنابراین برداشتن توپ در کره ماه ساده تر از کره زمین است زیرا:

$W = mg_{Moon}$ $g_{Moon} < g_{Earth}$



دیاگرام جسم آزاد:

- قانون دوم نیوتن می گوید که : $F = ma$
- نکته اصلی دراینجا این است که این رابطه برای یک جسم است.
- بنابراین قبل از به کاربردن رابطه $F = ma$ درمورد یک جسم نیروهای وارد برا آن را مشخص می کنیم:

دیاگرام جسم آزاد:

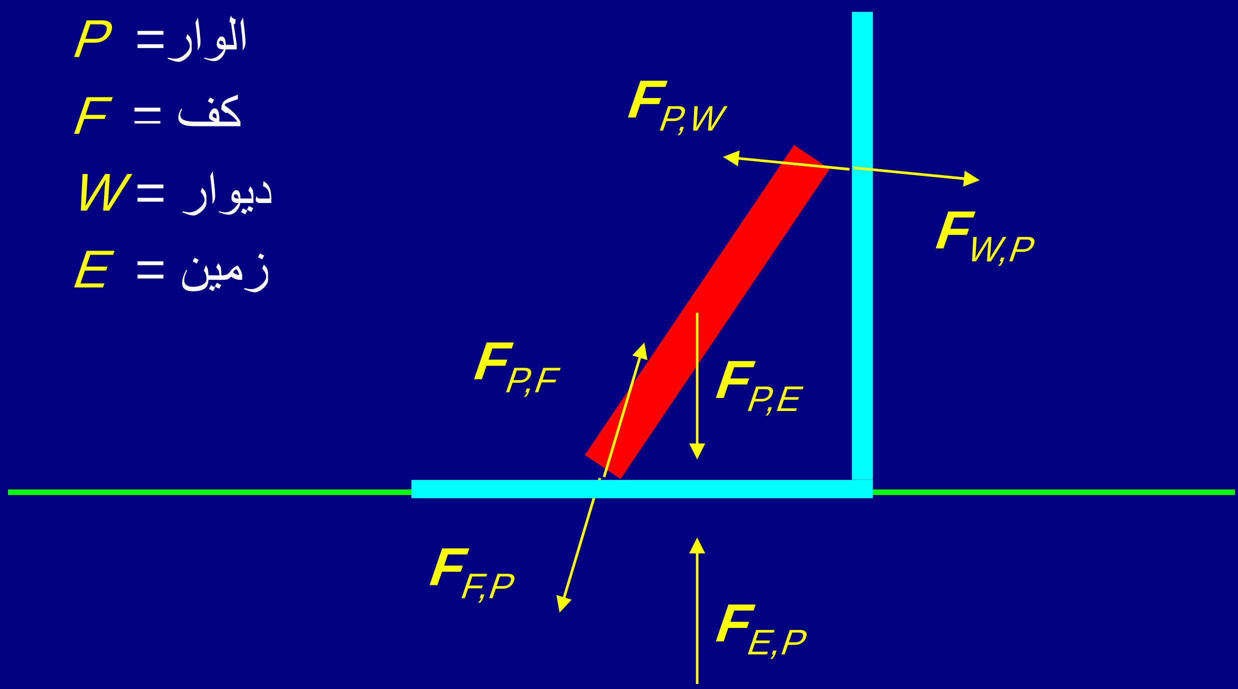
- مورد زیر را در نظر بگیرید:
  - چه نیروهایی براین الوار وارد می شود؟

الوار = P

کف = F

دیوار = W

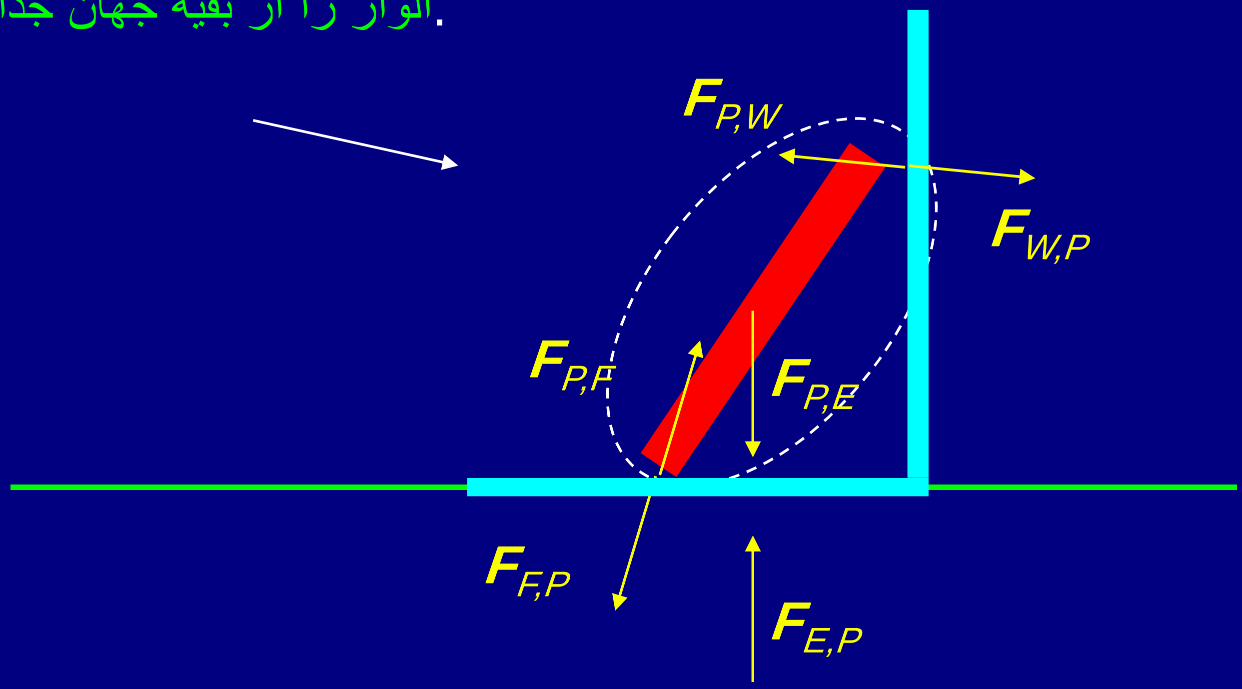
زمین = E



ادامه دیاگرام جسم آزاد...

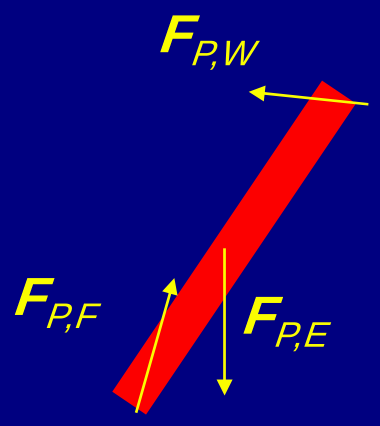
- مورد زیر را در نظر بگیرید:
  - چه نیروهایی براین الوار وارد می شود؟

.الوار را از بقیه جهان جداکنید.



ادامه دیاگرام جسم آزاد...

- نیروهای وارد بر الوار خود را نشان می دهند:

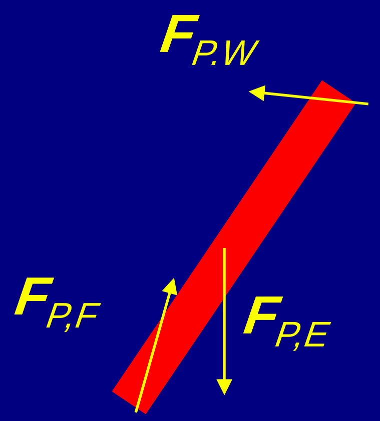


گذشته از این ...

- دراین مثال الوار حرکت نمی کند.

🡐مطمئنا شتاب نخواهد داشت.

🡐لذا در رابطه $F_{NET} = ma$ خواهیم داشت $F_{NET} = 0$



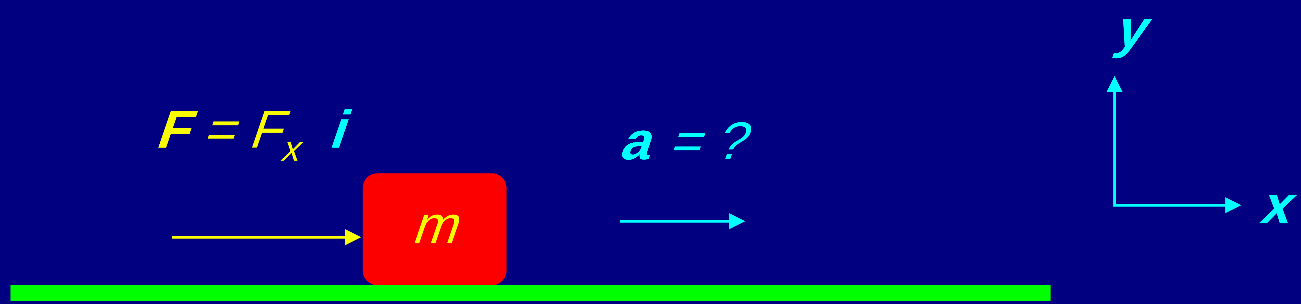
$$F_{P,W} + F_{P,F} + F_{P,E} = 0$$

🡐و این نظریه اساسی مطرح در استاتیک (ایستایی شناسی) است.

مثال :

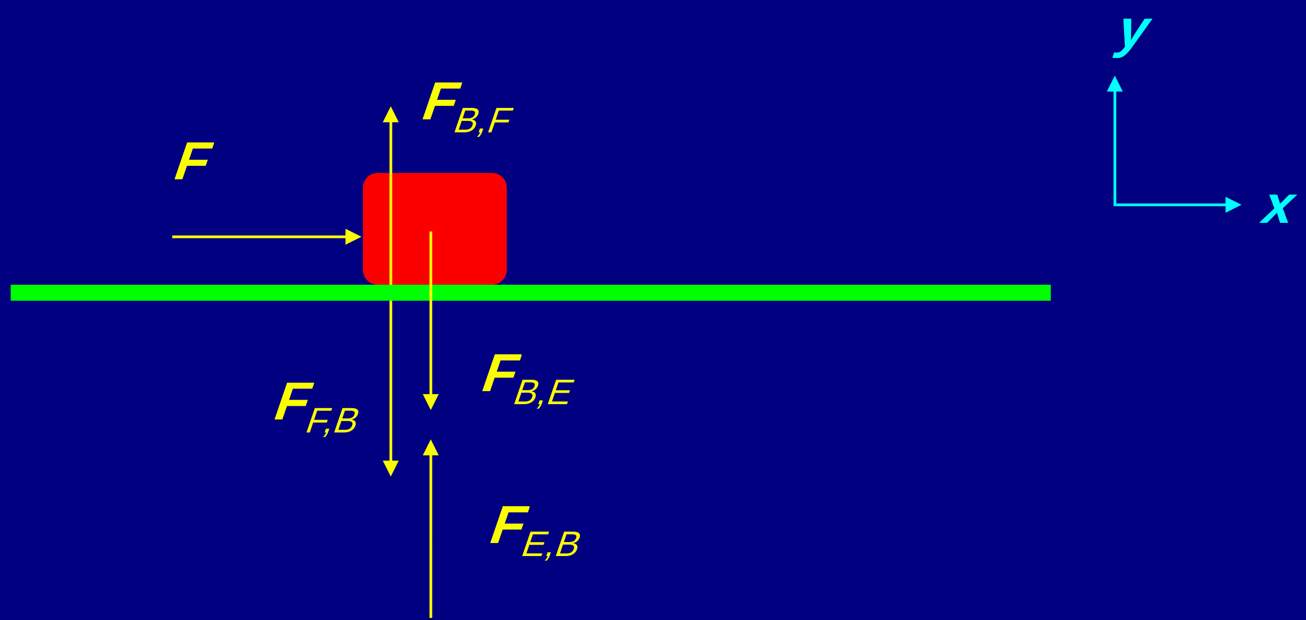
- یک مثال از دینامیک:

جعبه ای به جرم $m = 2\ kg$ روی سطح افقی بدون اصطکاک می لغزدو نیروی $F_x = 10\ N$ درجهت x به آن واردمی شود .شتاب جعبه چقدرا ست؟



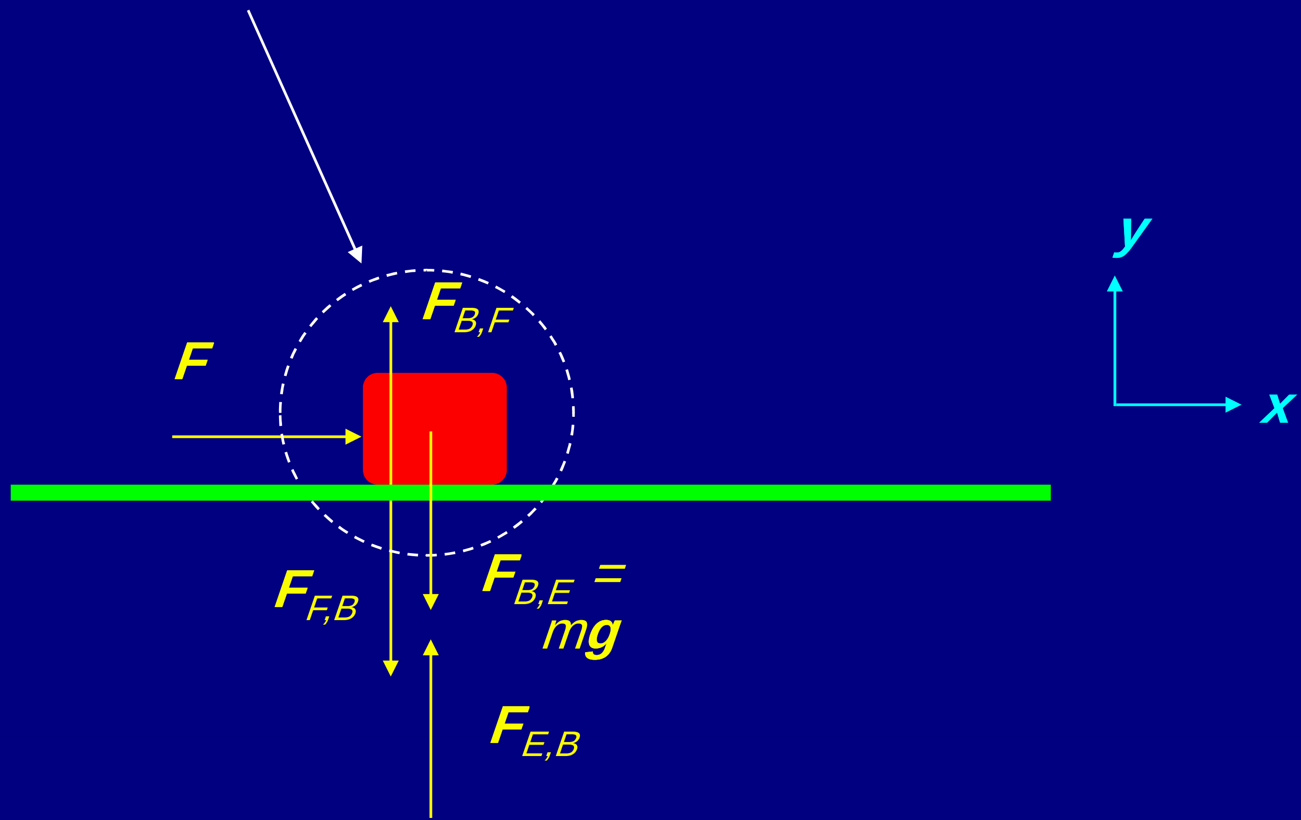
ادامه...

- نموداری بکشید که کلیه نیروهای وارد بر جعبه رانشان می دهد:



ادامه....

- تصویری بکشید که همه نیروها وارد مشخص باشد:
- نیروهای وارد برجسم را جداکنید:



ادامه...

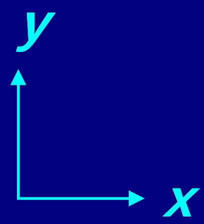
- تصویری بکشید که همه نیروها وارد مشخص باشد:
- نیروهای وارد برجسم را جداکنید:
- نمودار جسم آزاد را بکشید:

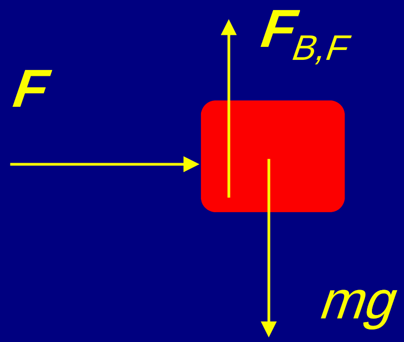
ادامه...

- تصویری بکشید که همه نیروها وارد مشخص باشد:
- نیروهای وارد برجسم را جداکنید:
- نمودار جسم آزاد را بکشید:
- معادلات نیوتن را برای هر مولفه حل کنید:

$\Leftarrow \quad F_X = ma_X$

$\Leftarrow \quad F_{B,F} - mg = ma_Y$

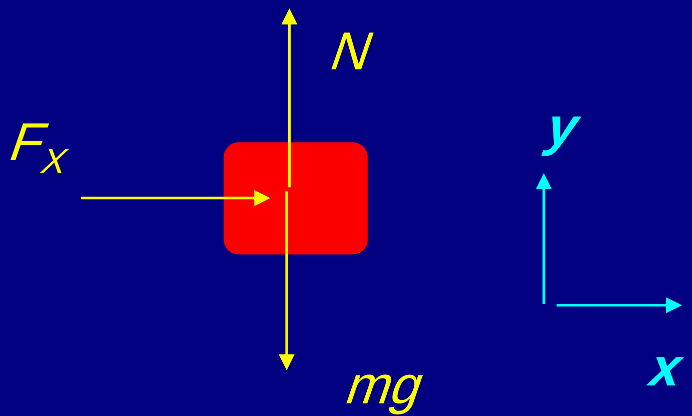




ادامه...

$$F_X = ma_X$$

🡐 $a_X = F_X / m = (10\ N)/(2\ kg) = 5\ m/s^2$.



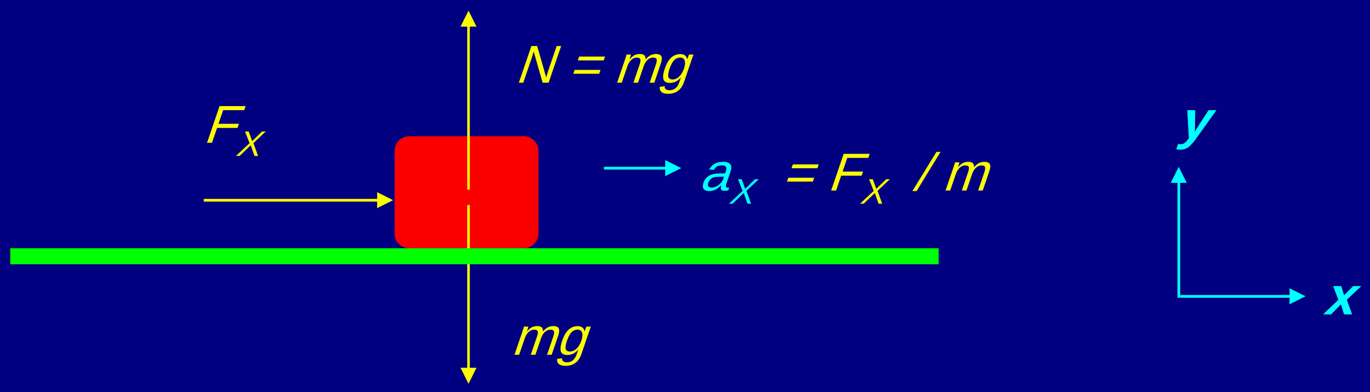
$$F_{B,F} - mg = ma_Y$$

🡐 چون $a_Y = 0$

🡐 لذا : $F_{B,F} = mg$

- مولفه قائم نیروی واردبرجسم ($F_{B,F}$) را اغلب نیروی قائم می گویند (N)
- چون $a_Y = 0$ است لذا دراین مورد $N = mg$ است.

یادآوری مثال...



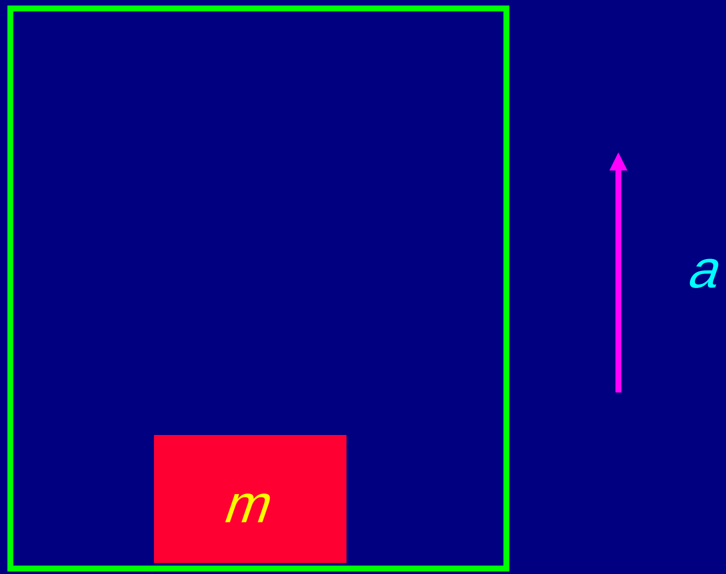
نیروی قائم

- روی کف آسانسوری که به سمت بالا دارای شتاب است ***m*** جعبه ای به جرم قراردارد. رابطه بین نیروی گرانشی و نیروی قائم وارد برجعبه چیست ؟

(الف) $N > mg$

(ب) $N = mg$

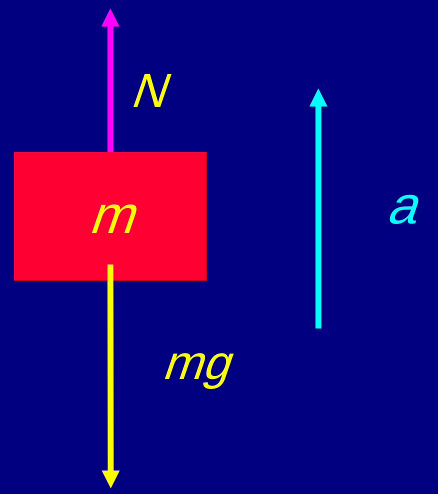
(ج) $N < mg$



پاسخ:

کلیه نیروهای وارد برجسم درامتداد قائم هستند:

$$F_{total} = ma$$



$$N - mg = ma$$

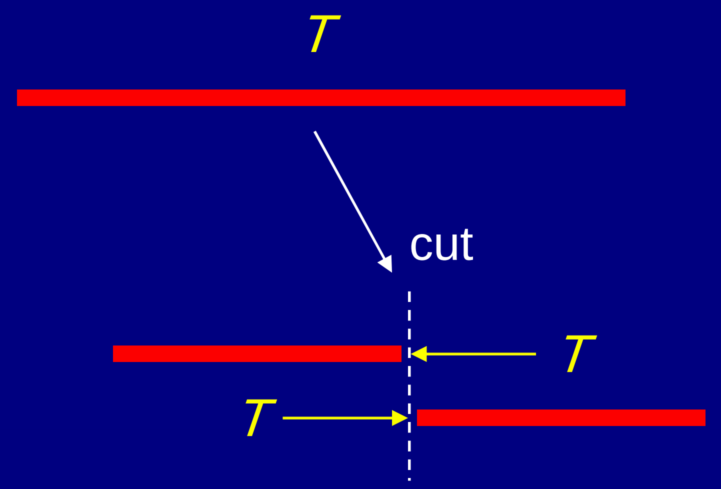
$$N = ma + mg$$

لذا:

$$N > mg$$

ابزار : طناب و فنر

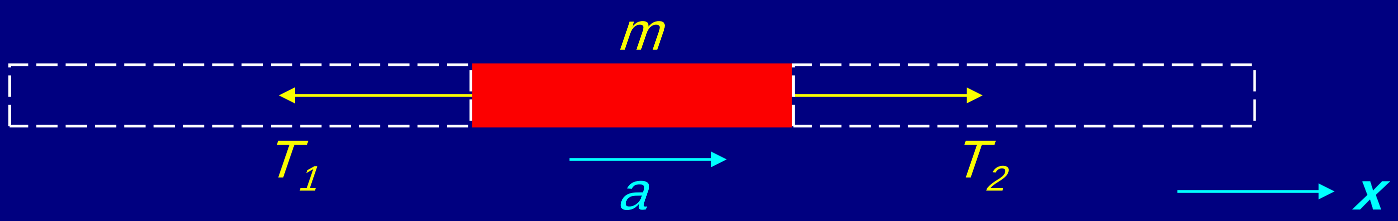
- برای کشیدن یک جسم از یک فاصله بکار می رود.
- کشش *(T)* دریک نقطه از طناب برابر با بزرگی نیرویی است که به یک سطح مقطع از طناب در یک نقطه وارد می شود.
  - این نیرو را احساس خواهید کرد اگر بخواهید با کشیدن طناب ازدوسر آن پاره کنید.
  - یک جفت نیروی عمل و عکس العمل است.



ابزار : طناب و فنر

- یک تکه کوچک افقی از طنابی به جرم m درنظر بگیرید :

  ⬅نمودار جسم آزاد را بکشید(ازنیروی جاذبه صرفنطر کنید).



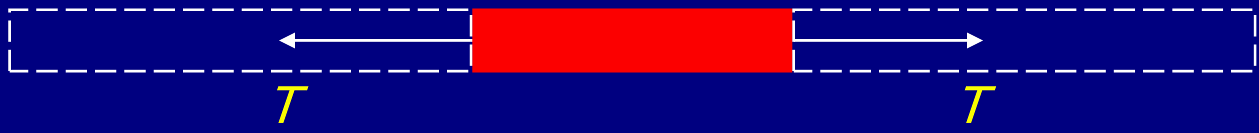
- بااستفاده از قانون دوم نیوتن(درجهت x) :

$$F_{NET} = T_2 - T_1 = ma$$

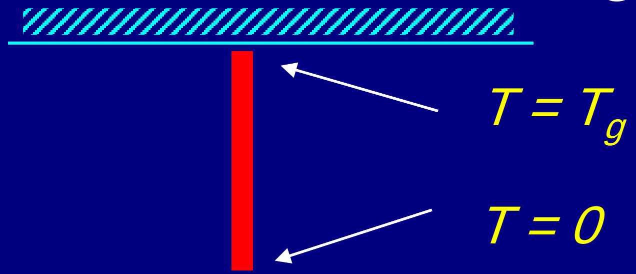
- لذا اگر ($m = 0$) یعنی اگر طناب سبک باشد)دراینصورت $T_1 = T_2$

ابزار : طناب و فنر

- یک طناب آرمانی (بدون جرم)درطولش دارای کشش ثابتی خواهد بود.



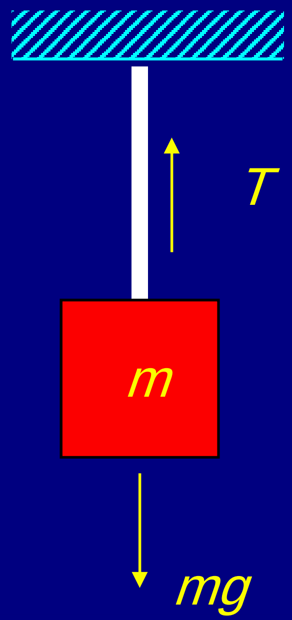
- اگر طناب دارای جرم باشد کشش در طول آن متغییر خواهد بود.
  - مثلا در مورد یک طناب سنگین آویزان..



- ما بیشتر با طناب آرمانی سروکارداریم.

ابزار : طناب و فنر

- جهت نیرویی که طناب وارد می کند در طول طناب خواهد بود:

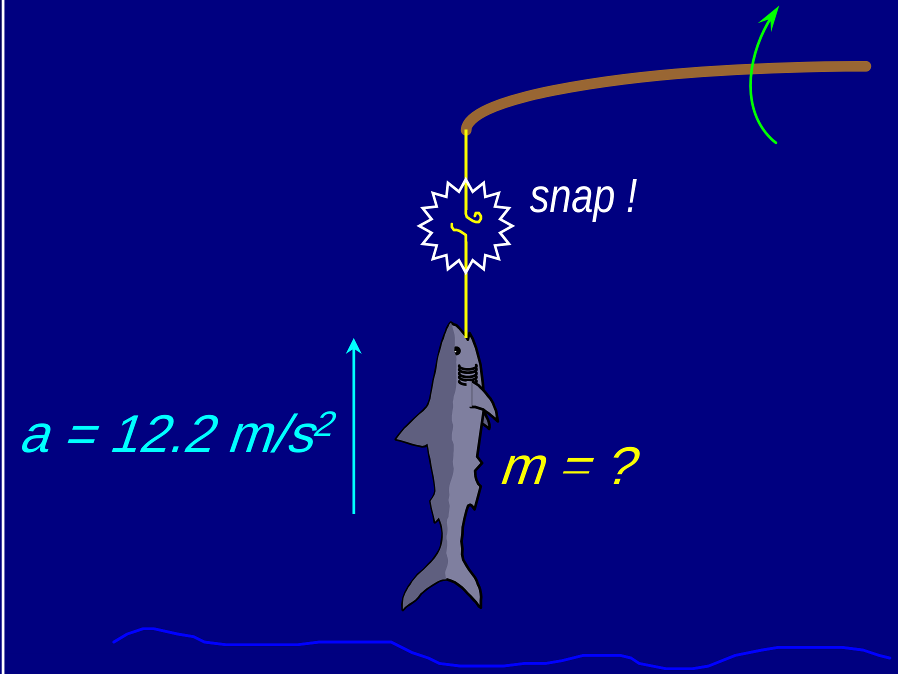


ولی $a_y = 0$ (جعبه حرکت نمی کند) پس:

$$\boxed{T = mg}$$

نیرو و شتاب

- به وسیله یک نخ ماهیگیری که می تواند کشش ***180 N*** *را تحمل کند یک ماهی را* *می‌گیریم.* وقتی که ماهی برای رهایی خود شتاب ***$12.2\ m/s^2$*** *ایجاد می ککند* .
می کند نخ ماهی گیری پاره می شود. وزن ماهی چقدراست؟

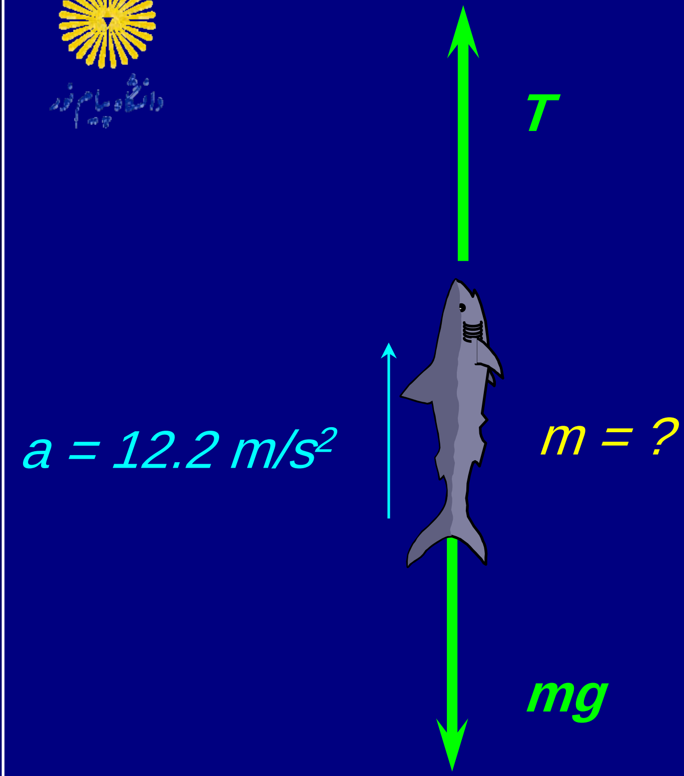


(الف) 14.8 *kg*

(ب) 18.4 *kg*

(ج) 8.2 *kg*

پاسخ:



- قانون دوم نیوتن را در جهت قائم بکاربرید:
- دیاگرام جسم آزاد را بکشید!!

$$T - mg = ma$$

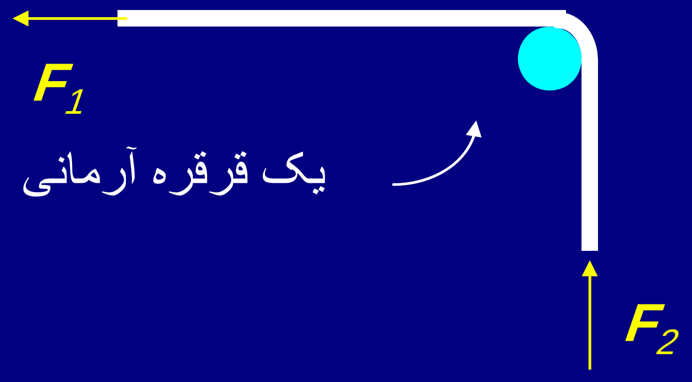
$$T = ma + mg = m(g+a)$$

$$\Rightarrow \quad m = \frac{T}{g+a} \qquad \Rightarrow \quad m = \frac{180N}{(9.8+12.2)m/s^2} = 8.2kg$$

ابزا ر: قرقره

- برای تغییر جهت نیرو بکار می رود.

➔یک قرقره آرمانی بدون تغییر بزرگی نیرو جهت نیرو را تغییر می دهد.:

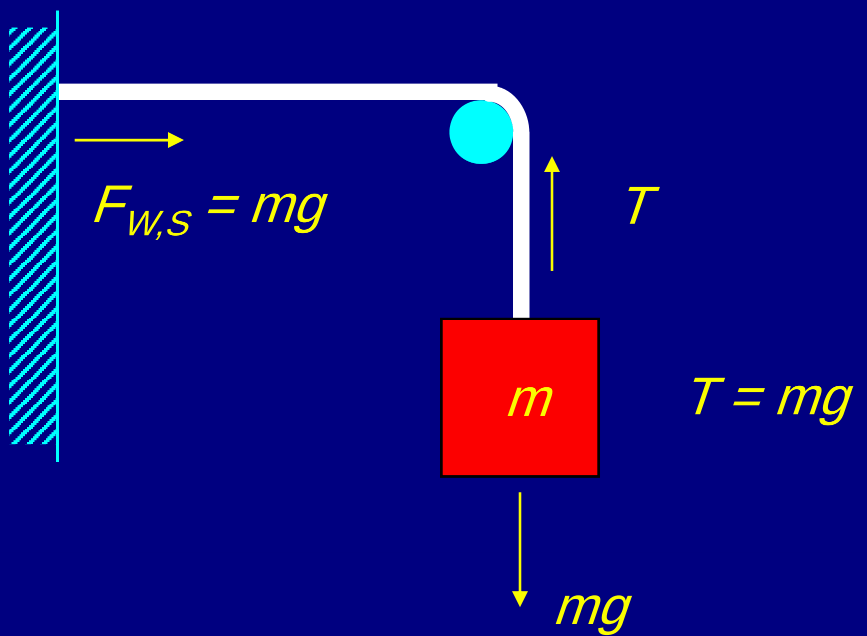


$$|F_1| = |F_2|$$

ابزا ر: قرقره

- برای تغییر جهت نیرو بکار می رود.

➔یک قرقره آرمانی بدون تغییر بزرگی نیرو جهت نیرو را تغییر می دهد :



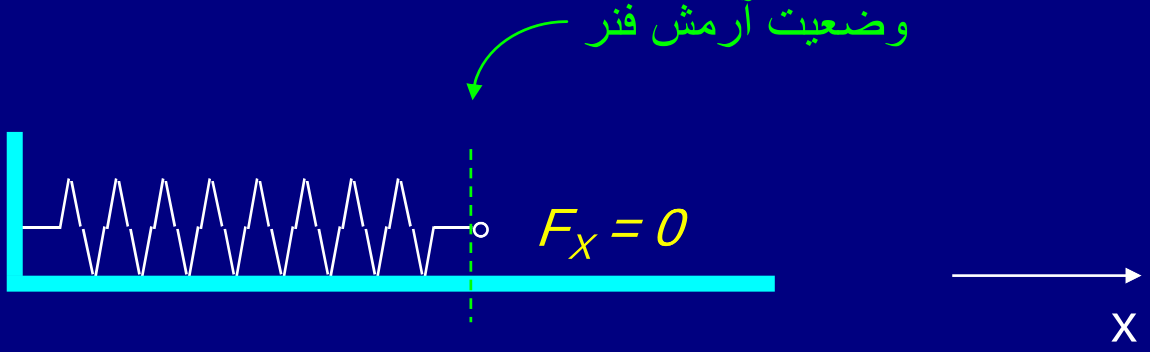
فنرها:

- **قانون هوک :** نیرویی که یک فنر وارد می کند متناسب با طول کشیده و متراکم شده فنر نسبت به وضعیت آرامش آن :

$$F_x = -k\, x$$

که x جابه جایی فنر از وضعیت آرامش فنر است و

k ثابت سختی یا تناسب فنر است.

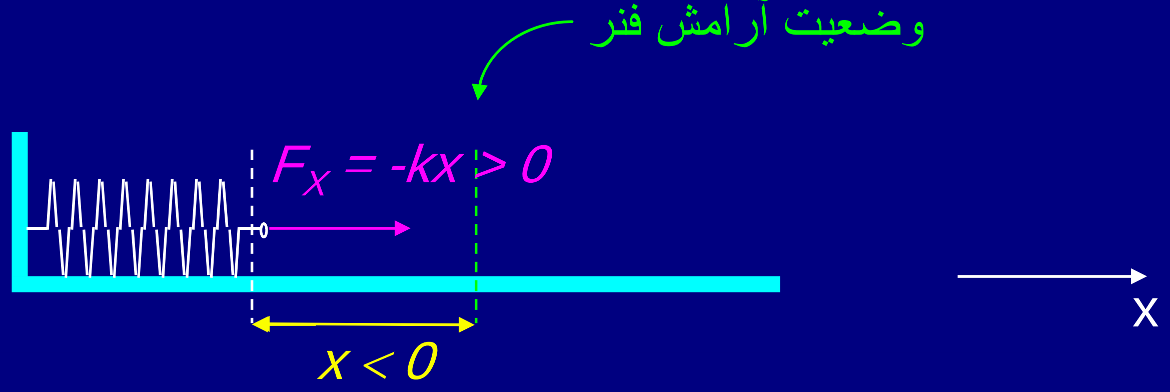


فنرها:

- **قانون هوک :** نیرویی که یک فنر وارد می کند متناسب با طول کشیده و متراکم شده فنر نسبت به وضعیت آرامش آن :

$$F_X = -k\,x$$

- که x جابه جایی فنر از وضعیت آرامش فنر است و
  k ثابت سختی یا تناسب فنر است.



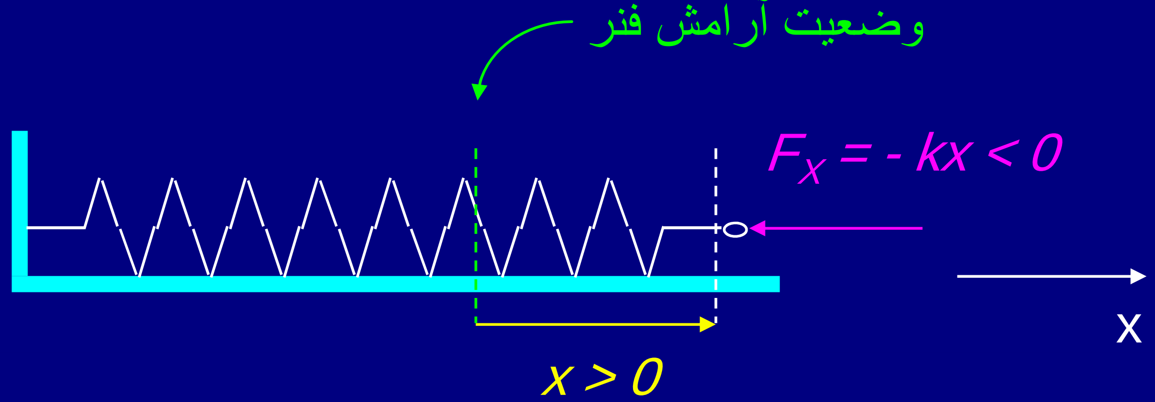
فنرها:

- **قانون هوک :**نیرویی که یک فنر وارد می کند متناسب با طول کشیده و متراکم شده فنر نسبت به وضعیت آرامش آن :

$$F_x = -k\,x$$

که x جابه جایی فنر از وضعیت آرامش فنر است و k ثابت سختی یا تناسب فنر است.

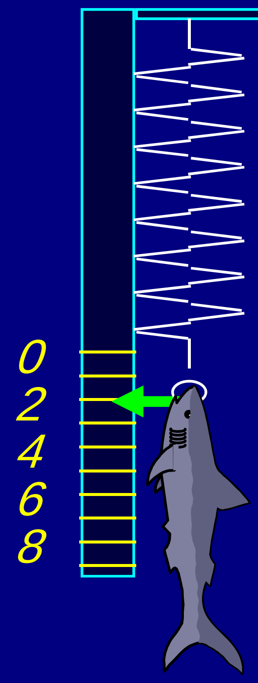
.



ترازوی فنری

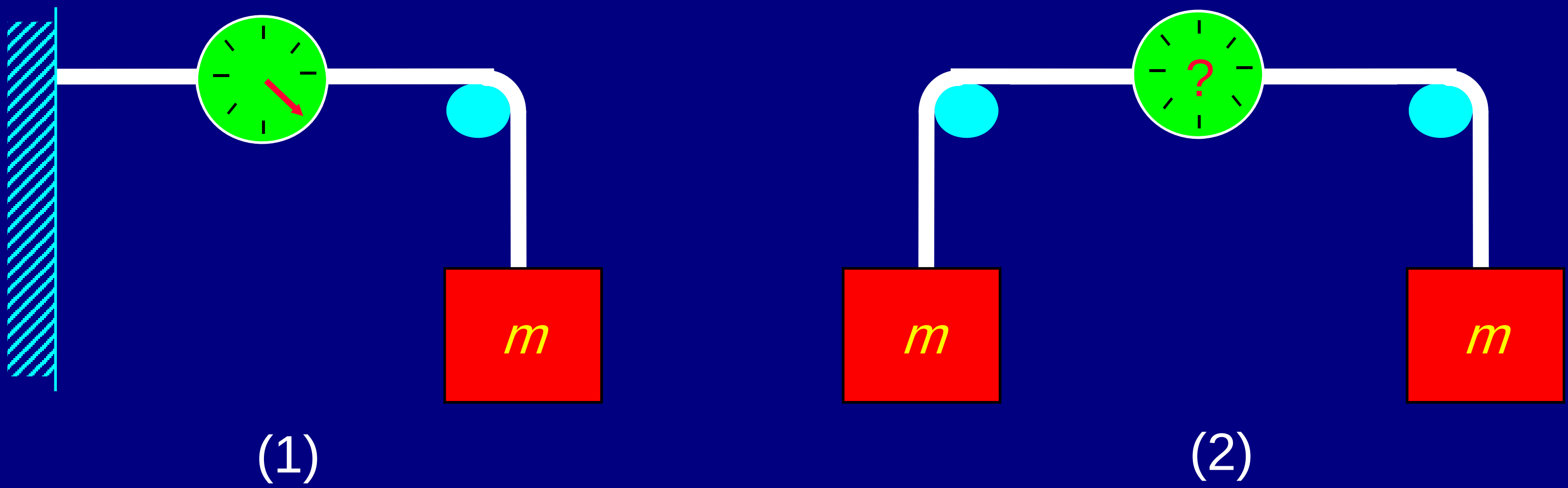
- فنر را برای اندازه گیری نیروی اعمالی می توان مدرج کرد:
  - ← میتوانیم ترازوی فنری را برحسب نیوتن مدرج بکنیم و یا...
  - ← این ترازوها را اغلب برحسب نیوتن یا پوند مدرج می کنند..

1 lb = 4.45 N



شتاب و نیرو

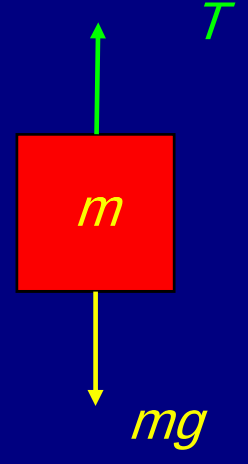
- درشکل (۱) ترازوی فنری نیروی ۴۰ نیوتن را نشان میدهد . در شکل (۲) چه نیرویی را نشان می دهد؟



(ج) $0\ N.$ (ب) $40\ N.$ (الف) $80\ N.$

پاسخ:

- نمودار جسم آ زاد را برا ی جسم بکشید!!



$T = mg$

- قانون دوم نیوتن را بکار برید::

زیرا جسم در حالت سکون $a = 0$ است

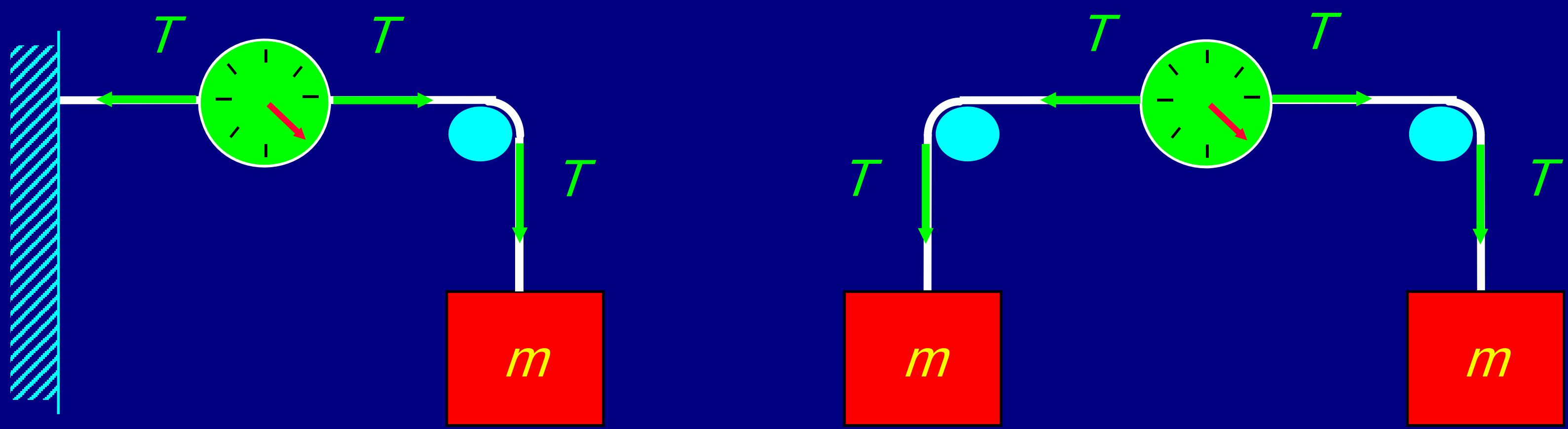
$$F_{TOT} = 0$$

$$T - mg = 0$$

$$T = mg = 4\ lbs.$$

پاسخ:

- در هر دو حالت طناب کشش $T = 40\ N$ را نشان می دهد.!



یک آزمایش :

روی تصویر کلیک کنید!

یادآوری نهایی...

بحث بیشتری در مورد دینامیک

یادآوری

دیاگرام جسم آزاد

ابزاری برای طرح مسئله و حل آن:

کشش(طناب و قرقره)

فنرها(قانون هوک)

درس امروز ما...

- یادآوری
- مسئله... مسئله...مسئله...!!
  - شتاب سنج
  - سطح شیبدار
  - حرکت دایره ای

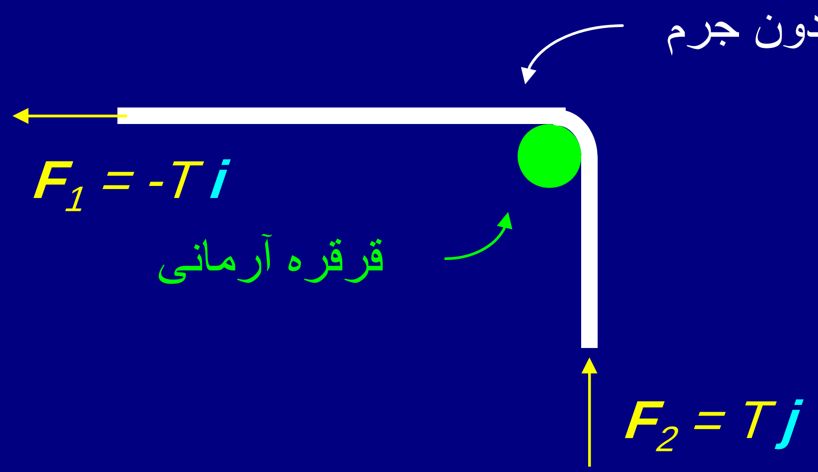
مرور...

- بحث روی دیناميک
  - مرور قنون سوم نيوتن
  - دياگرام جسم آزاد
  - ابزار ايجاد و حل مسئله :
    - طناب و قرقره (کشش)
    - قانون هوک (فنرها)

مرور قرقره ها

- برای تغییر جهت نیرو بکار می رود

➔ یک قرقره بدون جرم جهت نیرو را بدون تغییربزرگی کشش نخ تغییر می دهدو کشش در هردو طرف نخ یکسان است . :



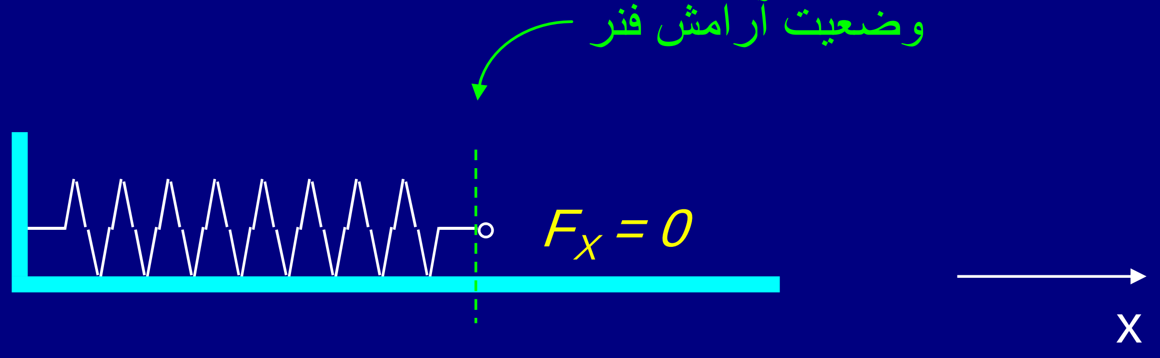
$$|F_1| = |F_2|$$

مرور فنرها

- **قانون هوک :**نیرویی که یک فنر وارد می کند متناسب با طول کشیده و متراکم شده فنر نسبت به وضعیت آرامش آن :

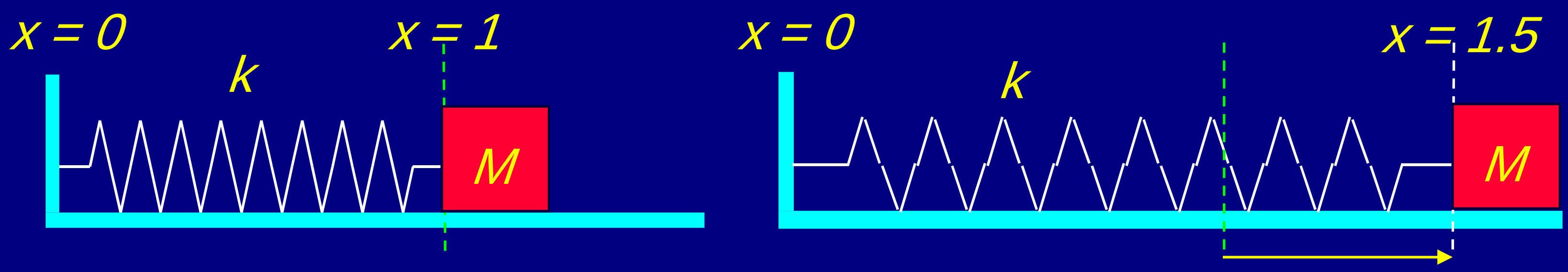
$$F_X = -k\,x$$

که x جابه جایی فنر از وضعیت آرامش فنر است و
k ثابت سختی یا تناسب فنر است.



فنرها

- فنری با سختی $40\ N/m$ دارای درحالت آرامش $1\ m$ *است*.وقتی فنر تا طول $1.5\ m$ کشیده شودچه نیرویی به جسمی که به آن بسته شده است وارد می کند؟



(الف) $-60\ N$　　(ب) $60\ N$　　(ج) $-20\ N$

پاسخ:

- قانون هوک را به خاطر بیاورید:

← $F_X = -kx$ که x جابه جایی نسبت به وضعیت تعادل است.

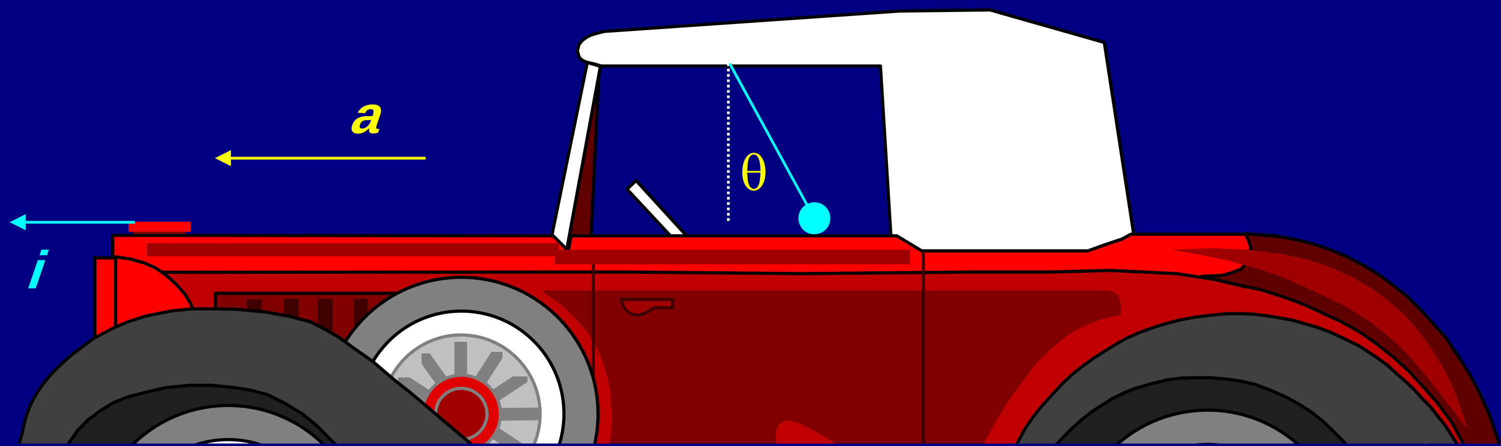
$$F_X = -(40)(.5)$$

$$F_X = -20\ N$$

(ج) $-20\ N$ (ب) $60\ N$ (الف) $-60\ N$

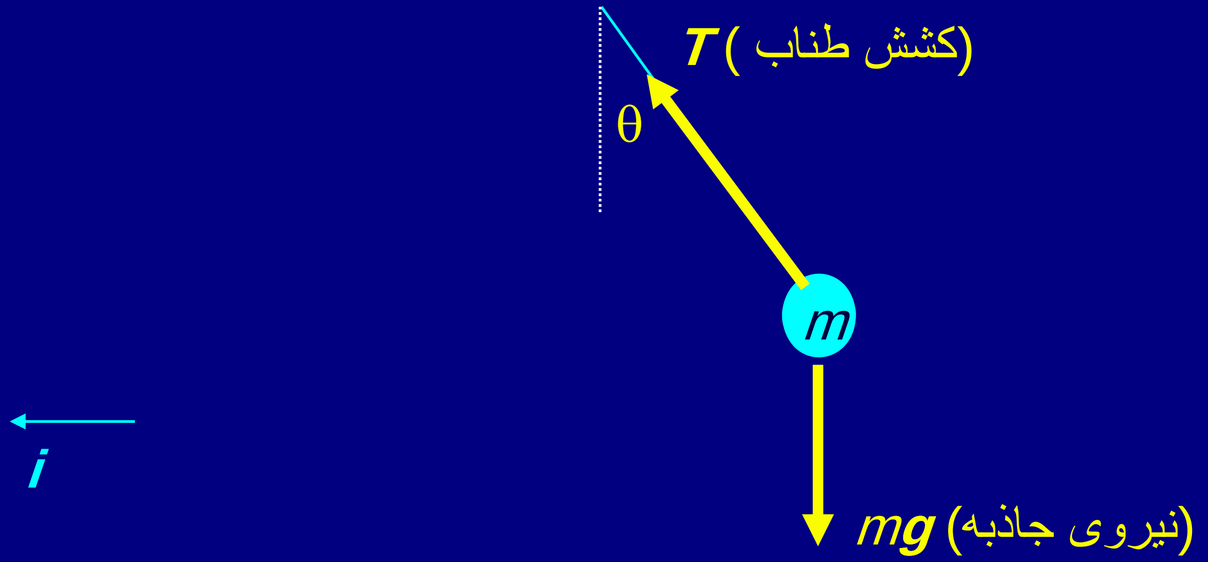
مسئله شتاب سنج

- وزنه m به وسیله طناب بدون جرمی به سقف ا تومبیلی بسته شده است این اتومبیل روی جاده افقی باشتاب a درجهت x حرکت می کند. .طناب زاویه θ با وضعیت قائم می سازد (y) . θ را برحسب a و g دست آورید



شتاب سنج...

- دیاگرام جسم آزاد را برای جسم آویزان بکشید:
  - ← چه نیروهایی وارد می شوند؟



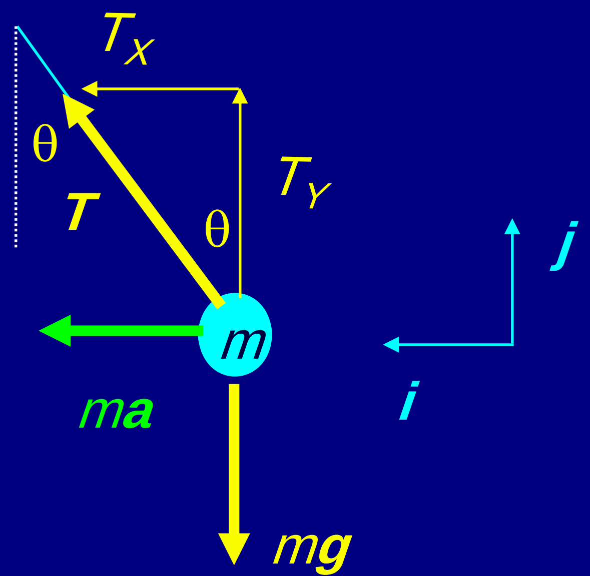
شتاب سنج...

- <u>قانون دوم نیوتن را در مورد مولفه نیروها بکار ببرید:</u>

i: $F_X = T_X = T \sin\theta = ma$

j: $F_Y = T_Y - mg$

$= T \cos\theta - mg = 0$



شتاب سنج...

- با استفاده از مولفه های نیروها:

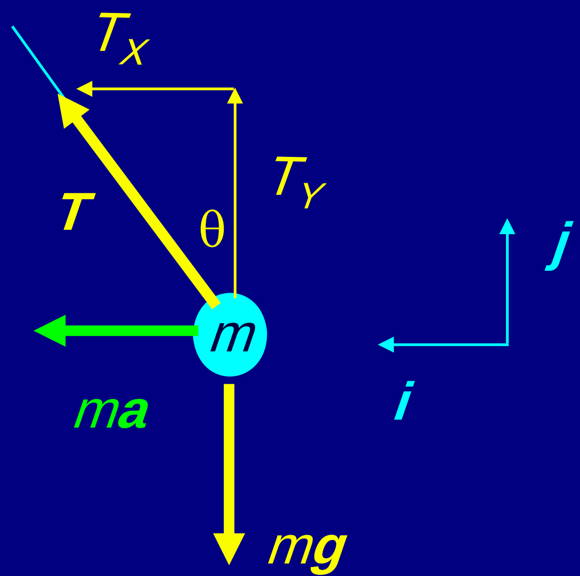
i: $T \sin\theta = ma$

j: $T \cos\theta - mg = 0$

T را بین دو رابطه فوق حذف کنید

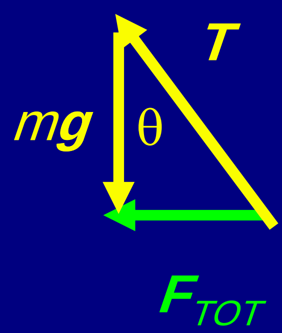
$$\frac{T \sin\theta = ma}{T \cos\theta = mg}$$

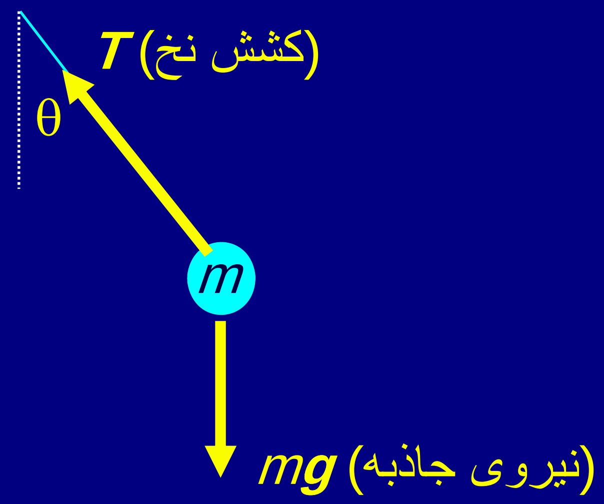
$$\boxed{\tan\theta = \frac{a}{g}}$$



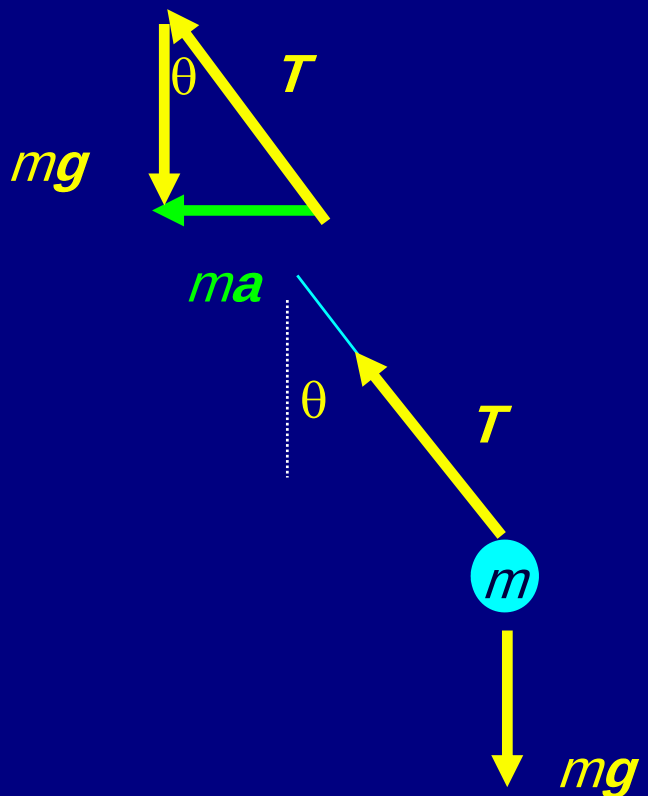
شتاب سنج...

- راه حل دیگر با استفاده از بردارها:
- نیروی کل وخا لص F_{NET} حساب کنید:





شتاب سنج...



- راه حل دیگر با استفاده از بردارها:
- نیروی کل وخا لص F_{NET} حساب کنید:
- به خاطر داشتید که : $F_{NET} = ma$

$$\tan\theta = \frac{ma}{mg} = \frac{a}{g} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tan\theta = \frac{a}{g}}$$

شتاب سنج...

- اعداد را جاگذاری کیند::

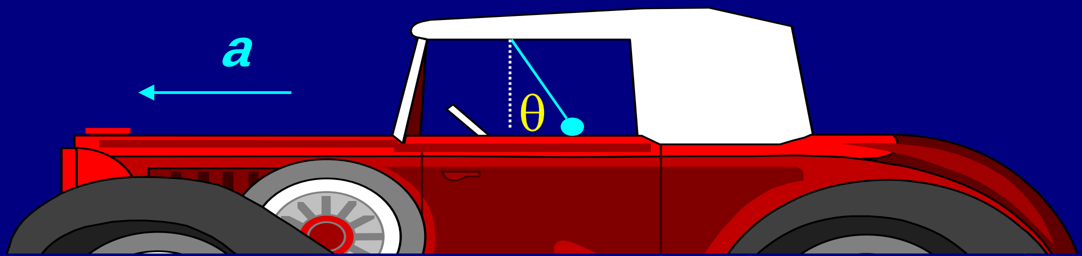
- فرض کنید که سرعت اتومبیل در ۱۰ ثانیه ا ز 0 به 60 mph برسد.

$60\ mph = 60 \times 0.45\ m/s = 27\ m/s.$

شتاب $a = \Delta v/\Delta t = 2.7\ m/s^2$

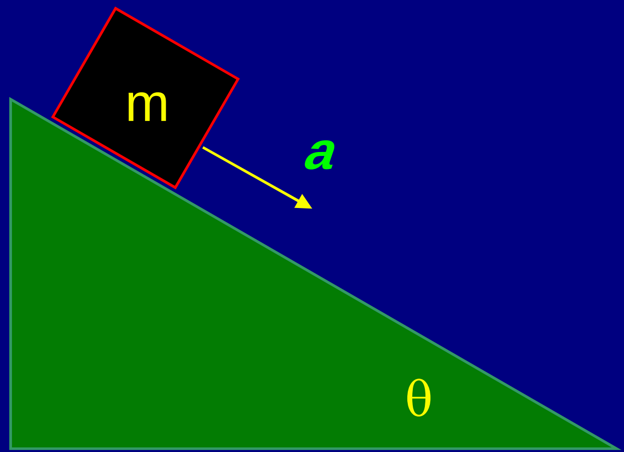
بنابراین $a/g = 2.7 / 9.8 = 0.28$

$\theta = \arctan(a/g) = 15.6\ deg$



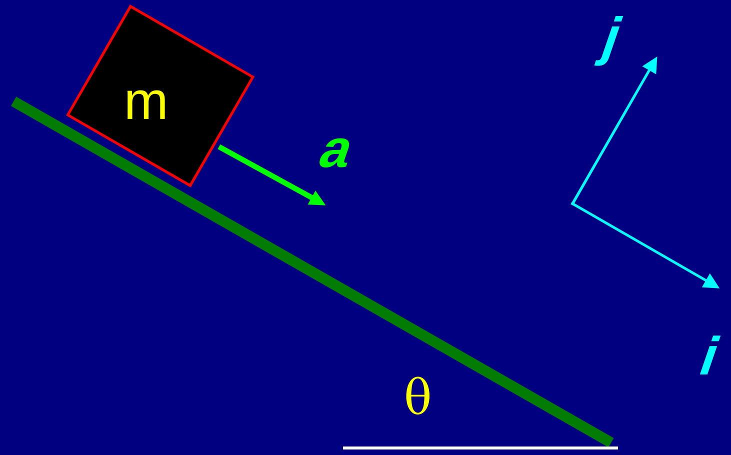
سطح شیبدار

- تخته ای به جرم m روی سطح شیبداری به شیب θ نسبت به افق به پایین می لغزد شتاب a آن چقدر است؟



سطح شیبدار...

- محورهای مختصات را موازی و عمود برسطح شیبدار تعریف می کنیم:
  ← شتاب a درجهت x است.

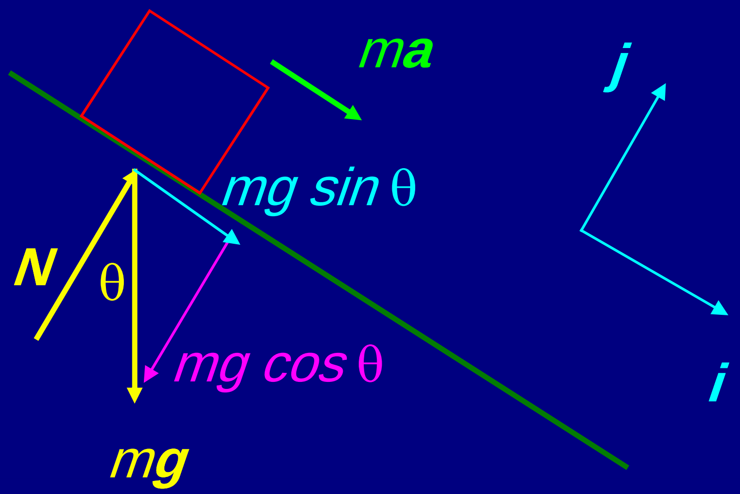


سطح شیبدار...

- مولفه x و y به طور جداگانه درنظربگیرید:.

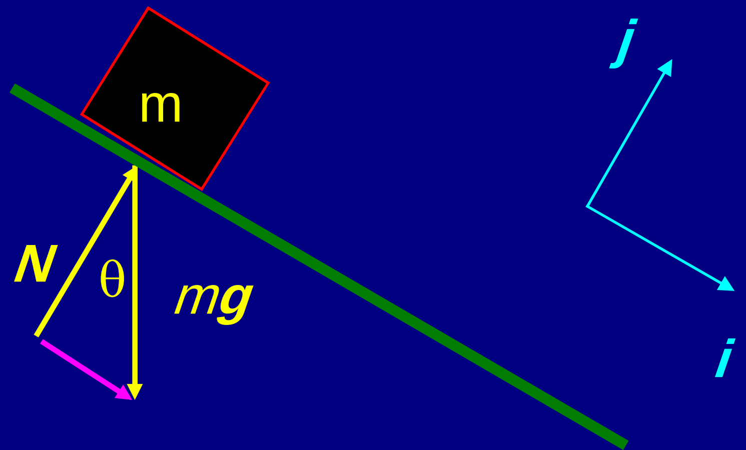
- i: $mg \sin\theta = ma$. ⇨ $\boxed{a = g \sin\theta}$

- j: $N - mg \cos\theta = 0$. ⇨ $\boxed{N = mg \cos\theta}$



سطح شیبدار...

- پاسخ با توجه به بردارها وقانون دوم نیوتن :

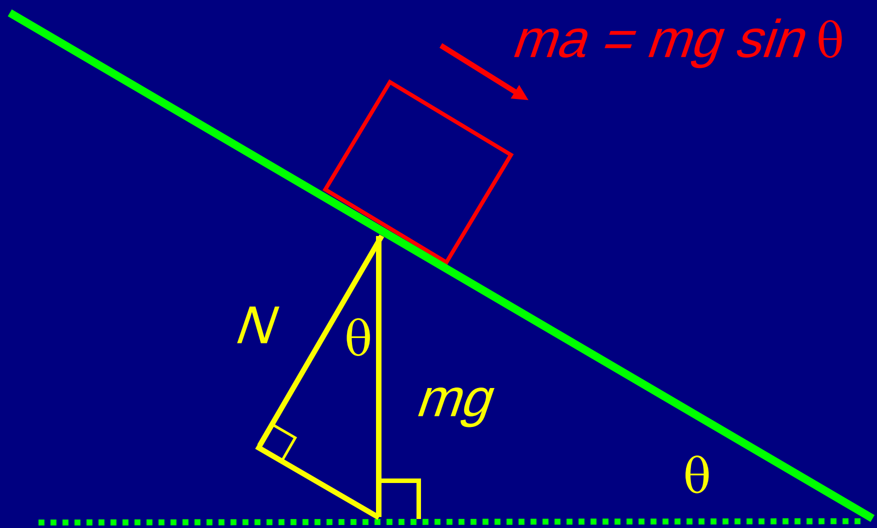


$$\mathbf{a} = g \sin\theta \ \mathbf{i}$$

$$\mathbf{N} = mg \cos\theta \ \mathbf{j}$$

زوایای یک سطح شیبدار

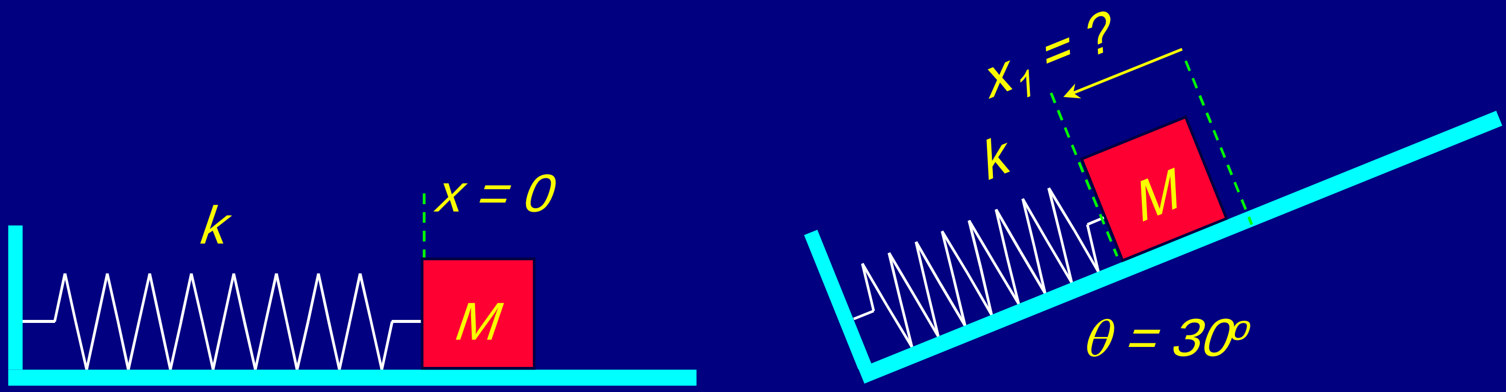
مثلث ها در شکل زیر متشابهند لذا زوایا با هم برابرند.



نیروها و حرکت

- جسمی به جرم $M = 5.1\ kg$ روی سطح بدون اصطکاکی به فنری به سختی $k = 125\ N/m$ *بسته شده است*. وقتی سطح افقی است و ضعیت تعادل در نقطه $x = 0$ *است*. وقتی زاویه شیب سطح 30^o شود و ضعیت تعادل x_1 می شود *مقدار آن چقدراست؟*

- (a) $x_1 = 20cm$ (b) $x_1 = 25cm$ (c) $x_1 = 30cm$

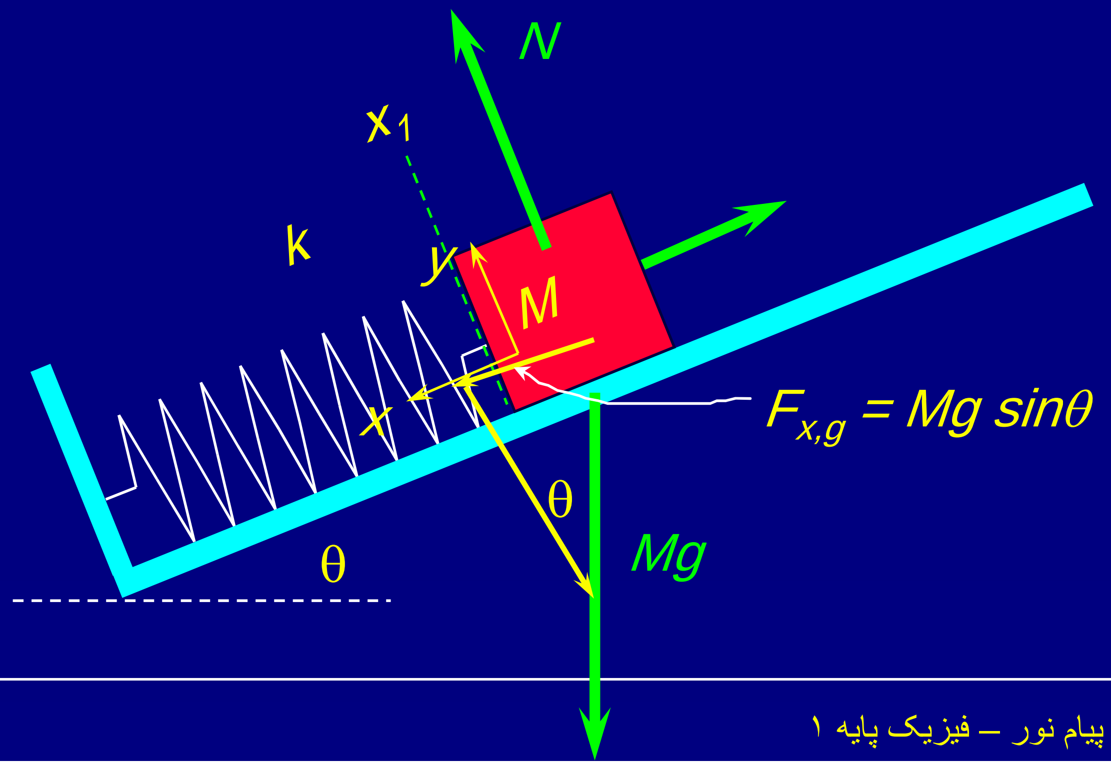


پاسخ:

- محور *x را مطابق شکل زیر انتخاب کنید..*
- نمودارجسم آزاد: نیروی خالص وارد بر جسم صفر است .

$F_{x,s} = -kx_1$ نیروی وارد ازطرف فنربرجسم

$F_{x,g} = Mg \sin\theta$ نیروی جاذبه وارد برجسم در راستای محور x

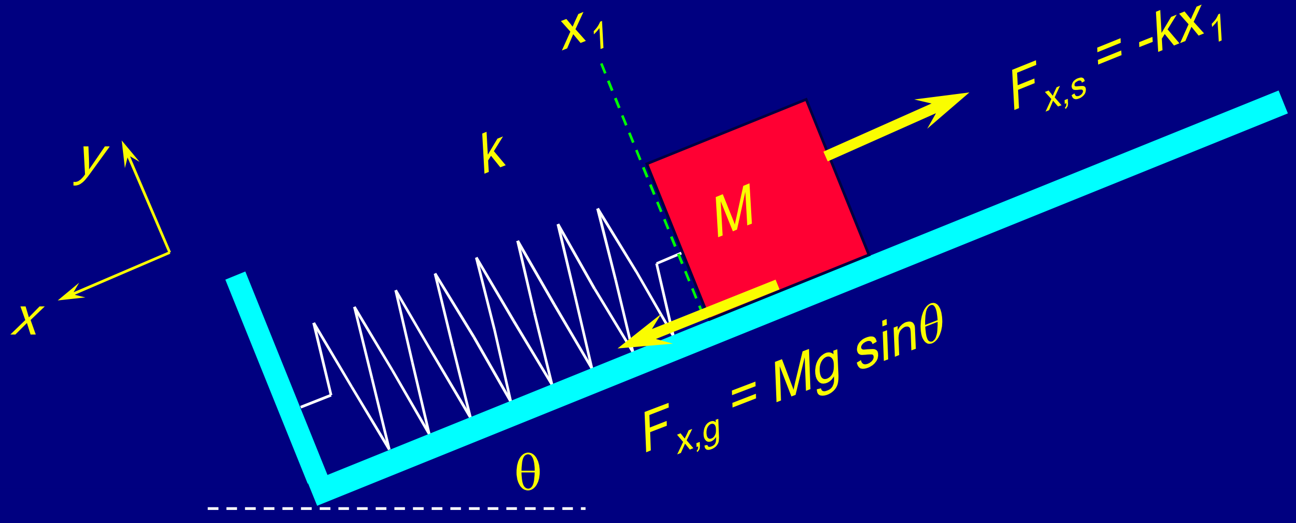


پاسخ:

- چون نیروی کل درراستای باید 0 باشد:

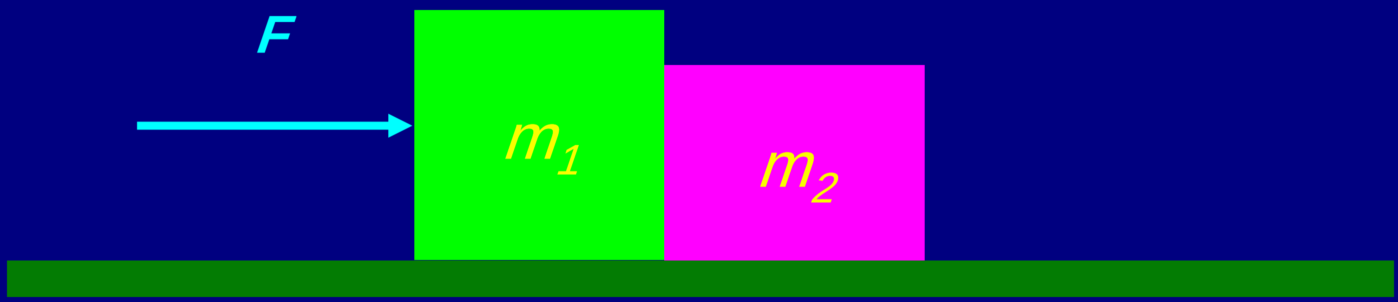
$$\Rightarrow\ Mg\sin\theta - kx_1 = 0 \quad \Rightarrow\ x_1 = \frac{Mg\sin\theta}{k}$$

$$\Rightarrow\ x_1 = \frac{5.1kg \cdot 9.81m/s^2 \cdot 0.5}{125\,N/m} = 0.2m$$



مسئله دوجسم در تماس

- دوجسم m_1 و m_2 روی سطح افقی بدون اصطکاک مطابق شکل زیر درتماس با هم قرار دارند .اگر نیروی F به جسم به جرم m_1 وارد شودنیروی وارد برجسم m_2 چقدر خواهد بود؟



مسئله دوجسم در تماس

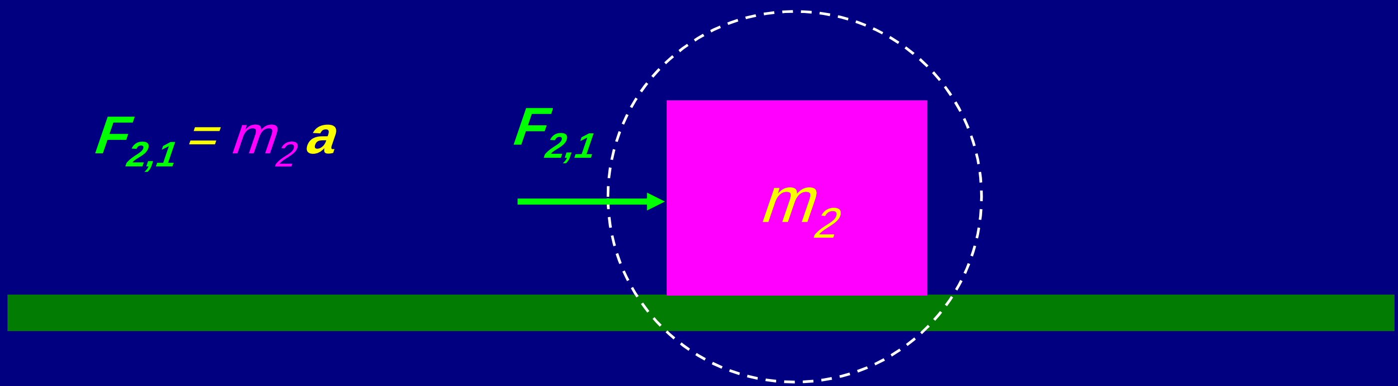
- توجه کنید که:

$$F = (m_1 + m_2)\,a$$

$$F / (m_1 + m_2) = a$$

- نمودارجسم آزاد m_2 راکشیده و قانون دوم نیوتن $F_{NET} = ma$ **بکاربرید.**:

$$F_{2,1} = m_2\,a$$

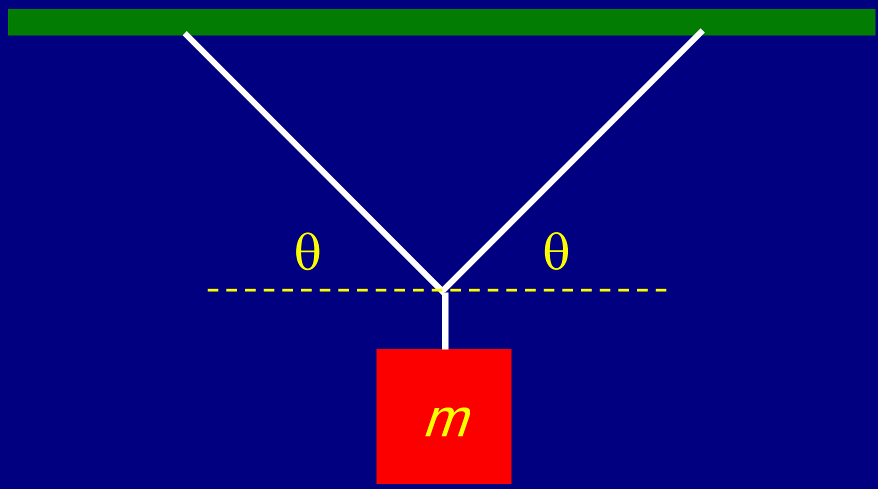


- به جای a **قرار دهید**:

$$F_{2,1} = m_2\left(\frac{F}{(m_1 + m_2)}\right) \Rightarrow \boxed{F_{2,1} = \frac{m_2}{(m_1 + m_2)}F}$$

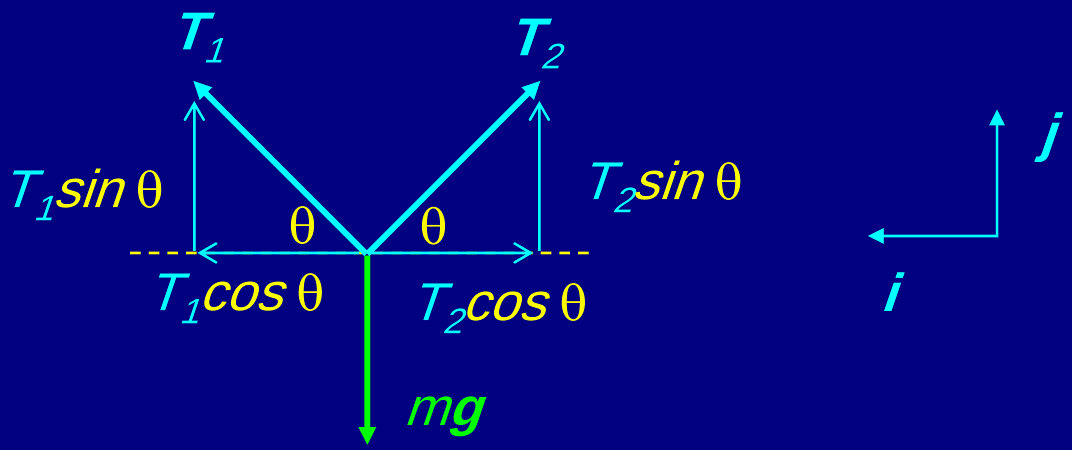
مسئله کشش نخ :

- جسمی را مطابق شکل به دو نخ که با افق زاویه θ می سازند آویزان کرده ایم کشش هر نخ چقدر ا ست؟



حل مسئله :

- نمودار جسم آزاد را می کشیم:



- چون جسم آویزان ساکن است پس: $F_{y,NET} = 0$, $F_{x,NET} = 0$,

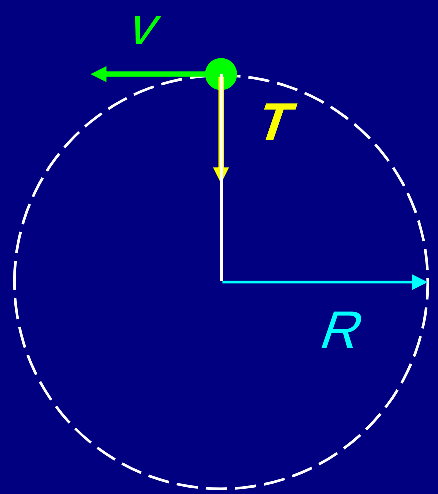
$$F_{x,NET} = T_1 \cos\theta - T_2 \cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad T_1 = T_2$$

$$F_{y,NET} = T_1 \sin\theta + T_2 \sin\theta - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_1 = T_2 = \frac{mg}{2 \sin\theta}}$$

مسئله : حرکت روی دایره

- جسمی به جرم m به انتهای نخی به طول R *سته شده است و درصفحه قائمی چرخانیده می شود. سرعت جسم در اترین نقطه* v *است*.

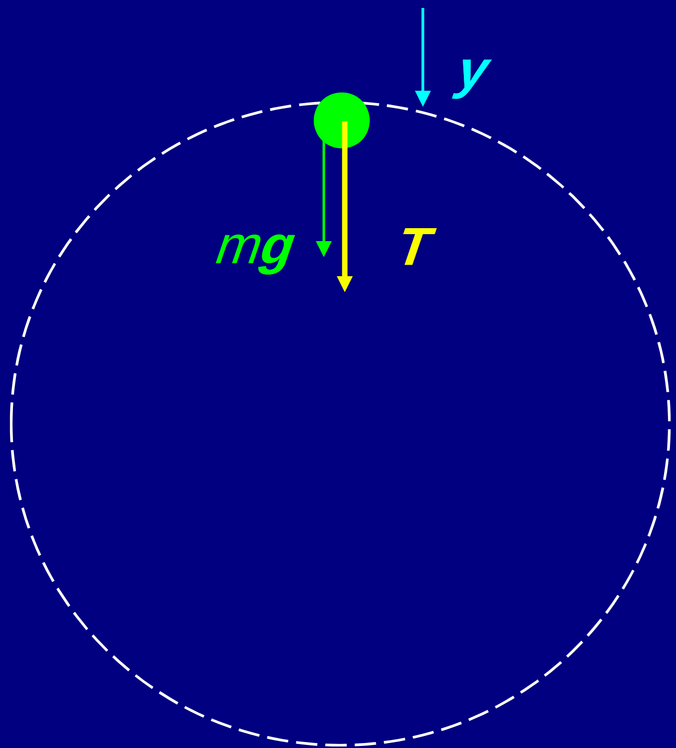
➔ کشش طناب T دربالاترین نقطه مسیر چقدراست؟



مسئله : حرکت روی دایره

- دیاگرام جسم آزاد را بکشید(جهت -y را به پایین بگیرید:)
- از این رابطه استفاده کنید: $F_{NET} = ma$
- ابتدا F_{NET} را در جهت y پیدا کنید :

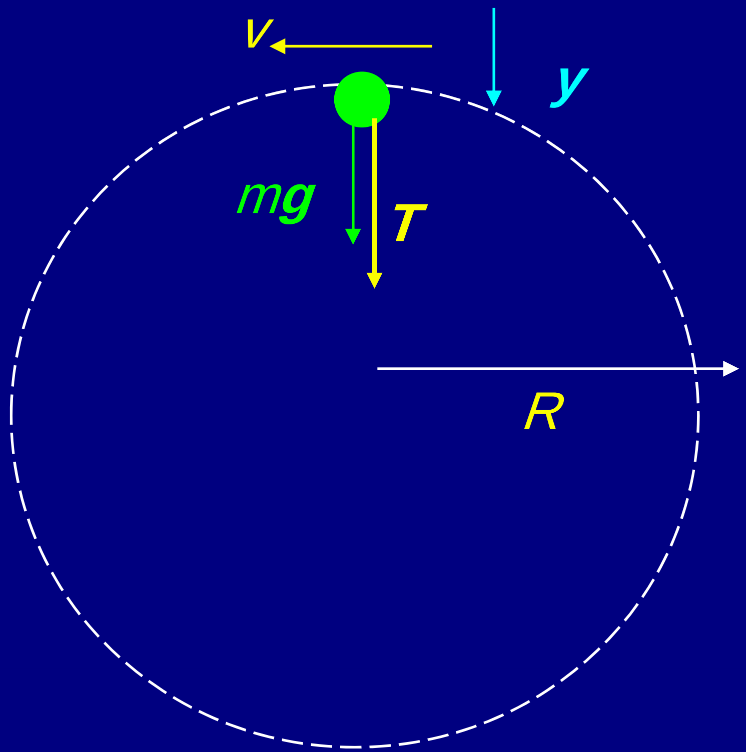
$$F_{NET} = mg + T$$



حرکت روی دایره ...

$$F_{NET} = mg + T$$

- شتاب در جهت محور y :



$$ma = mv^2 / R$$

F = ma

$$mg + T = mv^2 / R$$

$$\boxed{T = mv^2 / R - mg}$$

حرکت روی دایره ...

- حداقل سرعت در بالاترین نقطه مسیر چقدر باشد تا نخ شل نشود؟

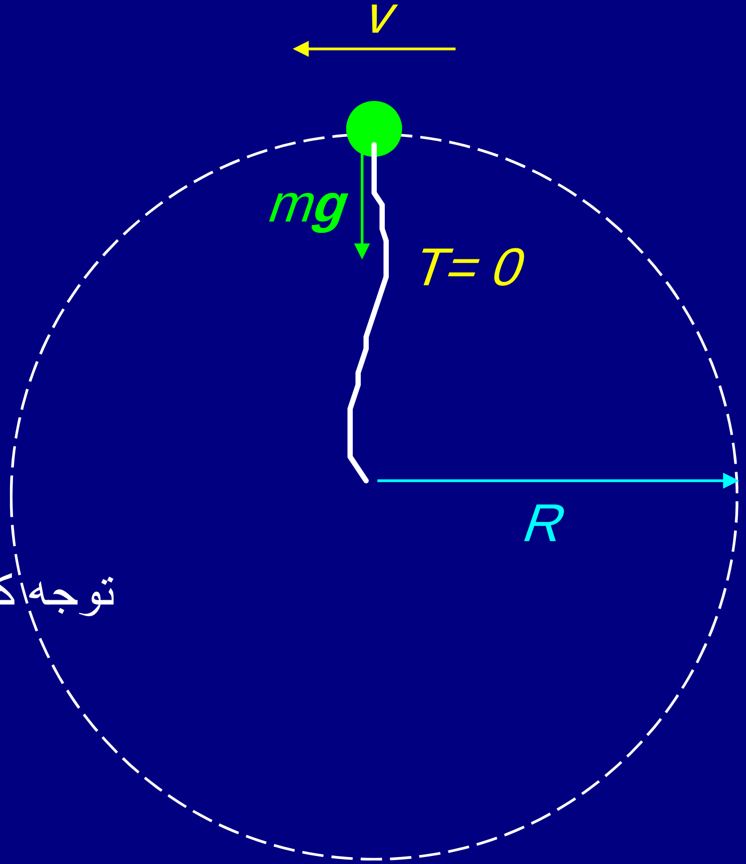
یعنی v را به گونه ای پیدا کنید که $T = 0$ باشد.

$$mv^2 / R = mg + T$$

$$v^2 / R = g$$

$$\boxed{v = \sqrt{Rg}}$$

توجه کنید که به m بستگی ندارد.

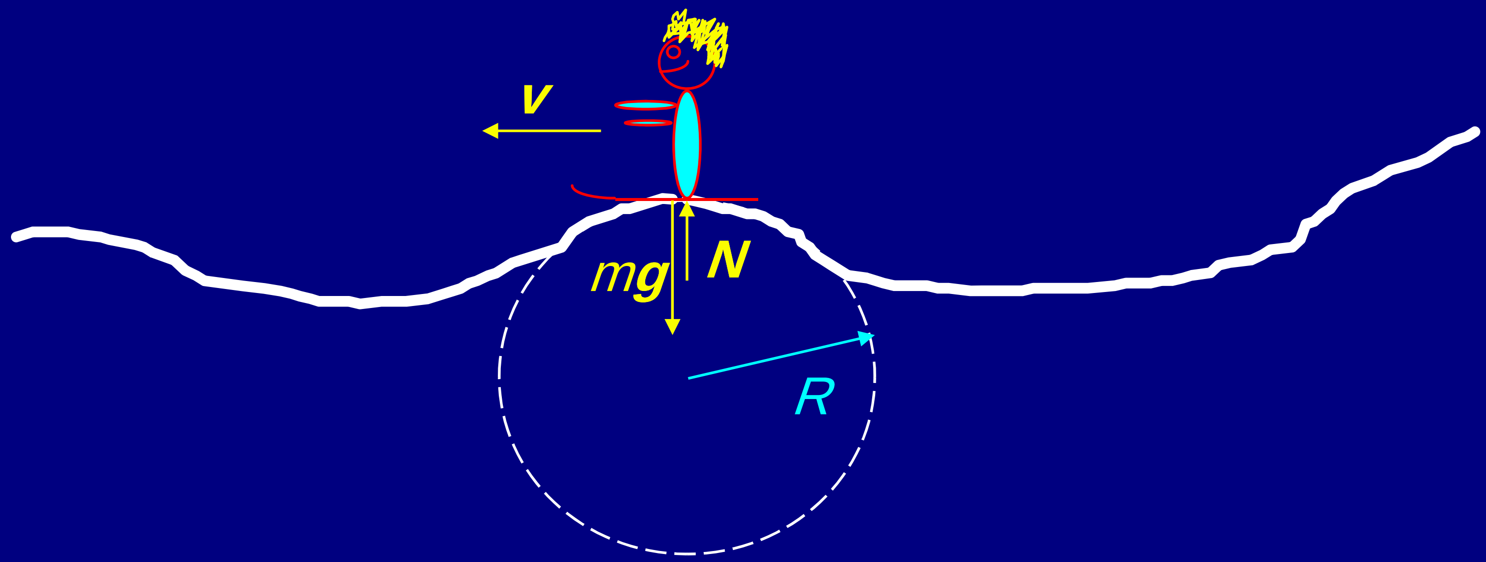


کمی فکر کنیم: مقداری آب داخل سطل می ریزیم و آنرا دور سر خود می چرخانیم . آب فرو نمی ریزد .چرا؟

روی تصویر کلیک کنید.

حرکت روی دایره ...

- یک اسکی باز به جرم m از مسیری به شعاع R می‌گذرد. حداکثر سرعت او چقدرباشد تا از زمین جدانشود.

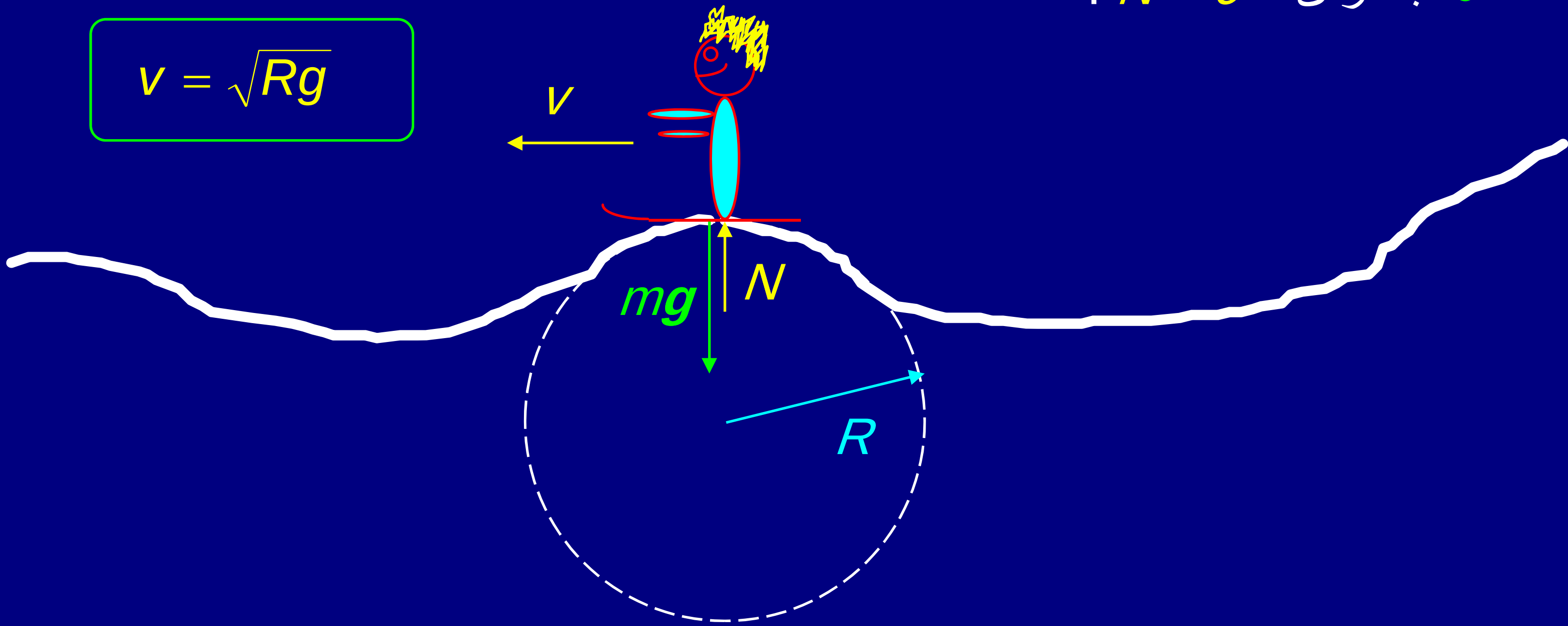


(a) $v = \sqrt{mRg}$ (b) $v = \sqrt{\dfrac{Rg}{m}}$ (c) $v = \sqrt{Rg}$

پاسخ:

- $mv^2 / R = mg - N$
- به ازای $N = 0$:

$$\boxed{v = \sqrt{Rg}}$$



یادآوری نهایی:

- مسئله ها

← شتاب سنج
← سطح شیبدار
← حرکت روی دایره

- متن کتاب را یک بار دیگر به دقت مطالعه کنید

فصل ششم

دینامیک ذره

قسمت دوم

اصطکاک

درس امروز ما

- اصطکاک
  - اصطکاک چیست؟
  - چگونه آنرا تشخیص می دهیم؟
  - مدل اصطکاک
  - اصطکاک ایستایی و جنبشی
- چند مسئله در مورد اصطکاک

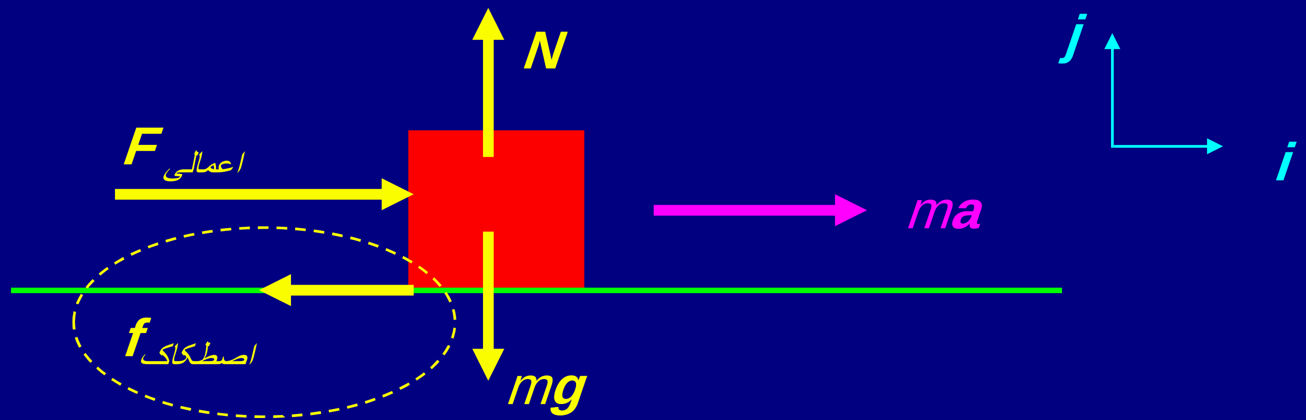
اصطکاک

- اصطکاک چکار می کند؟

  ←با حرکت مخالفت می کند

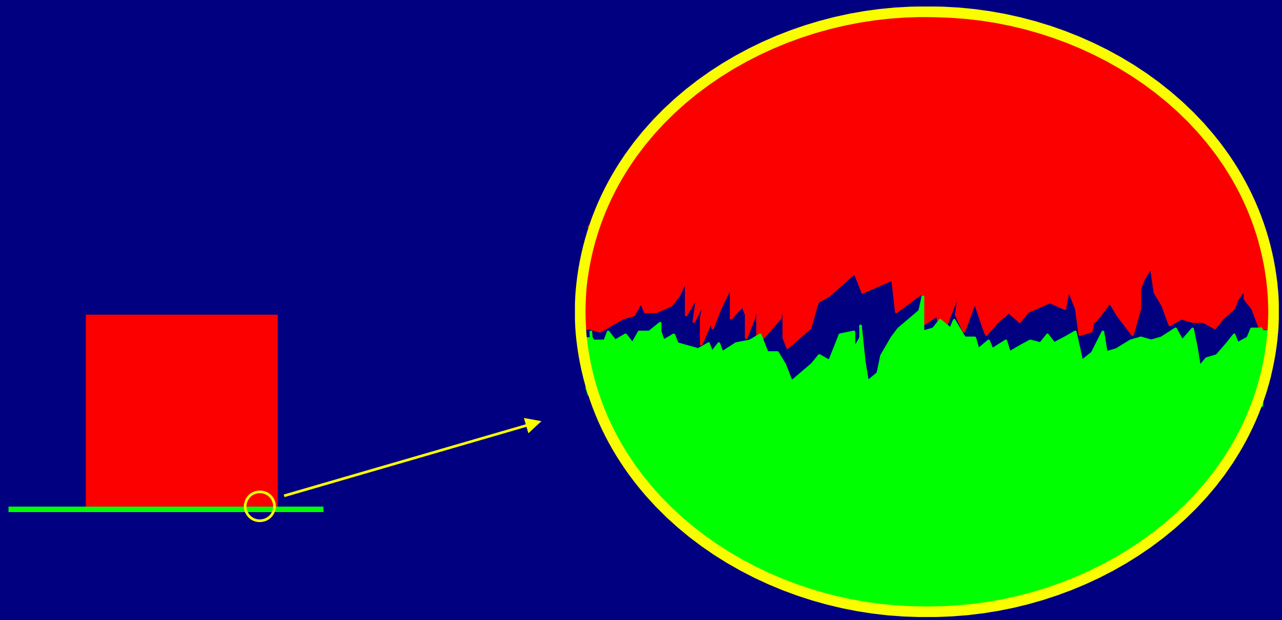
- چگونه آنرا به گونه ای که می شناسیم بیان کنیم ؟

  ←اصطکا ک سبب ایجاد نیرویی در جهت خلاف سرعت نسبی می شود!



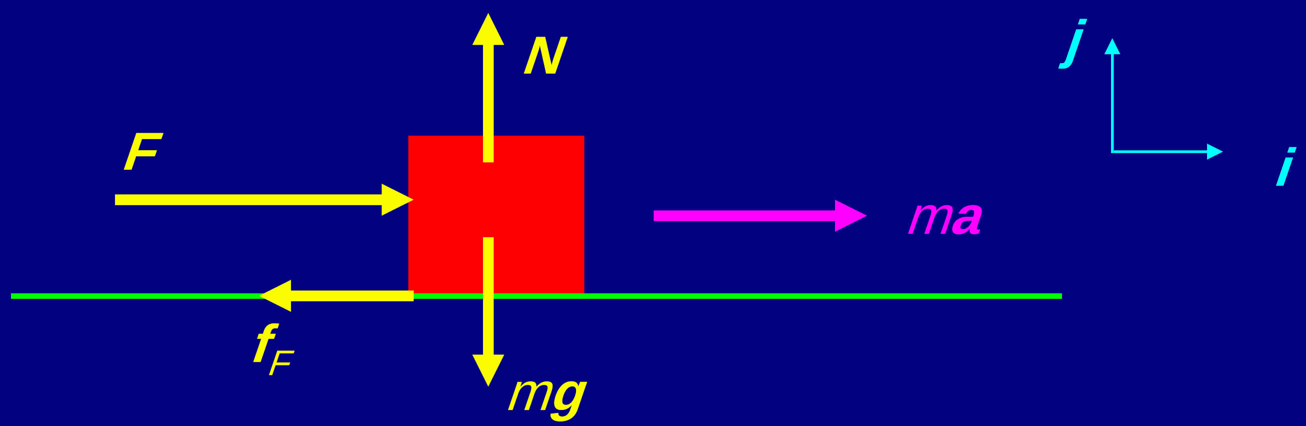
اصطکاک سطح...

- اصطکاک از اثر میکروسکپی بین دو سطح ایجاد می شود.



اصطکاک سطح...

- نیروی اصطکاک در خلاف جهت حرکت نسبی اثر می کند که :
  - ← موازی با سطح و
  - ← عمود بر نیروی قائم Nاست .



مدل اصطکا ک لغزشی

- جهت نیروی اصطکاک عمود بر نیروی قائم N است.
- بزرگی نیروی اصطکاک $|f_F|$ متناسب با بزرگی نیروی قائم $|N|$ است.

← $|f_F| = \mu_K \, |N|$ ($= \mu_K \, |mg|$ درمثال قبل)

← هرچه جسم سنگینتر باشد نیروی اصطکاک بیشتر خواهد بود.!

- ثابت μ_K ر ا " ضریب اصطکاک جنبشی " می نامند.

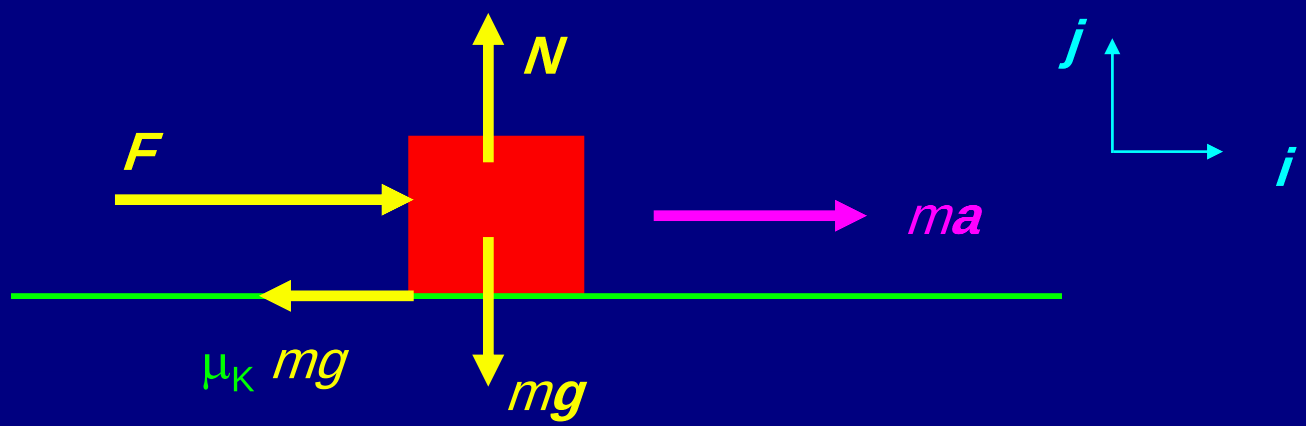
مدل...

- دینامیک...

$$i: \quad F - \mu_K N = ma$$

$$j: \quad N = mg$$

$$so\ F - \mu_K mg = ma$$

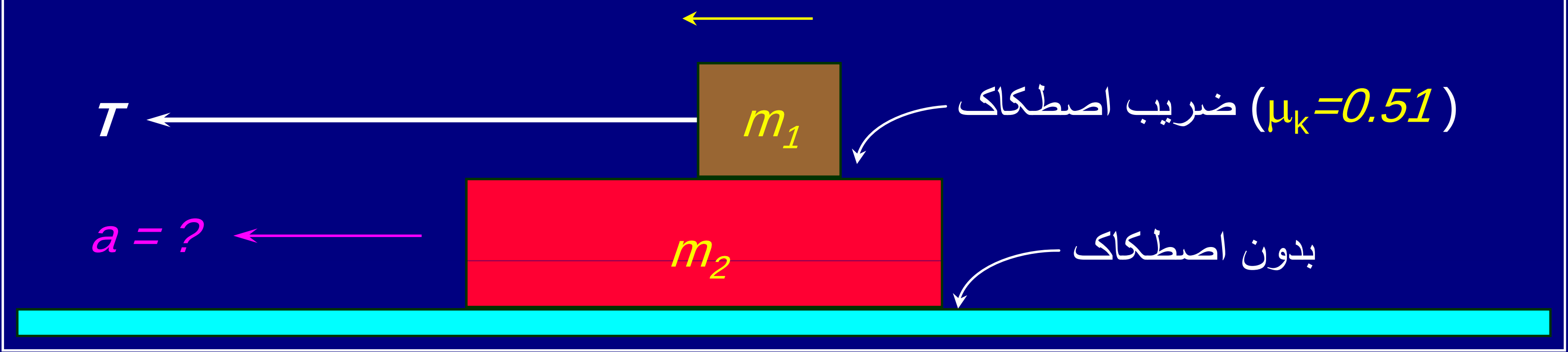


نیروها و حرکت

- جسمی به جرم $m_1 = 1.5\ kg$ به وسیله طنابی که دارای کشش $T = 90\ N$ است . کشیده می‌شود. این جسم روی جسمی دیگری به جرم $m_2 = 3\ kg$ قراردارد‌که آن هم روی یک یک سطح بدون اصطکاک قرار گرفته است ضریب اصطکاک بین این دو جسم برابر با $\mu_k = 0.51$ است .

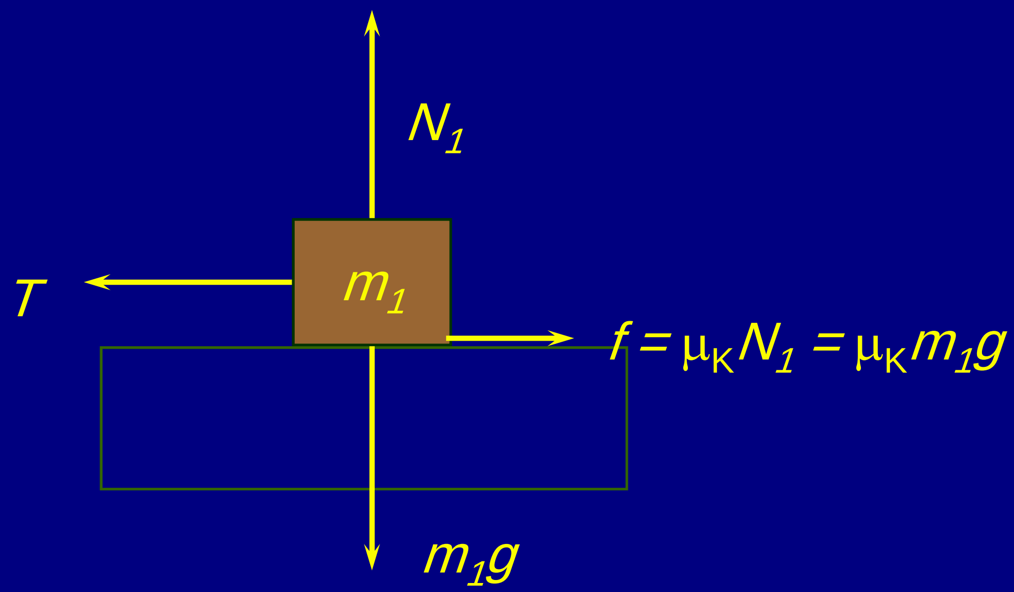
➔ شتاب جسم دوم چقدر است؟

(a) $a = 0\ m/s^2$ (b) $a = 2.5\ m/s^2$ (c) $a = 3.0\ m/s^2$



پاسخ

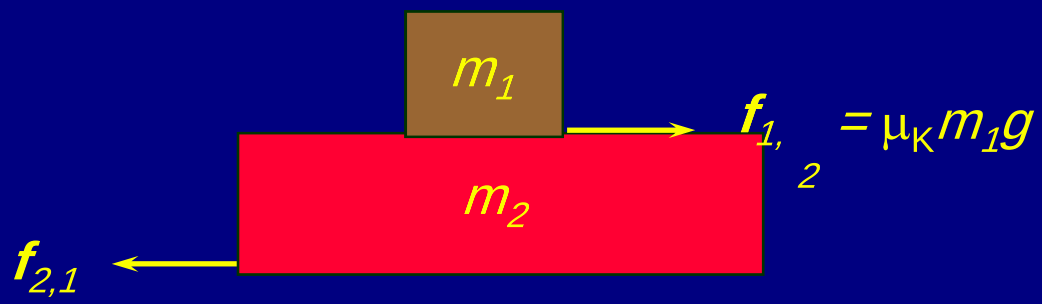
- ابتدا نمودار جسم آزادرابرای جسم ۱ را بکشید:



پاسخ :

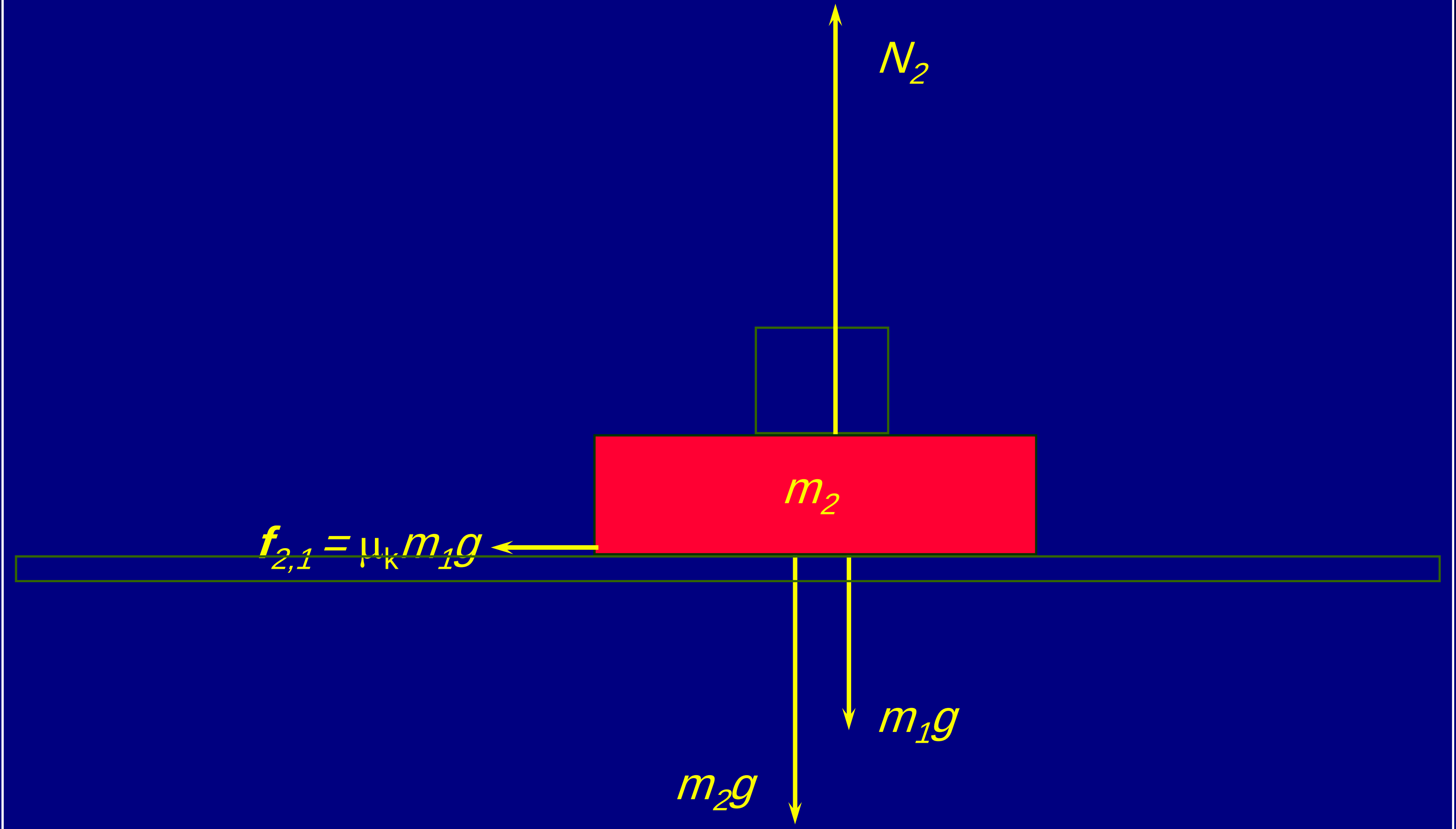
- قانون سوم نیوتن می گوید که نیرویی که جسم ۲ به جسم ۱ وارد می کند برابر است با نیروی که جسم ۱ به جسم ۲ وارد می کند ولی درخلاف جهت آن

- این نیرو ناشی از اصطکاک است ::



پاسخ:

- اکنون نمودار آزاد را برای جسم ۲ در نظر بگیرید:



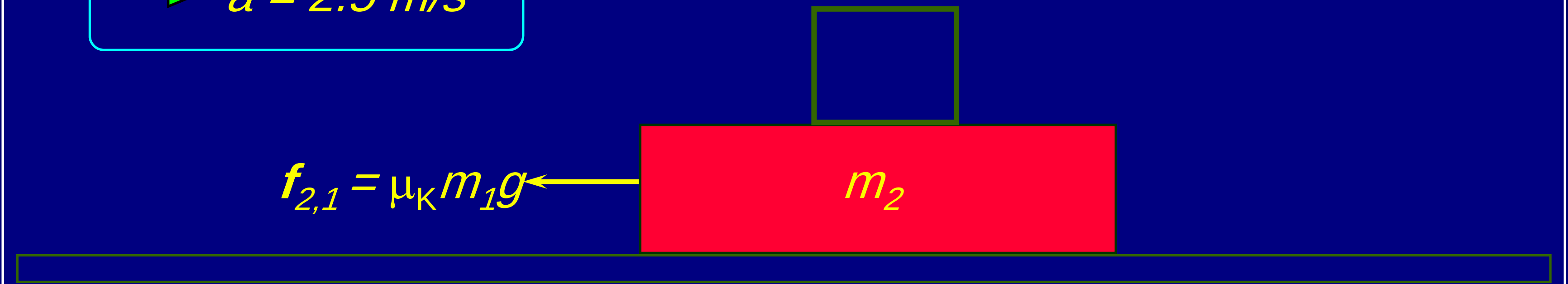
پاسخ:

- اکنون قانون دوم نیوتن را $F = ma$ درجهت افقی بکا ربرید :

$\Rightarrow \; \mu_K m_1 g = m_2 a$

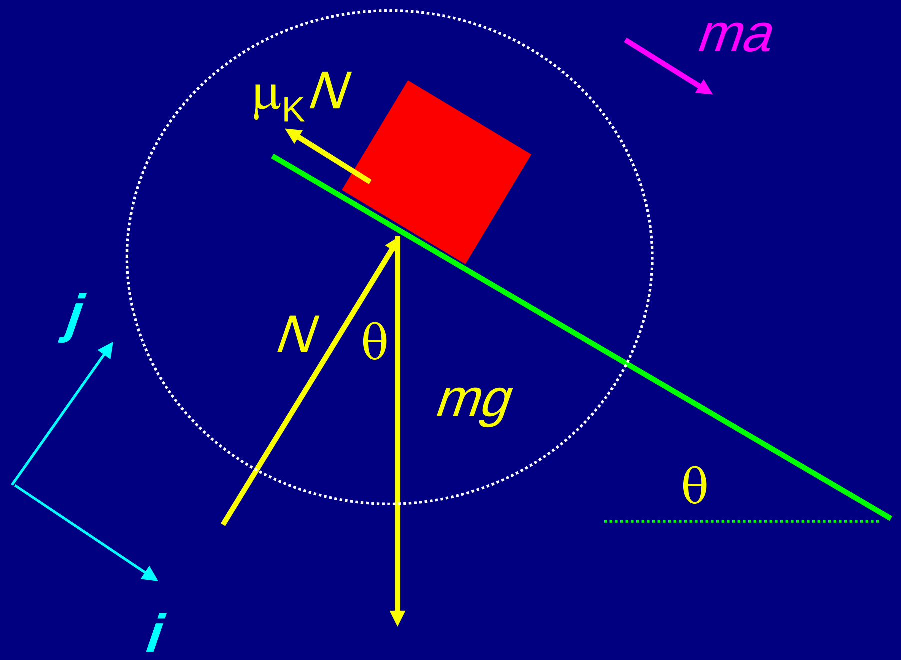
$$\Rightarrow \; a = \frac{m_1}{m_2}\mu_k g = \frac{1.5kg}{3kg} \times 0.51 \times 9.81 m/s^2$$

$$\boxed{\Rightarrow \; a = 2.5 \ m/s^2}$$



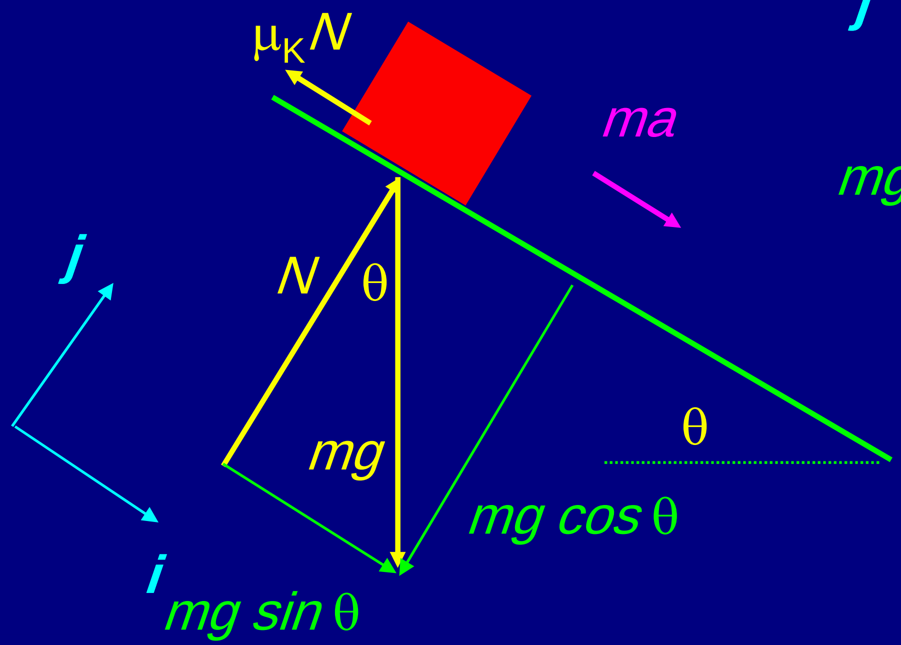
سطح اصطکاک شیبدار:

- نمودار جسم آزاد را بکشید:



سطح اصطکاک شیبدار

مولفه i و j نیروها را درنظر بگیرید:



$$\boxed{F_{NET} = ma:}$$

$$i \Rightarrow \quad mg \sin\theta - \mu_K N = ma$$

$$j \Rightarrow \quad N = mg \cos\theta$$

$$\Downarrow$$

$$mg \sin\theta - \mu_K mg \cos\theta = ma$$

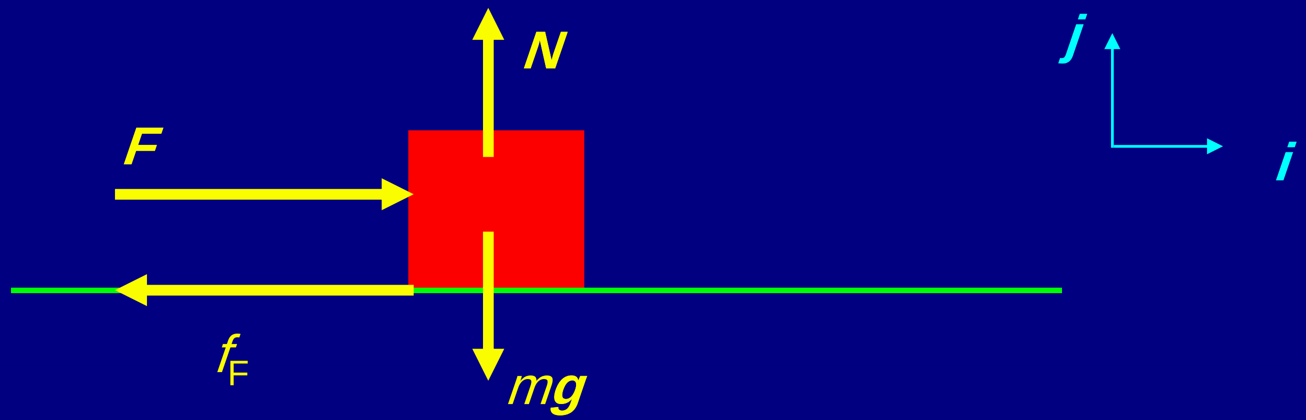
$$\Downarrow$$

$$\boxed{a / g = \sin\theta - \mu_K \cos\theta}$$

اصطکاک ایستایی...

- تاکنون اصطکاک بین دوجسم که نسبت به هم در حرکت هستند را در نظر گرفتیم
  - این نیرو وقتی که دو جسم با همدیگر نیز حرکت کنند یعنی در حالت "ایستایی" نیز وجود دارد :

- دراین حالت نیروی اصطکاک به دیگر نیروها که به قسمتهای مختلف سیستم وارد می شود نیز بستگی دارد.



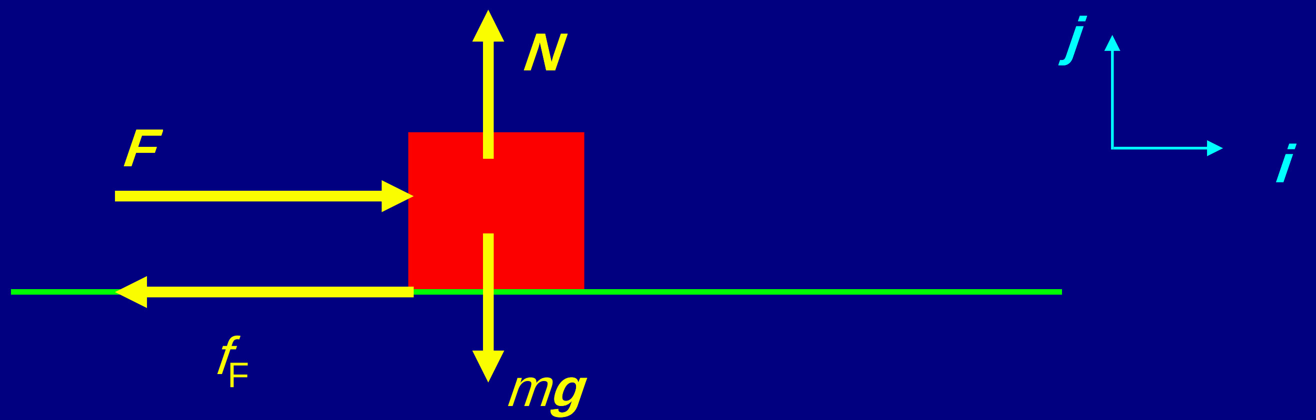
اصطکاک ایستایی..
(یکی از سطوح ساکن است)

- مانند حالت قبل به جز اینکه $a = 0$ *است* .

$i:$ $$F - f_F = 0$$

$j:$ $$N = mg$$

- درحالی که جسم ساکن است : $f_F = F$

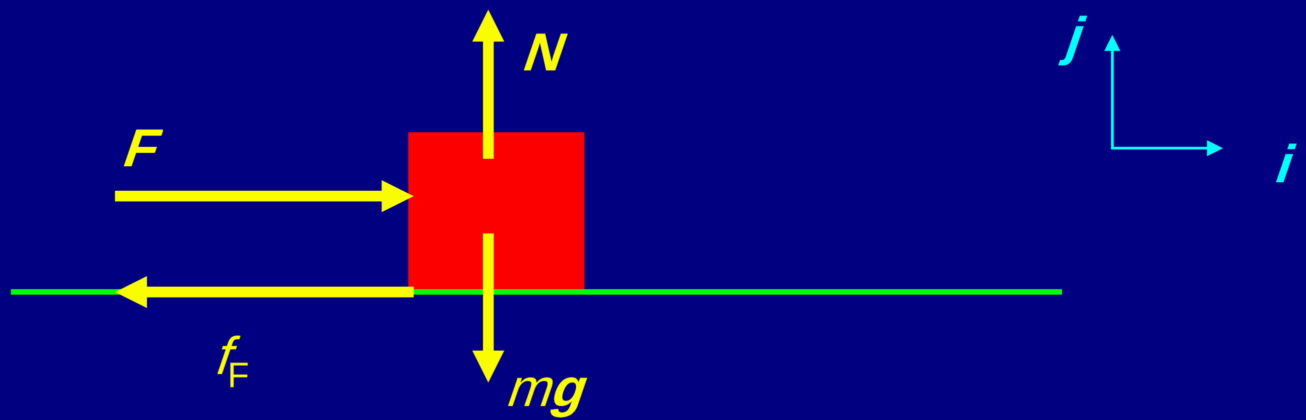


اصطکاک ایستایی..
(یکی از سطوح ساکن است)

- بزرگترین نیروی اصطکاک بین دو جسم N μ_S $= f_{MAX}$ *است* "که, μ_S ضریب اصطکاک ایستایی است".

➔ بنابراین $f_F \leq \mu_S N$.

➔ وقتی F *افزایش می یابد* f_F نیز زیاد می شود تا $f_F = \mu_S N$ *گردد*وجسم شروع به حرکت کند.



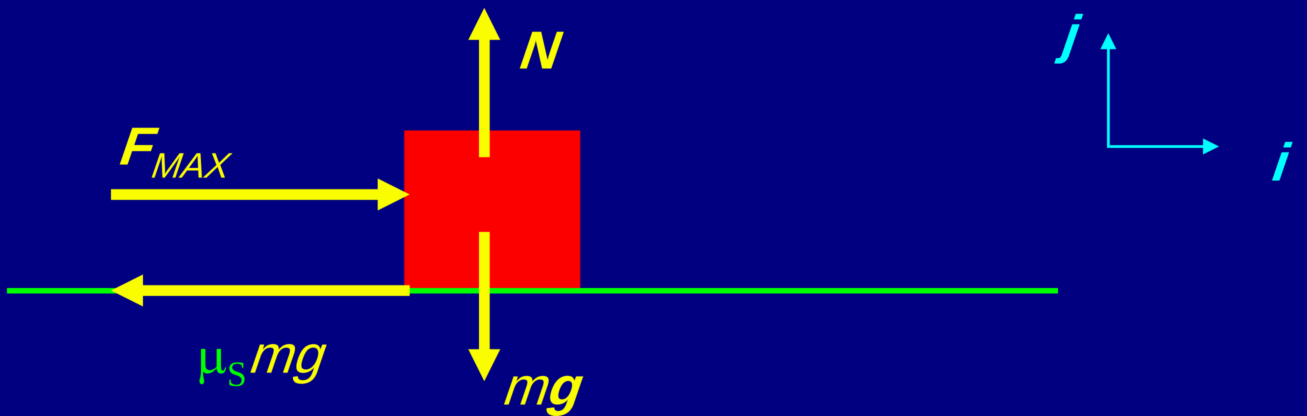
اصطکاک ایستایی ...

- ***F* را افزایش می دهیم تا جسم شروع به حرکت کند** دراینصورت μ_S برابر است با:

$i:\qquad F_{MAX} - \mu_S N = 0$

$j:\qquad N = mg$

$$\boxed{\mu_S = F_{MAX} / mg}$$

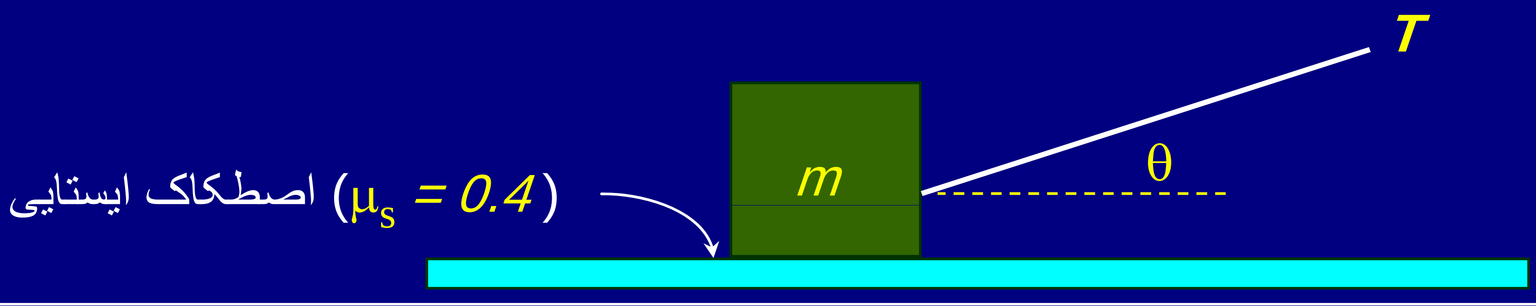


نیروها وحرکت

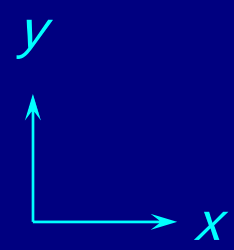
- جعبه ای به جرم $m = 10.21\ kg$ روی کف اتاق قرار دارد. ضریب اصطککاک بین این جسم و کف اتاق $\mu_s = 0.4$ *است* .
- طنابی به این جسم بسته ایم و آنرا تحت زاویه $\theta = 30^o$ بالای افق می کشیم درصورتی که کشش نخ $T = 40\ N$ with tension *باشد* .

آیا این جسم حرکت می کند؟

(الف) بلی (ب) خیر



پاسخ:



- محورهای مختصات را انتخاب کرده و نمودار جسم آزاد را بکشید
- $\boldsymbol{F}_{NET} = m\boldsymbol{a}$

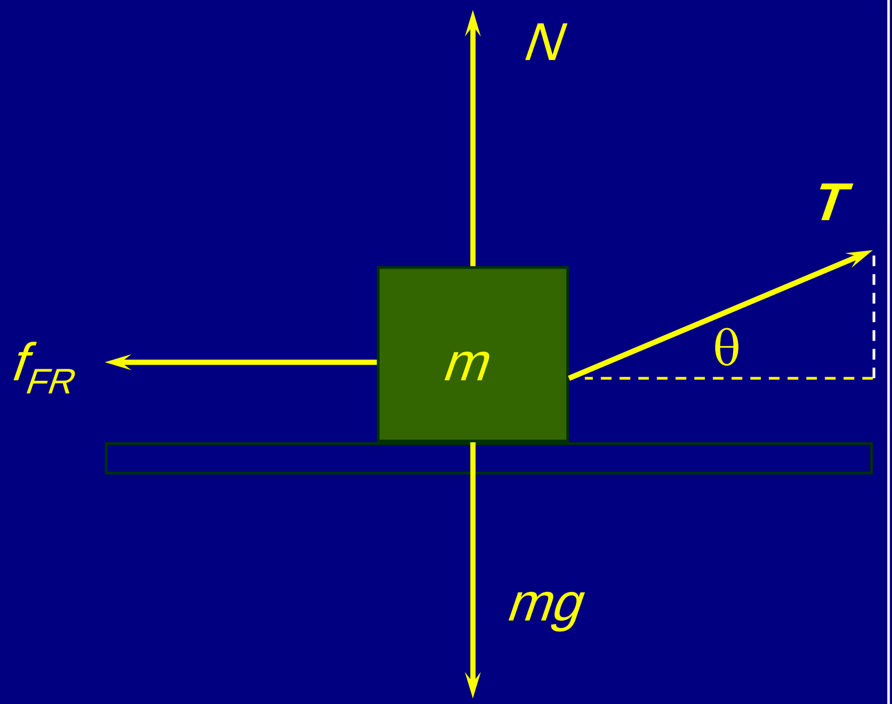
$$y:\quad N + T\sin\theta - mg = ma_Y = 0$$

$$N = mg - T\sin\theta \quad \boxed{= 80\ N}$$

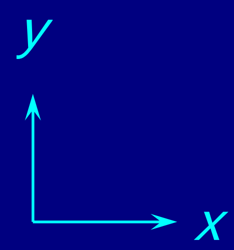
$$x:\quad T\cos\theta - f_{FR} = ma_X$$

جعبه حرکت می کند اگر:

$$T\cos\theta - f_{FR} > 0$$



ادامه پاسخ:



y: $N = 80\ N$

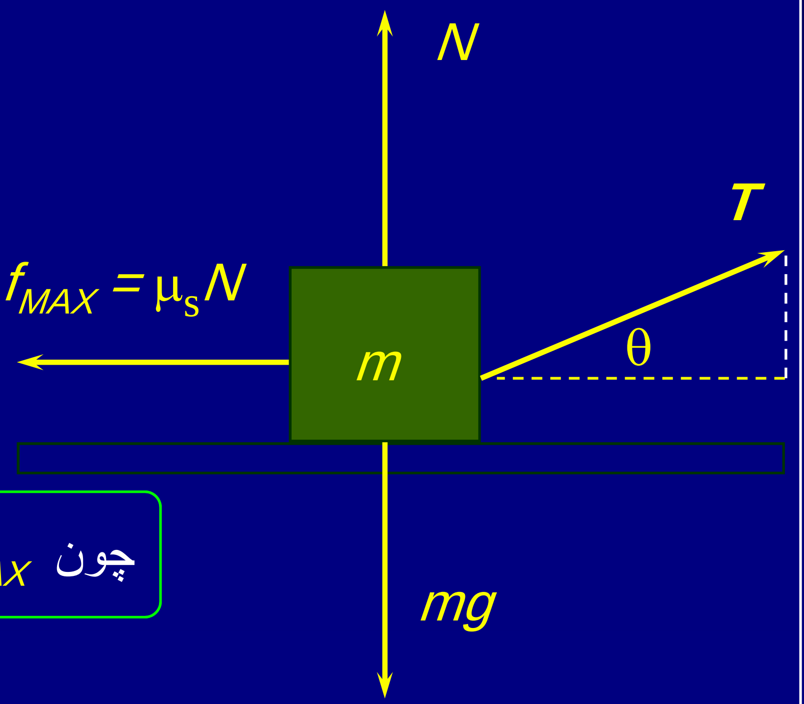
x: $T\cos\theta - f_{FR} = ma_X$

جعبه حرکت می کند اگر:

$T\cos\theta - f_{FR} > 0$

$\Rightarrow$ $T\cos\theta = 34.6\ N$

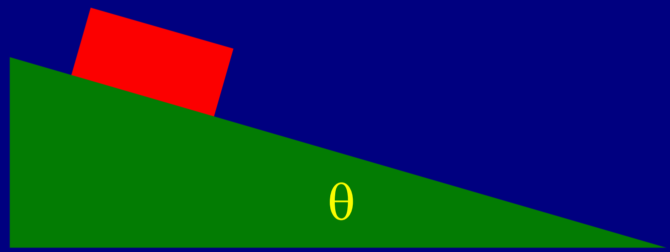
$\Rightarrow$ $f_{MAX} = \mu_s N = (.4)(80N) = 32\ N$



چون $T\cos\theta > f_{MAX}$ است پس جعبه حرکت نمی کند.

اصطکاک ایستایی

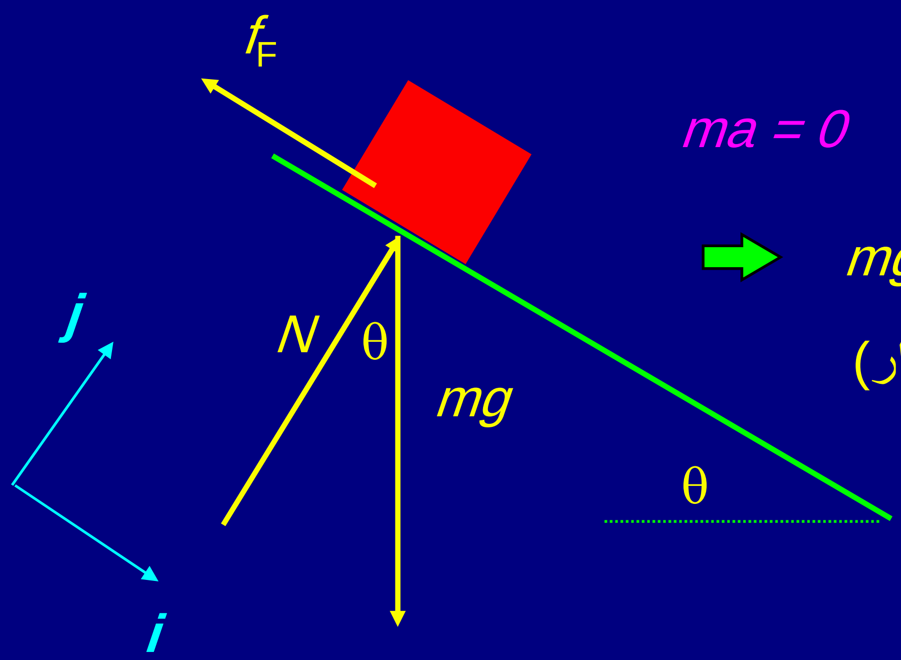
- اصطکاک ایستایی μ_s روی سطح شیبدار هم بررسی می کنیم.



- دراین حالت نیروی اصطکاک به زاویه سطح شیبدار θ بستگی دارد.

اصطکاک ایستایی

- نیروی اصطکاک f_F, بستگی به θ دارد.



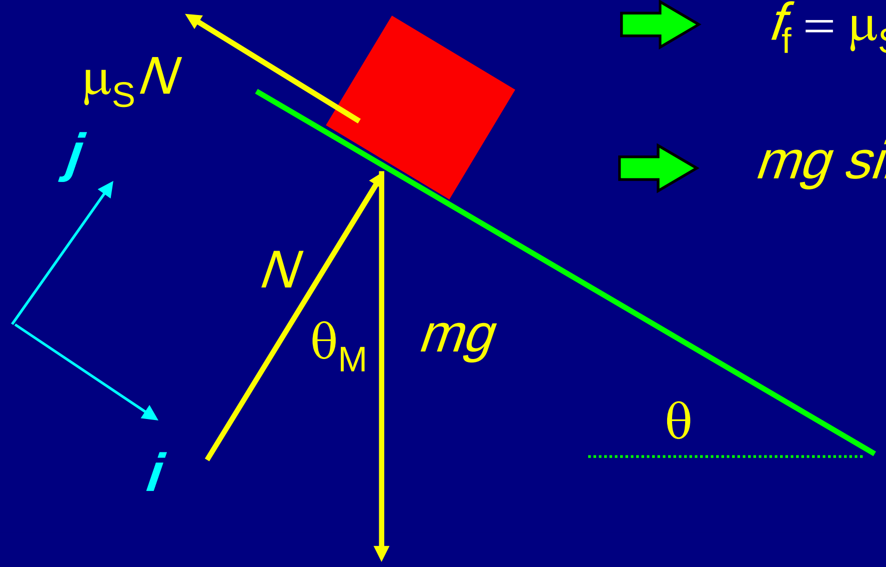
$ma = 0$ جسم حرکت نمی کند

$\Rightarrow$ $mg \sin\theta - f_f = 0$

(قانون دوم نیوتن درامتدا سطح شیبدار)

اصطکاک ایستایی ...

- برای یافتن μ_s شیب سطح را کم کم زیاد می کنیم تا جسم شروع به حرکت کند.



$$\Rightarrow \quad mg \sin\theta - f_f = 0$$

دراین مورد:

$$\Rightarrow \quad f_f = \mu_S N = \mu_S mg \cos\theta_M$$

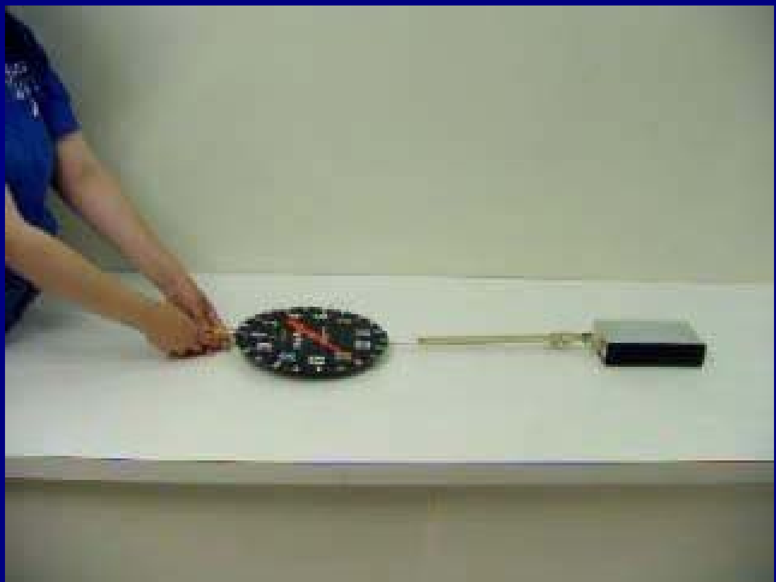
$$\Rightarrow \quad mg \sin\theta_M - \mu_S mg \cos\theta_M = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\mu_S = \tan\theta_M}$$

نیروی اصطکاک ایستایی و جنبشی:

روی انیمیشن زیر کلیک کرده و به تفاوت نیروی اصطکاک ایستایی و
جنبشی توجه کنید.



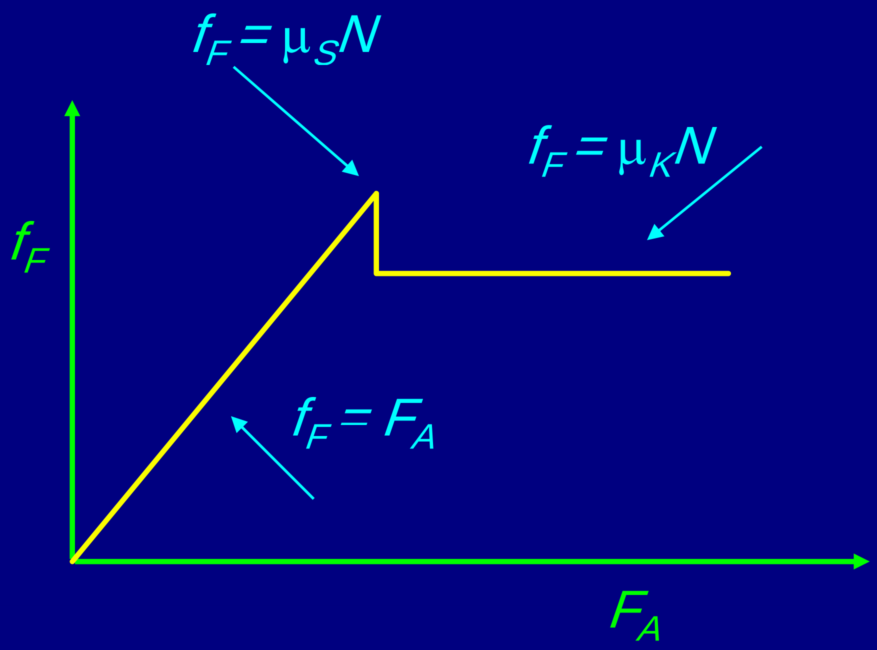
مطالب بیشتری درمورد اصطکاک

- با توجه به رابطه , $\boxed{f_F = \mu N}$ نیروی اصطکاک بستگی به سطح تماس ندارد .

- رابطه $\mu_S \geq \mu_K$ برای هر سیستمی صحیح است .(درباره آن اندکی فکر کنید)...

توجه:

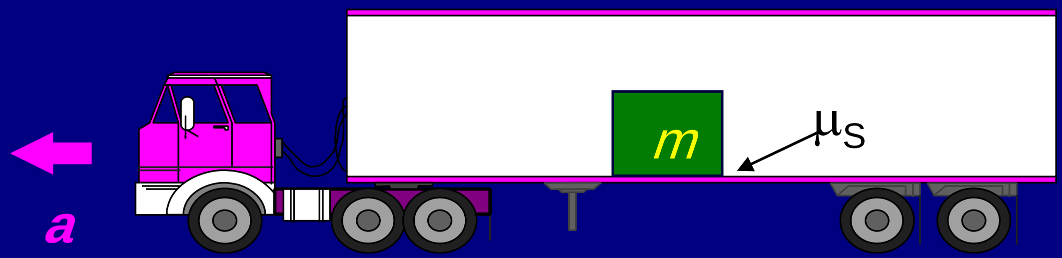
- منحنی *نیروی اصطکاک* نسبت به *نیروی واردشده* :



مسئله : جعبه روی کف کامیون

- جسمی به جرم m روی کف کامیونی قراردارد. ضریب اصطکاک بین کف کامیون و این جسم μ_s است.

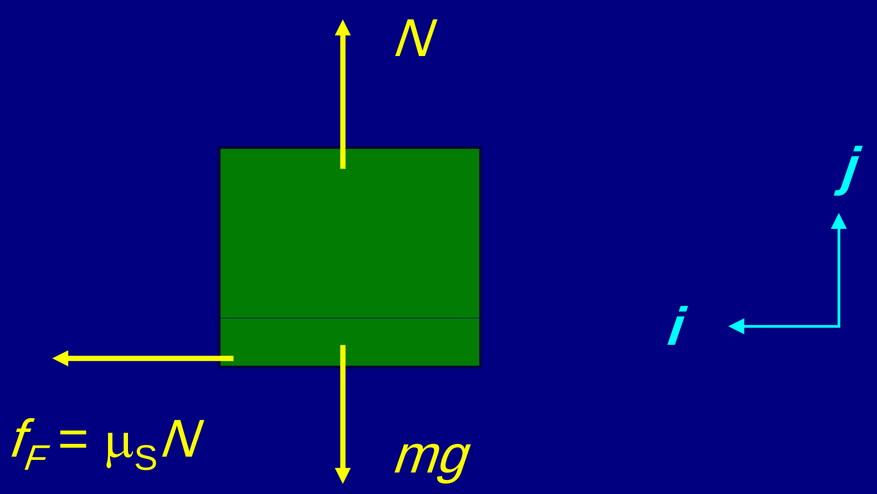
  ← بیشینه شتاب کامیون a تا جسم روی کف کامیون نلغزد.



مسئله : جعبه روی کف کامیون

- نمودار جسم آزاد را برای جعبه بکشید.

➔ حالتی را در نظر بگیریدکه در آن f_F بیشینه است...
(یعنی اگر شتاب بیشتر باشد جعبه می لغزد.)



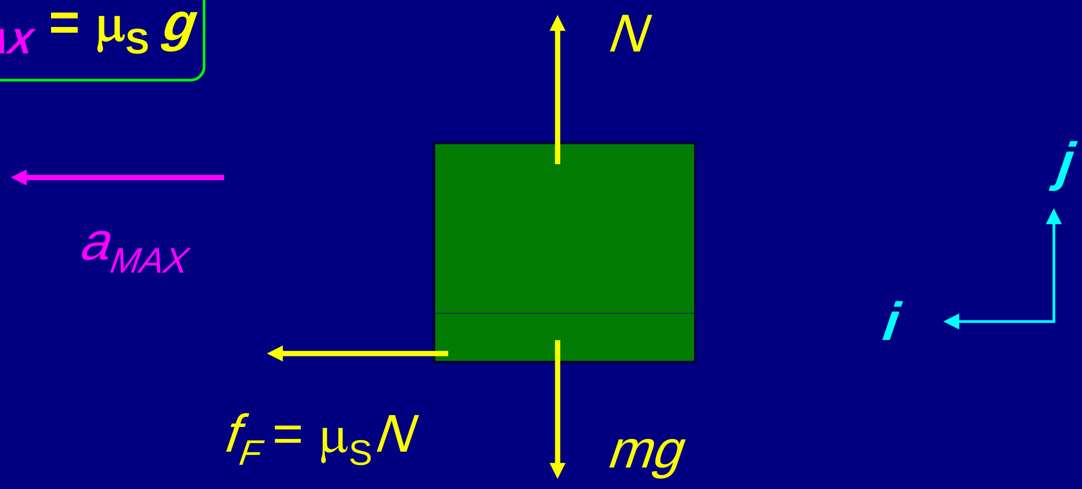
مسئله پاسخ

- بابکاربردن رابطه $F_{NET} = ma$ برای مولفه های i و j داریم:

i : $\mu_S N = ma_{MAX}$

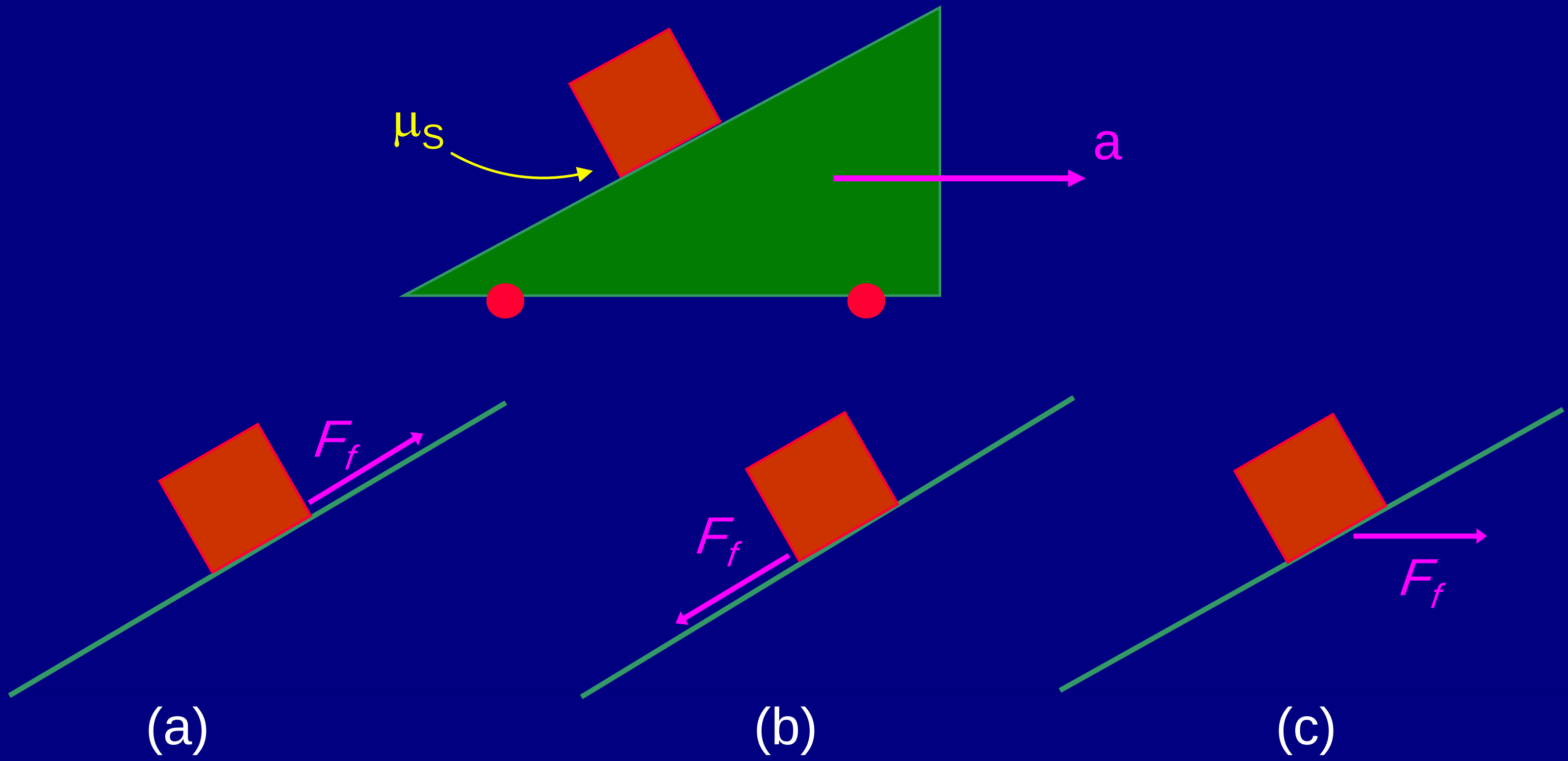
j : $N = mg$

$$\boxed{a_{MAX} = \mu_S g}$$



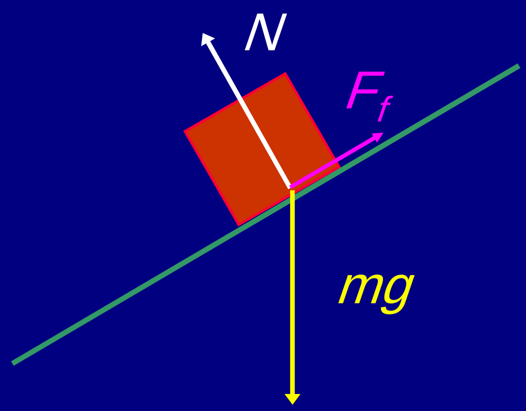
نیروها و حرکت

- سطح شیبداری دارای شتاب ثابت *a* *اااست ست* . جعبه ای روی این سطح به وسیله نیروی اصطکاک نگهداشته شده است .جهت این نیرو چگونه است؟

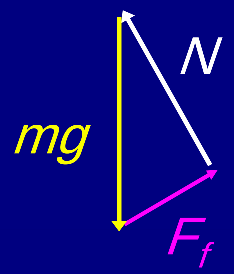


پاسخ

- **ابتدا حالتی را در نظر بگیرید که سطح شتاب نداشته باشد :**

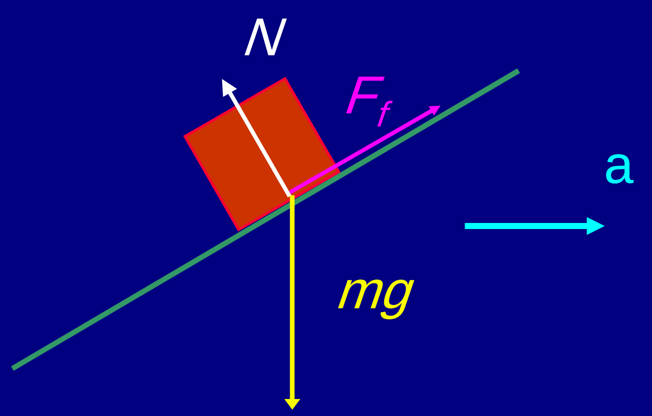


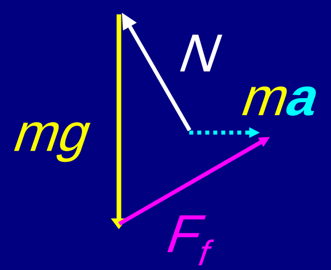
برایند کلیه نیروها صفر است!



پاسخ مسئله :

- سطح شیبدار دارای شتاب است و نیروی اصطکاک افزایش ونیروی قائم کاهش می یابد ولی نیروی اصطکاک همچنان در امتداد سطح شیبدار قرار خواهد داشت .





- برایندنیروها ma! است

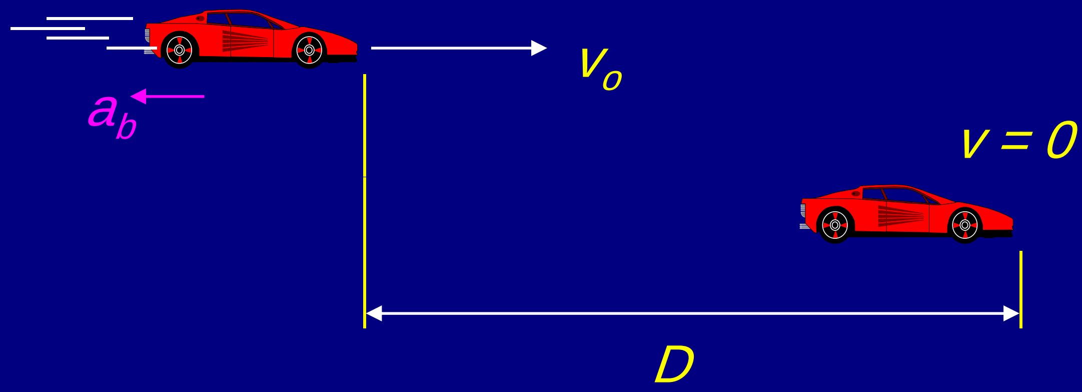
← $F = ma$

←پاسخ (الف) است

یک مسئله

- ترمزهای ضد قفل شدن براساس اطمینان از نلغزیدن چرخها وغلتیدن آ نها کار می کنند واین سبب بیشینه شدن نیروی اصطکاک می شود زیرا: μ_K < μ_S :

- راننده ای با سرعت v_o حرکت کرده و ترمز می گیرد. ضریب اصطکاک μ_S است . فاصله توقف اتومبیل چقدر D است ؟ چچ



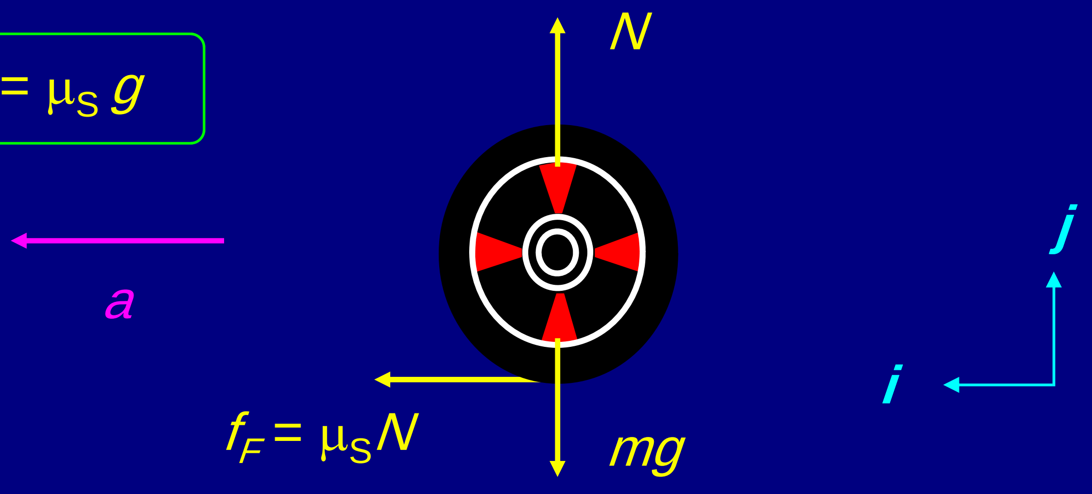
ترمز گرفتن

- از رابطه $F_{NET} = ma$ برای مولفه های i و j استفاده کنید.

$\leftarrow i \quad \Rightarrow \quad \mu_S N = ma$

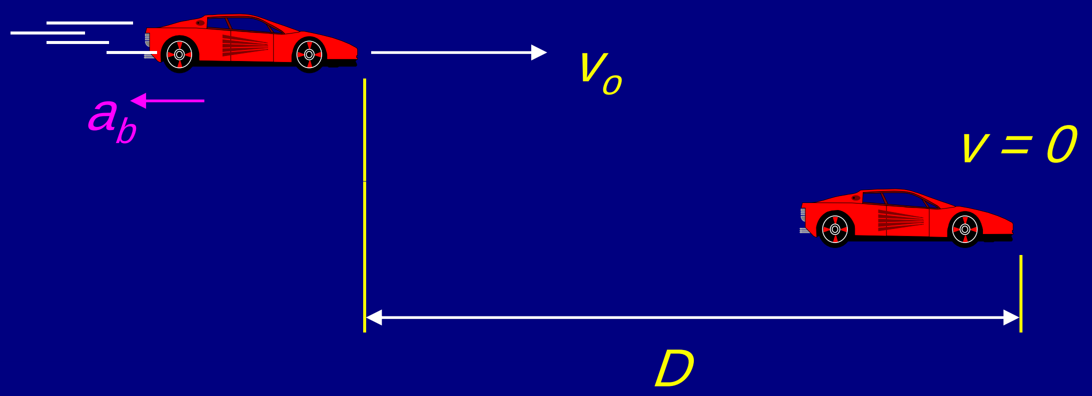
$\leftarrow j \quad \Rightarrow \quad N = mg$

$$\boxed{a = \mu_S\, g}$$



پاسخ:

- مانند مثال قبل : $a_b = \mu_s g$
- با استفاده معادله سینماتیک: $v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$
- دراین مسئله: $0 - v_0^2 = -2a_b(D)$



ادامه پاسخ مسئله

- دراین مسئله :
- حل می کنیم D:

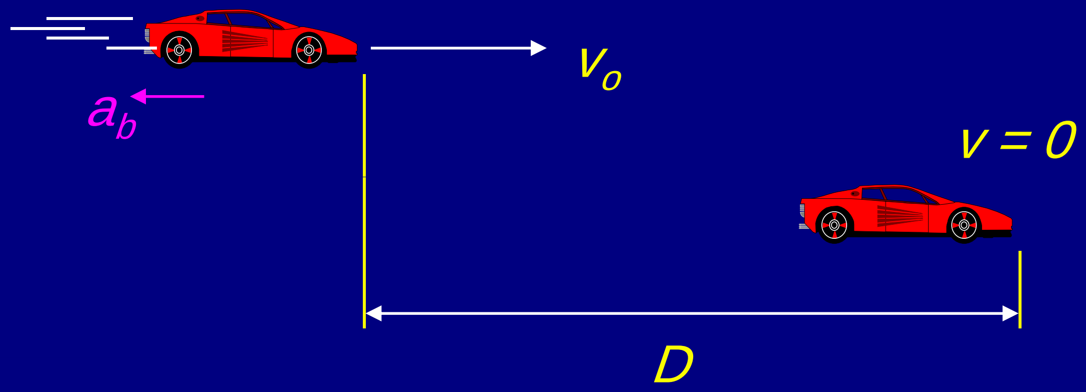
$$0 - v_0^2 = -2a_b(D)$$

$$\Rightarrow \quad D = \frac{v_0^2}{2a_b}$$

$$a_b = \mu_S g$$

با جاگذاری

$$\Rightarrow \quad \boxed{D = \frac{v_0^2}{2\mu_s g}}$$



نهایی آوری یاد

- اصطکاک
  - اصطکاک چیست؟
  - چگونه آنرا تشخیص می دهیم؟
  - مدل اصطکاک
  - اصطکاک ایستایی و جنبشی

- چند مسئله در مورد اصطکاک
  - جعبه روی کامیون
  - فاصله ترمز.

- **مسائل کتاب را حل کنید!**

ادامه فصل ششم ...

دینامیک ذره

اصطکاک

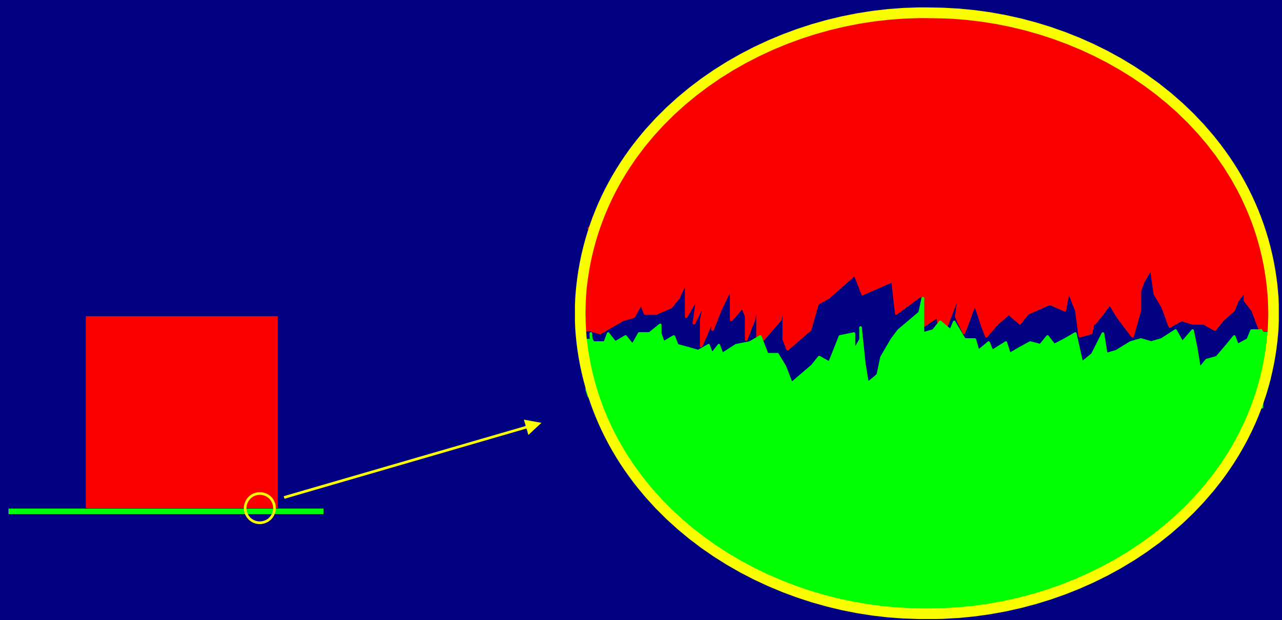
درس امروز ما:

- یاد آوری نیروی اصطکاک
- نیروهای
    - سرعت حد
- دینامیک سیستمهای چند جسمی
    - ماشین آتوود
    - حالت کلی دو جسم متصل به هم روی سطح شیبدار
    - چند مسئله جالب

مرور نیروی اصطکاک:

- اصطکاک از اثر میکروسکپی بین دو سطح ایجاد می شود.

  ➔به متن کتاب درسی مراجعه کنید



مدل نیروی اصطکاک:

- جهت نیروی اصطکاک f_F متناسب با نیروی قائم N *است* ودر جهت حرکت نسبی دو سطح است.

- ***اصطکاک جنبشی) للغرشی :(*** بزرگی نیروی اصطکاک متناسب با بزرگی نیروی قائم N *است*.

$$f_F = \mu_K N$$

- ***اصطکاک ایستایی :*** نیروی اصطکاک نیروهای واردشده بر جسم را خنثی می کند تا جسم حرکت نکند .بیشینه نیروی اصطکاک متناسب با نیروی قائم N *است*.

$$f_F \leq \mu_S N$$

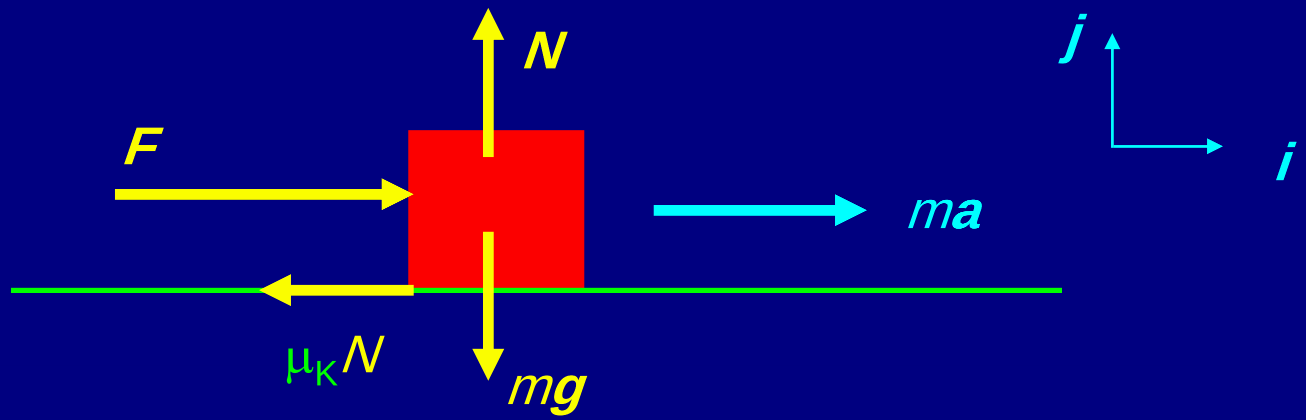
اصطکاک جنبشی:

- μ_K ضریب اصطکاک جنبشی است.

$$i: \quad F - \mu_K N = ma$$

$$j: \quad N = mg$$

$$so \qquad \boxed{F - \mu_K mg = ma}$$

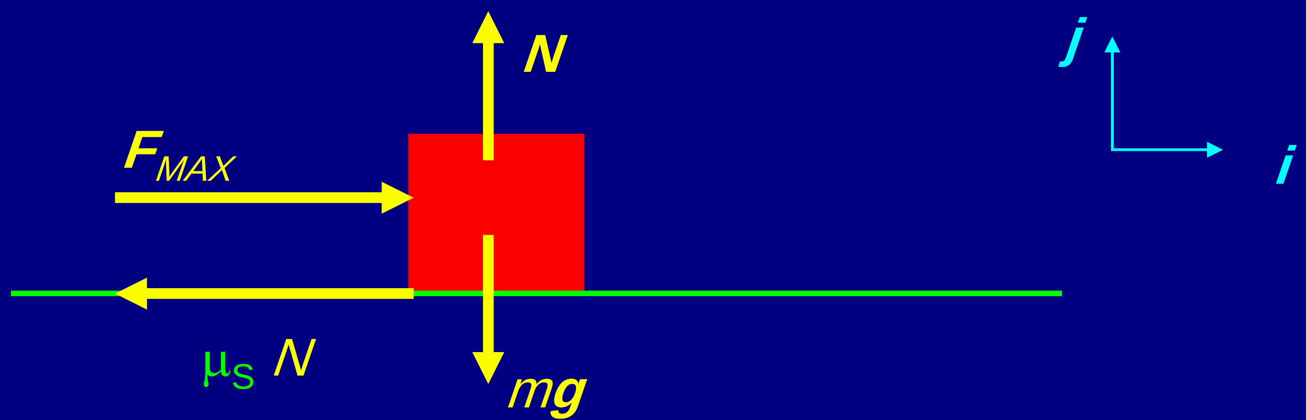


اصطکاک ایستایی:

- " *ضریب اصطکاک ایستایی*, μ_S, " بیشینه نیروی اصطکاک $\mu_S N$, که بین اجسام می تواند بوجود آید را نشان می دهد .
- نیروی F را افزایش می دهیم تا جسم شروع به حرکت کند:

$$N = mg \qquad F_{MAX} - \mu_S N = 0$$

$$\boxed{F_{MAX} = \mu_S\, mg} \Rightarrow \boxed{\mu_S = F_{MAX} / mg}$$



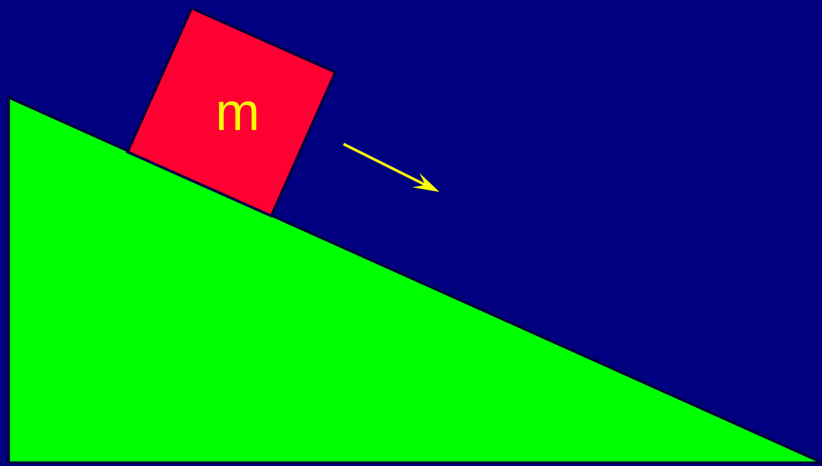
دینامیک دو جسمی:

- جسمی به جرم *m*, روی سطح شیبدار خشنی قرار دارد ($\mu > 0$)به آن ضربه آرامی می زنیم. این جسم شروع به حرکت با سرعت ثابت می کند.
  - اگر جسم مشابهی با)مساوی (μ جرم *2m* روی همان سطح قرار دهیم و به آن ضربه آرامی بزنیم در اینصورت:

الف - *متوقف می شود*

ب - *شتاب پیدا می کند*

ج - *باتندی ثابت حرکت می کند*

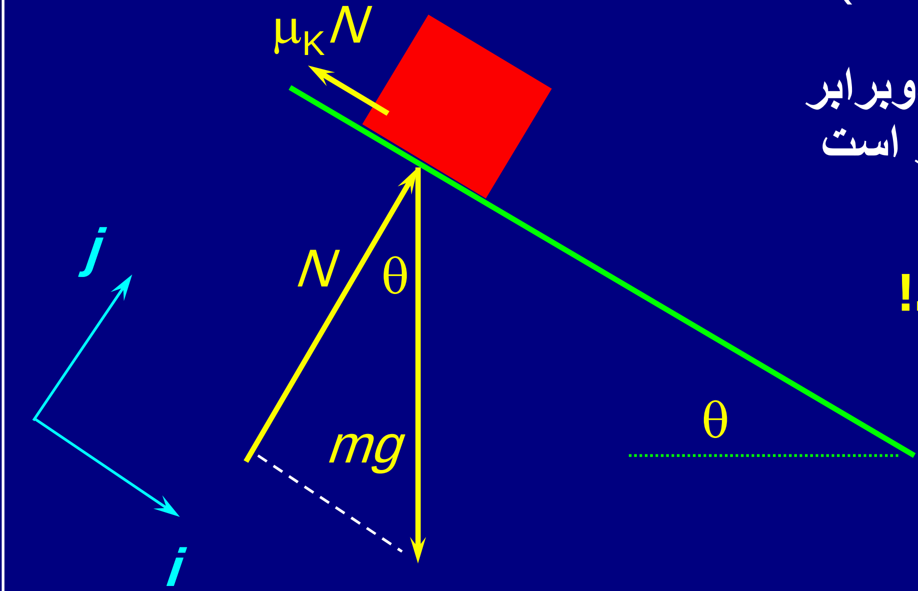


پاسخ:

- نمودار جسم آزاد را کشیده و نیروی برایند در راستای سطح شیدار حساب کنید

$$F_{NET,X} = mg \sin\theta - \mu_K mg \cos\theta$$

$$= ma = 0 \text{ (حالت اول)}$$

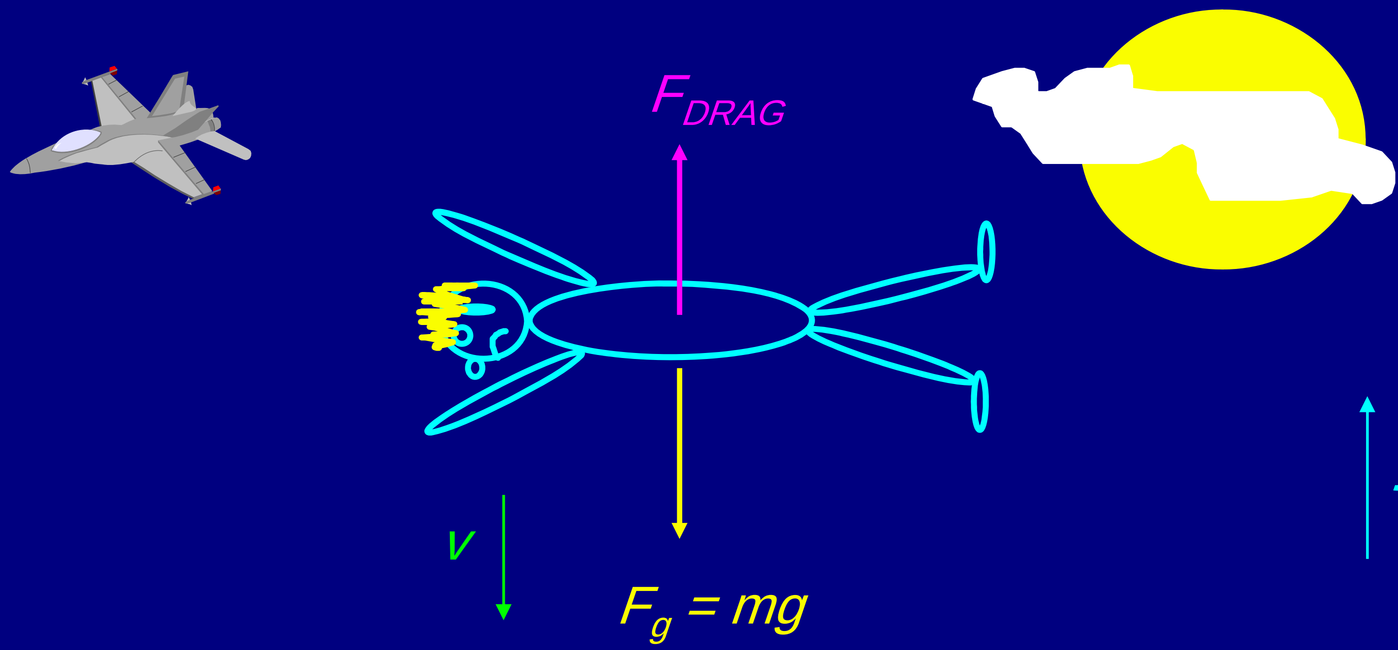


بادوبرابرشدن جرم هردوجمله فوق دوبرابر می شوند ولی نیروی برایند بازهم صفر است لذا:

سرعت بازهم ثابت می ماند!

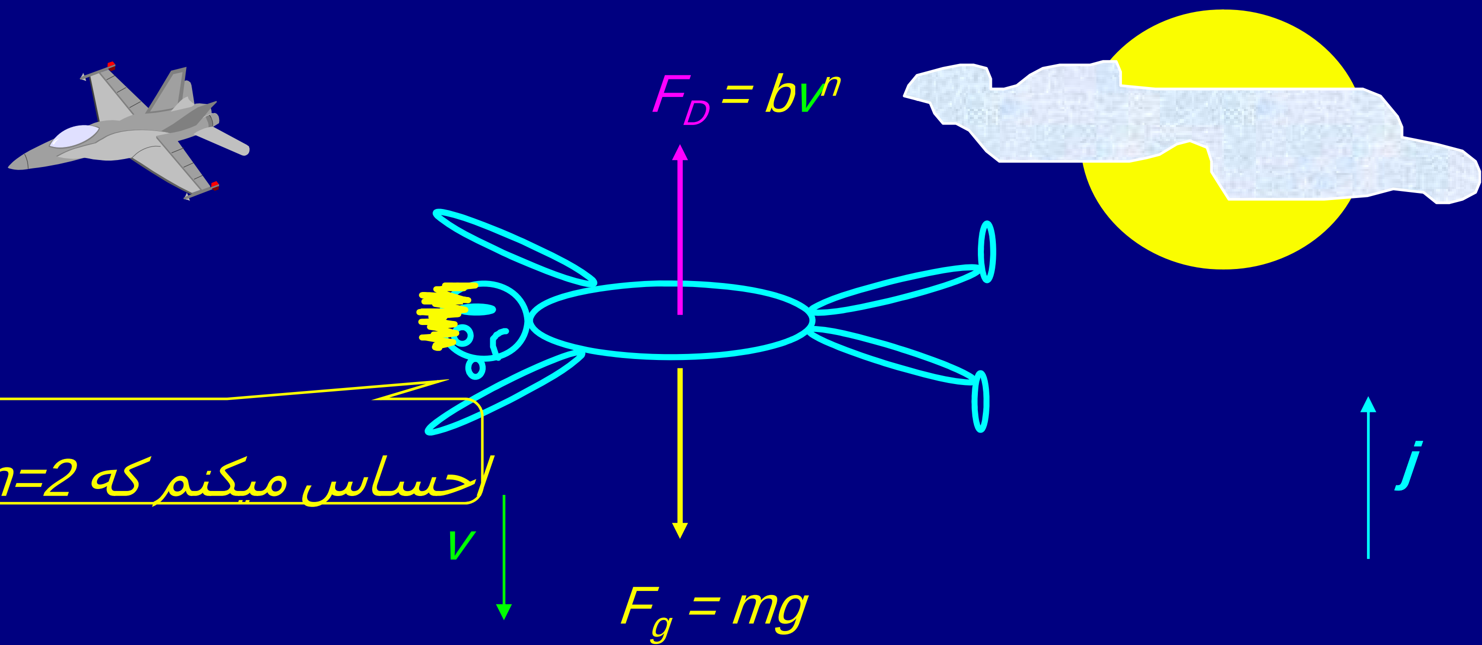
نیروی اصطکاک در سیالات

- وقتی که یک جسم در سیالی حرکت می کند یک نیروی ترمزی که سبب کندشدن حرکت جسم در سیال می شود به آن وارد می گردد.



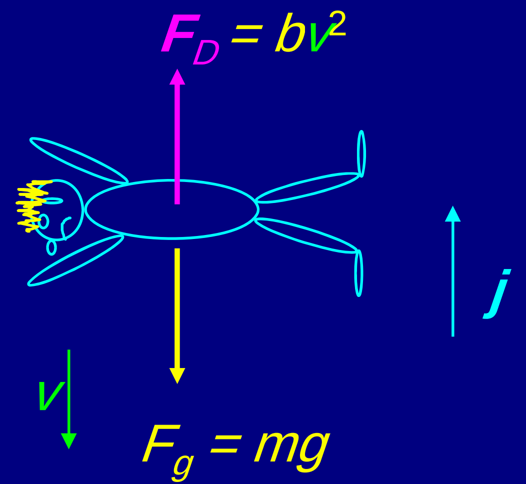
نیروهای مقاومت ترمزی

- این نیروی مقاومت درسیال سبب می شود که سرعت v جسم به یک توانی برسد و سبب یک تندی نهایی و بیشینه می شود .



تندی حد:

- فرض کنید که $F_D = bv^2$ *باشد*. احمد از هواپیما بیرون می پرد وبعداز اندکی سقوط سرعتش به v *می رسد*.
  - ← بعداز رسیدن به سرعت حد F_D چقدر است ؟
  - ← تندی حد v چقدر است ؟

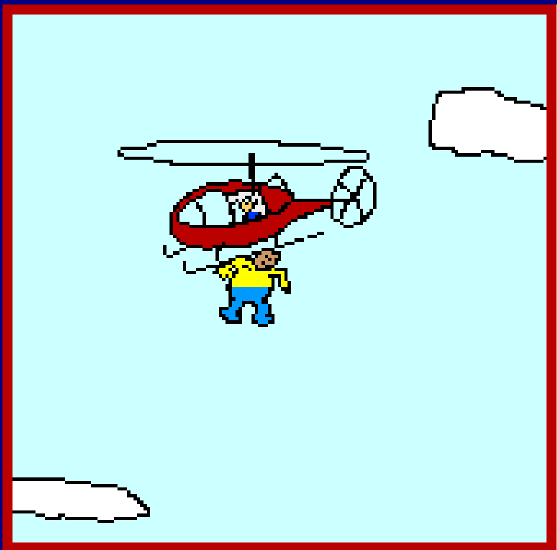


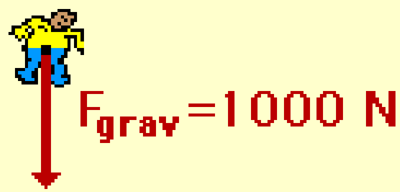
- $F_{TOT} = F_D - mg = ma = 0.$
  ← $F_D = mg$

- چون ⇨ $F_D = bv^2$ ⇩
  ← $bv^2 = mg$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{mg}{b}}}$$

سرعت حد: چتربازی ا ز هلی کوپتر می پرد به حرکت او توجه کنید>دونیرو به ا و وارد می شود:
نیروی جاذبه زمین و نیروی مقاومت هوا. نیروی مقاومت هوانیز به دو عامل بستگی دارد:
۱- سرعت چترباز   ۲- سطح مقطع او
هنگام سقوط سرعت او زیاد می شود بنابراین مقاومت او هم زیاد می گردد.وقتی نیروی مقاومت هوا با نیروی جاذبه برابر شد سرعت او یکنواخت و شتابش صفر می گرددو می گوییم شخص به سرعت حد رسیده است . توجه کنید که با باز شدن چتر و تغییر سطح مقطع نیروی مقاومت هوا چگونه تغییر می کند؟





$$a = \frac{F_{net}}{m}$$

$$a = \frac{1000\ \text{N}}{100\ \text{kg}}$$

$$a = 10.0\ \text{m/s}^2$$

(پائین)

دینامیک چند جسمی:

- این سیستم ها از بیش ا ز یک جسم تشکیل می شوند
- این اجسام اغلب به همدیگر متصلند

امروز ⟵ بوسیله قرقره و طناب

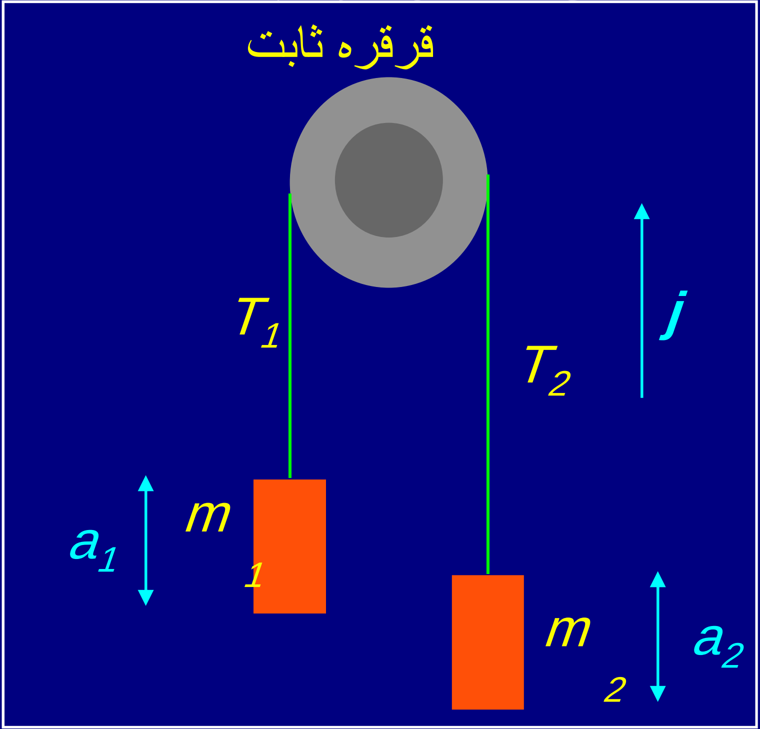
بعدا ⟵ بوسیله میله و فنر و غیره

ماشین آتوود

آرمانی قرقره یک از جرمی بدون طناب بوسیله m_2 و m_1 **دوجرم جرم بدون**

مطابق شکل آوایزان شده اند.

- شتاب a_1 , و a_2, دوجرم را پیداکنید.
- کشش نخ T چقدر است



ادامه ماشین آتوود...

- نمودار جسم آزاد را برای هر جرم بکشید
- قانون دوم نیوتن را بکار برید (مولفه j):

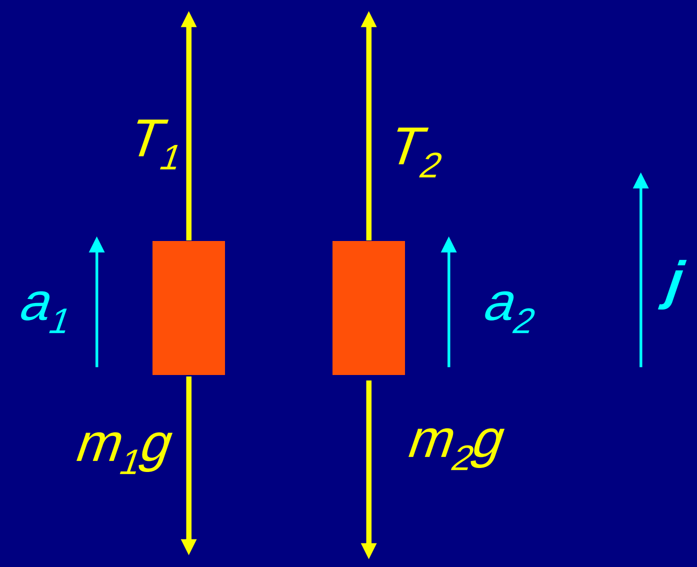
$\Leftarrow$ $T_1 - m_1 g = m_1 a_1$

$\Leftarrow$ $T_2 - m_2 g = m_2 a_2$

But $T_1 = T_2 = T$
چون قرقره آرمانی است:

$a_1 = -a_2 = -a$.
چون جرمها به وسیله نخ به همدیگر متصلند.

نمودار جسم آزاد



...آتوود ماشین ادامه

$$T - m_1 g = -m_1 a \qquad (a)$$
$$T - m_2 g = m_2 a \qquad (b)$$

- دو معادله و دو مجهول

 ← این معادله را برای دو مجهول حل می کنیم (T و a)

- تفریق میکنیم: (b) - (a)

$$g(m_1 - m_2) = a(m_1 + m_2)$$

$$a = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} g$$

- جمع می کنیم: (b) + (a)

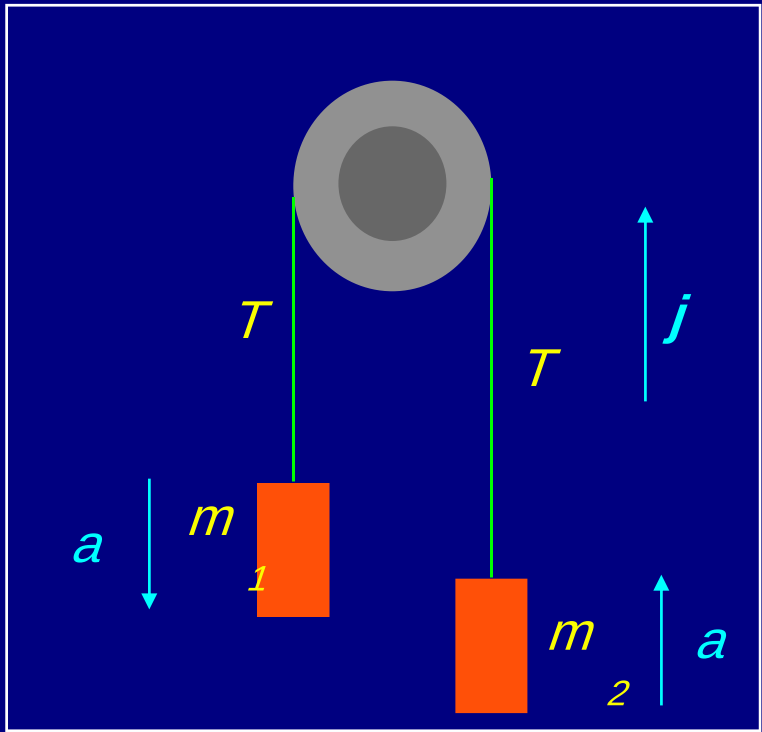
$$\leftarrow 2T - g(m_1 + m_2) = -a(m_1 - m_2) = -g\frac{(m_1 - m_2)^2}{m_1 + m_2}$$
$$\leftarrow T = 2gm_1 m_2 / (m_1 + m_2)$$

ادامه ماشین آتوود

- بنابراین:

$$a = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} g$$

$$T = \frac{2 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} g$$



$$a = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} g$$

آیا این نتایج قابل قبول است!

$$T = \frac{2 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} g$$

- موارد خاص:

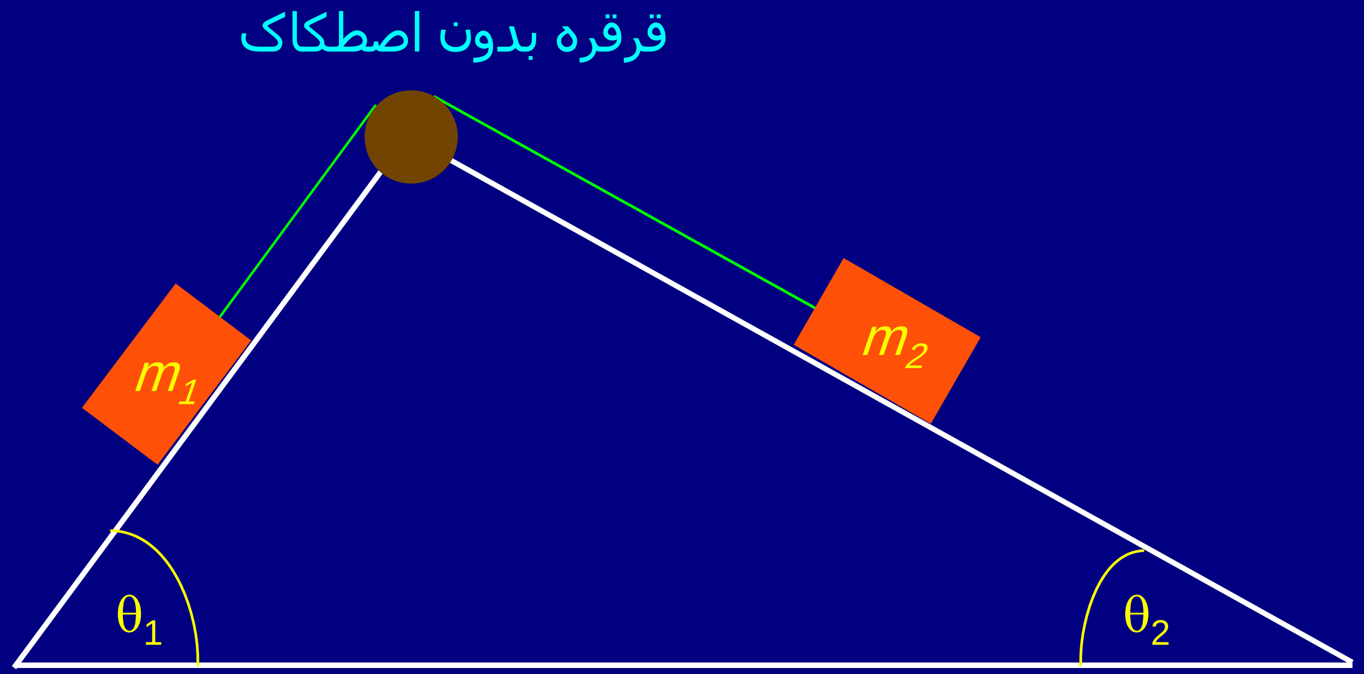
i.) $m_1 = m_2 = m$ $a = 0$ and $T = mg$. **OK!**

ii.) m_2 or $m_1 = 0$ $|a| = g$ and $T = 0$. **OK!**

- **ماشین آتوود را می توان برای محاسبه g بکاربرد (با اندازه گیری شتاب دو جرم)**

$$g = \frac{(m_2 + m_1)}{(m_2 - m_1)} a$$

اجسام متصل به هم روی سطح شیبدار



کلیه سطوح بدون اصطکاک هستند

این اجسام چگونه حرکت می کنند؟

نمودار جسم آزاد را می کشیم و دستگاه مختصات را برای هر جسم انتخاب می کنیم و قانون دوم نیوتن را بکار می بریم.

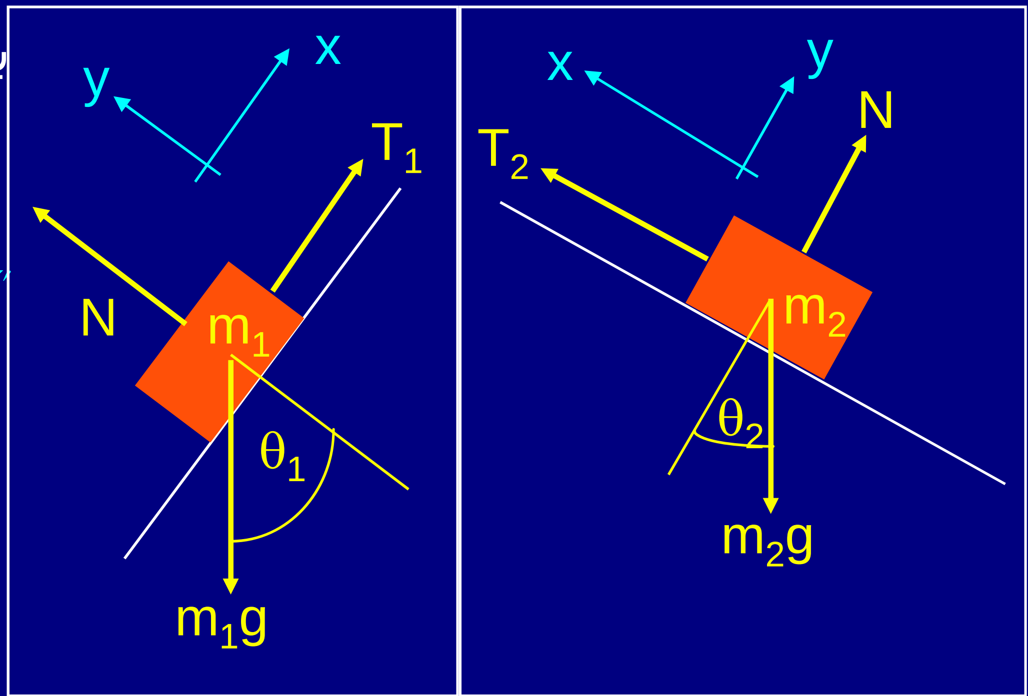
با در نظر گرفتن مولفه "x"

1) $T_1 - m_1 g \sin\theta_1 = m_1 a_{1X}$

2) $T_2 - m_2 g \sin\theta_2 = m_2 a_{2X}$

ولی $T_1 = T_2 = T$

$-a_{1X} = a_{2X} = a$



حل معادلات:

با استفاده از روابط فوق معادلات را حل می کنیم:

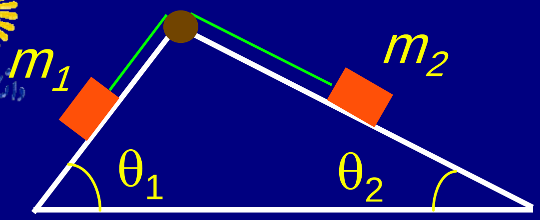
$$T - m_1 g\sin\theta_1 = -m_1 a \qquad (a)$$

$$T - m_2 g\sin\theta_2 = m_2 a \qquad (b)$$

(a) را از (b) کم میکنیم:

$$m_1 g\sin\theta_1 - m_2 g\sin\theta_2 = (m_1+m_2)a$$

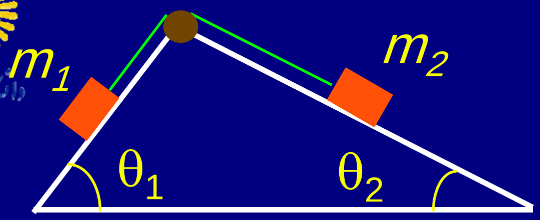
$$\boxed{a = \frac{m_1 \sin\theta_1 - m_2 \sin\theta_2}{m_1 + m_2} g}$$



$$a = \frac{m_1 \sin\theta_1 - m_2 \sin\theta_2}{m_1 + m_2} g$$

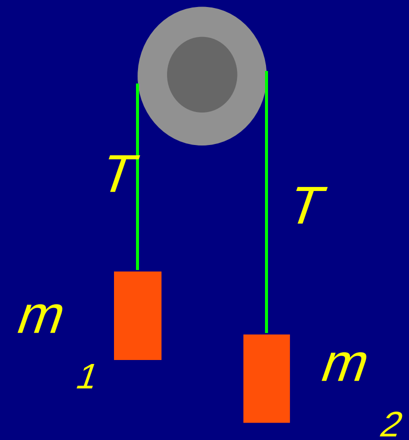
حالت خاص یک

اگر $\theta_1 = 0$ و $\theta_2 = 0$, $\Leftarrow$ $a = 0$



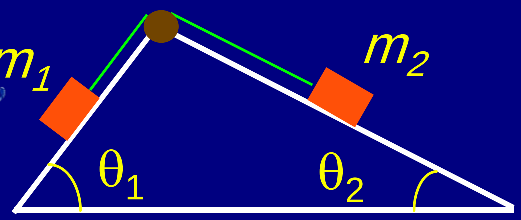
$$a = \frac{m_1 \sin\theta_1 - m_2 \sin\theta_2}{m_1 + m_2} g$$

حالت خاص 2



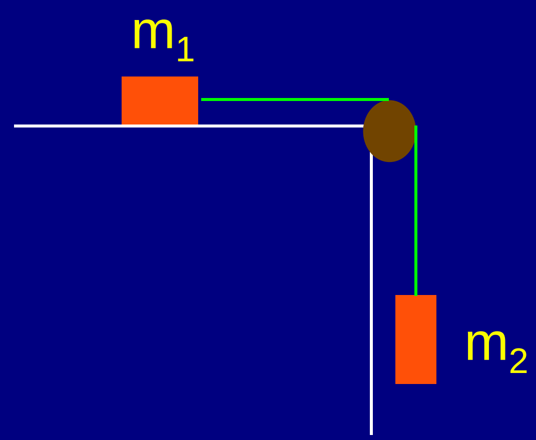
ماشین آتوود

$\theta_1 = 90$ و $\theta_2 = 90$ $\Rightarrow$ $a = \dfrac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} g$



$$a = \frac{m_1 \sin\theta_1 - m_2 \sin\theta_2}{m_1 + m_2} g$$

حالت خاص3

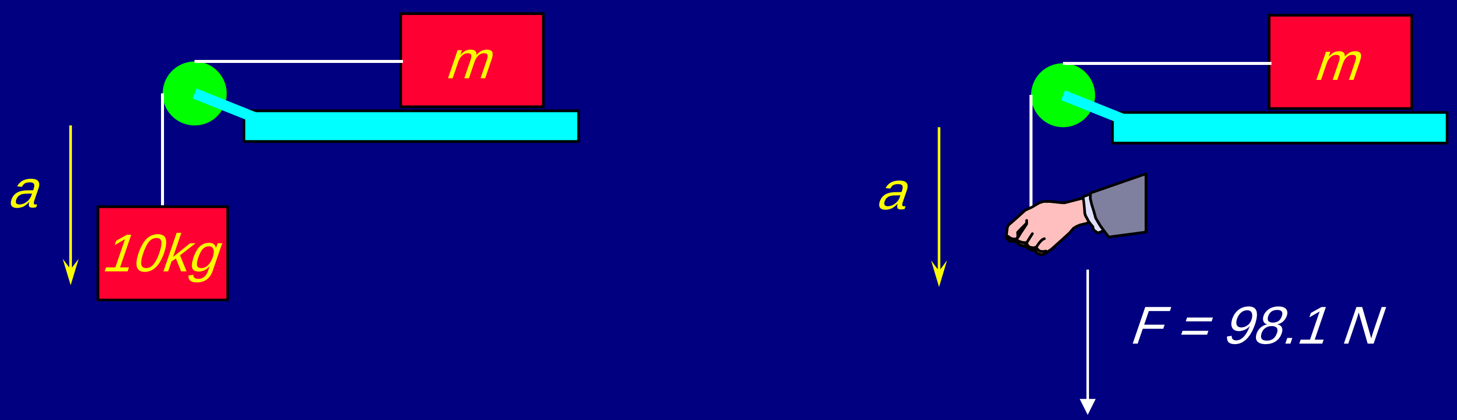


$\theta_1 = 0$ و $\theta_2 = 90$ ⇒

$$a = \frac{-m_2}{(m_1 + m_2)} g$$

دینامیک دوجسمی

- در کدام حالت جسم ***m*** شتاب بیشتری پیدا می کند ?درحالت (1) جسم ***10 kg*** ازطنابی آویزان است .درحالت (2) به وسیله دست نیروی ثابت ***98.1 N*** ***به پایین وارد می شود***. در هردوحالت طناب و قرقره بدون جرم هستند.



حالت 1   حالت 2

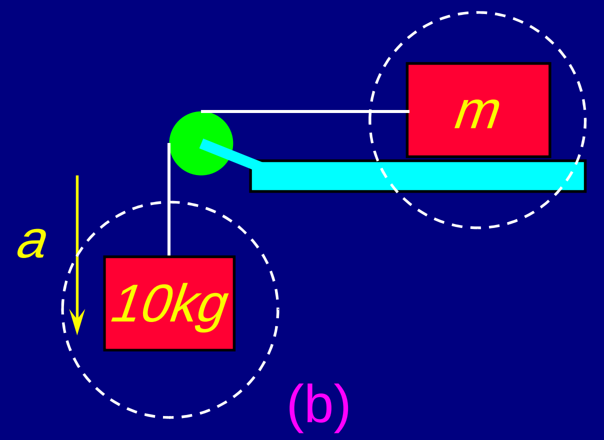
الف – حالت ۱   ب- حالت ۲   ج- مساوی

پاسخ

- در مورد حالت (1) نمودار جسم آزاد را بکشید ورابطه $F_{NET} = ma$ را بکار برید.

$T = ma$ (a)

$(10kg)g - T = (10kg)a$ (b)



- (a) + (b):

$98.1\ N = (m + 10kg)a$

$$\boxed{a = \frac{98.1N}{m + 10kg}}$$

- توجه کنید:

$$T = 98.1N \times \frac{m}{m + 10kg}$$

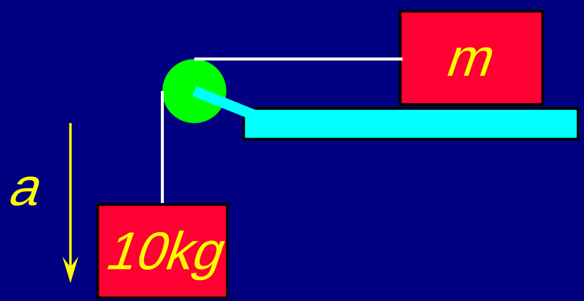
پاسخ:

- درمورد حالت(2) $T = 98.1\ N = ma$

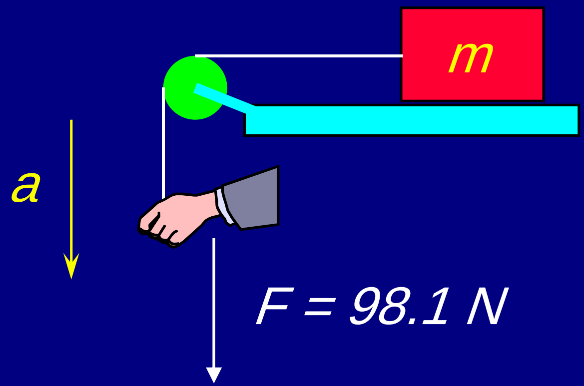
$$\boxed{a = \frac{98.1N}{m}}$$

$$a = \frac{98.1N}{m + 10kg}$$

$$a = \frac{98.1N}{m}$$



حالت (1)



حالت (2)

- پاسخ ب است حالت(2)

مسئله دو جسم متصل به هم روی سطح افقی

- T_1, m_1 و $m_2,$ مفروضند مقدار a و T_2 چقدر است؟

$$T_1 - T_2 = m_1 a \qquad (a)$$

$$T_2 = m_2 a \qquad (b)$$

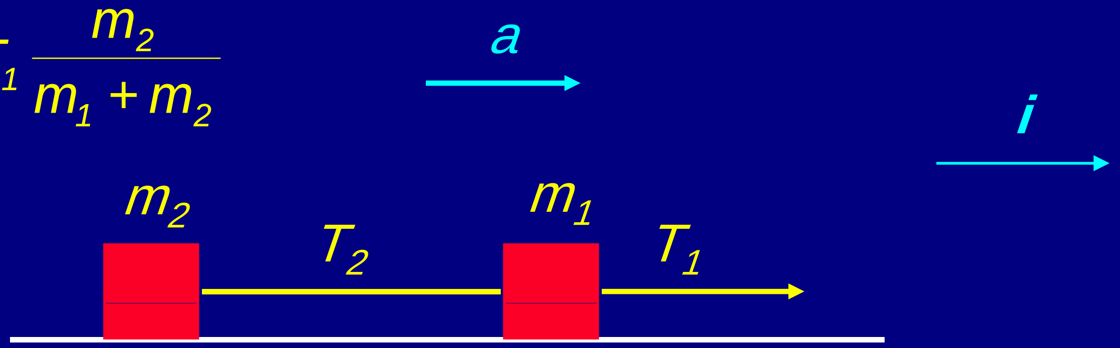
$(a) + (b)$:

$$\Rightarrow$$

$$T_1 = (m_1 + m_2)a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{T_1}{m_1 + m_2}$$

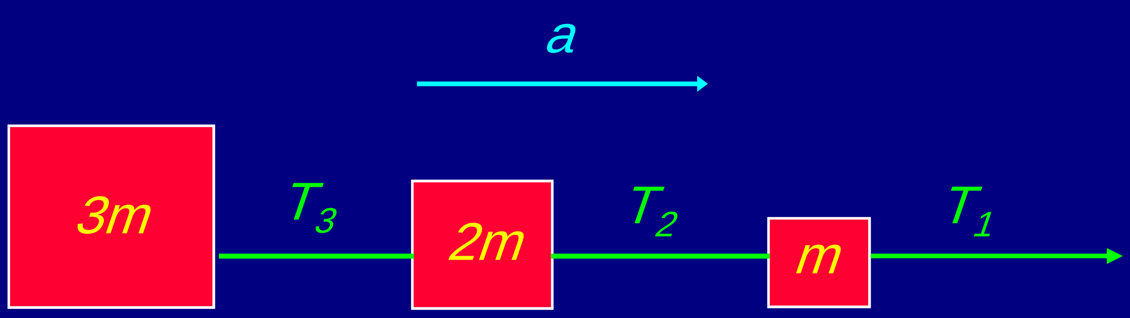
با جاگذاری دررابطه (b) :

$$T_2 = T_1 \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$



ادامه دینامیک دو جسم:

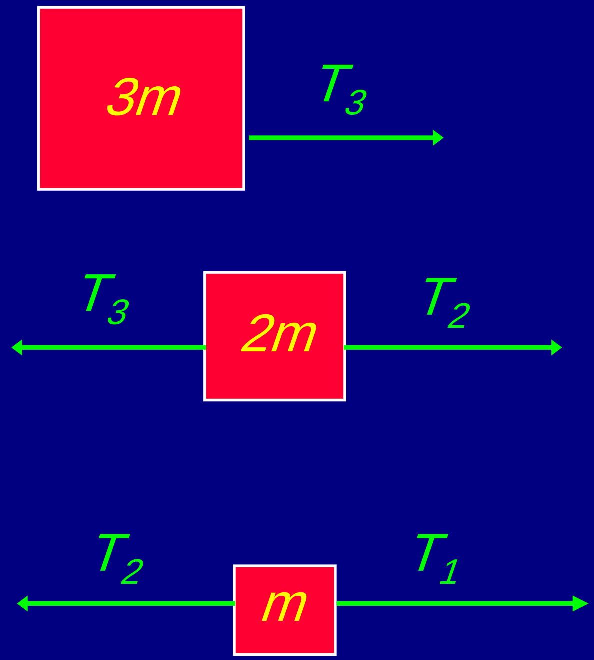
- سه جسم به جرم های $3m, 2m,$ و m به وسیله طناب بدون جرم مطابق به همدیگر متصل هستند و با شتاب a حرکت می‌کنند . رابطه بین کشش طناب ها چگونه است ؟



(a) $T_1 > T_2 > T_3$ (b) $T_3 > T_2 > T_1$ (c) $T_1 = T_2 = T_3$

پاسخ:

- دیاگرام جسم آزاد را بکشید!!



$$T_3 = 3ma$$

$$T_2 - T_3 = 2ma$$

$$T_2 = 2ma + T_3 > T_3$$

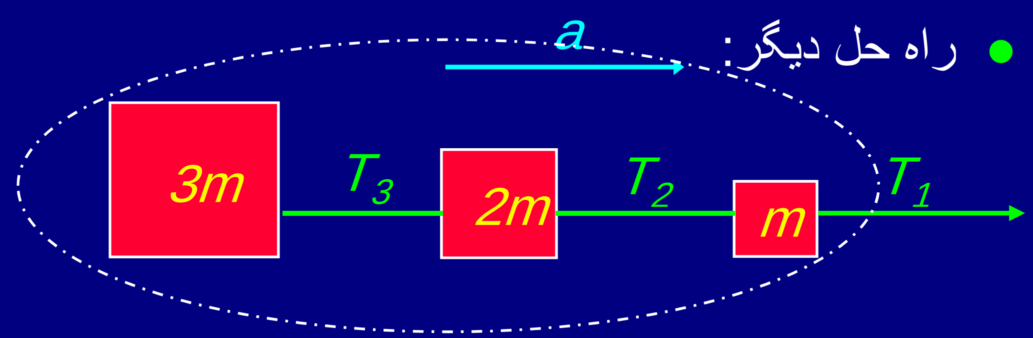
$$T_1 - T_2 = ma$$

$$T_1 = ma + T_2 > T_2$$

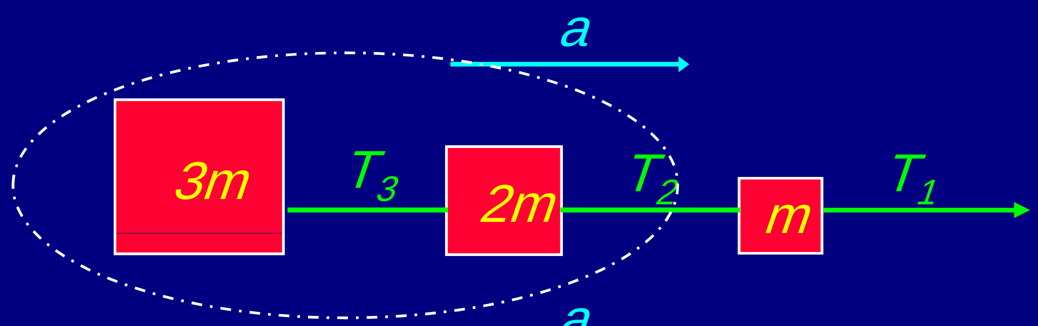
$$T_1 > T_2 > T_3$$

پاسخ:

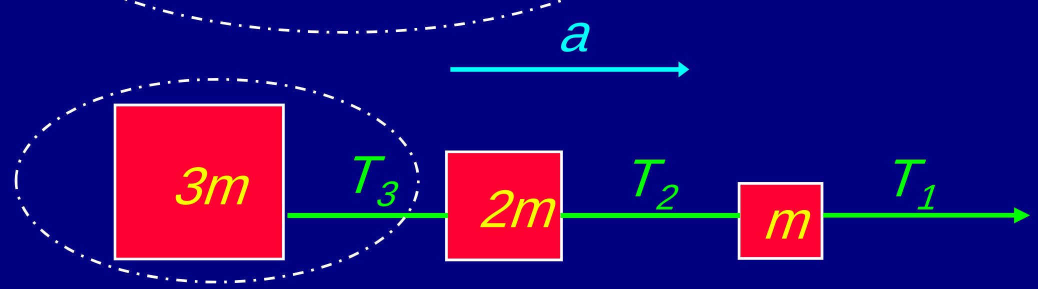
- راه حل دیگر:



فرض کنید که T_1 هر سه جسم را بکشد



T_2 فقط جسم 3m و 2mرا می کشد.

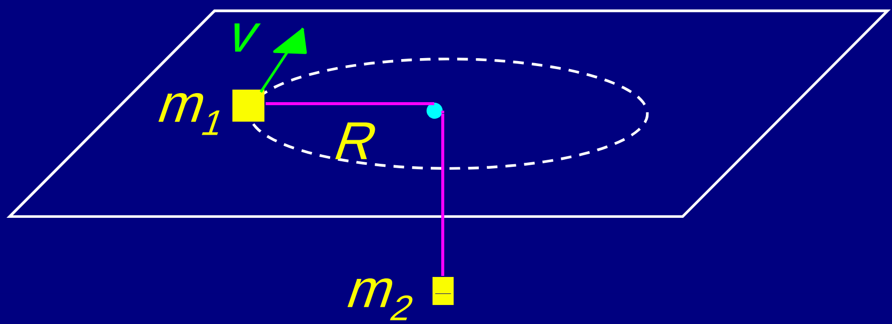


T_3 فقط جسم 3m را میکشد

$T_1 > T_2 > T_3$

مسئله یک جسم چرخنده:

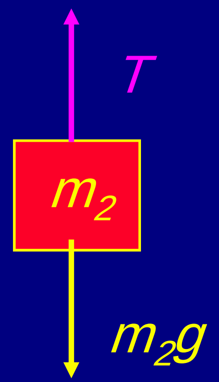
- جرم m_1 روی یک مسیر دایره ای با تندی v روی یک میز افقی می چرخد. این جسم بوسیله طنابی که از سوراخی دروسط میز به فاصله R ازآن به جسم دیگری به جرم که m_2 *آویزان است متصل است*.
  - ← کشش طناب (T) چقدر است ؟
  - ← تندی (v) جسم چرخنده چقدراست؟



حل مسئله

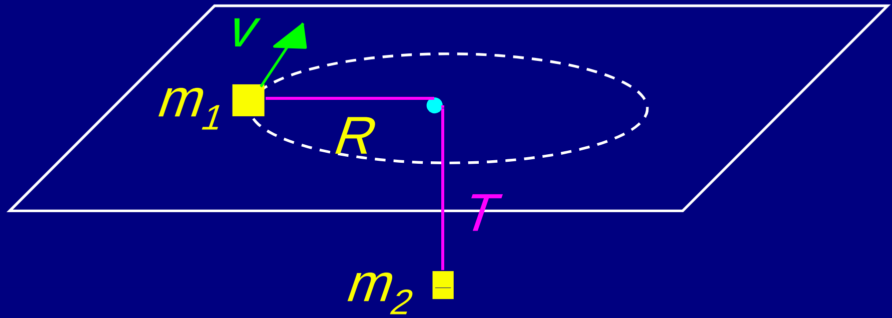
- دیاگرام جسم آزاد را برای جرم آویزان بکشید:

←چون R ثابت است $a = 0$:



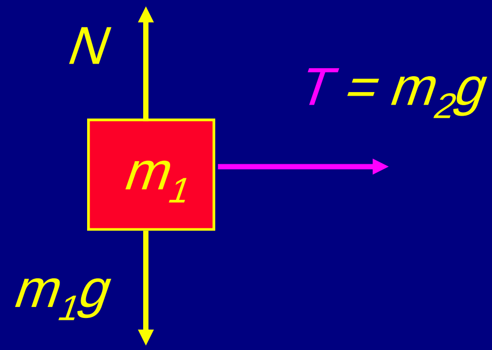
لذا :

$$\boxed{T = m_2 g}$$



ادامه مسئله:

- نمودار جسم آزاد را بکشید:



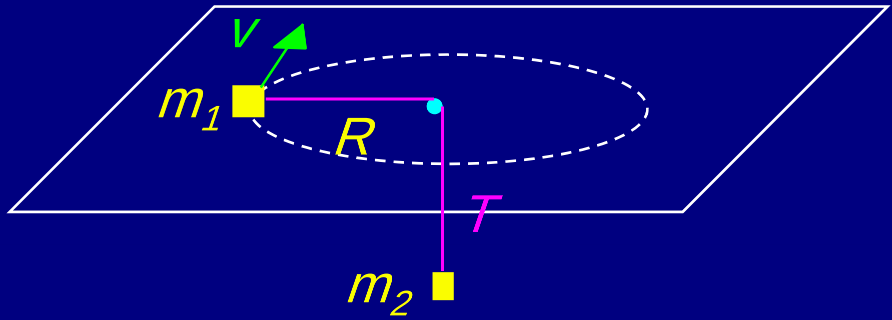
$$T = m_2 g$$

$$F = T = m_1 a$$

که:

$$a = v^2 / R$$

$$m_2 g = m_1 v^2 / R \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{gR\frac{m_2}{m_1}}}$$



یادآوری نهایی:

- یاد آوری نیروی اصطکاک
- نیروهای
  - ← سرعت حد
- دینامیک سیستمهای چند جسمی
  - ← ماشین آتوود
  - ← حالت کلی دو جسم متصل به هم روی سطح شیبدار
  - ← چند مسئله جالب
- به متن کتاب و حل مسائل کتاب توجه کنید

فصل هفتم

کار وانرژی

درس امروز ما

- کار وانرژی
  - بحث
  - تعریف
- ضرب نقطه ای
- کارنیروی ثابت
  - کار- قضیه کار وانرژی جنبشی
- کار نیروهای ثابت
- تفسیر

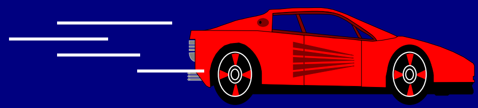
کار وانرژی

- مهمترین اصل در فیزیک
  - تقریب جا یگزینی به مکانیک
- کاربردهای خارج از محدوده مکانیک
  - حرارت(حرکت گرما)
  - مکانیک کوانتم...
- ابزار بسیار مفید
  - راههای جدید برای حل مسائل(گاهی بسیار ساده تر)

شکلهای مختلف انرژی

- جنبشی :انرژی مربوط به حرکت.

اتومبیلی که حرکت می کند دارای انرژی جنبشی است



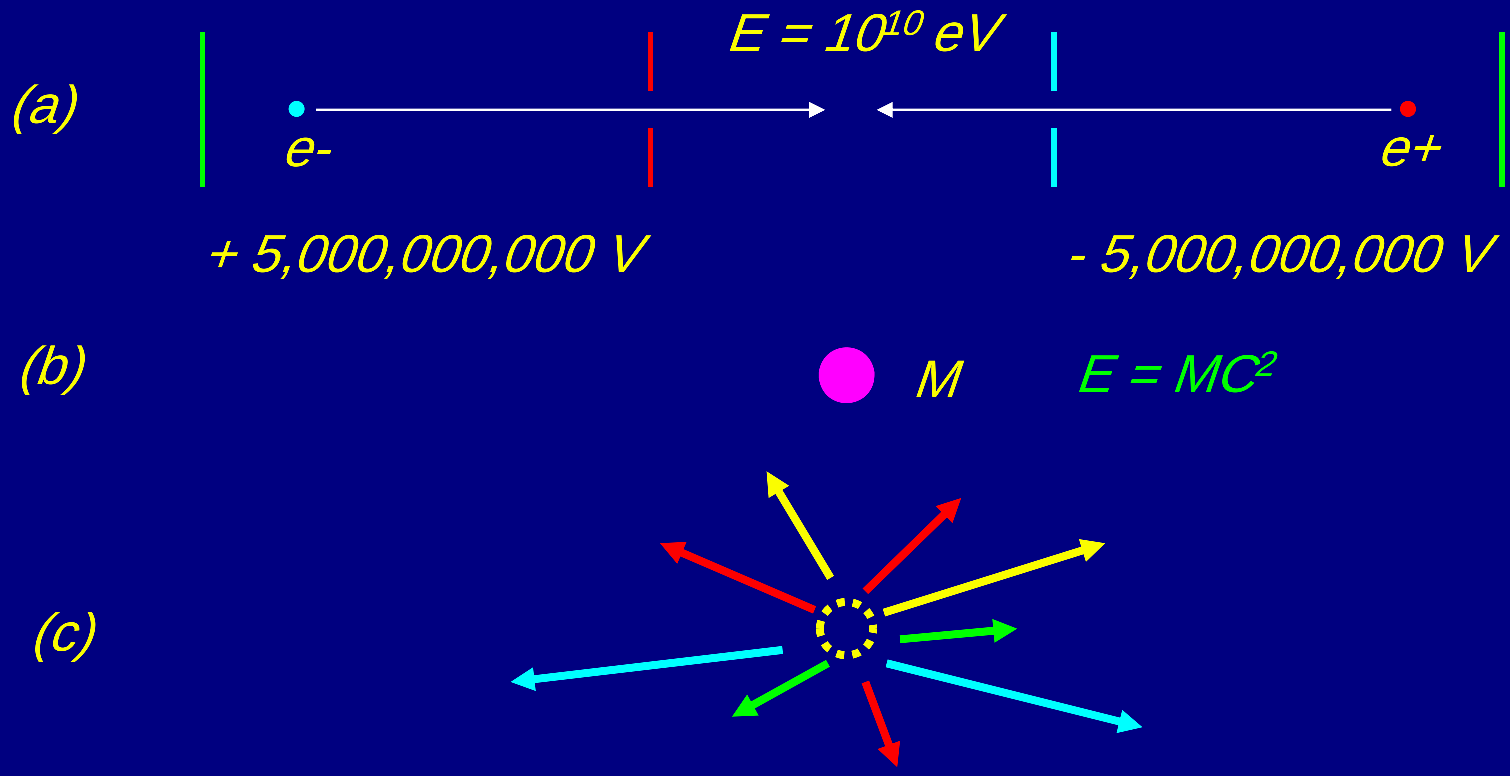
باید این انرژی را از اتومبیل بگیریم تا متوقف شود..

ترمزهای اتومبیل داغ می شود!

و این راهی برای تبدیل یک نوع انرژی به نوع دیگر است (به انرژی حرارتی)

جرم = انرژی (ولی نه در فیزیک ۱)

- فیزیک ذرات:



پایستاری انرژی

- انرژی از بین نرفته و ایجاد نمی شود.
  - فقط از یک حالت به حالت دیگر تبدیل می شود.

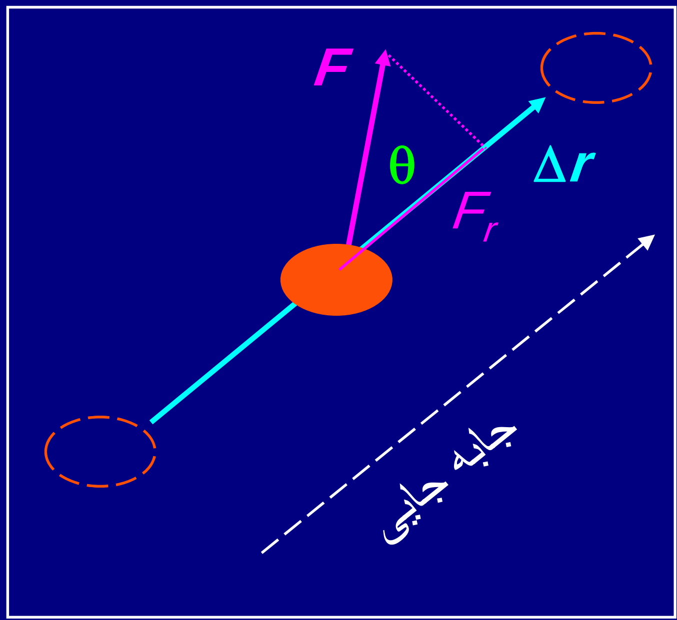
- می گوییم که انرژی پایسته می ماند!
  - برای هر سیتم بسته درست است .
  - یعنی وقتی ترمز می گیریم انرژی جنبشی اتومبیل در ترمزها دراثر اصطکاک به حرارت تبدیل می شود .انرژی کل " اتومبیل – ترمز – جاده و اتمسفر" ثابت می ماند .
  - انرژی اتومبیل به تنهایی پایسته نمی ماند...
    - بلکه به وسیله ترمز کردن کاهش می یابد..

- با انجام کار روی یک سیستم منزوی انرژی آن تغییر می کند"..."

تعریف کار...

عناصر موثر در کار: نیرو (F), جابه جایی(Δr)

کار, W, نیرو ی F
در جابه جایی Δr
برابر است با:

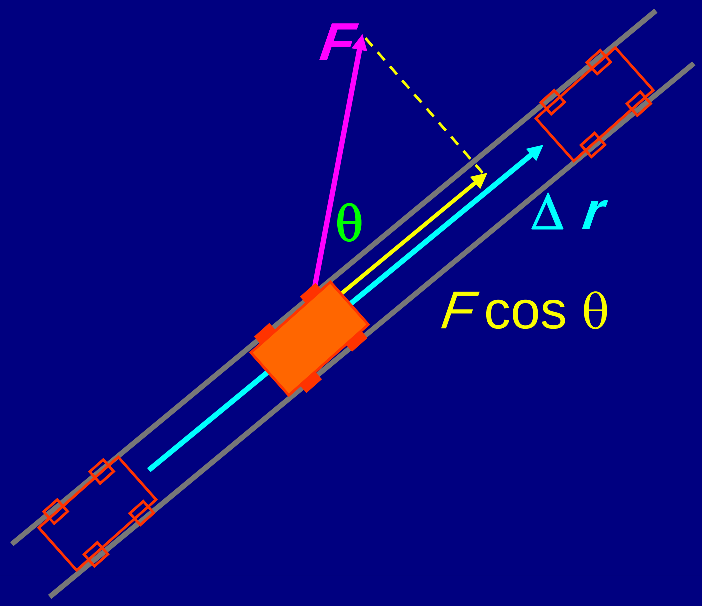


“ضرب نقطه ای”

تعریف کار...

- فقط مولفه F در امتداد جابه جایی کار انجام می دهد.

➔مثال :قطار روی ریل .

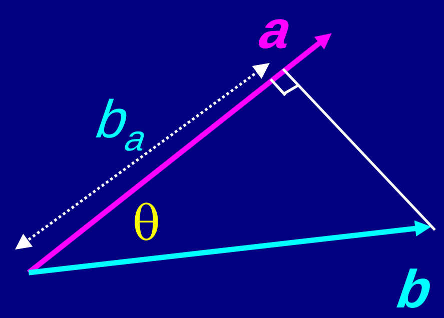


توجه یاد آوری :ضرب نقطه ای (یا ضرب نرده ای)

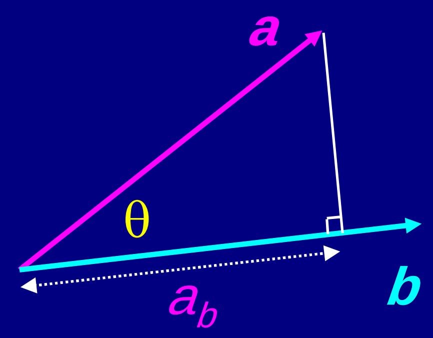
تعریف:

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = ab\cos\theta$

$= a[b\cos\theta] = ab_a$



$= b[a\cos\theta] = ba_b$



چند خاصیت:

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$

$q(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) = (q\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}\cdot(q\boldsymbol{a})$ (qنرده ای است)

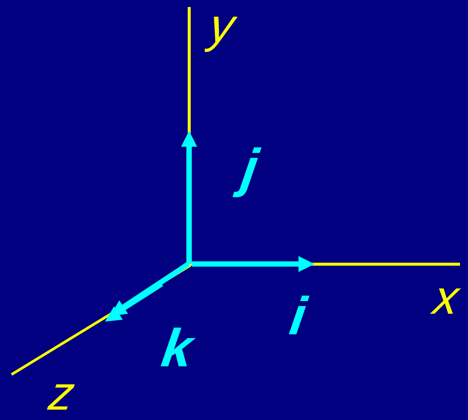
$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})$ (cبردار است)

حاصل ضرب نرده ای بردارهای عمود برهم صفر است.

مثال هایی ا ز ضرب نرده ای

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$$



فرض کنید

$$\mathbf{a} = 1\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{b} = 4\,\mathbf{i} - 5\,\mathbf{j} + 6\,\mathbf{k}$$

دراینصورت :

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 1x4 + 2x(-5) + 3x6 = 12$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 1x1 + 2x2 + 3x3 = 14$$

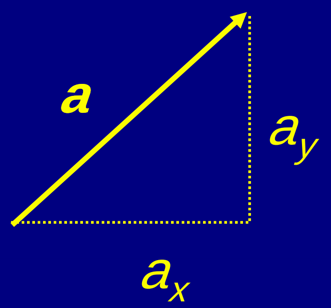
$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = 4x4 + (-5)x(-5) + 6x6 = 77$$

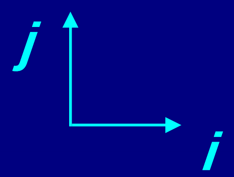
خواص ضرب نرده ای ..

- بزرگی :

$$
\begin{aligned}
a^2 = |a|^2 \quad &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \\
&= (a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j}) \cdot (a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j}) \\
&= a_x^{\,2}(\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}) + a_y^{\,2}(\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}) + 2a_x a_y(\mathbf{i} \cdot \mathbf{j}) \\
&= a_x^{\,2} + a_y^{\,2}
\end{aligned}
$$

قضیه فیثاغورث!!





خواص ضرب نقطه ای

- مولفه ها:

$$\mathbf{a} = a_x\, \mathbf{i} + a_y\, \mathbf{j} + a_z\, \mathbf{k} = (a_x , a_y , a_z) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{i}, \mathbf{a} \cdot \mathbf{j}, \mathbf{a} \cdot \mathbf{k})$$

- مشتق ها:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{dt}$$

← درمورد سرعت

$$\frac{d}{dt} v^2 = \frac{d}{dt}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}$$

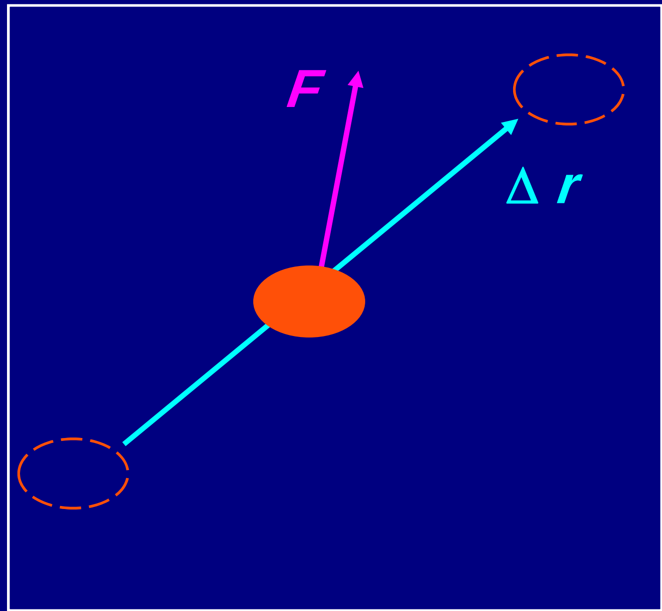
← بنابراین اگر $\boldsymbol{v}$ ثابت باشد:

$$\frac{d}{dt} v^2 = 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = 0$$

به تعریف کار برگردیم:

کار W, نیروی F در جابه جایی Δr **برابراست با**:

$$W = F \cdot \Delta r$$



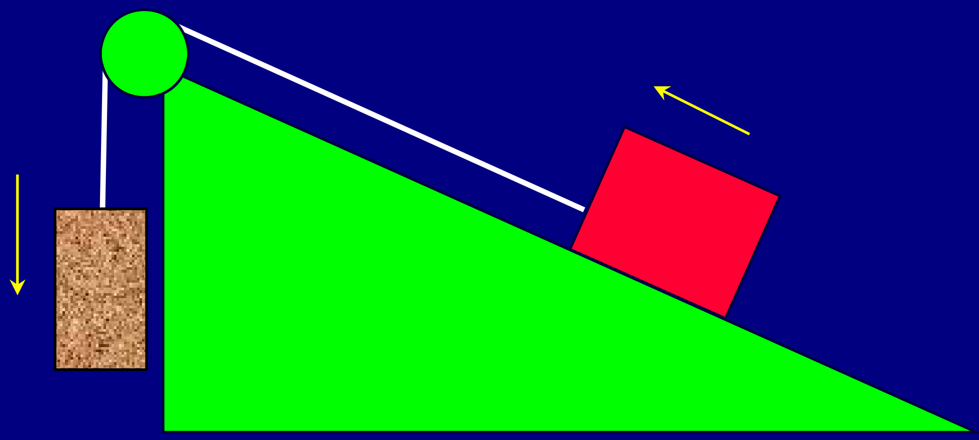
کار وانرژی

- در شکل زیر $(\mu > 0)$ جسمی را به وسیله وزنه و قرقره بالا می بریم
  ⇦چند نیر و کار انجام می دهند؟

(a) *2*

(b) *3*

(c) *4*

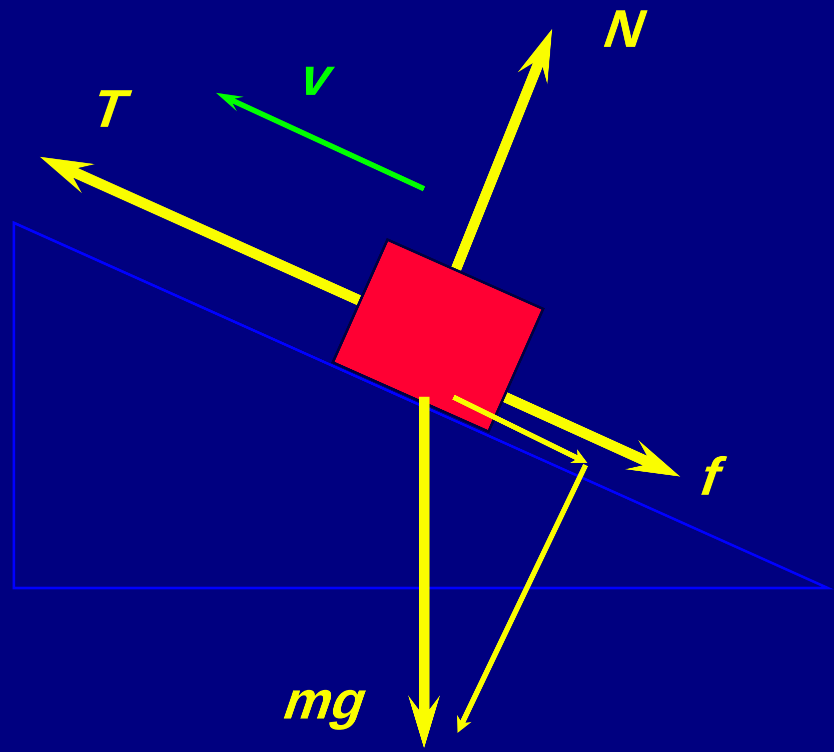


پاسخ:

- دیاگرام جسم آزاد را بکشید
- جهت حر کت جعبه را مشخص کنید
- هر نیرویی که عمود برجهت حرکت نباشد کار انجام می دهد.

N کاری انجام نمی دهد(عمود بر v)

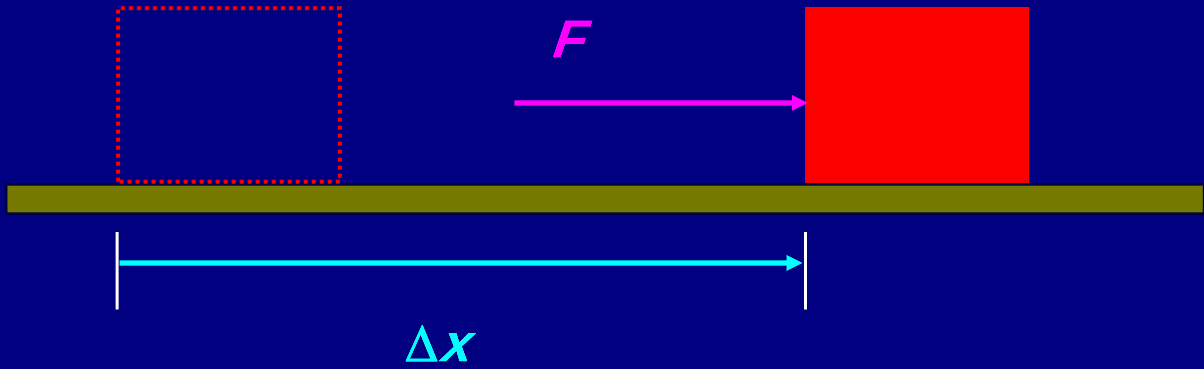
- T کار مثبت انجام می دهد
- f کار منفی انجام می دهد
- mg کار منفی انجام می دهد



۳ نیرو کار انجام می دهند

کار وانرژی:مثال

- نیروی $F = 10\ N$ بر جعبه ای روی سطح افقی بدون اصطکاک قرار دارد وارد می شود و مسافت $\Delta x = 5\ m$ را می پیماید.



کار نیروی F :

$W_F = F \bullet \Delta x = F\Delta x$ (زیرا F موازی است Δx)

$W_F = (10\ N) \times (5\ m) = 50$ Joules (J)

یکاها

کار = جابه جایی x نیرو

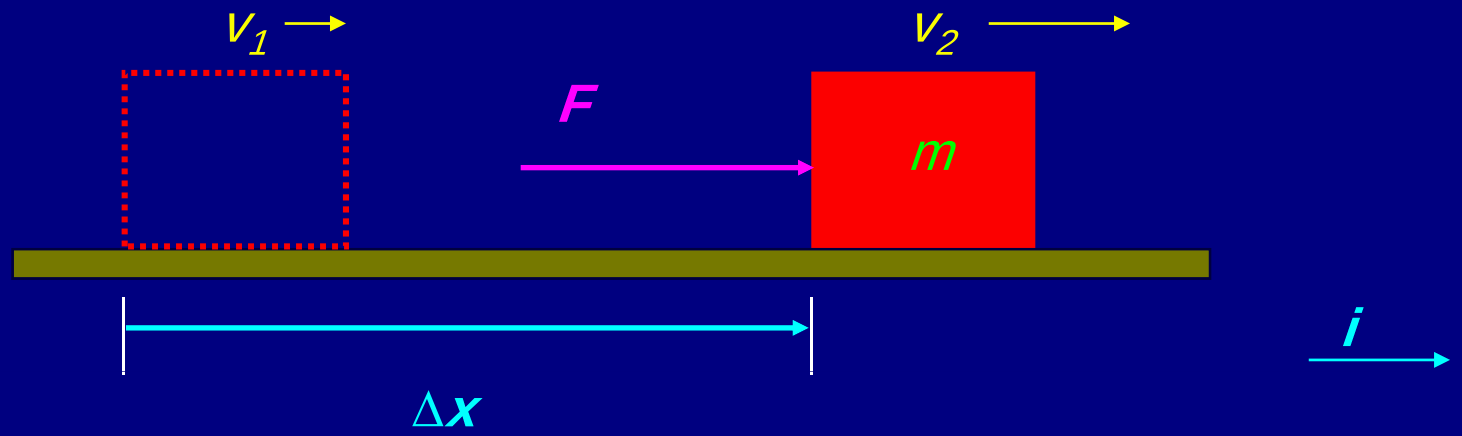
ژول = متر x نیوتن

$[M][L]^2 / [T]^2$ $[L]$ $[M][L] / [T]^2$

mks	cgs	دیگرواحدها
N-m (Joule)	Dyne-cm (erg) $= 10^{-7}$ J	BTU = 1054 J calorie = 4.184 J foot-lb = 1.356 J eV $= 1.6 \times 10^{-19}$ J

قضیه کار وانرژی جنبشی

- نیروی $F = 10\ N$ به جعبه ای که روی سطح بدون اصطکاکی قرار دارد وارد می شودو به اندازه $\Delta x = 5\ m$ جابه جا می شود. تندی جعبه قبل از اعمال نیرو v_1 و بعد از اعمال آن v_2 است .



قضیه کار و انرژی جنبشی

- چون نیروی F ثابت است,شتاب a ثابت خواهد بود. برای شتاب ثابت a داریم:

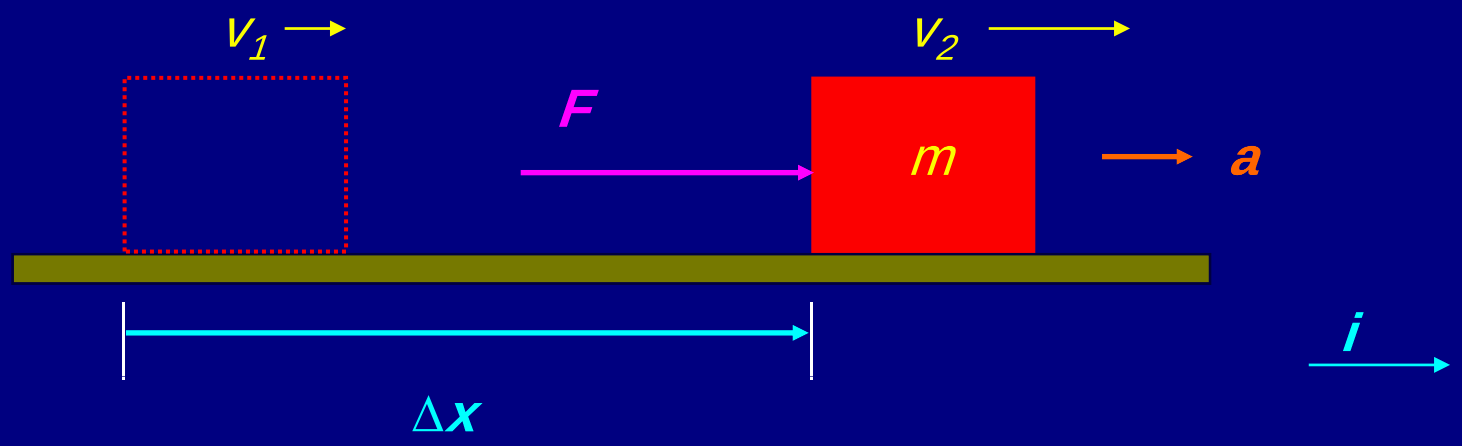
$$v_2^2 - v_1^2 = 2a(x_2-x_1) = 2a\Delta x$$

با ضرب در $^1/_2 m$:

$$^1/_2 mv_2^2 - {}^1/_2 mv_1^2 = ma\Delta x$$

ولی $F = ma$

$$^1/_2 mv_2^2 - {}^1/_2 mv_1^2 = F\Delta x$$



قضیه کار و انرژی جنبشی

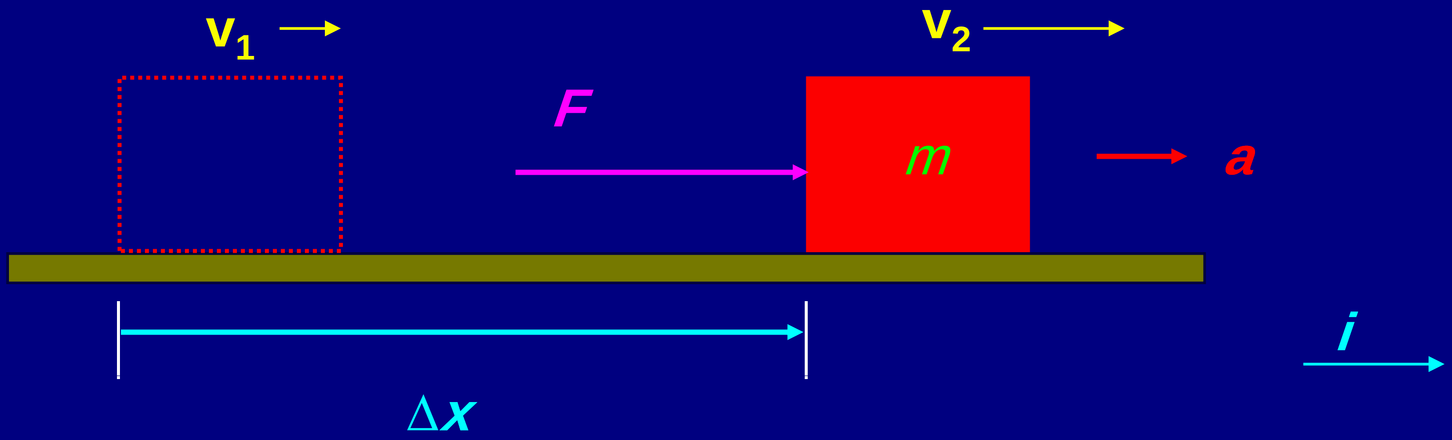
- بنابراین پیداکردیم :

← $\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = F\Delta x = W_F$

- بادر نظر گرفتن انرژی جنبشی K : $K = \frac{1}{2}mv^2$

← $K_2 - K_1 = W_F$

← $\boxed{W_F = \Delta K \quad \text{قضیه کار وانرژی جنبشی}}$



قضیه کار و انرژی جنبشی

{کار خالص انجام شده روی یک جسم}

=

{تغییر انرژی جنبشی جسم}

$$\boxed{W_{net} = \Delta K}$$

$$= K_2 - K_1$$

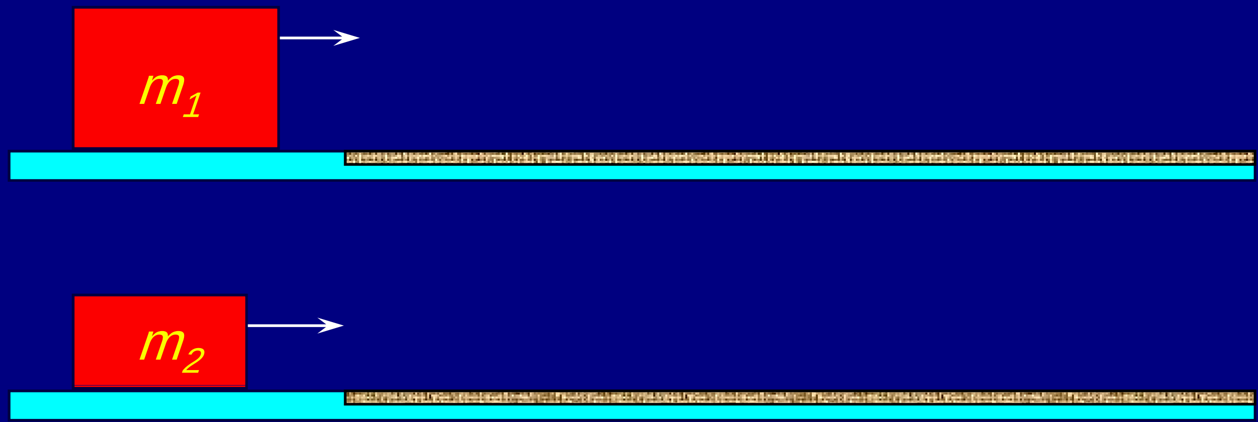
$$= \frac{1}{2} m {v_2}^2 - \frac{1}{2} m {v_1}^2$$

- همین رابطه را برای کارنیروی متغییر بعدا اثبات می کنیم

کار وانرژی

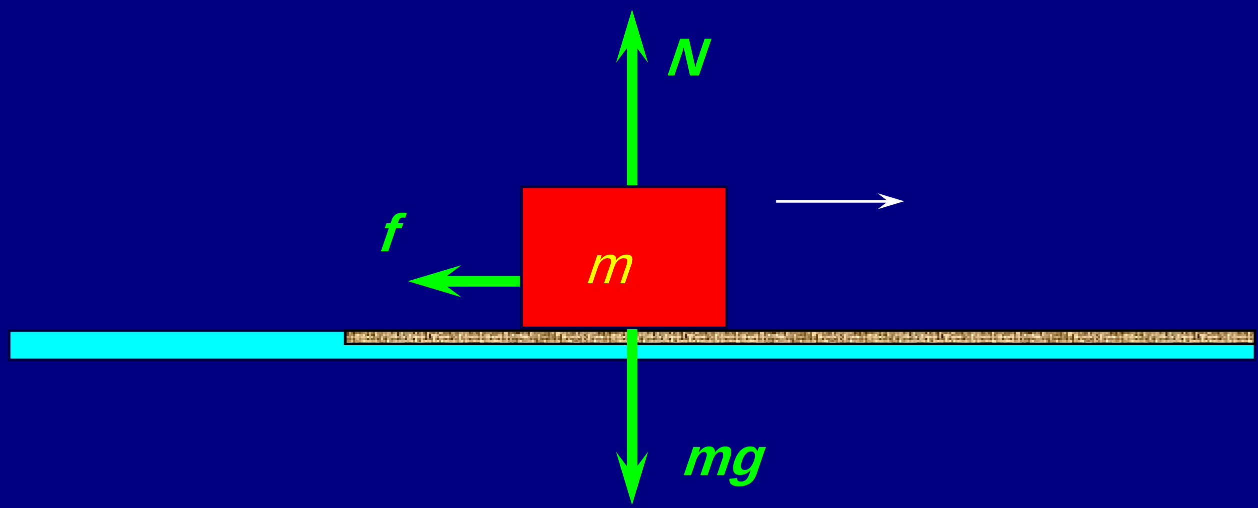
- دو جسم به جرمهای m_1 و m_2, که $m_1 > m_2$ *است مفروض است*. آنها روی سطح بدون اصطکاکی می لغزند و دارای انرژی جنبشی مساوی هستند. اگر وار د یک سطح خشن (i.e. $\mu > 0$) شوند قبل از توقف کدام یک مسافت بیشتری طی خواهند کرد؟

(الف) m1   (ب) m2   (ج) یکسان



پاسخ:

- قضیه کار و انرژی جنبشی می گوید که برای هر جسمی رابطه $W_{NET} = \Delta K$ صادق است.
- در این مسئله فقط نیروی اصطکاک f کار انجام می دهد (زیرا N و mg عمود بر جهت حرکت هستند) .

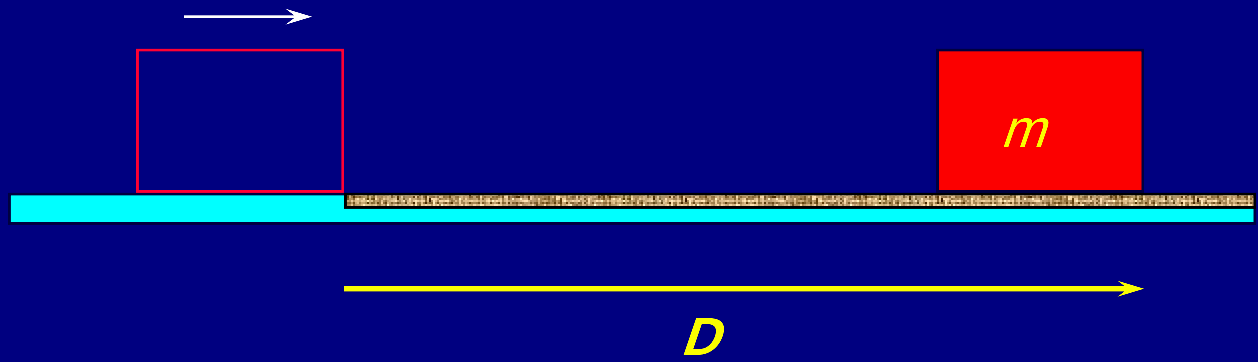


ادامه پاسخ:

- قضیه کار و انرژی جنبشی می گوید که برای هر جسمی رابطه $W_{NET} = \Delta K$ صادق است.
- در این مسئله فقط نیروی اصطکاک f کار انجام می دهد (زیرا N و mg عمود بر جهت حرکت هستند) .
- کار خالص انجام شده روی جعبه برابر است با: $-fD = -\mu mgD$.

← این کار انرژی را از جعبه می گیرد:

← $W_{NET} = K_2 - K_1 = 0 - K_1$



ادامه پاسخ:

- کار خالص انجام شده برای توقف جعبه: $-fD = -\mu mgD$

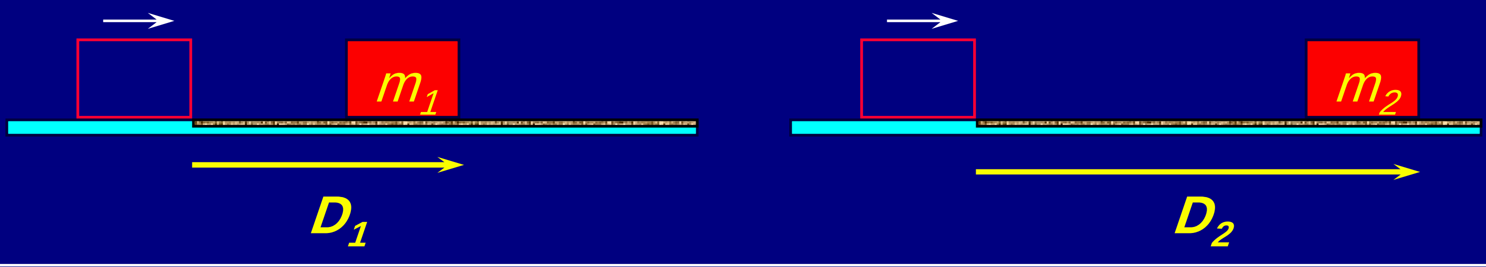
  این کار انرژی جنبشی جعبه را می گیرد:

  $W_{NET} = K_2 - K_1 = 0 - K_1$

- و این کار برای هردو جعبه که انرژی جنبشی مساوی دارند برابر است

$$\mu m_2 g D_2 = \mu m_1 g D_1 \quad \Rightarrow \quad m_2 D_2 = m_1 D_1$$

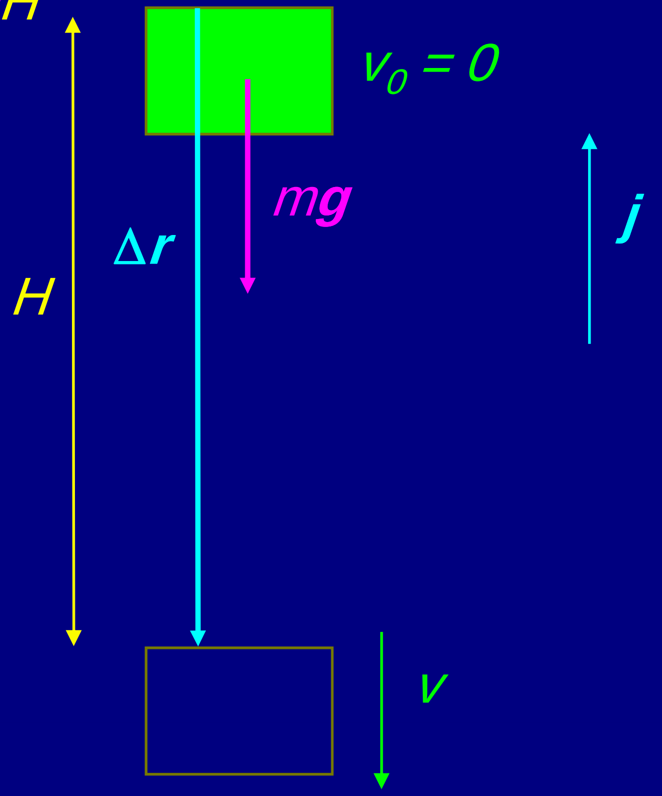
چون $m_1 > m_2$ است ملاحظه می کنیم که $\boxed{D_2 > D_1}$



یک کاربرد ساده
کار نیروی جاذبه روی جسمی که سقوط می کند

- اگر جسمی از حالت سکون سقوط کند بعد از طی مسافت H, سرعت ان چقدر خواهد شد؟

- $W_g = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r} = mg\,\Delta \mathbf{r} \cos(0) = mgH$



$$\boxed{W_g = mgH}$$

باستفاده از قضیه کاروانرژی جنبشی:

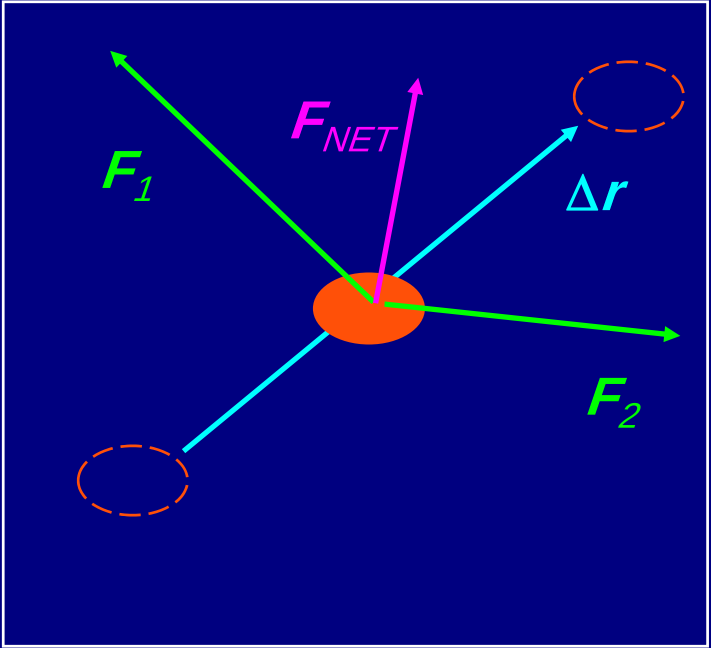
$$W_g = mgH = {}^{1}/_{2}mv^2$$

$$\boxed{v = \sqrt{2gH}}$$

آیا این قضیه اگر چند نیرو برجسمی وارد شود صادق است؟

فرض کنید که $F_{NET} = F_1 + F_2$ و جابه جایی Δr ***باشد***.

کار انجام شده به وسیله هر نیرو:



$$W_1 = F_1 \bullet \Delta r \qquad W_2 = F_2 \bullet \Delta r$$

$$W_{TOT} = W_1 + W_2$$
$$= F_1 \bullet \Delta r + F_2 \bullet \Delta r$$
$$= (F_1 + F_2) \bullet \Delta r$$

بنابراین $W_{TOT} = F_{TOT} \bullet \Delta r$
نیروی برایند مورد نظر است!!

توضیح:

- فاصله زمانی مهم نیست !

  ← از پله ها تند ویا آرام بالا بروید مقدار کار انجام شده W یکسان است.

  چون $W = F \cdot \Delta r$ است

- کاری انجام نمی شود اگر:

  ← $F = 0$ یا

  ← $\Delta r = 0$ یا

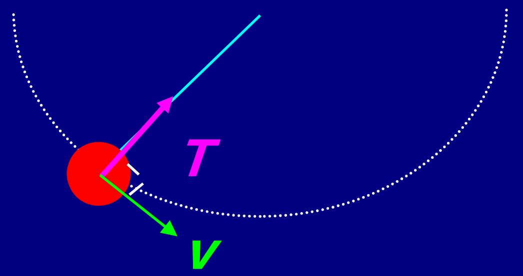
  ← $\theta = 90^o$

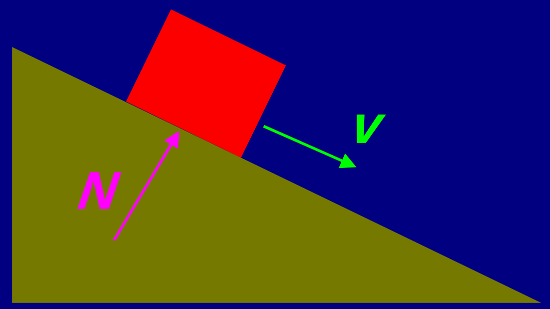
توضیح:

$$\boxed{W = F \cdot \Delta r}$$

- کاری انجام نمی گیرد اگر $\theta = 90^o$ باشد .

← هیچ کاری به وسیله *T* *انجام نمی شود* .

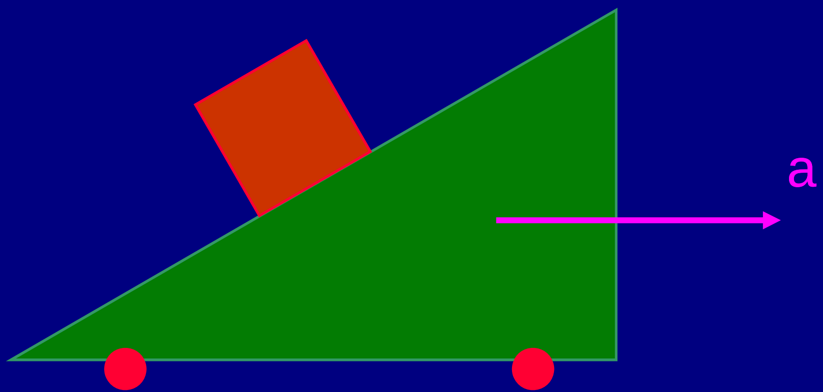




هیچ کاری به وسیله *N* *انجام نمی شود*.

کار و انرژی

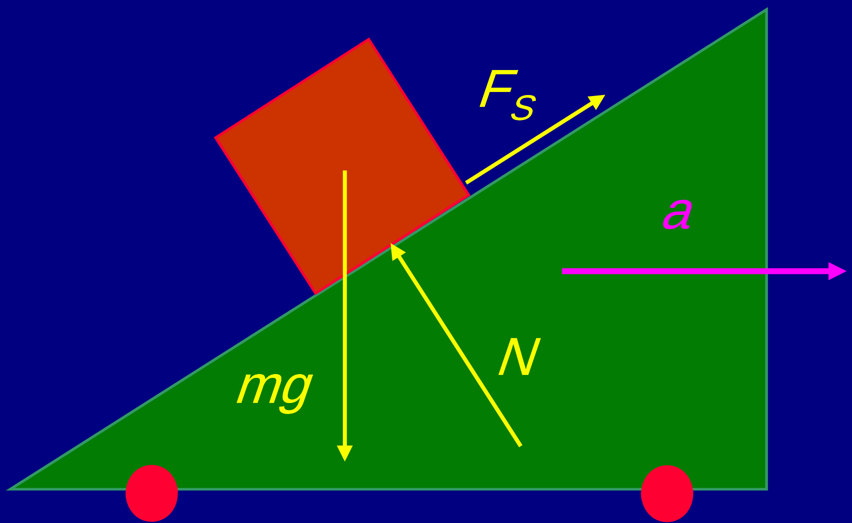
- یک سطح شیبدار دارای شتاب ثابت ***a*** *است*. جعبه ا ی روی این سطح بوسیله نیروی اصطکاک نگهداشته شده است. چند نیرو براین جعبه کار انجام می دهند؟



(الف) ۳ (ب) ۲ (ج) ۱

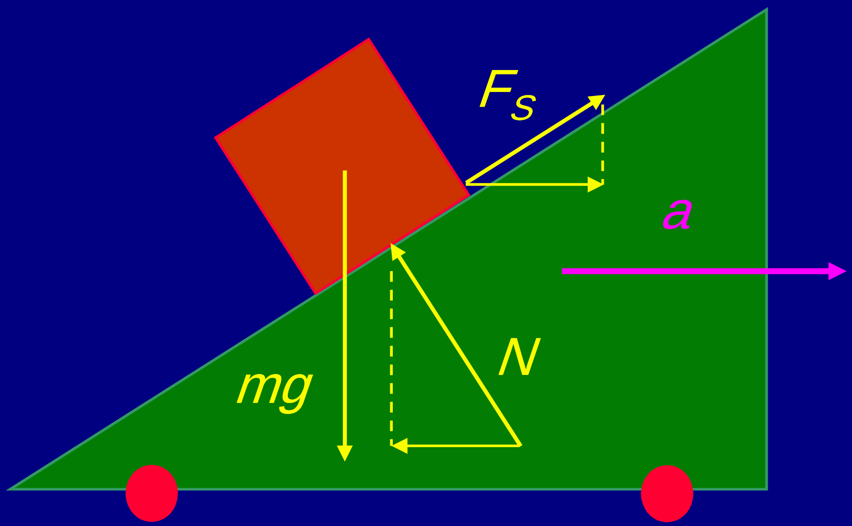
پاسخ:

- ابتدا کلیه نیروهای وارد برآن را رسم کنید:



پاسخ:

- به خاطر داشته باشید که $W = F \cdot \Delta r$ است. ***فقط نیروهایی که در راستای سطح شیبدار هستند کار انجام می دهند:***



- *پاسخ ۲ است .*

یاد آوری درس امروز:

- کار وانرژی
  - بحث
  - تعریف
- ضرب نقطه ای
- کارنیروی ثابت
  - کار- قضیه کار وانرژی جنبشی
- کار نیروهای ثابت
- تفسیر

- کتاب درسی و مسائل آن را فراموش نکنید!

ادامه فصل ششم

کار وانرژی

درس امروز ما:

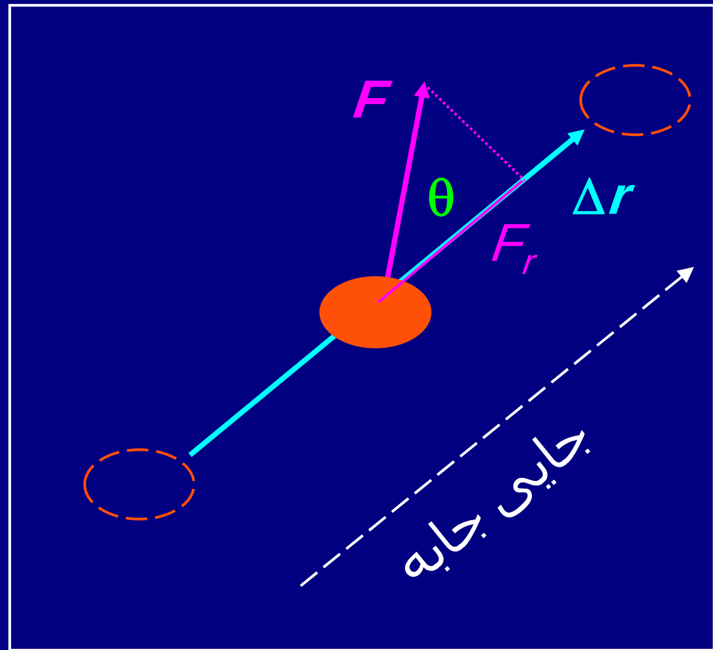
- مرور کار
- کار انجام شده به وسیله نیروی جاذبه در روی سطح زمین
- چند مثال:
  - آونگ ,سطح شیبدار ,سقوط آزاد
- کار نیروی متغییر
  - فنر
- مسئله مربوط به فنر
- کار نیروی متغیر در سه بعد3-D
  - نیروی گرانشی نیوتن
- نیروهای پایستار و انرژی جنبشی

مرور – نیروی ثابت

کار ,W, نیروی ثابت F

در جابه جایی Δr

برابراست با:



مرور : کار چند نیروی ثابت

فرض کنیدکه $F_{NET} = F_1 + F_2$ وجابجایی S باشد.

کار انجام شده به وسیله هر نیرو برابر است با:

$$W_1 = F_1 \cdot \Delta r$$

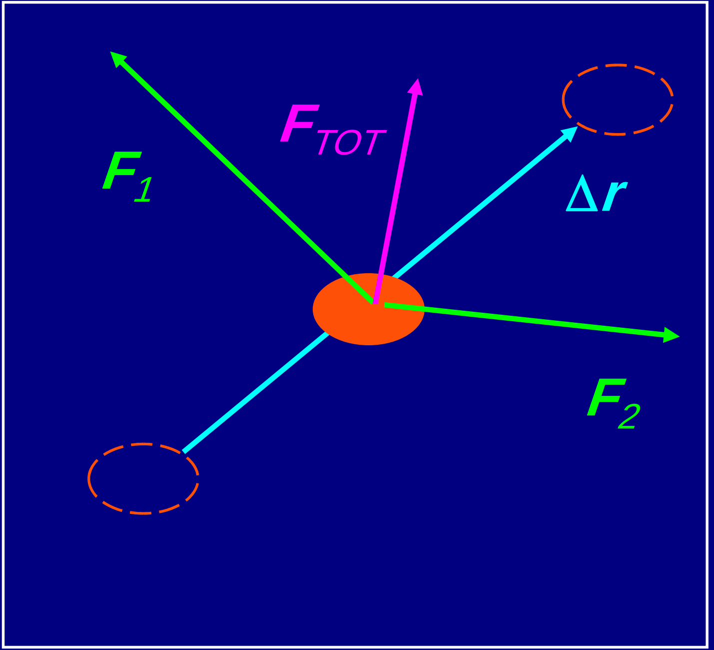
$$W_2 = F_2 \cdot \Delta r$$

$$W_{NET} = W_1 + W_2$$

$$= F_1 \cdot \Delta r + F_2 \cdot \Delta r$$

$$= (F_1 + F_2) \cdot \Delta r$$

$$W_{NET} = F_{NET} \cdot \Delta r$$

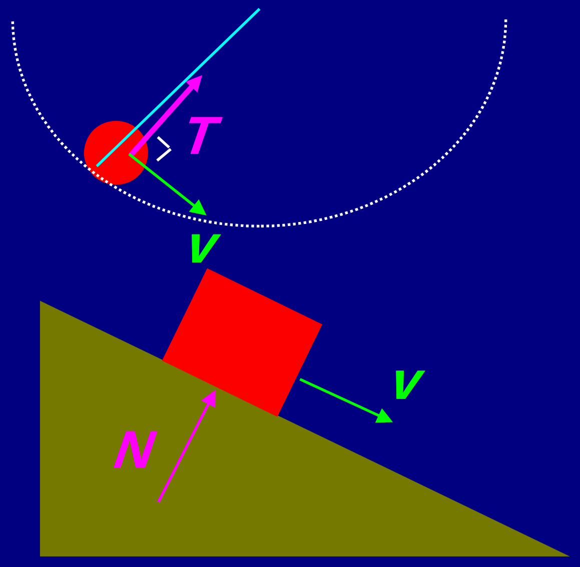


مرور نیروی ثابت ...

$$\boxed{W = F \cdot \Delta r}$$

- اگر $\theta = 90^o$ باشد کار انجام نخواهد شد .

کاری به وسیله T **انجام نمی شود**.



***N* کاری انجام نمی دهد** .

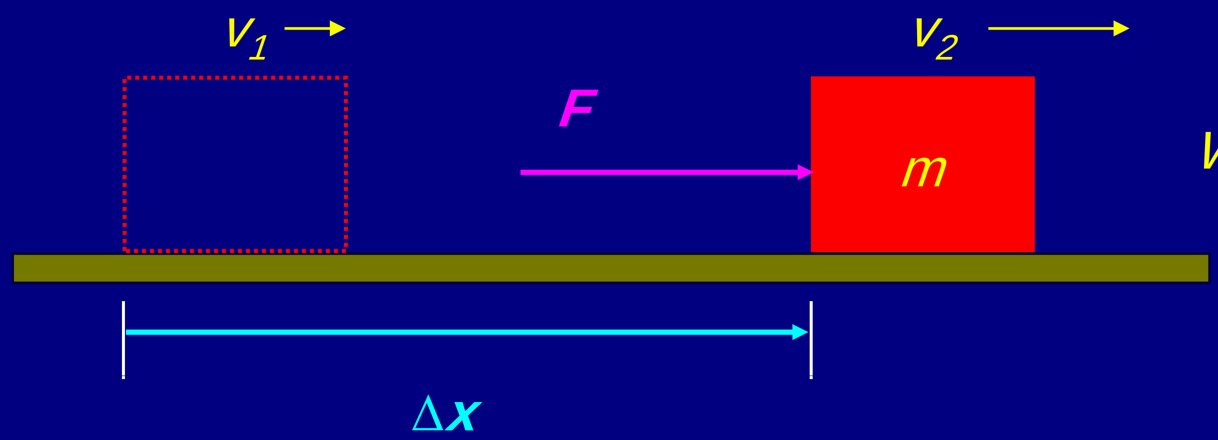
قضیه کار و ا نرژی جنبشی

{کار برایند نیروها بر یک جسم}

=

{تغییر انرژی جنبشی جسم}

$$W_F = \Delta K = {}^1/_2 m v_2^2 - {}^1/_2 m v_1^2$$



$$W_F = F\Delta x$$

کار انجام شده به وسیله نیروی جاذبه:

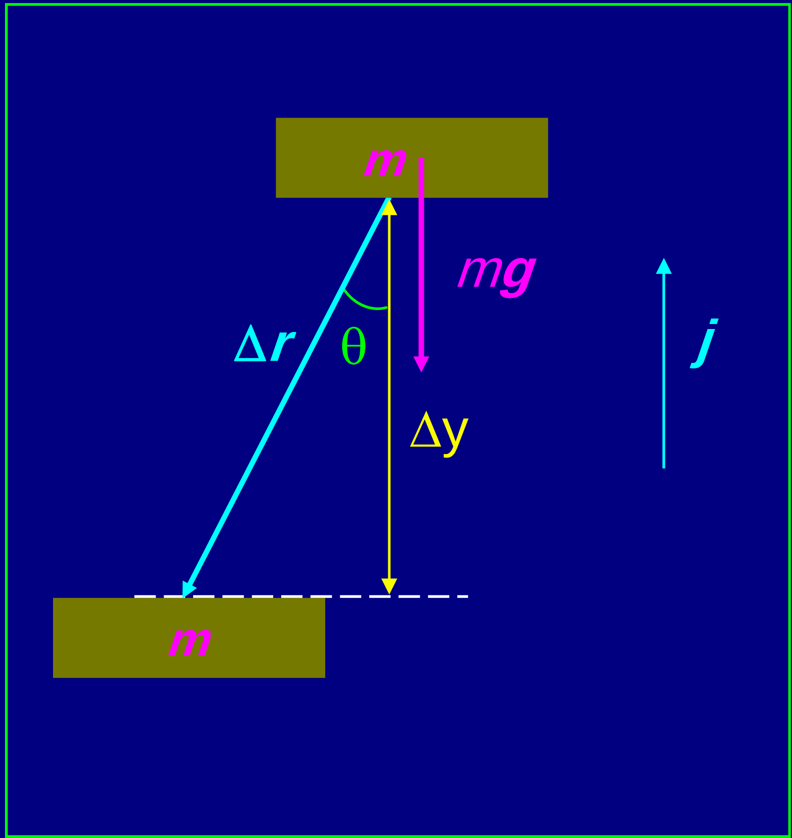
- $W_g = \boldsymbol{F} \cdot \Delta \boldsymbol{r} = mg \Delta r \cos\theta$

$$= -mg\,\Delta y$$

($\Delta y = y_f - y_i$ به خاطر داشته باشید که)

$$\boxed{W_g = -mg\,\Delta y}$$

فقط بستگی به Δy دارد!



کار انجام شده به وسیله نیروی جاذبه:

- $W_{NET} = W_1 + W_2 + \ldots + W_n$

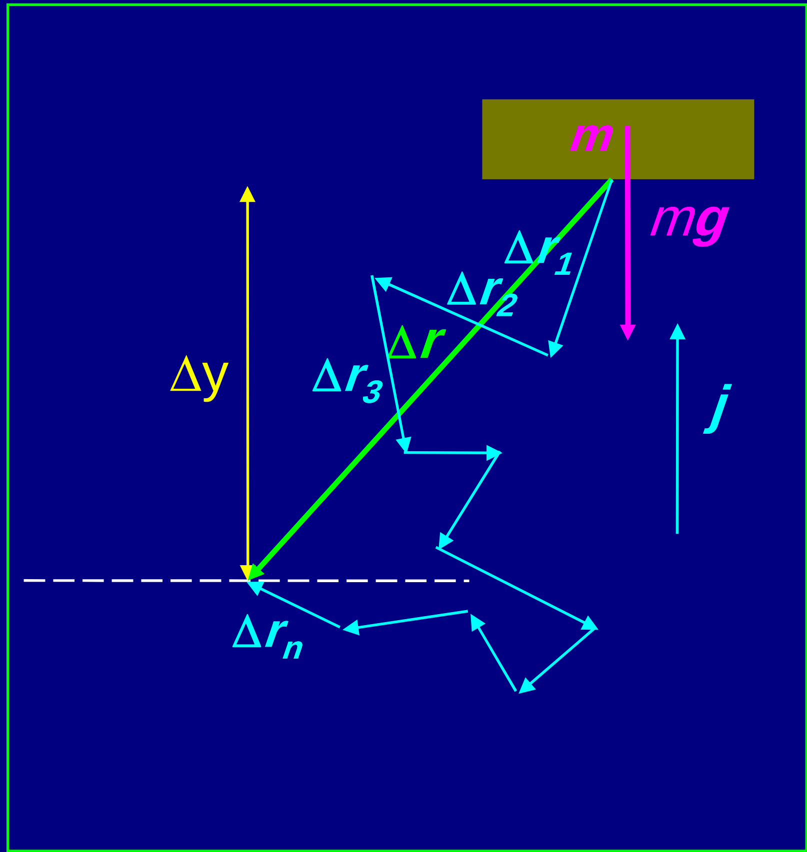
$$= F \cdot \Delta r_1 + F \cdot \Delta r_2 + \ldots + F \cdot \Delta r_n$$

$$= F \cdot (\Delta r_1 + \Delta r_2 + \ldots + \Delta r_n)$$

$$= F \cdot \Delta r$$

$$= F \, \Delta y$$

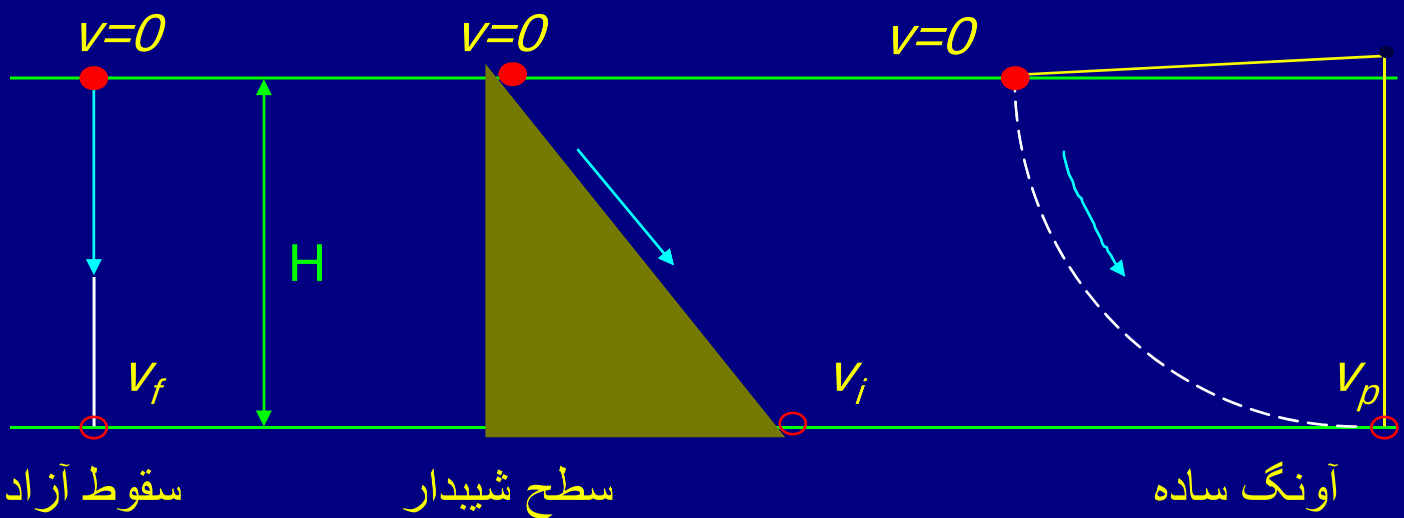
$$\boxed{W_g = -mg \, \Delta y}$$



کار انجام شده فقط بستگی به Δy, دارد و نه مسیر طی شده !!

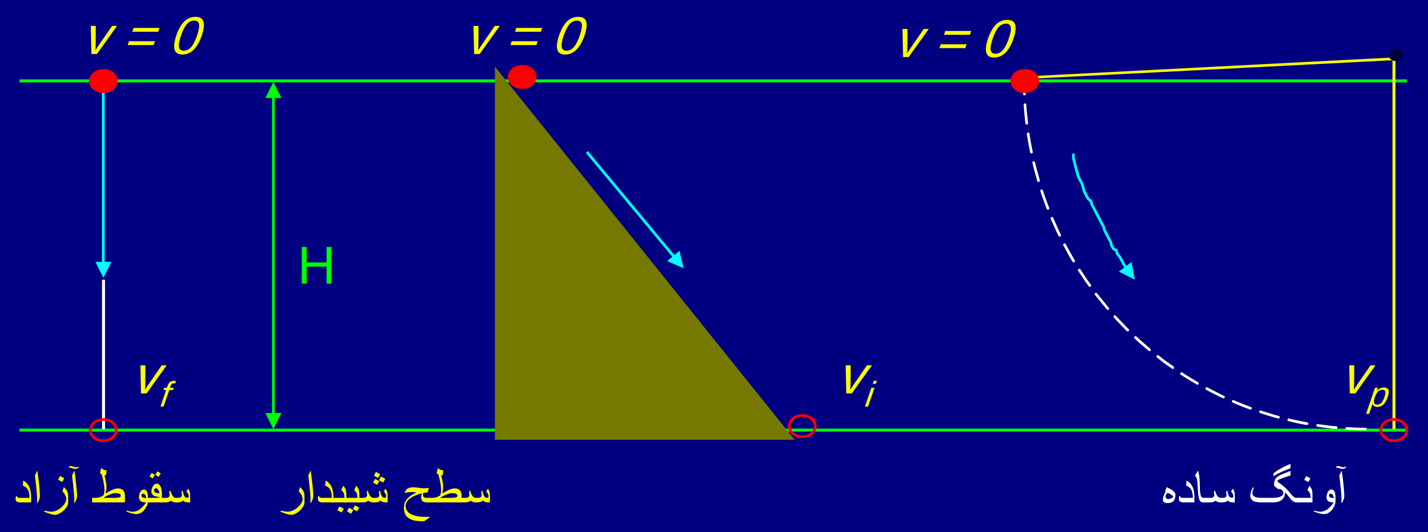
اجسامی که سقوط می کنند

- سه جسم به جرم m از ارتفاع h با سرعت صفر*0 رها می‌شوند.* یکی سقوط آزاد می کند دومی از یک سطح شیبدار بدون اصطکاک و سومی از انتهای یک آونگ ساده رها میشود .رابطه بین سرعت آنها در ارتفاع **0** چگونه است ؟



(a) $V_f > V_i > V_p$ **(b)** $V_f > V_p > V_i$ **(c)** $V_f = V_p = V_i$

پاسخ:

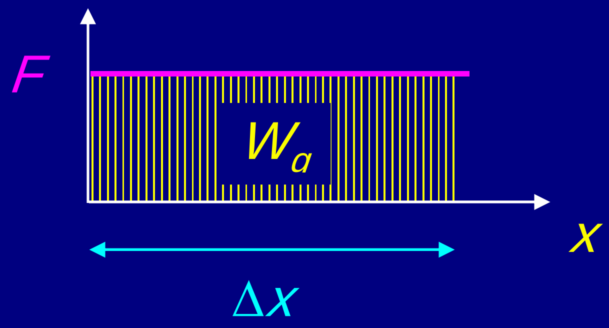


فقط نیروی جاذبه کار انجام می دهد: $W_g = mgH = {}^1/_2\, mv_2^2 - {}^1/_2\, mv_1^2 = {}^1/_2\, mv_2^2$:

کار انجام شده به مسیر بستگی ندارد!!

$$\boxed{v_f = v_i = v_p = \sqrt{2gH}}$$

کار انجام شده به وسیله نیروی متغییر یک بعدی

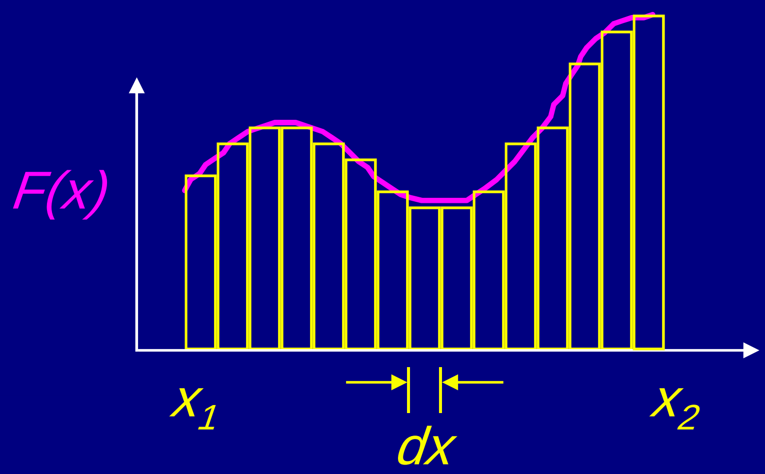


- اگر نیرو ثابت باشدکاربرابر است با: $W = F\Delta x$
  مساحت زیر منحنی F نسبت به x :

- برای نیروی متغییر کار با انتگرال گیری بدست می آید:

$$dW = F(x)\, dx.$$

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx$$



قضیه کار وانرژی جنبشی برای نیروی متغییر:

$$F = ma = m\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{dv}{dx} = v\frac{dv}{dx}$$ (قاعده زنجیری)

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F\,dx$$

$$= m\int_{x_1}^{x_2} \frac{dv}{dt}\,dx$$

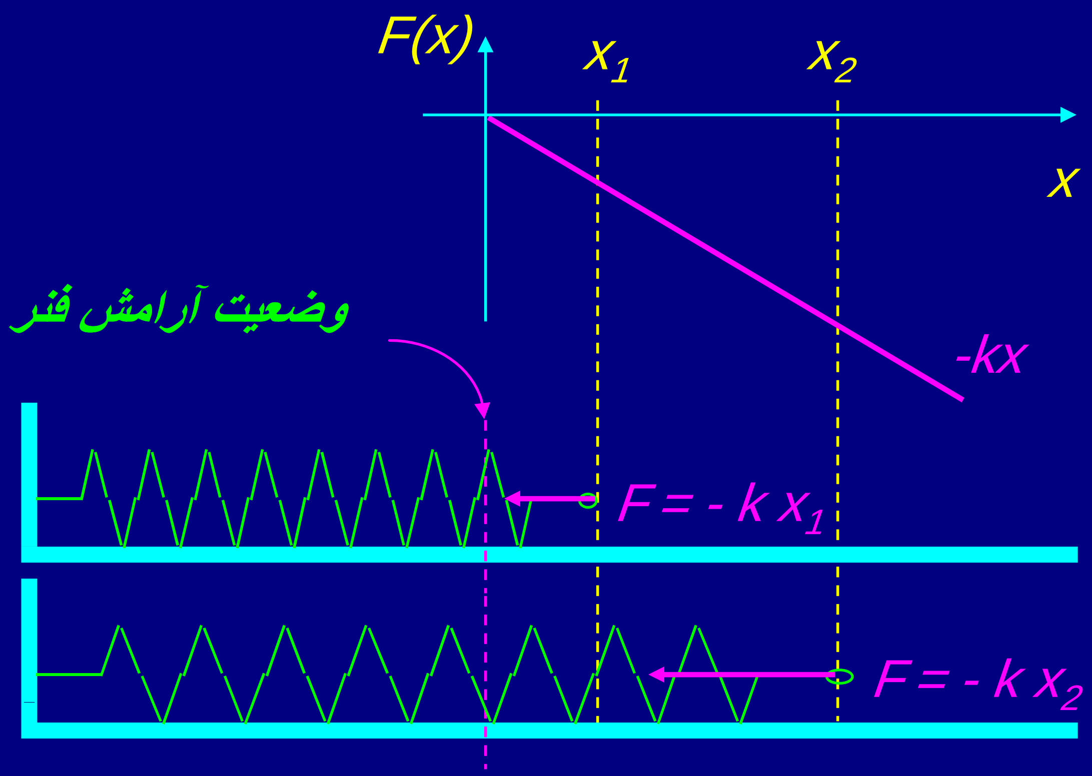
$$= m\int_{v_1}^{v_2} v\frac{dv}{dx}\,dx$$

$$= m\int_{v_1}^{v_2} v\,dv$$

$$= m\frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2}m\,v_2^2 - \frac{1}{2}m\,v_1^2 = \Delta K$$

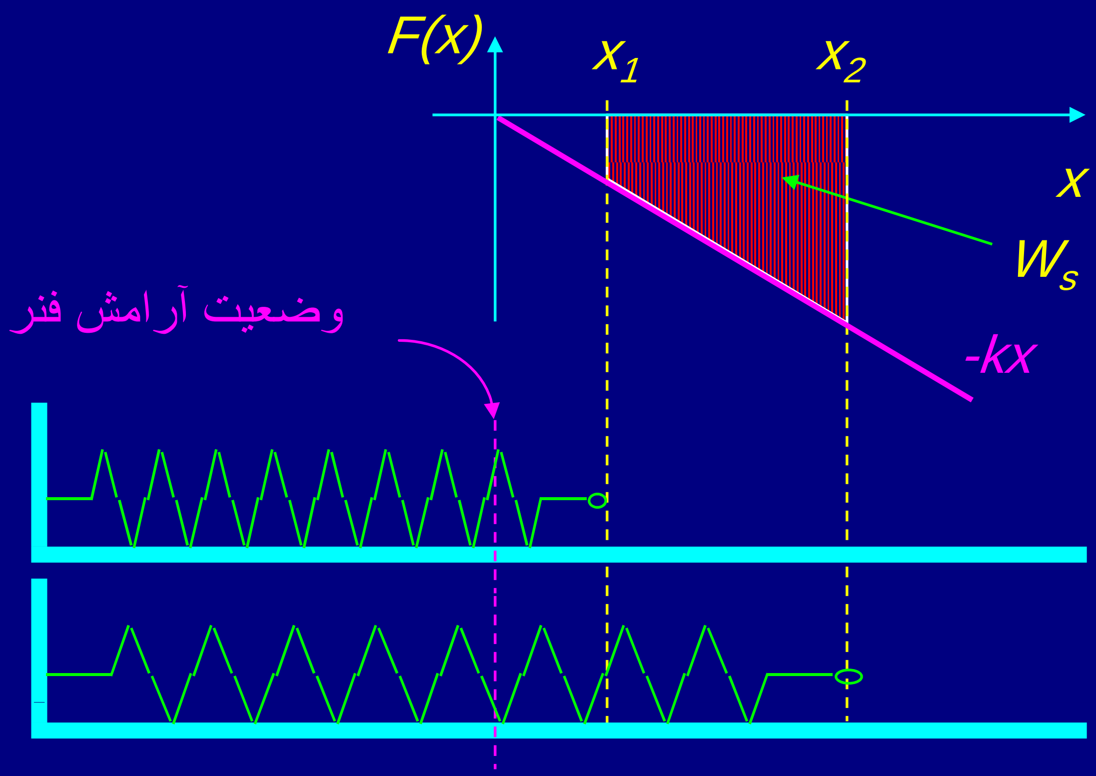
مثال نیروی متغییر یک بعدی: فنر

- برای یک فنر می دانیم: $F_x = -kx$.



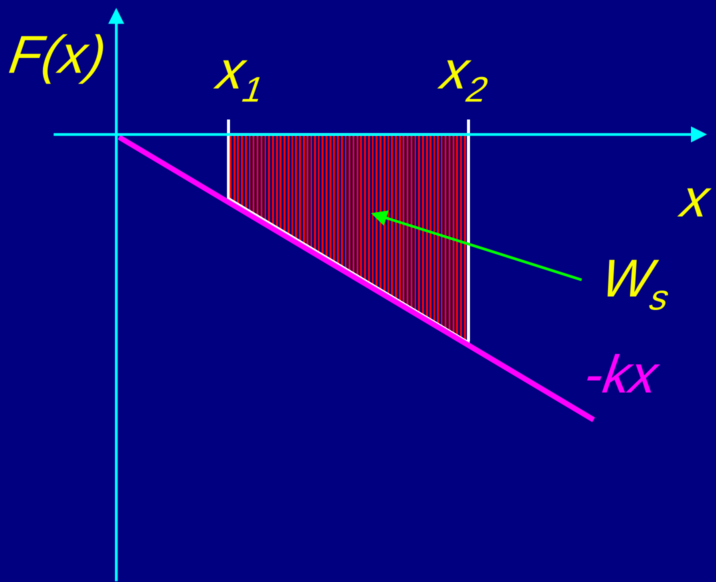
فنر...

- کارانجام شده به وسیله فنر W_s درجابه جایی از x_1 تا x_2 برابرا ست با سطح زیر منحنی $F(x)$ نسبت به x بین x_1 و x_2



فنر ....

- کارانجام شده به وسیله فنر W_s درجابه جایی از x_1 تا x_2 برابرا ست با سطح زیر منحنی $F(x)$ نسبت به x بین x_1 و x_2



$$W_s = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} (-kx)dx$$

$$= -\frac{1}{2}kx^2 \Big|_{x_1}^{x_2}$$

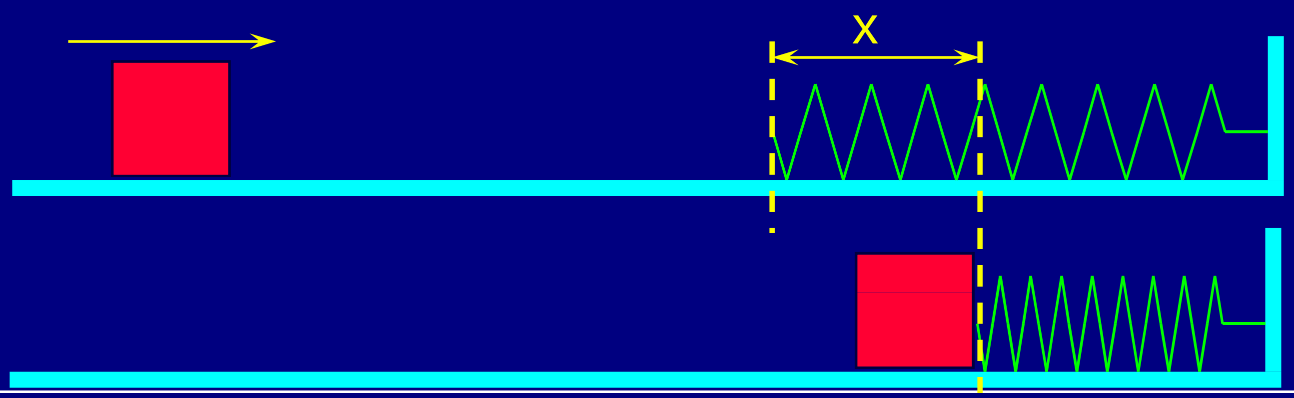
$$\boxed{W_s = -\frac{1}{2}k\left(x_2^2 - x_1^2\right)}$$

کار وانرژی...

- جعبه ای روی سطح بدون اصطکاکی حرکت می کند وبا فنرثابتی برخورد می کندو آنرا باندازه x_1 نسبت به وضعیت تعادلش فشرده می کند و متوقف می شود.

اگر تندی اولیه جعبه دوبرابر و جرم آن نصف شود چه مقدار x_2 فنر را فشرده می کند؟

(a) $x_2 = x_1$ (b) $x_2 = \sqrt{2}\, x_1$ (c) $x_2 = 2\, x_1$



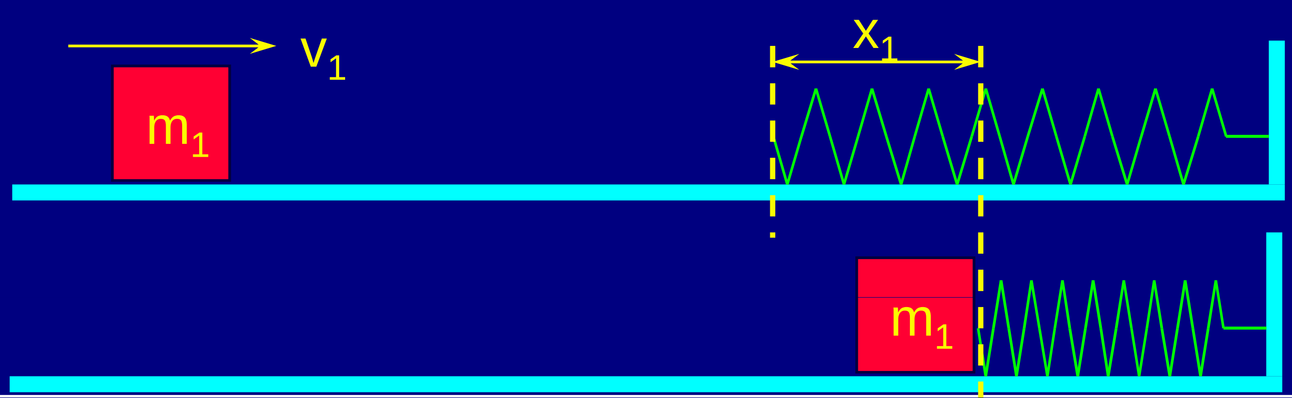
پاسخ:

- از قضیه کار وانرژی جنبشی استفاده می کنیم: $W_{NET} = \Delta K$.

دراین حالت , $W_{NET} = W_{SPRING} = -{}^{1}/_{2}\,kx^2$

و $\Delta K = -{}^{1}/_{2}\,mv^2$

بنابراین $kx^2 = mv^2$ ⟸ $x_1 = v_1\sqrt{\dfrac{m_1}{k}}$ در مورد x_1



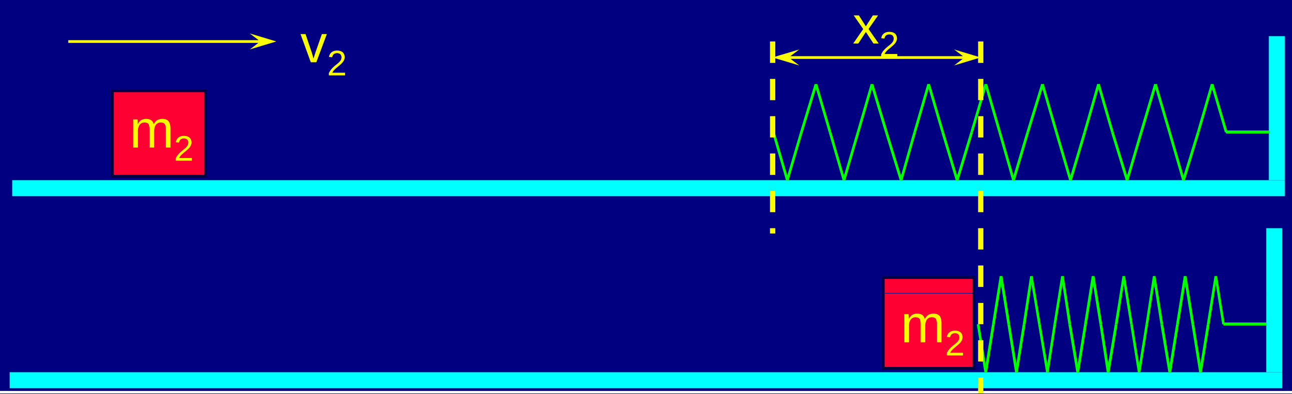
ادامه پاسخ:

$$x = v\sqrt{\frac{m}{k}}$$

اگر $v_2 = 2v_1$ و $m_2 = m_1/2$

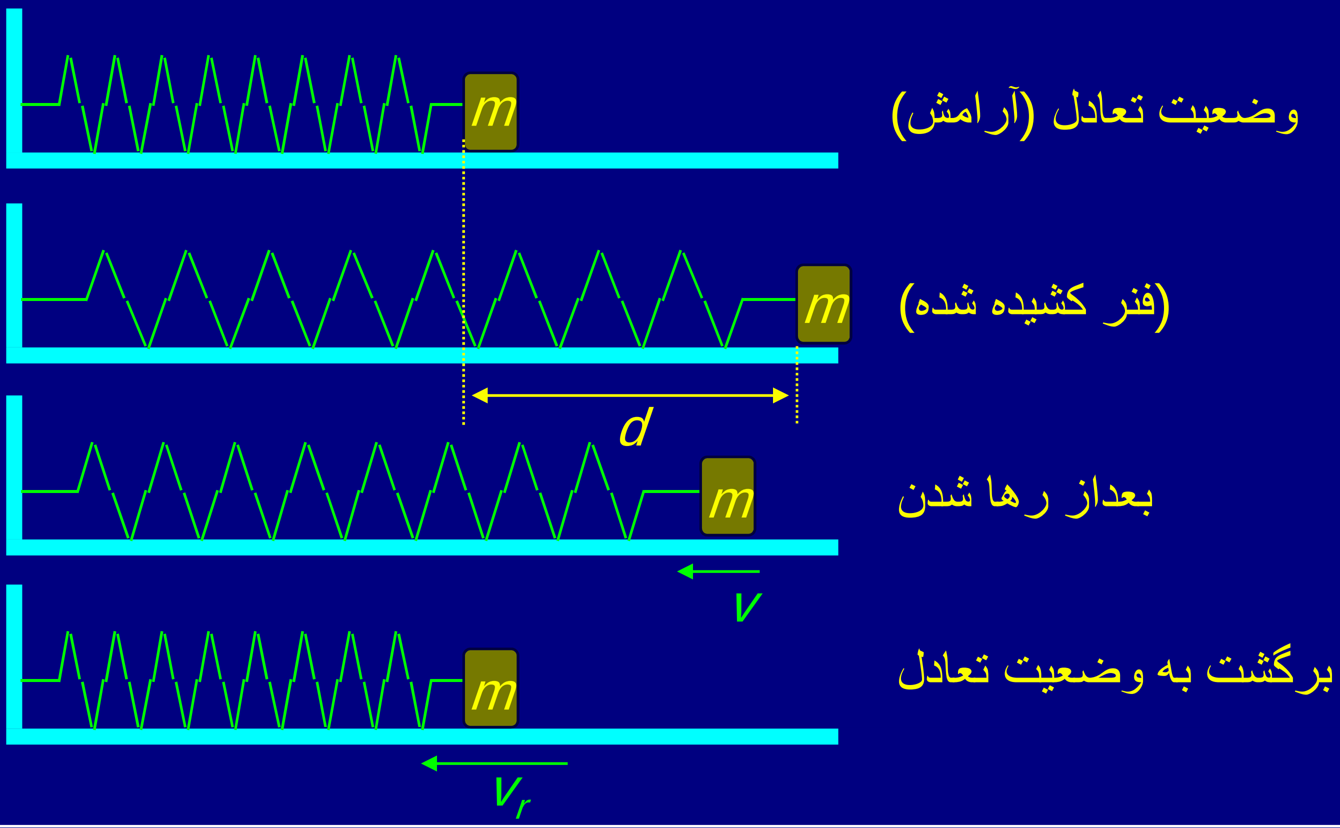
$$x_2 = 2v_1\sqrt{\frac{m_1/2}{k}} = v_1\sqrt{\frac{2m_1}{k}}$$

$$\boxed{x_2 = \sqrt{2}\,x_1}$$



مسئله : کشیدن جسم به وسیله فنر

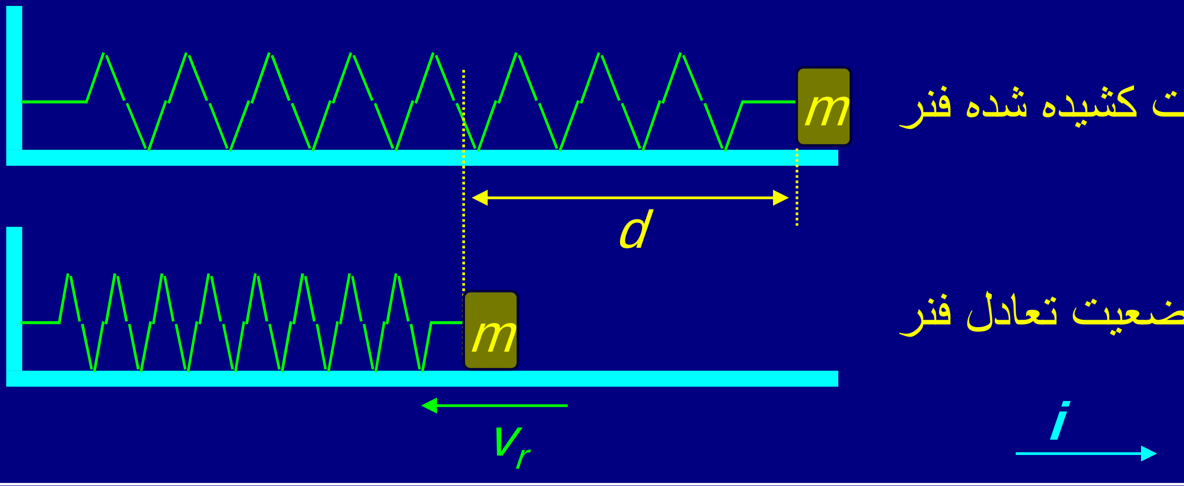
- فنری) ثابت سختی k) به اندازه d *کشیده می شود*, وجرم m به یک انتهای آن بسته شده است .جرم را رها می کنیم) از حالت تعادل .(اگر سطح بدون اصطکاک باشد این جرم وقتی به حالت تعادل فنر برمی گردد سرعت آن چقدر خواهد بود؟



پاسخ:

- کارانجام شده به روی این جسم از وضعیت $x = d$ تا $x = 0$ (فقط به وسیله فنر) را حساب می کنیم:

$$W_s = -\frac{1}{2}k\left(x_2^2 - x_1^2\right) = -\frac{1}{2}k\left(0^2 - d^2\right) = \frac{1}{2}kd^2$$



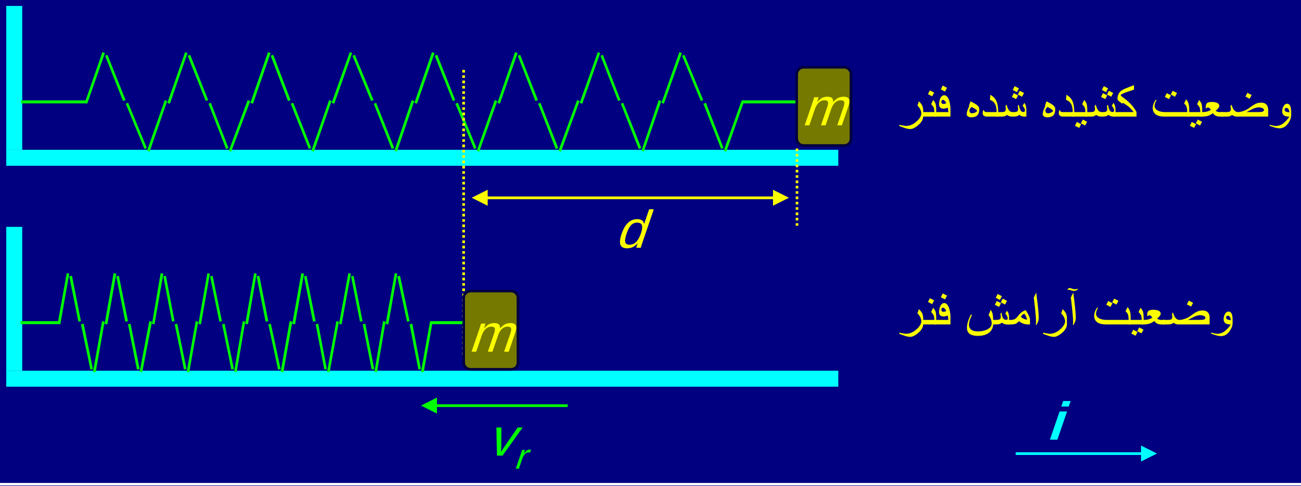
وضعیت کشیده شده فنر

وضعیت تعادل فنر

ادامه پاسخ...

- اکنون تغییر انرژی جنبشی فنر را حساب می کنیم:

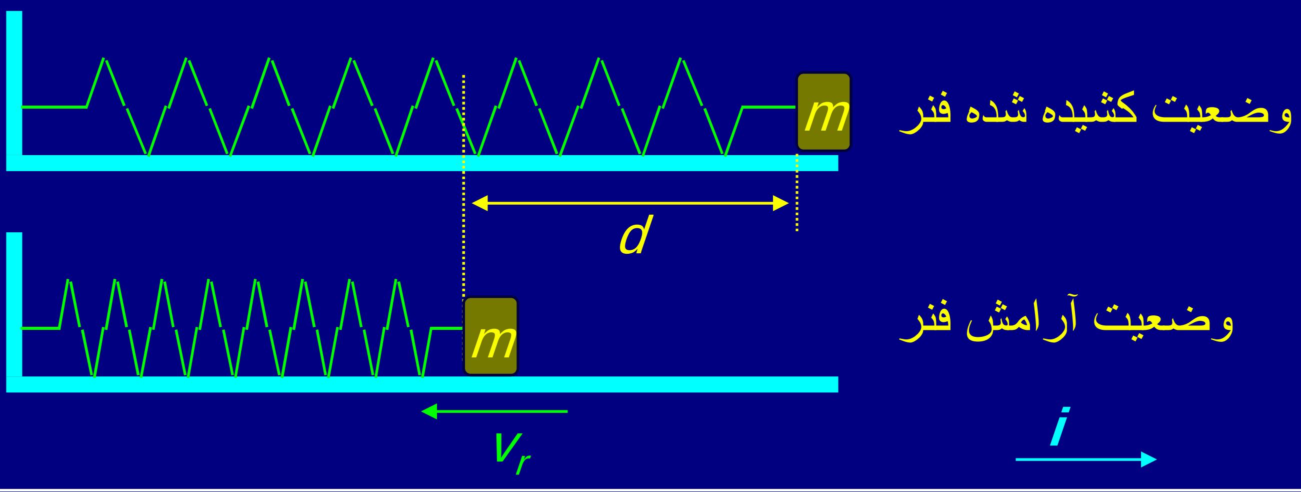
$$\Delta K = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_r^2$$



ادامه پاسخ :

- اکنون قضیه کارو انرژی جنبشی را بکار می بریم : $W_{net} = W_S = \Delta K$

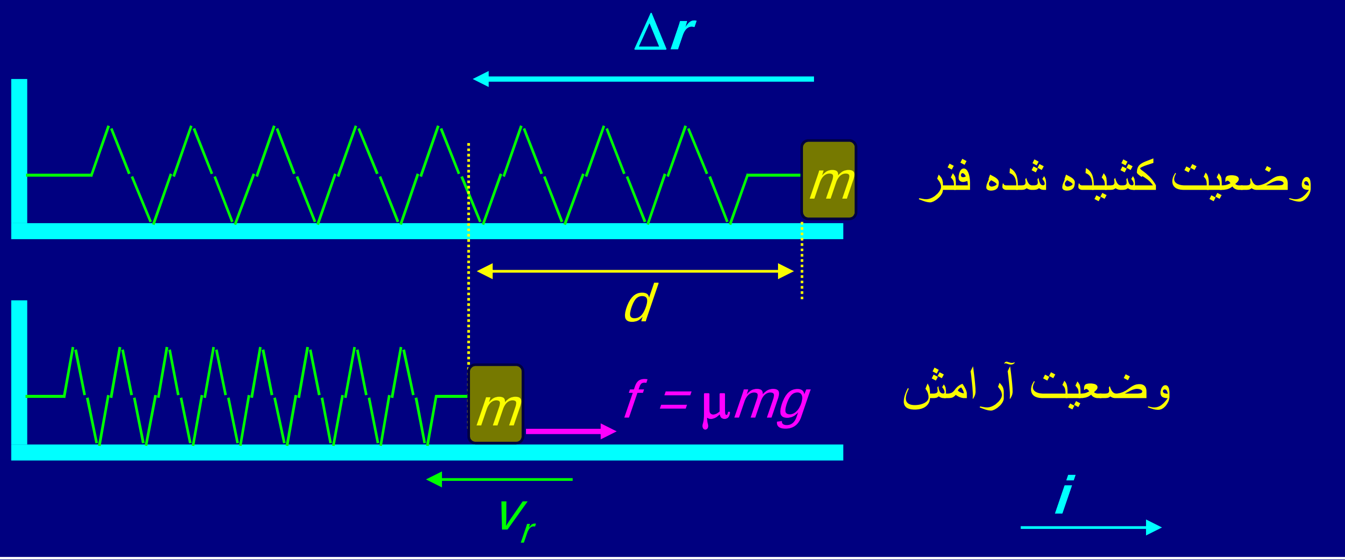
$$\frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}mv_r^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_r = d\sqrt{\frac{k}{m}}}$$



مسئله : کشیده شدن فنر متصل به یک جسم:

- اکنون فرض کنید که ضریب اصطکاک بین جعبه و کف زمین μ باشد.
- کار انجام شده روی جعبه مجموع کار فنر W_S و کار نیروی اصطکاک W_f است
- .

$$W_f = f\,\Delta r = -\mu mg\, d$$

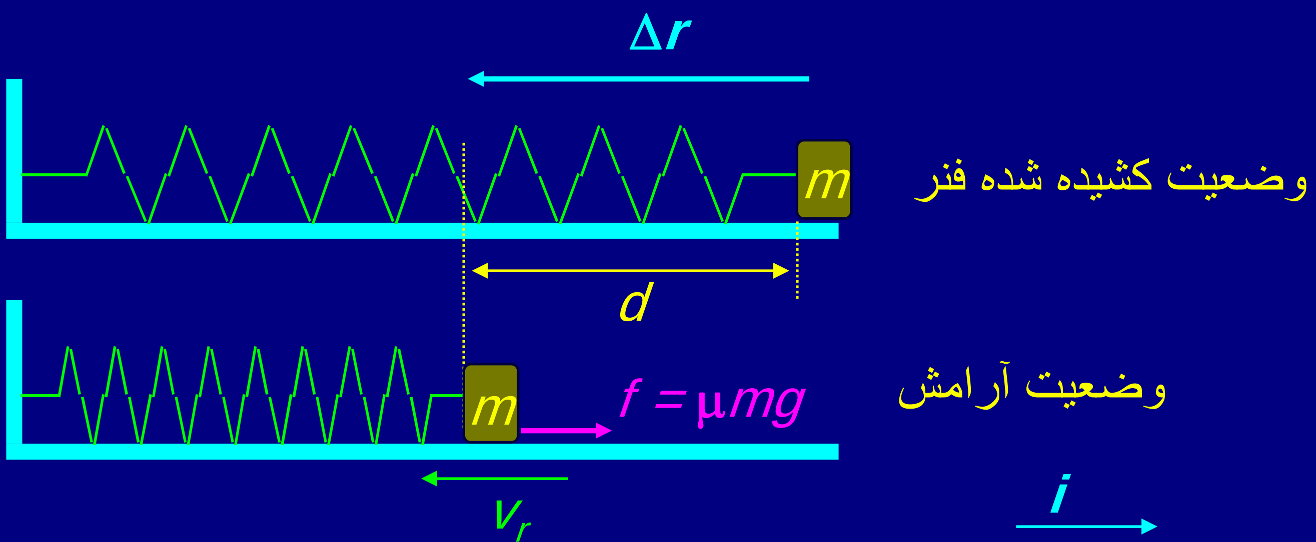


مسئله : کشیده شدن فنر متصل به یک جسم:

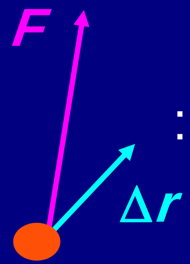
- $W_{net} = W_S + W_f = \Delta K$

$W_f = -\mu m g\, d \qquad W_S = \frac{1}{2} k d^2 \qquad \Delta K = \frac{1}{2} m v_r^2$

$$\frac{1}{2} k d^2 - \mu m g d = \frac{1}{2} m v_r^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_r = \sqrt{\frac{k}{m} d^2 - 2\mu g d}}$$



کار انجام شده به وسیله نیروی متغییر (حالت سه بعدی)

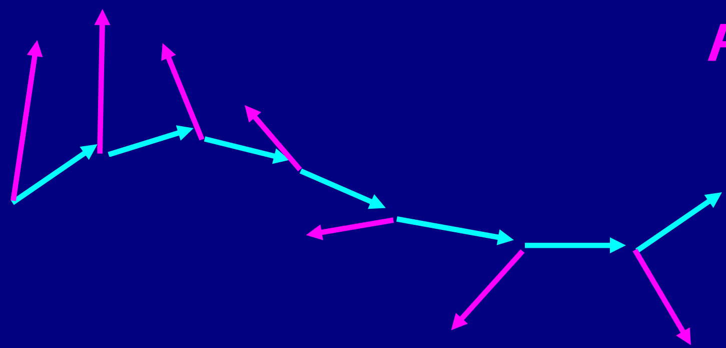


- کار dW_F نیروی F در جابه جایی بسیا رکوچک Δr ***برابر است با*** :

$$dW = F \cdot \Delta r$$

- کار نیروی متغییر در یک جابه جایی بزرگ برابر با انتگرال کار این نیرو در جابه جایی های کوچک است

$$W_{TOT} = \int F \cdot \Delta r$$

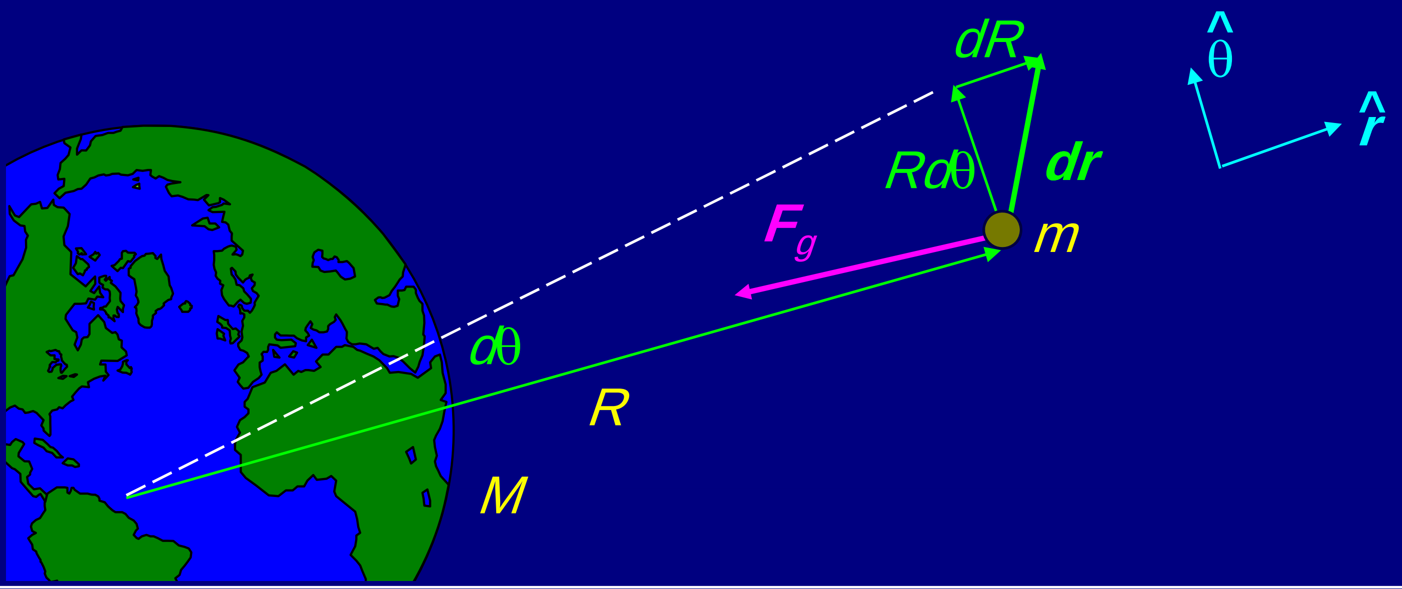


کار نیروی متغییر در سه بعدی:
نیروی جاذبه گرانشی

- کارنیروی جاذبه dW_g بر یک جسم درجابه جایی ***dr*** برابر است با:

$$dW_g = \mathbf{F}_g \cdot \mathbf{dr} = (-GMm / R^2\ \hat{\mathbf{r}}) \cdot (dR\ \hat{\mathbf{r}} + R d\theta\ \hat{\theta})$$

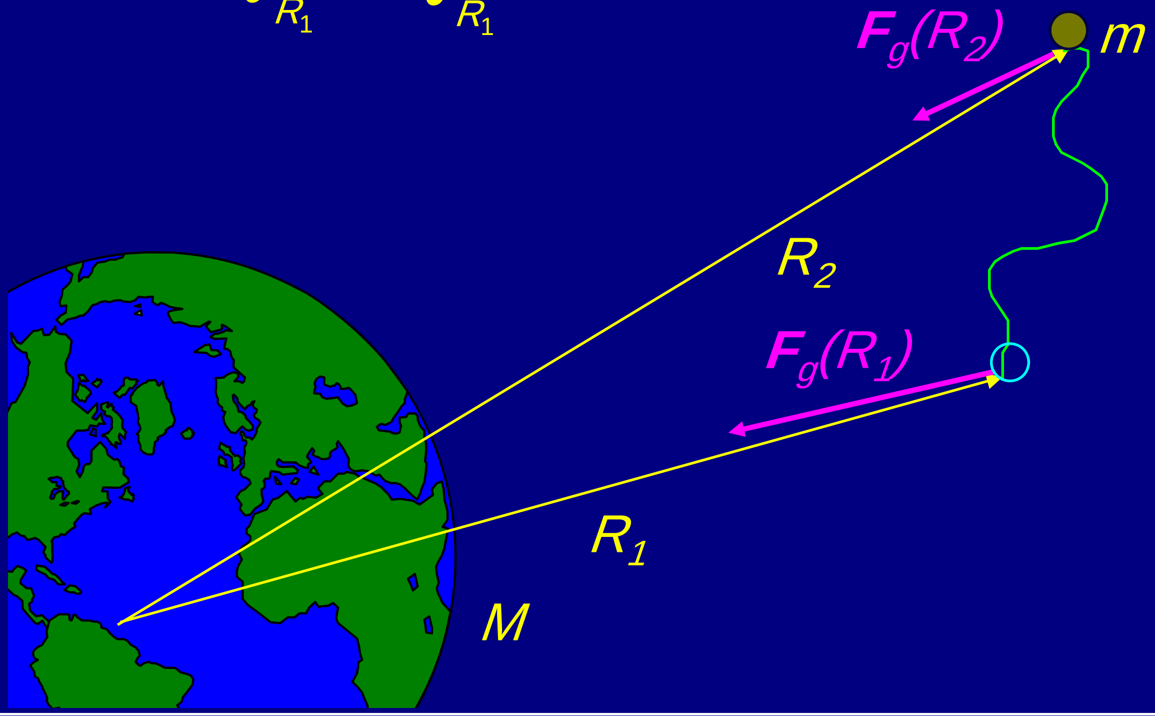
$$dW_g = (-GMm / R^2)\ dR \quad (\text{since } \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\theta} = 0,\ \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = 1)$$



کار نیروی متغییر در سه بعدی:
نیروی جاذبه گرانشی

- برای به دست آوردن کار در یک جابه جایی بزرگ dW_g انتگرال می گیریم:

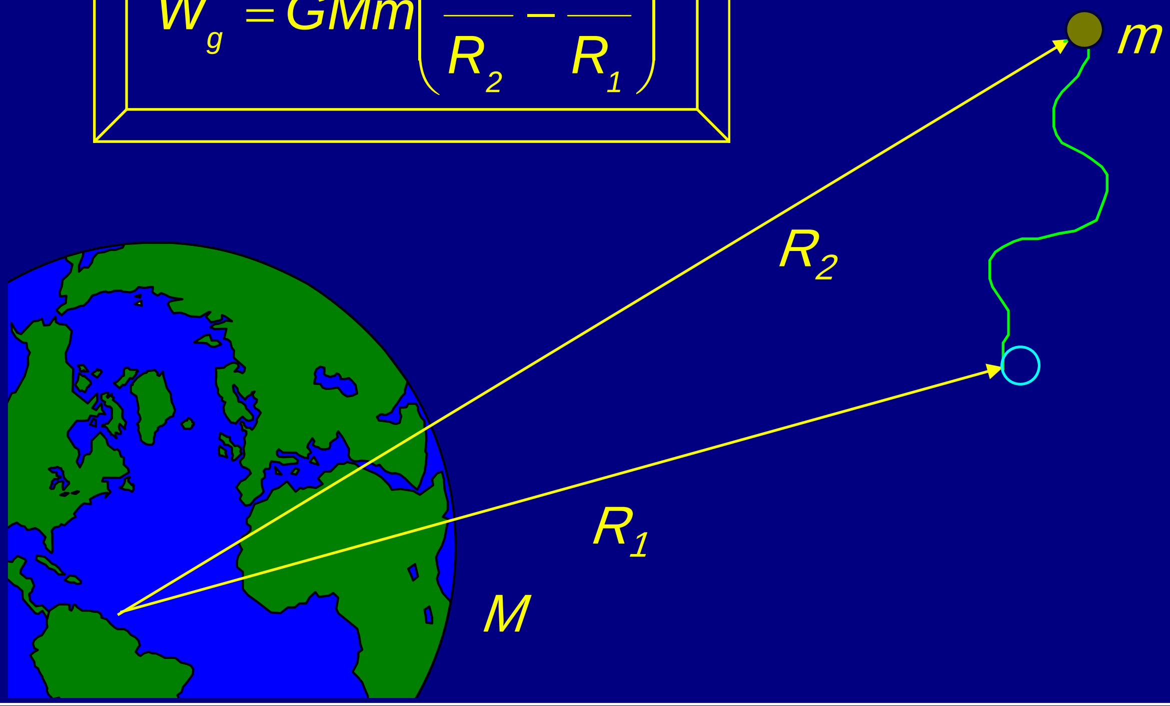
$$W_g = \int_{R_1}^{R_2} dW_g = \int_{R_1}^{R_2} (-GMm / R^2)\, dR = GMm\,(1/R_2 - 1/R_1)$$



کار نیروی متغییر در سه بعدی:
نیروی جاذبه گرانشی

- کارانجام شده به R_1 و R_2,بستگی داردو به مسیر بستگی ندارد .

$$W_g = GMm\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$$



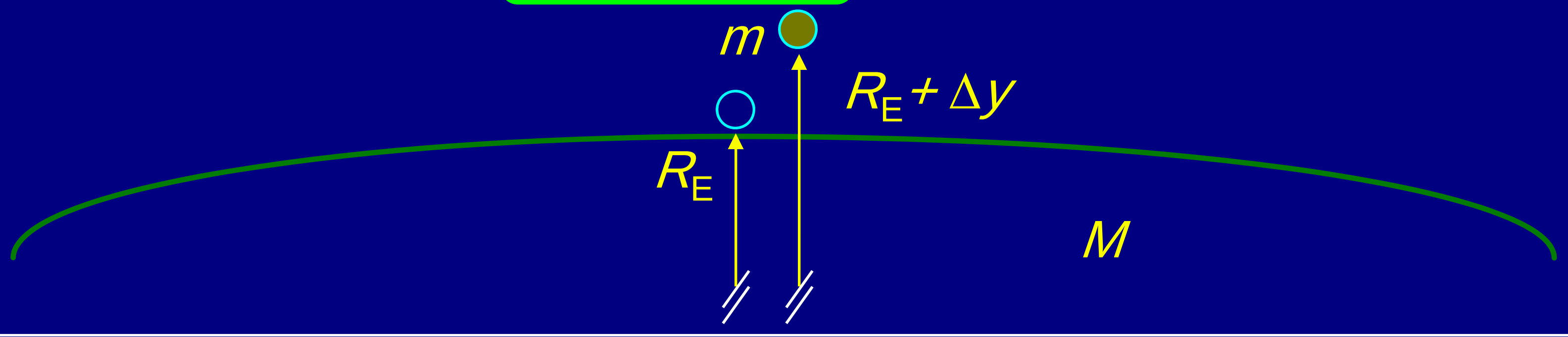
کار نیروی متغییر در سه بعدی:
نیروی جاذبه گرانشی

فرض کنیدکه: $R_1 = R_E$ و $R_2 = R_E + \Delta y$

$$W_g = -GMm\left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}\right) = -GMm\left(\frac{(R_E + \Delta y) - (R_E)}{(R_E + \Delta y)(R_E)}\right) \cong -m\left(\frac{GM}{R_E^2}\right)\Delta y$$

ولی می دانیم که : $\left(\frac{GM}{R_E^2}\right) = g$

لذا: $\boxed{W_g = -mg\Delta y}$



نیرهای پایستار:

- عموما کار نیروی انجام شده بستگی به مسیر ندارد وفقط به ابتدا و انتهای مسیر بستگی د ارد . این نوع نیرو را پایستار می نامند.
- نیروی گرانشی یک نیروی پایستار است.

$$W_g = GMm\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$$

- کار نیروی جاذبه در مجاورت زمین برابر است با:

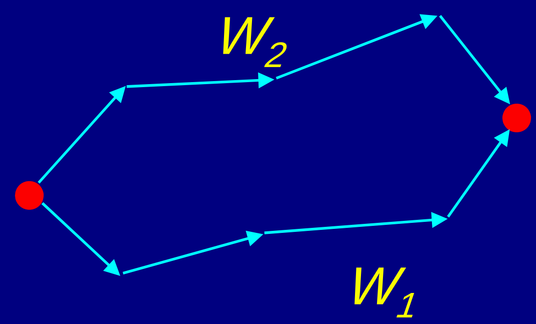
$$W_g = -mg\Delta y$$

- یک فنر نیروی پایستار ایجاد می کندکار این نیرو
- برابر است با:

$$W_s = -\frac{1}{2}k\left(x_2^2 - x_1^2\right)$$

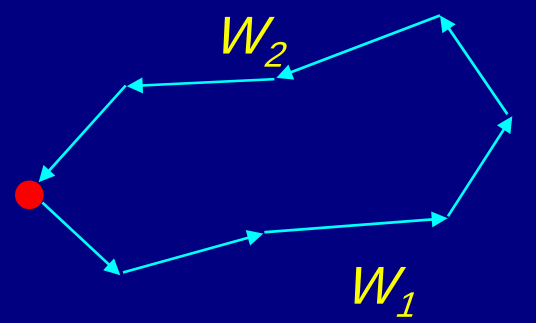
نیروهای پایستار:

- دیدیم که کار نیروی پایستار فقط به ابتدا و انتهای مسیر بستگی پیدا میکند



$$W_1 = W_2$$

بنابراین کار این نیرو درمسیر بسته برابر صفر است :



$$W_{NET} = W_1 - W_2 = W_1 - W_1 = 0$$

انرژی پتانسیل

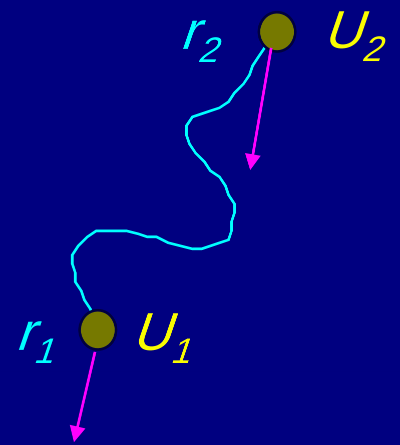
- برای هر نیروی پایستار **F** می توانیم **انرژی پتانسیل** ***U*** به شکل زیر تعریف کنیم:

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\Delta U$$

← کار نیروی پایستار برابر است با منهای تغییر تابع انرژی پتانسیل:

- می توان چنین نوشت:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = -W = -\int_{r_1}^{r_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$



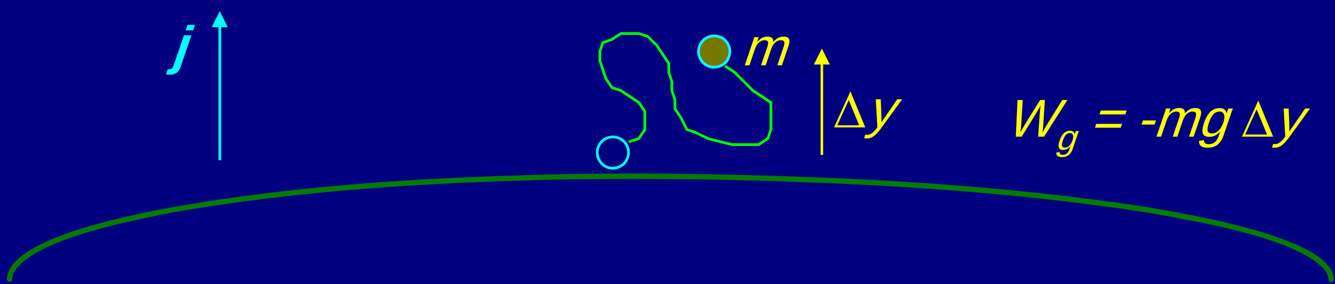
انرژی پتانسیل گرانشی :

- اگر جسمی به جرم ***m*** را به اندازه Δy از سطح زمین بالا ببریم کار نیروی گرانشی برابراست با:

$$W_g = -mg\,\Delta y$$

- بنابراین تغییر انرژی پتانسیل این جسم برابر است با: :

$$\Delta U = -W_g = mg\,\Delta y$$

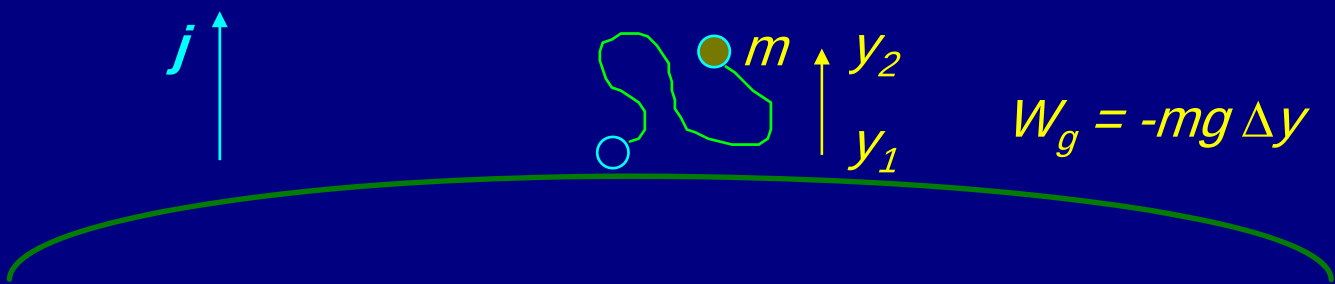


انرژی پتانسیل گرانشی :

- دیدیم که تغییر U مجاور سطح زمین برابر است با:
$\Delta U = -W_g = mg\,\Delta y = mg(y_2 - y_1)$

- لذا $U = mg\,y + U_0$ است که U_0 یک **ثابت اختیاری است**.

- می توانیم y طور ی انتخاب کنیم که $U = 0$ باشد دراینصورت مقدار این ثابت اختیاری برابر با صفر خواهد شد.



یادآوری نهایی :

- مرور کار
- کار انجام شده به وسیله نیروی جاذبه در روی سطح زمین
- چند مثال:
  - ← آونگ ,سطح شیبدار ,سقوط آزاد
- کار نیروی متغییر
  - ← فنر
- مسئله مربوط به فنر
- کار نیروی متغیر در سه بعد 3-D
  - ← نیروی گرانشی نیوتن
- نیروهای پایستار و انرژی جنبشی
- مطالعه کتاب و تمرین های آنرا فراموش نکنید.

فصل هشتم

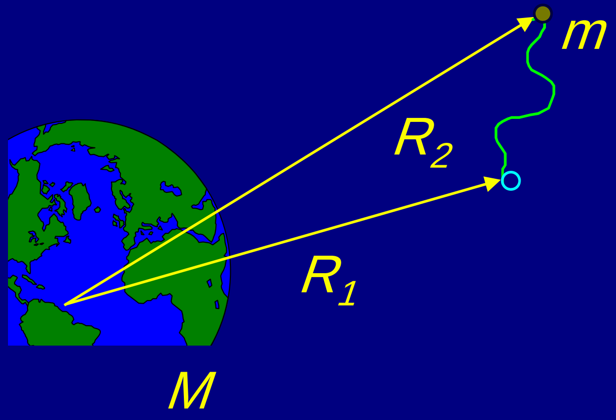
پایستگی انرژی

درس امروز ما:

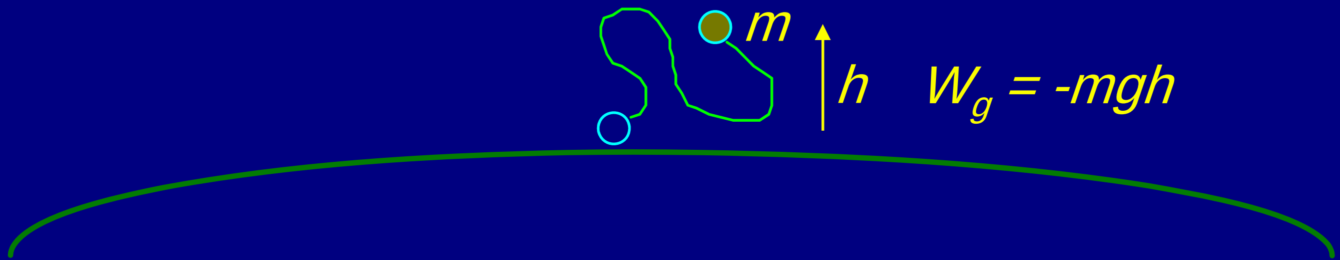
- مرور انرژی پتانسیل و نیروهای پایستار
- پایستگی " انرژی مکانیکی کل "
  - مثال : آونگ
- نیروهای غیر پایستار
  - اصطکاک
- قضیه کار وانرژی
- یک مسئله

نیروهای پایستار:

- کار نیروی گرانشی بستگی به مسیر ندارد:



$$W_g = GMm\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$$



$$W_g = -mgh$$

کار وانرژی:

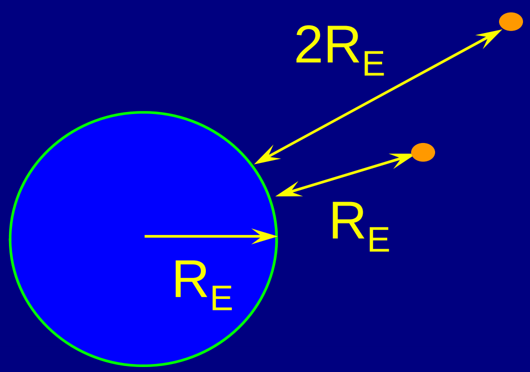
- جسمی از ارتفاع R_E ازسطح زمین رها می شود و وقتی با زمین برخورد می کند دارای انرژی جنبشی K_1 است .جسم دیگری از ارتفاع $(2R_E)$ از سطح زمین رها می شود و وقتی با زمین برخورد می کند دارای انرژی جنبشی K_2 است R_E . شعاع کره زمین است .

نسبت K_2 / K_1 چقدر است ؟

(a) 2

(b) $\frac{3}{2}$

(c) $\frac{4}{3}$

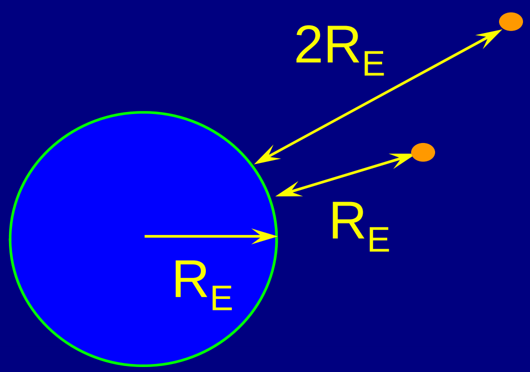


پاسخ:

- چون انرژی پایستار است پس: $\Delta K = W_G$,

$$\Rightarrow \quad W_G = GMm\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) \qquad \Rightarrow \quad \Delta K = c\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$$

برای هر دوجسم یکسان است $c = GMm$



ادامه پاسخ:

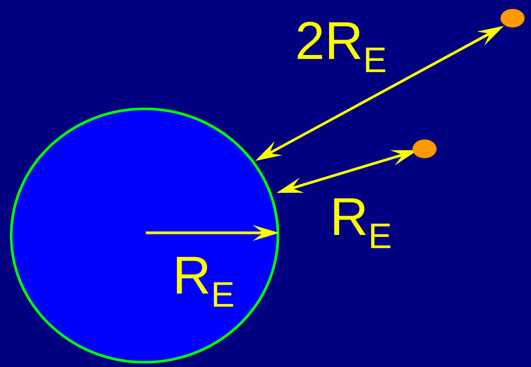
$$\Delta K = c\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$$

● برای جسم اول :

$$K_1 = c\left(\frac{1}{R_E} - \frac{1}{2R_E}\right) = c\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{R_E}$$

● برای جسم دوم:

$$K_2 = c\left(\frac{1}{R_E} - \frac{1}{3R_E}\right) = c\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{R_E}$$

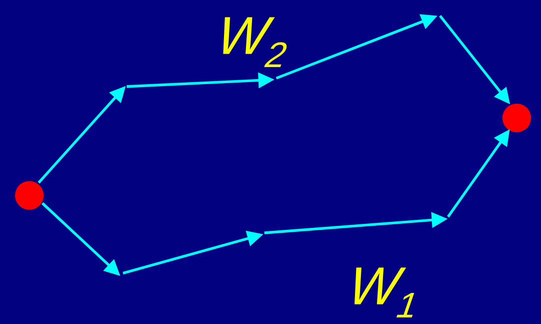


لذا:

$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}$$

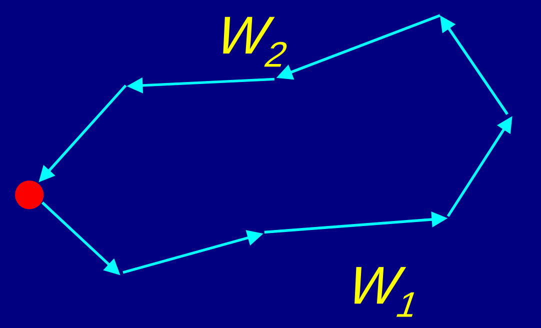
نیروهای پایستار:

- کار نیروی پایستار بستگی به مسیرندارد



$$W_1 = W_2$$

- بنابراین کار این نیرو در مسیر بسته صفر است .



$$W_{NET} = W_1 - W_2$$
$$= W_1 - W_1 = 0$$

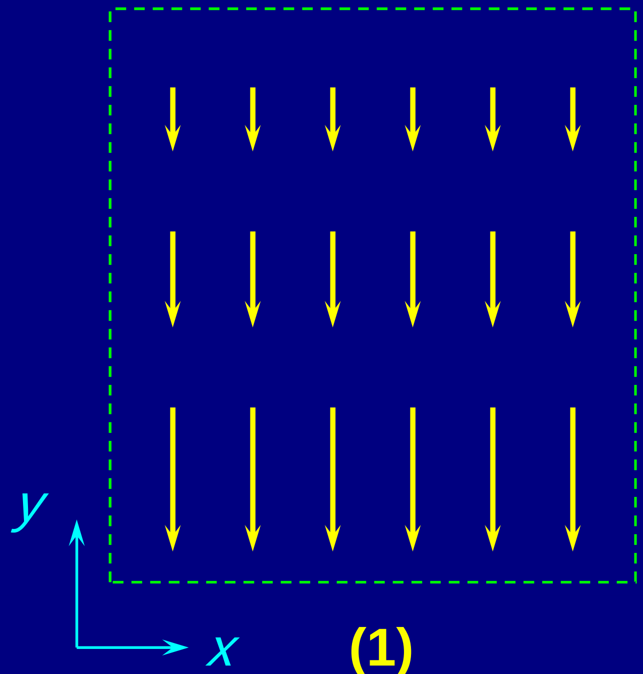
نیروهای پایستار:

- در شکل زیر بردارهای نیرو را در میدان دو نیرو مشاهده می کنید کدام یک پایستار است ؟

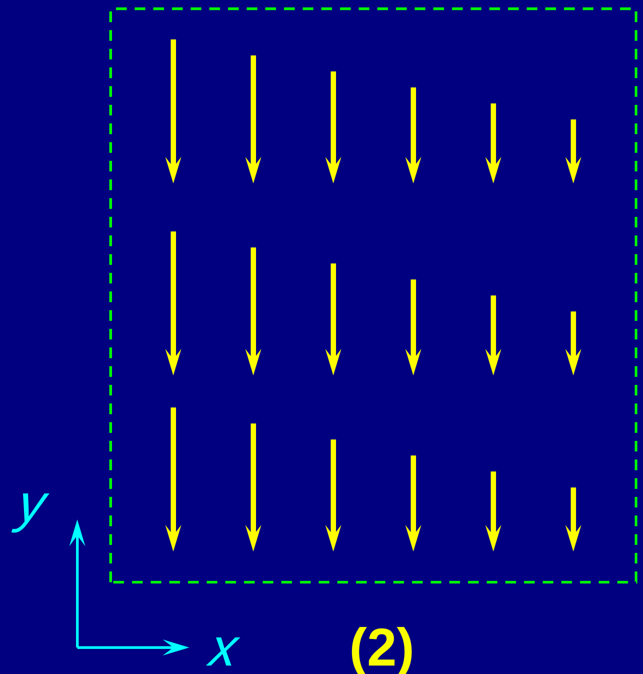
(الف) هردو

(ب) 2

(ج) 1



(1)

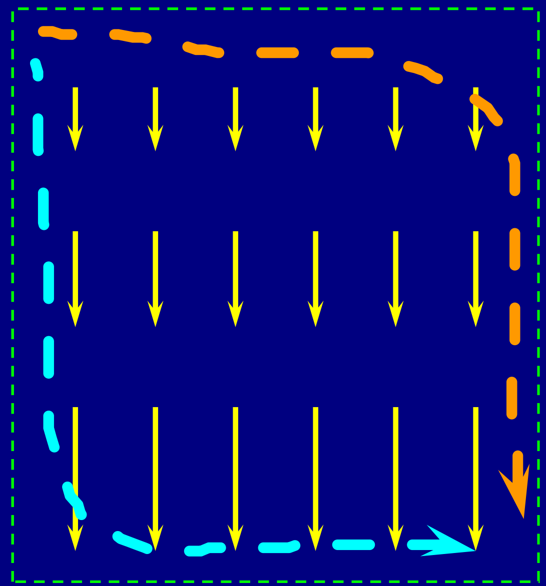


(2)

پاسخ:

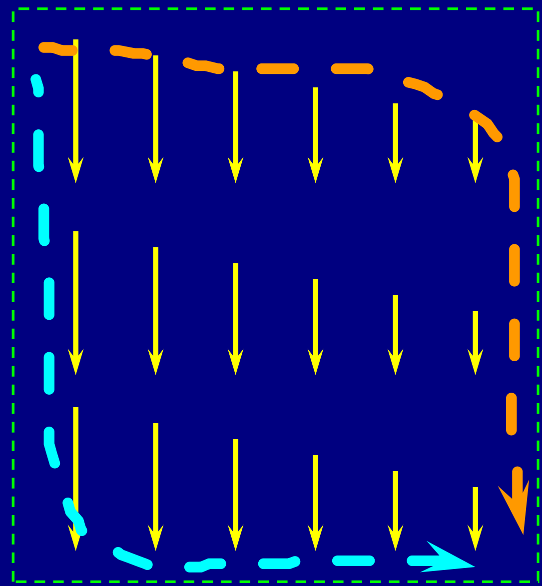
- کار نیرو را در دو مسیر بسته حساب می کنیم:

$W_A = W_B$



(1)

$W_A > W_B$

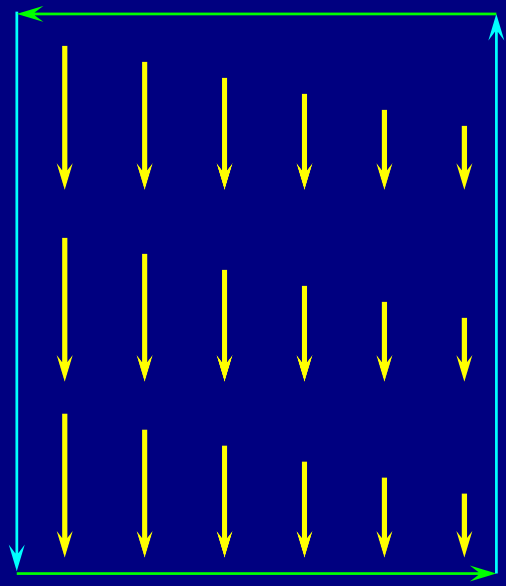


(2)

ادامه ...

- در واقع اگر مسیری از نوع ۲ وجود داشت می توانید کسب درامد کنید.:
  - کار این نوع نیرو در مسیر بسته **0 <** بود !
  - یعنی انرژی جنبشی مجانی بدست می آوردید !!

$W_{NET} = 10\text{ J} = \Delta K$



توجه :تاجایی که ما می دانیم چنین نیرویی وجود ندارد.

یادآوری انرژی پتانسیل :

- برای نیروی پایستار انرژی پتانسیل ***U*** را چنین تعریف می کنیم:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = -W = -\int_{S_1}^{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

← می توانی موقعیت اولیه تراز اولیه انرژی پتانسیل را به طور اختیاری انتخاب کنید که ***U = 0*** صفر باشد.

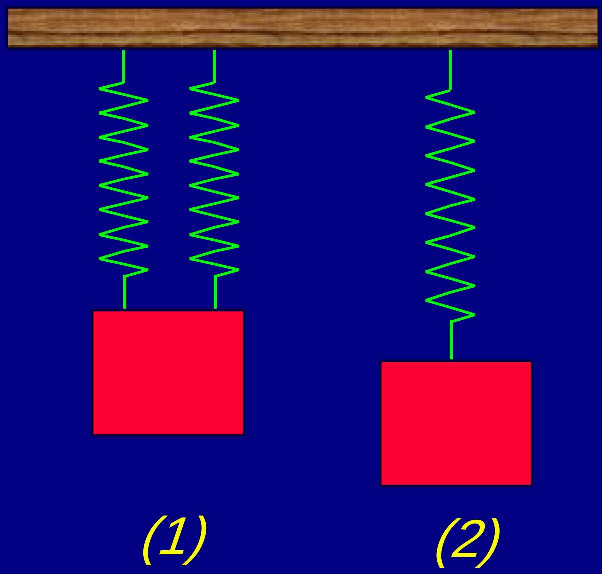
نیروهای پایستار و انرژی پتانسیل :
(مطالبی که باید بدانید!):

نیرو F	کار $W(1\text{-}2)$	تغییر انرژی پتانسیل $\Delta U = U_2 - U_1$	تابع انرژی پتانسیل U
$F_g = -mg\,\hat{j}$	$-mg(y_2 - y_1)$	$mg(y_2 - y_1)$	$mgy + C$
$F_g = -\frac{GMm}{R^2}\,\hat{r}$	$GMm\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$	$-GMm\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$	$-\frac{GMm}{R} + C$
$F_s = -kx$	$-\frac{1}{2}k\left(x_2^2 - x_1^2\right)$	$\frac{1}{2}k\left(x_2^2 - x_1^2\right)$	$\frac{1}{2}kx^2 + C$

R فاصله دو مرکز x, کشیدگی فنر است

انرژی پتانسیل :

- کلیه فنرها و جرم ها یکسان هستند) .جاذبه به پایین اثر می کند .(
  نسبت به وضعیت آرامش فنر کدام یک دارا انرژی ذخیره بیشتری است ؟



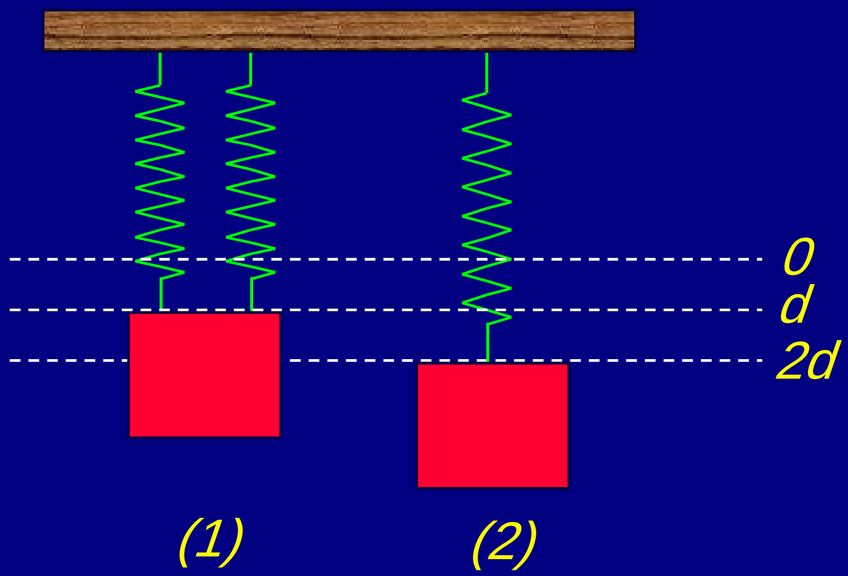
الف- 1

ب - 2

ج - یکسان

پاسخ:

- جابه جایی *(1)* از حالت تعادل دوبرابر *(2)* *است* (هر فنر نصف نیروی لازم برای تعادل با نیروی ***mg*** *را دریافت می‌کند*)



ادامه پاسخ:

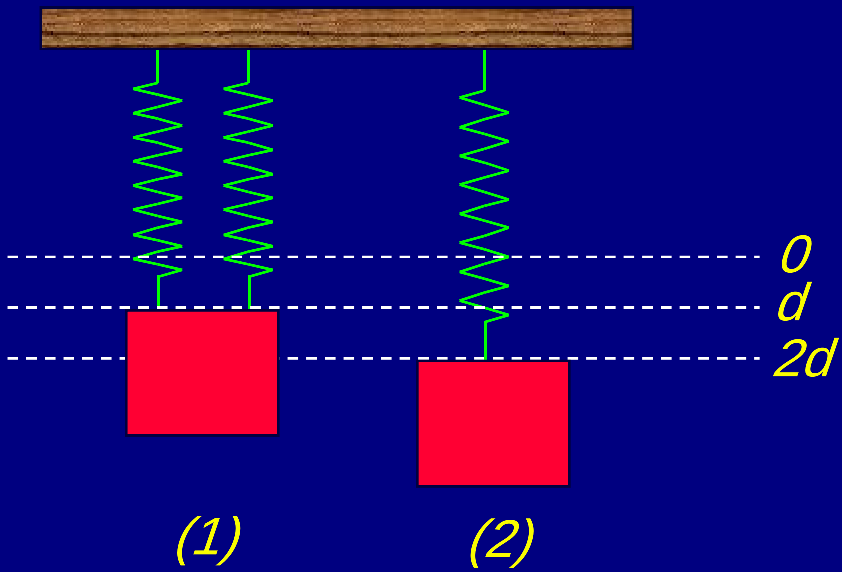
انرژی پتانسیل ذخیره شده در حالت *(1)* برابر است با:

$$2 \cdot \frac{1}{2}kd^2 = kd^2$$

انرژی پتانسیل ذخیره شده در حالت*(2)*برابر است با:

$$\frac{1}{2}k(2d)^2 = 2kd^2$$

درحالت *(2)* *انرژی پتانسیل دوبرابر است* !



پایستاری ا نرژی

- اگر نیروها پایستار باشند ا نرژی جنبشی و پتانسیل کل یعنی " انرژی مکانیکی کل " پایستار می ماند.

در طی این بحث برقرار است ($E=E_{mechanical}$:(توجه کنید ←

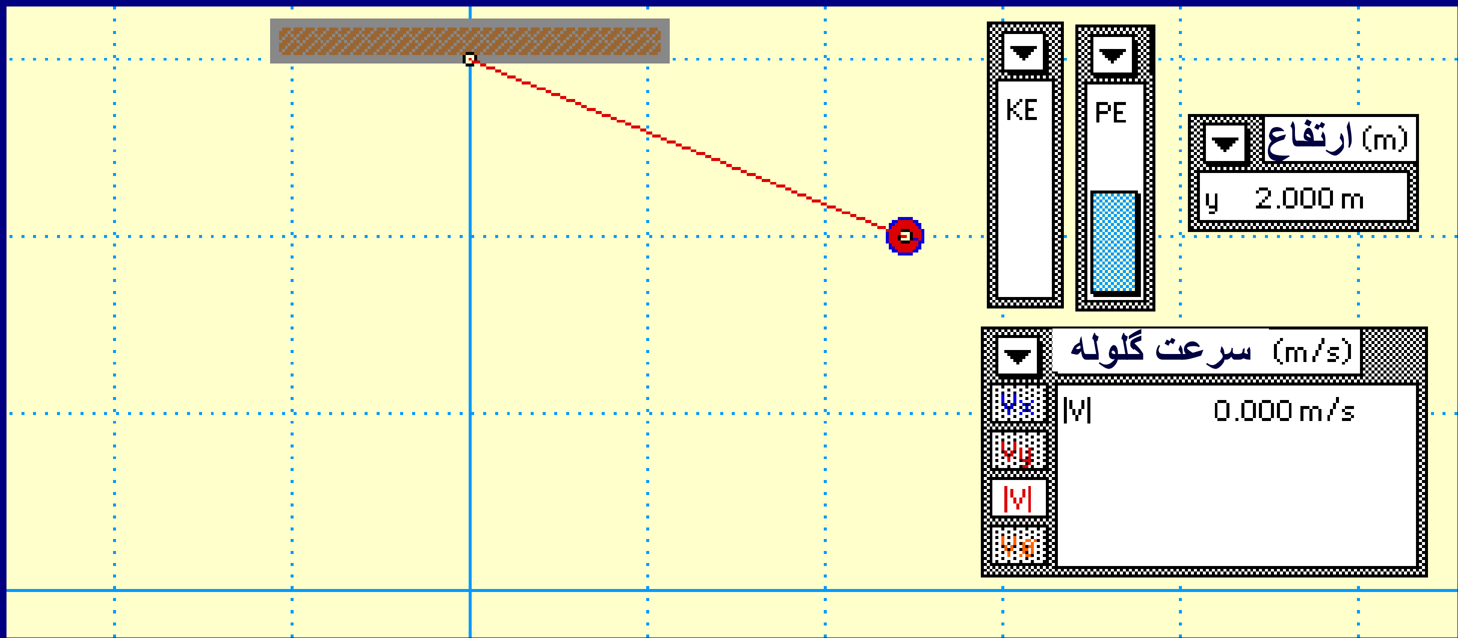
$$E = K + U$$
$$\Delta E = \Delta K + \Delta U$$
$$= W + \Delta U \quad \Rightarrow \quad \text{با استفاده از} \quad \Delta K = W$$
$$= W + (-W) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{با استفاده از} \quad \Delta U = -W$$

$E = K + U$ است ثابت!!!

- هردوی K و U تغییر می کنند, ولی $E = K + U$ ثابت می ماند.
- ولی ملاحظه می شود که در صورت حضور نیروهای ناپایستار انرژی به شکلهای دیگر اتلاف می شود (حرارتی ,صوتی).

آونگی ا ز وضعیت قائم منحرف و رها می شود . در غیاب نیروی مقاومت انرژی جنبشی و پتانسیل آن مرتب به همدگد یگر تبدیل شده و انرژی مکانیکی آن ثابت می ماند . به شکل زیر و تغییرات انرژ ی ها توجه کنید:

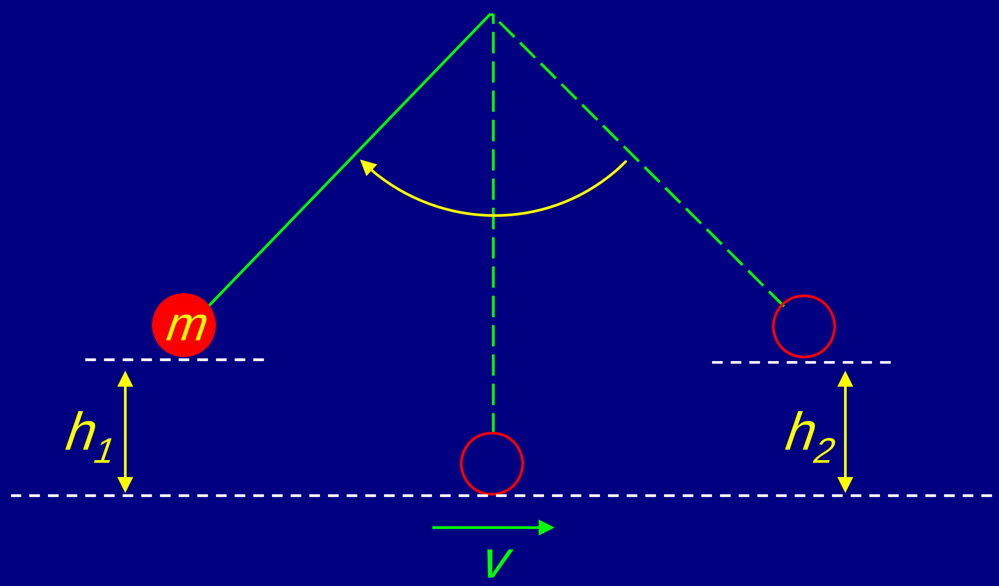
درکجا بیشترین انرژی جنبشی و کمترین انرژی پتانسیل را دارد وبرعکس؟



آونگ

مثال : آونگ ساده

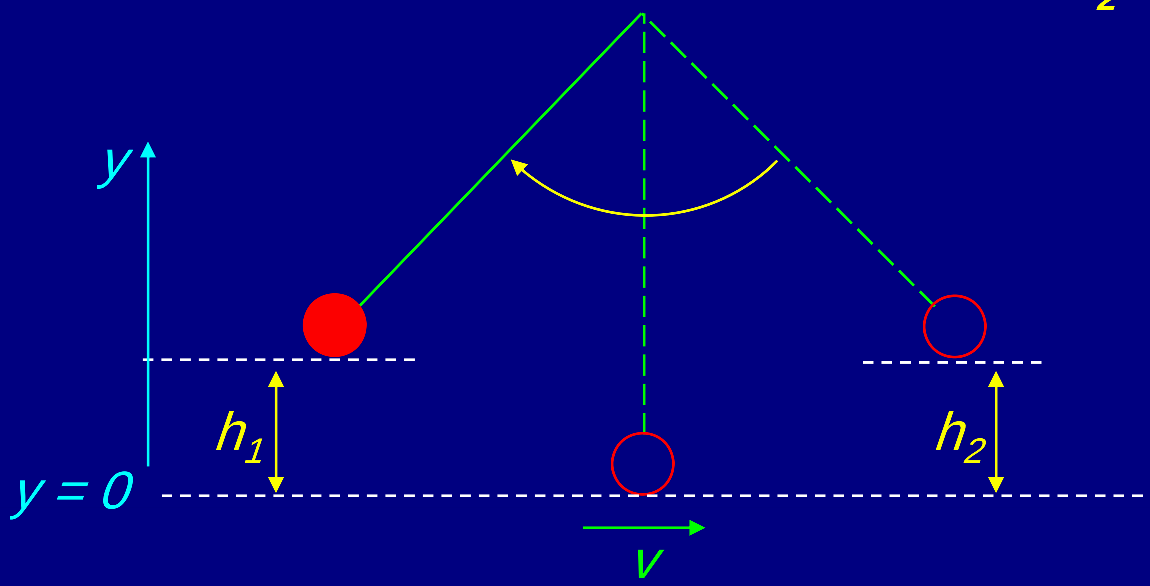
- فرض کنیدکه جرم *m* وا ز ا رتفاع h_1 از حالت سکون نسبت به پائینترین وضعیت ممکن رها شود..
  - بیشترین تندی این جسم و مکان آنرا مشخص کنید
  - این جرم تا چه ارتفاع h_2 در طرف دیگر بالا می رود؟



مثال : آونگ ساده

- چون نیروی جاذبه پایستار است پس انرژی مکانیکی پایستار می ماند.
- ($E = K + U$ ثابت است)
- فرض کنید در پائینترین نقطه $y = 0$,
و در $y = 0$, $U=0$ (انتخاب اختیاری) باشد .

$$E = {}^{1}/_{2}mv^{2} + mgy$$

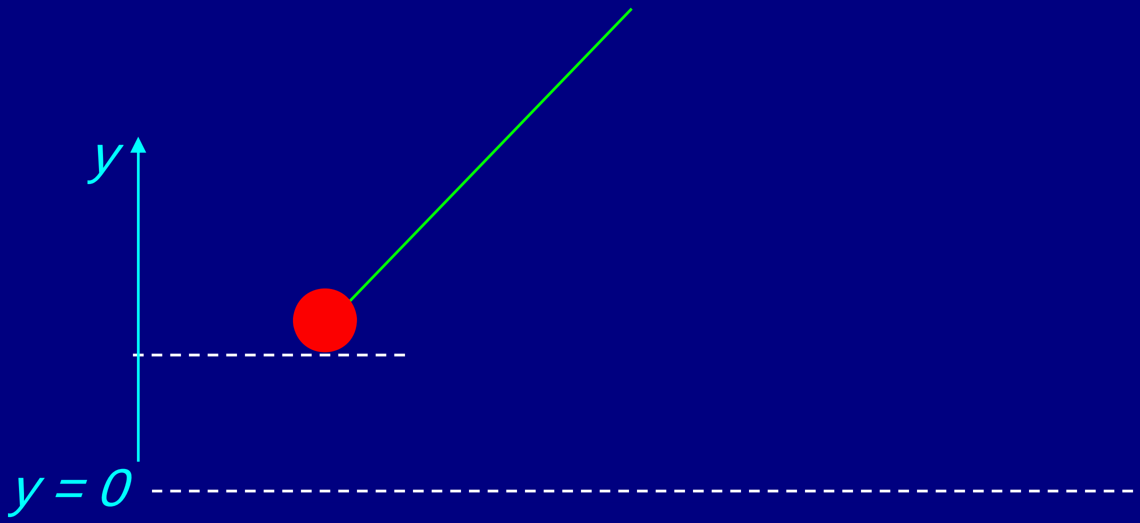


مثال : آونگ ساده

- $E = {}^{1}/_{2}mv^{2} + mgy$.

← درحالت ابتدایی $y = h_1$ و, $v = 0$, بنابراین $E = mgh_1$:

← چون در ابتدا $E = mgh_1$ است لذا $E = mgh_1$, همواره برقرار است زیر ا نرژی کل پایستار است .



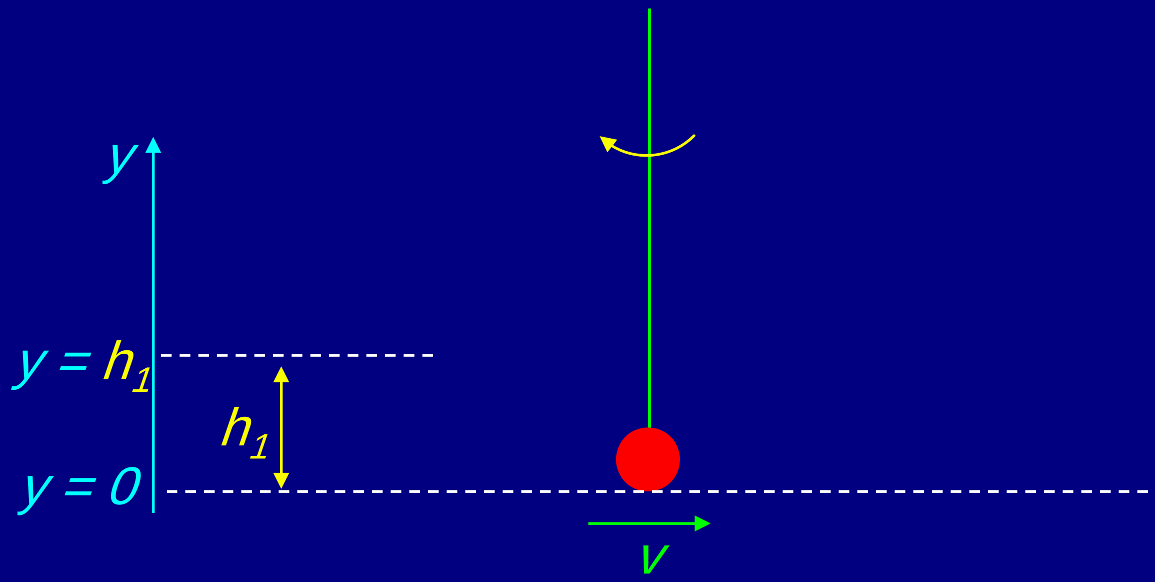
مثال : آونگ ساده

- $^1/_2mv^2$ در پائینترین نقطه بیشینه است .
- لذا در نقطه y=0

$$1/2mv^2 = mgh1$$

$$v2 = 2gh1$$

$$\boxed{v = \sqrt{2gh_1}}$$



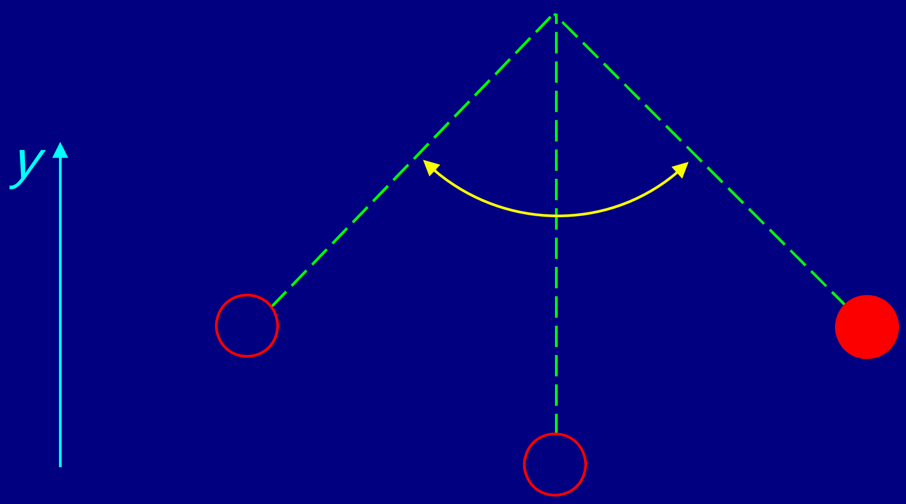
مثال : آونگ ساده

- چون $E = mgh_1 = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$ است بدیهی است که بیشنه ارتفاع در طرف دیگر در نقطه $y = h_1 = h_2$ است و در آن نقطه $v = 0$ است .
- گلوله تا ارتفاع اولیه خود بالا می رود.

مثال : آونگ ساده

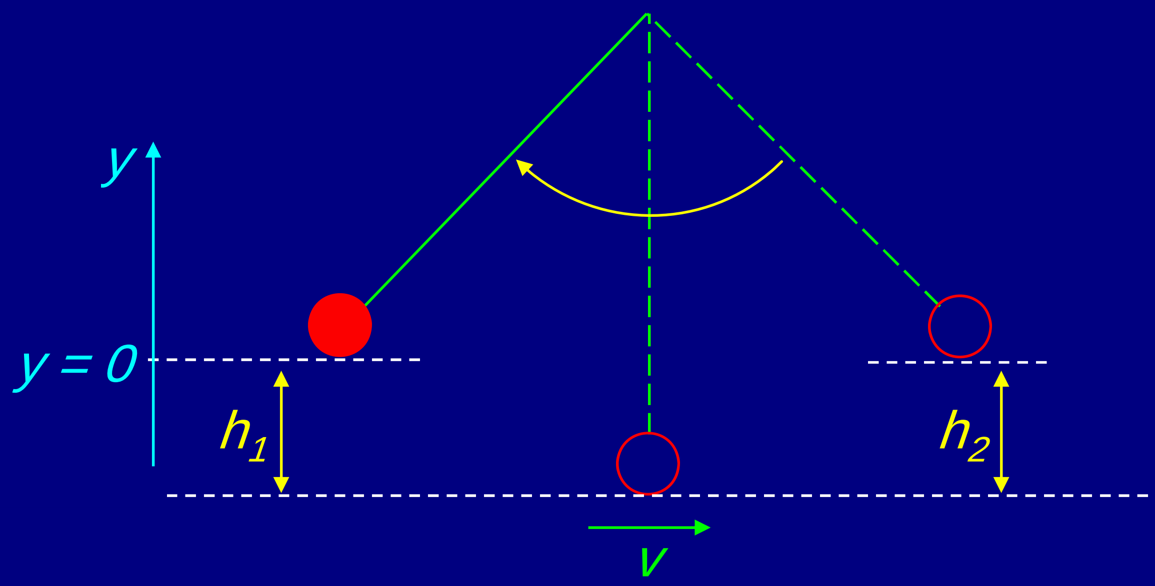
- گلوله حول وضعیت تعادل خود نوسان میکند و انرژی بین *K* و*U* مرتب مبادله *می شود.* .

$$E = {}^{1}/_{2}mv^2 + mgy = K + U = \text{ثابت} .$$



مثال : آونگ ساده

- این مثال را با انتخاب $y = 0$ در وضعیت اولیه گلوله و , $U = 0$ در $y = 0$ می توانیم حل کنیم :
$E = {}^1/_2mv^2 + mgy$.

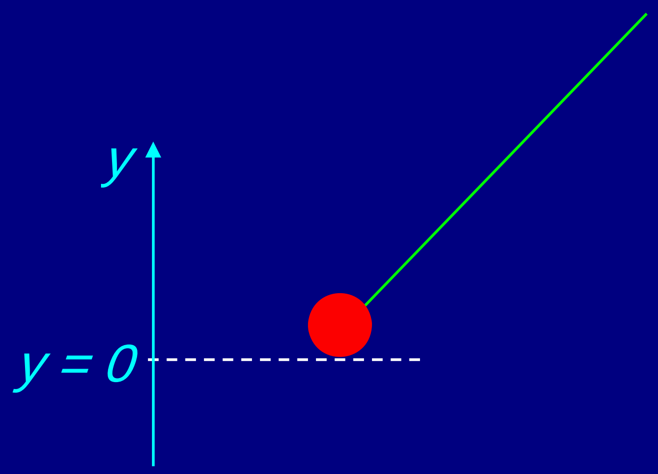


مثال : آونگ ساده

- $E = {}^{1}/_{2}mv^{2} + mgy$.

← درحالت ابتدایی $y = 0$, و $v = 0$ است , لذا $E = 0$

← چون در حالت ابتدایی همواره $E = 0$ است $E = 0$, بوده و انرژی همواره پایستار می ماند.

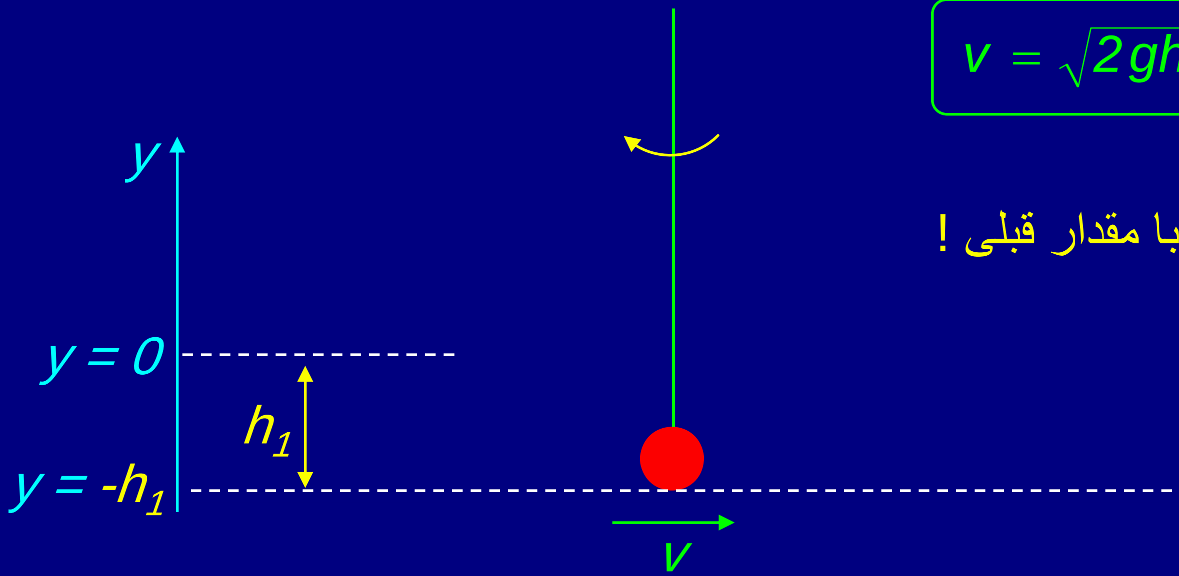


مثال : آونگ ساده

- $\frac{1}{2}mv^2$ در پائینترین نقطه بیشینه است.
- لذا درنقطه : $y = -h_1 \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = mgh_1 \Rightarrow v^2 = 2gh_1$

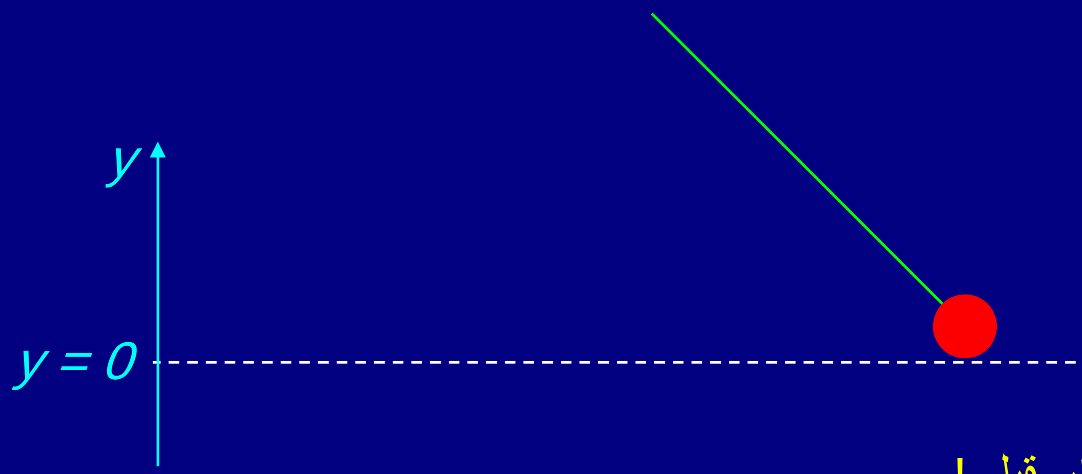
$$\boxed{v = \sqrt{2gh_1}}$$

مساوی با مقدار قبلی !



مثال : آونگ ساده

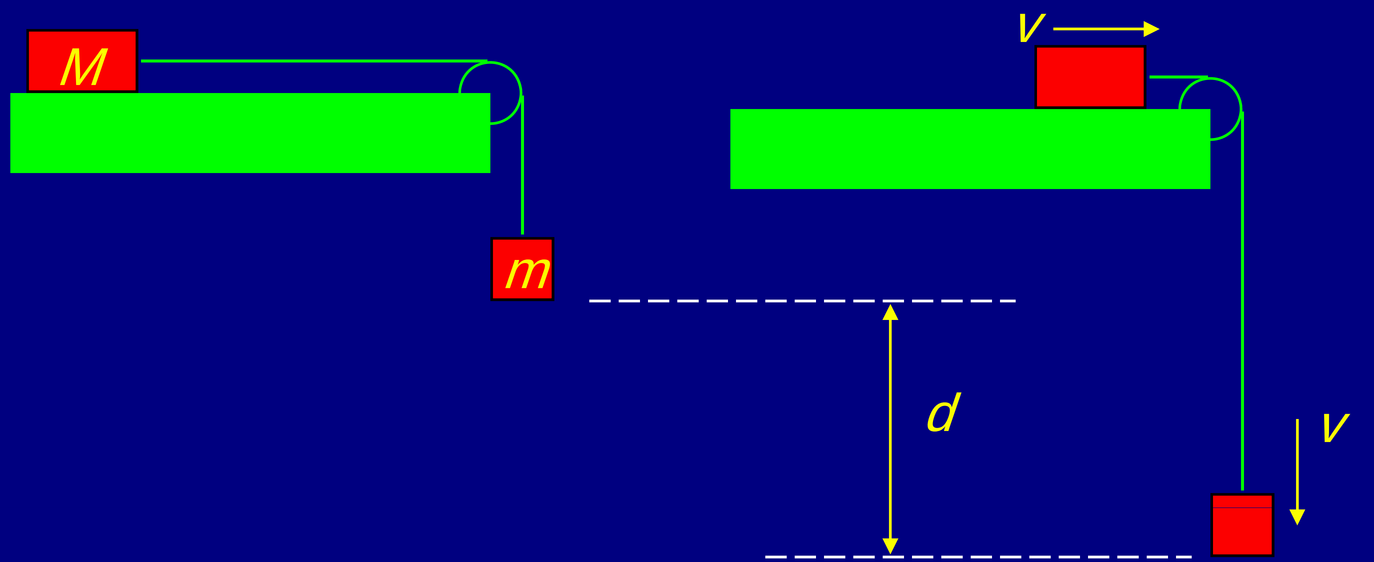
- چون $\frac{1}{2}mv^2 - mgh = 0$ است بنابراین بیشینه مقدار ارتفاع در طرف دیگر در نقطه $y = 0$ و $v = 0$ است .
- توپ تا ارتفاع اولیه خود بالا می رود.



مساوی با مقدار قبلی!

مثال : ریل هوا و گلایدر (لغزنده روی ریل)

- لغزنده ای به جرم M روی ریل بدون اصطکاک افقی قرار دارد. جرم m به آن از طریق یک طناب بدون جرم و یک قرقره ارمانی بدون جرم متصل شده است. تندی v جرم M بعد از اینکه جرم m به اندازه d سقوط کرد چقدراست؟

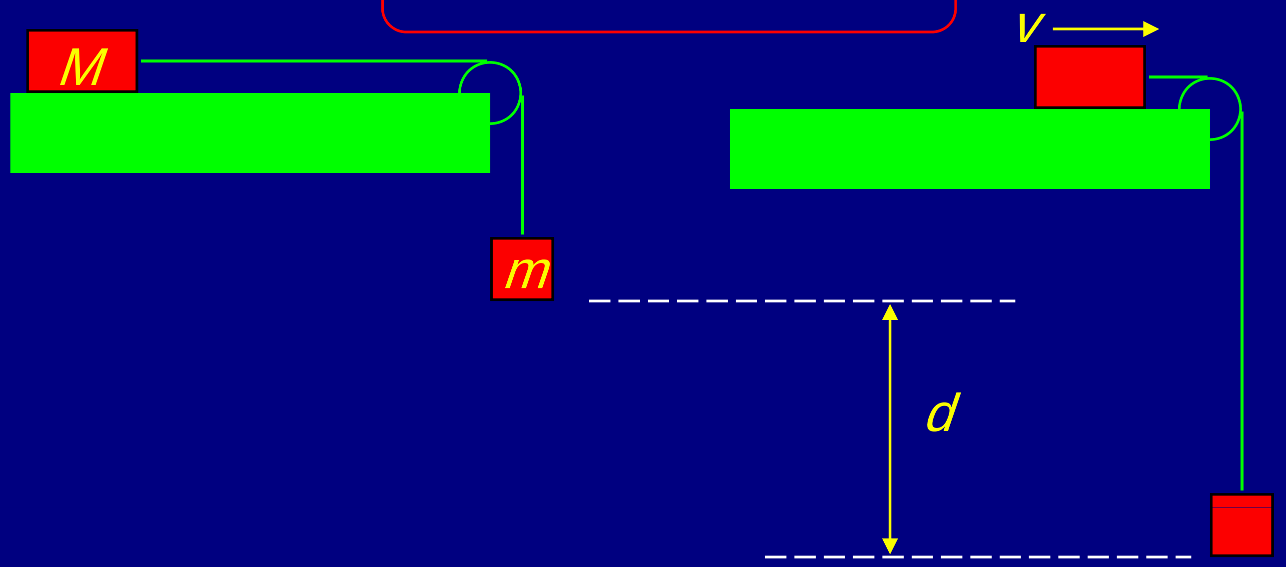


مثال : ریل هوا و گلایدر (لغزنده روی ریل)

- چون کلیه نیروها پایستار هستند پس مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل پایستار است
- فرض کنید که پیکره سیستمی به گونه ای باشد که $U=0$:

$$\Delta K = -\Delta U$$

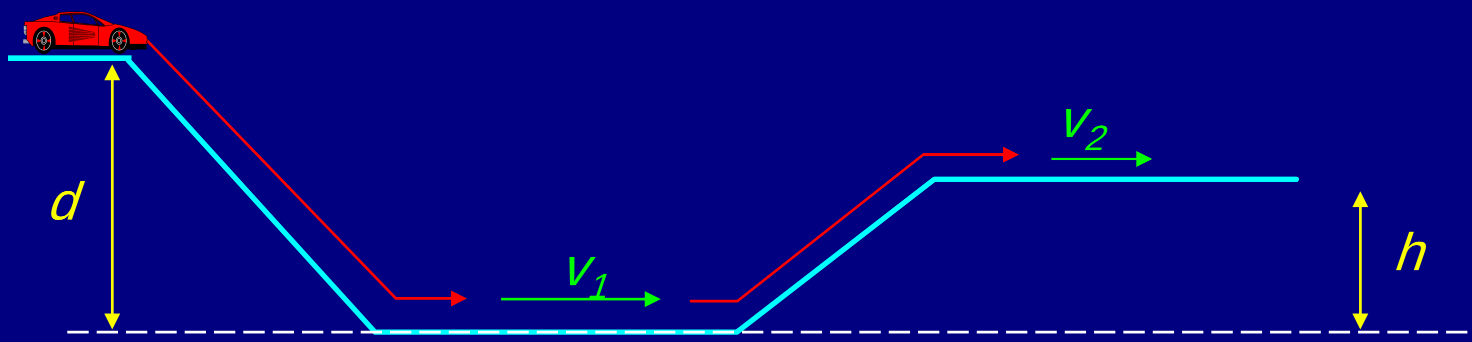
$$\frac{1}{2}(m+M)v^2 = mgd$$



مسئله:

- یک اتومبیل اسباب بازی روی مسیر افقی و بدون اصطکاک حرکت میکند و سپس از ارتفاع d *پایین می آید و به طور افقی با تندی* , v_1 حرکت می کند ,به ارتفاع h *بالا می رود* ,حرکت افقی خودر ا با سرعت v_2 *ادامه می دهد* .

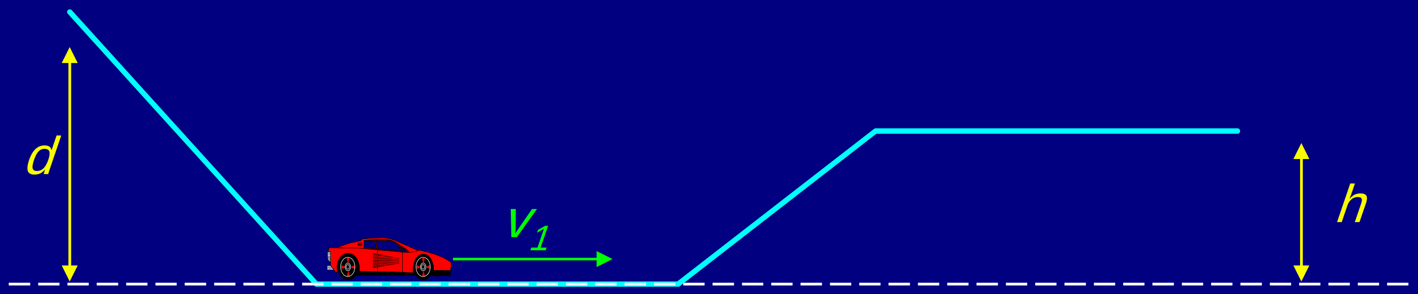
 v_1 و v_2 *پیدا کنید* .



مسئله:

- K+U پایستار است لذا: $\Delta E = 0 \Rightarrow \Delta K = -\Delta U$
- با پایین آمدن از ارتفاع : $d, \quad \Delta U = -mgd, \Delta K = {}^{1}/_{2}mv_1^2$
- معادله فوق را برحسب سرعت حل می کنیم: :

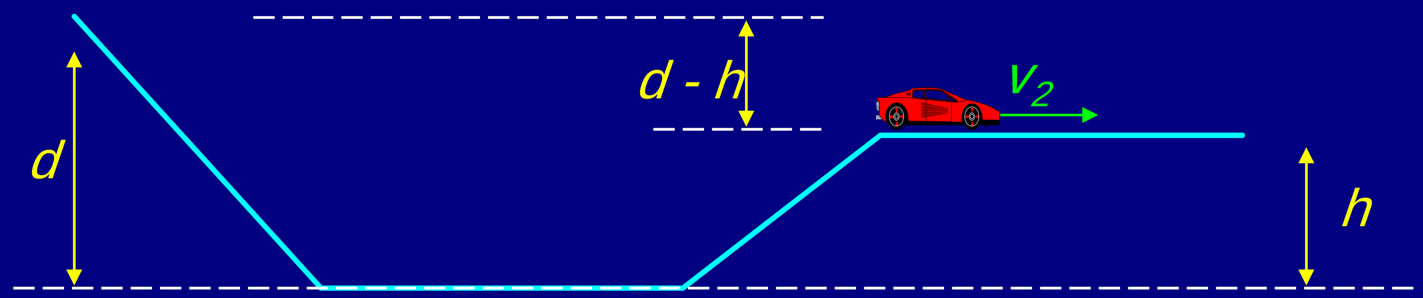
$$\boxed{v_1 = \sqrt{2gd}}$$



ادامه مسئله :

- درنهایت به اندازه $d - h$ زیر نقطه شروع حرکت هستیم.لذا:
- $\Delta U = -mg(d - h), \Delta K = {}^{1}/_{2}mv_2^2$
- با حل برحسب سرعت:

$$\boxed{v_2 = \sqrt{2g(d-h)}}$$



نیروهای غیر پایستار:

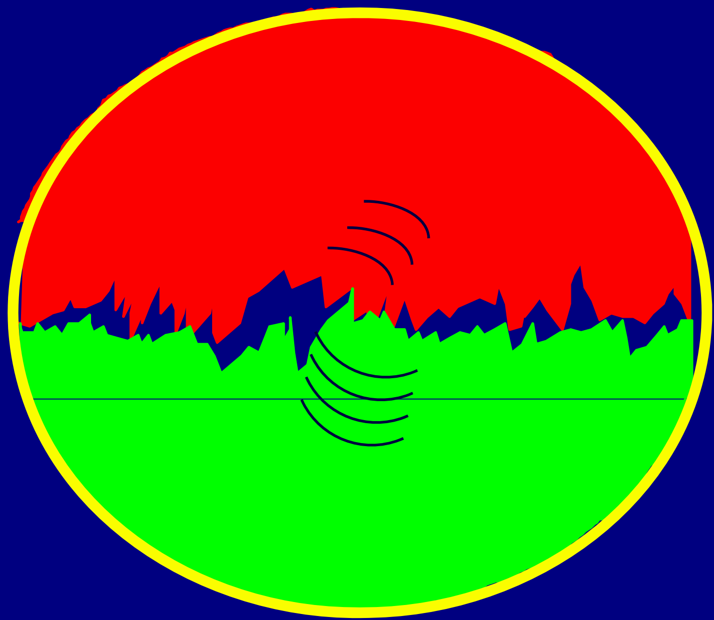
- اگر کار نیرو بستگی به مسیر طی شده نداشته باشد نیرو را پایستار می گویند.
- اگر کار انجام شده بستگی به مسیر داشته باشد دراینصورت نیرو را غیر پایستار می گویند.
- یک نوع نیروی ناپایستار نیروی اصطکاک است .

وقتی جسمی را روی کف زمین می کشیم کار انجام شده به توسط نیروی اصطککاک بستگی به مسیر خواهد داشت .

» کارانجام شده به طول مسیر بستگی دارد!

انر ژی اتلافی : اصطکاک لغزشی

- وقتی قسمت ها ی مختلف روی همدیگر می لغزند ارتعاشات کوچکی بوجود می آید و انرژی پتانسیل و جنبشی انرژی اتمها تبدیل می شود.

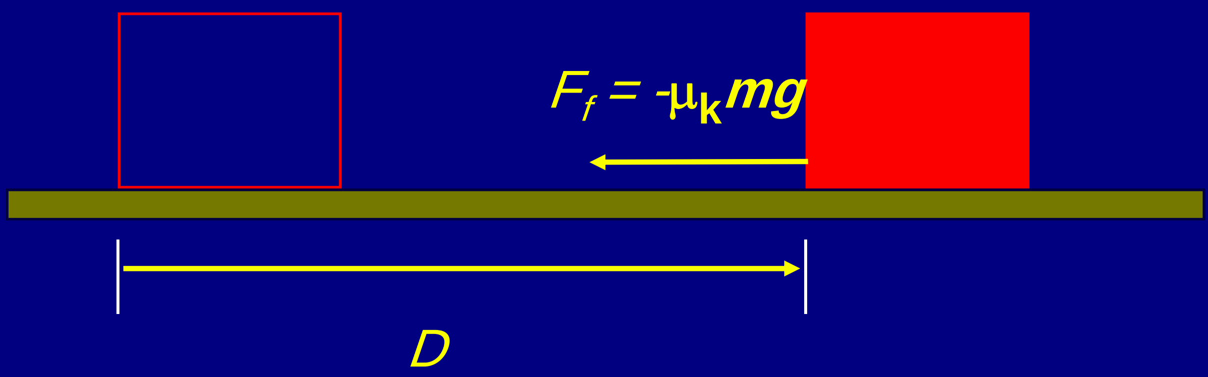


اتم ها به جلو و عقب رفته و ارتعاش می کنند وانرژی دارند ولی تکانه کل آنها صفر است .

نیروهای غیر پایستار : نیروی اصطکاک

- فر ض کنید ک جعبه ای را روی کف اتاق حرکت دهیم .جرم جعبه m ضریب اصطکاک کف اتاق باجسم μ_k است.
- کار نیروی اصطکاک در جابه جایی D برابر است با:

$$W_f = \boldsymbol{F_f \cdot D} = -\mu_k mgD$$



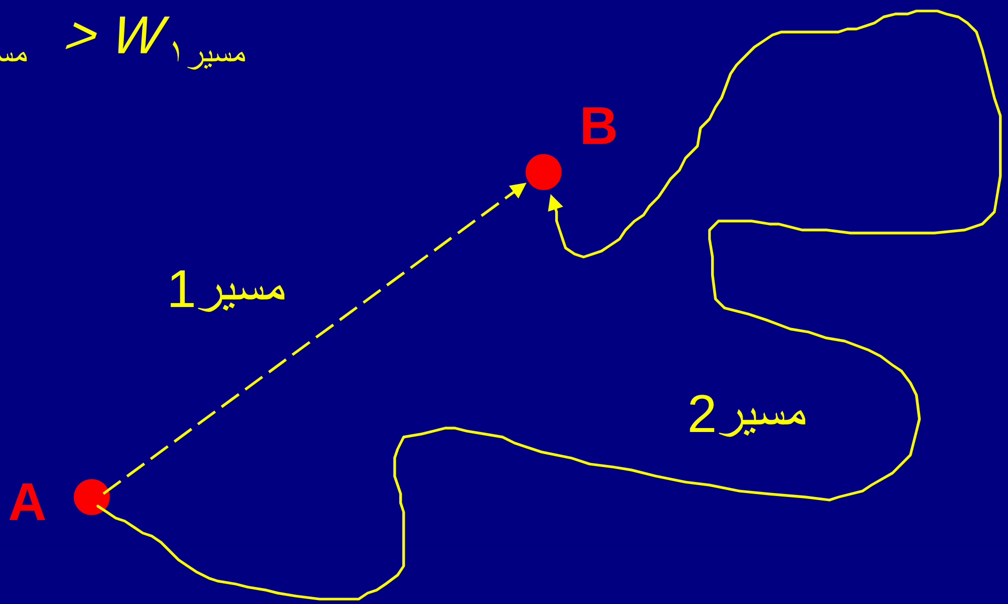
نیروهای غیر پایستار : نیروی اصطکاک

- چون بزرگی نیرو ثابت و جهت آن مخالف جهت جابه جایی است ,کار انجام شده برای حر کت جعبه در طول L برابر است با:

$$W_f = -\mu mgL$$

- بدیهی است که کار انجام شده بستگی به مسیر دارد.

- $W_{\text{مسیر ۲}} > W_{\text{مسیر ۱}}$



قضیه عمومیت یافته کاروا نرژی:

- فرض کنید که: $F_{NET} = F_C + F_{NC}$ (حاصل جمع نیروهای پایستار و ناپایستار)

- کار کل انجام شده برابر است با: $W_{NET} = W_C + W_{NC}$:

- طبق قضیه کار و انرژی جنبشی : $W_{NET} = \Delta K$

$$W_{NET} = W_C + W_{NC} = \Delta K$$

$$W_{NC} = \Delta K -$$

W_C :

- ولی می دانیم که: $W_C = -\Delta U$

لذا:

$$\boxed{W_{NC} = \Delta K + \Delta U = \Delta E_{mechanical}}$$

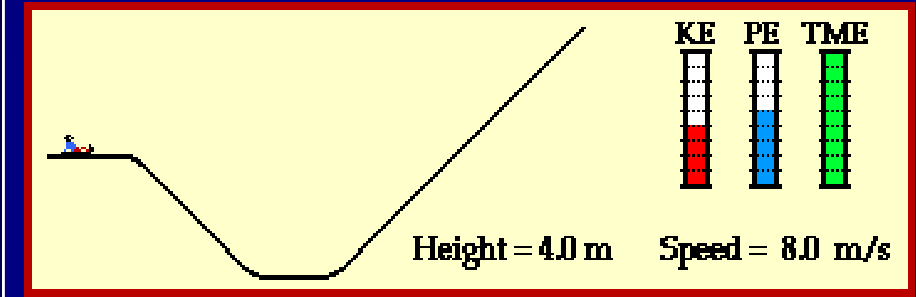
قضیه عمومیت یافته کاروا نرژی:

$$W_{NC} = \Delta K + \Delta U = \Delta E_{mechanical}$$

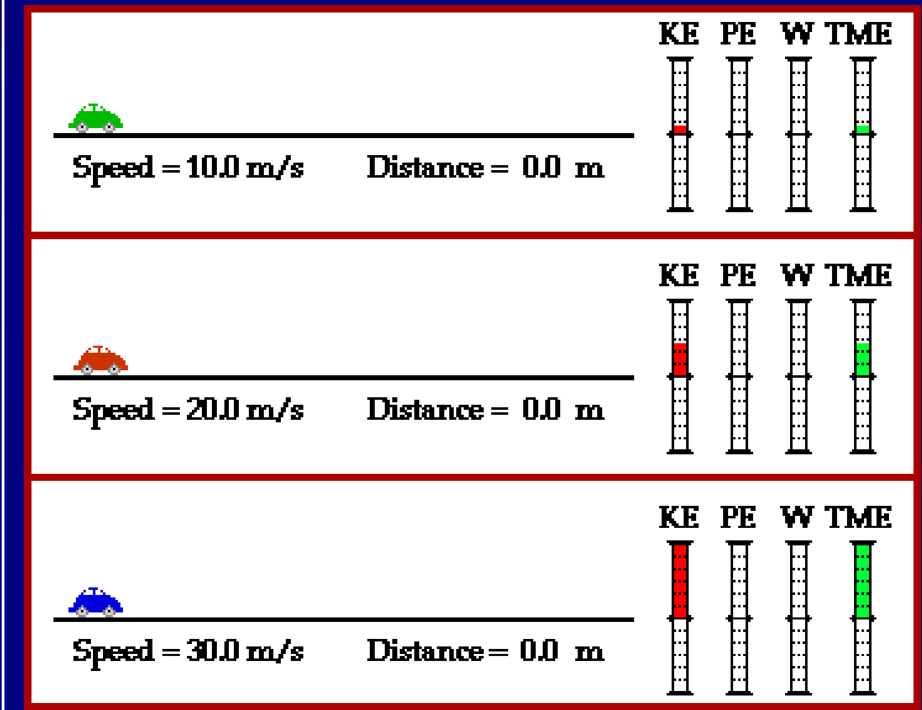
- تغییر انرژی پتانسیل + جنبشی یک سیستم برابر است با کارنیروهای غیر پایستاروارد بر سیستم .لذا $E_{mechanical}$=K+U سیستم پایستار نمی ماند

اگر کلیه نیروهای وارد برسیستم پایستار باشددراین صورت K+U پایستار می ماند $\Delta K + \Delta U = \Delta E_{mechanical} = 0$:یعنی $W_{NC} = 0$, بوده که بامعنی است .

اگر برخی از نیروها ناپایستار باشند) مانند نیروی اصطکاک K+U ,دراین صورت انرژی پایستار نبوده و $W_{NC} = \Delta E$, خواهد بود که بازهم معنی دار است.



درانیمیشن روبرو کودکی از یک تپه یخی پایین می اید و ازشیب تند مقابل بالا می رود انرژی کل او همواره ثابت است وتبدیل انرژی صورت می گیرد.

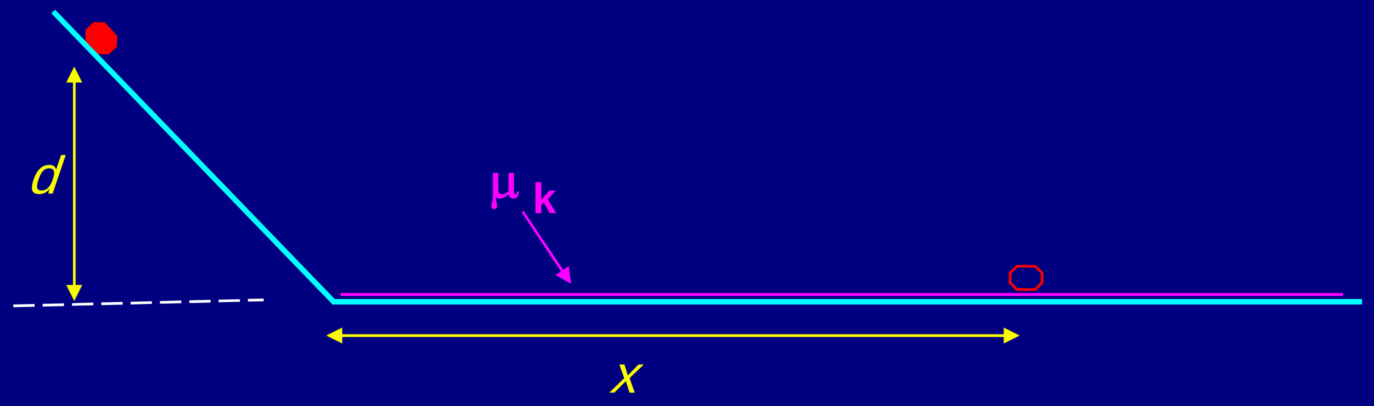


فاصله توقف اتومبیل دراثر ترمز گرفتن به سرعت اولیه او بستگی دارد!

مسئله : جسمی که روی سطح داری اصطکاک می لغزد

- جسمی از روی یک سطح شیبدار بدون اصطکا ک پایین می آید اگر قسمت افقی مسیر دارای ضریب اصطکاک μ_k **باشد** .

➔ این جسم تاقبل از توقف چه مسافتی x, را روی مسیر افقی طی می کند؟



حل مسئله:

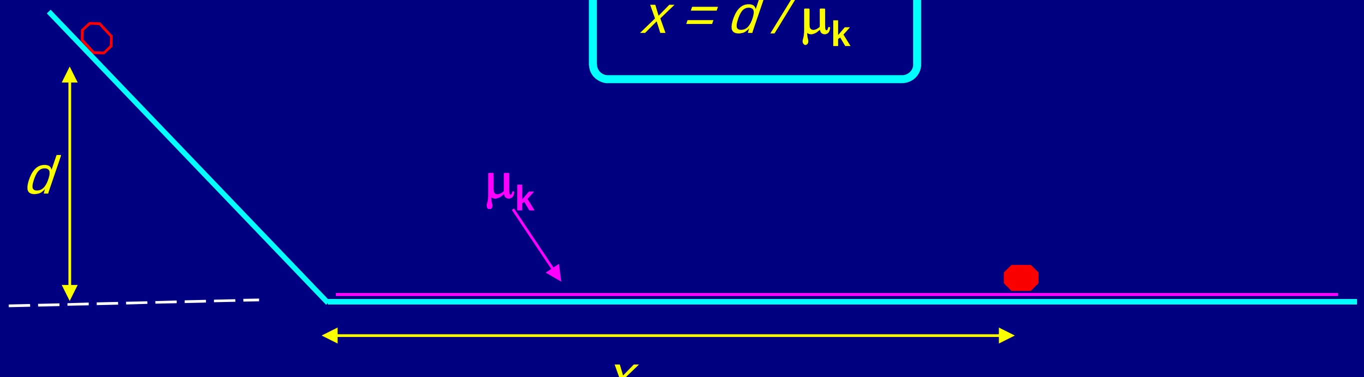
- با استفاده از : $W_{NC} = \Delta K + \Delta U$
- مثل سابق: $\Delta U = -mgd$

$W_{NC} =$ کار انجام شده به وسیله اصطکاک $= -\mu_k mgx$.

$\Delta K = 0$ چون جسم از سکون شروع به حرکت کرده و نهایتا متوقف می شود:

- $W_{NC} = \Delta U$ ⇦ $-\mu_k mgx = -mgd$

$$\boxed{x = d / \mu_k}$$



یادآوری نهایی درس :

- مرور انرژی پتانسیل و نیروهای پایستار
- پایستگی " انرژی مکانیکی کل "
  - مثال : آونگ
- نیروهای غیر پایستار
  - اصطکاک
- قضیه کار وانرژی
- یک مسئله

ادامه فصل هشتم

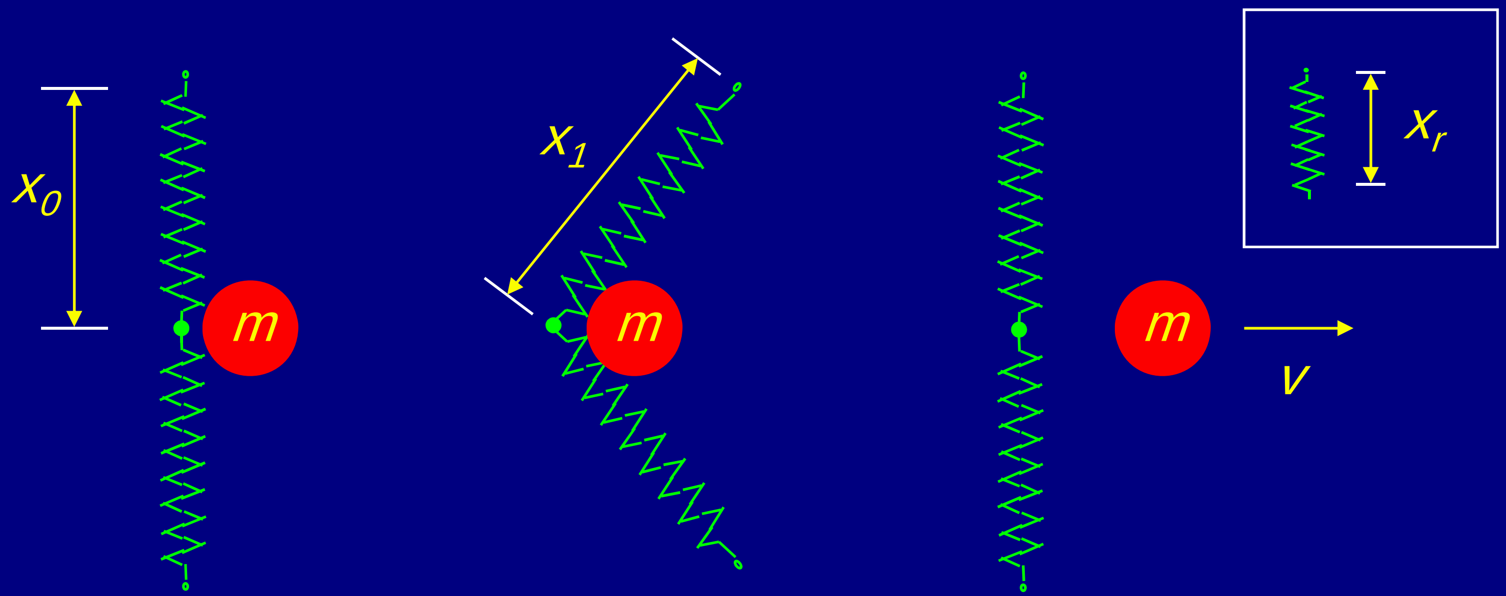
پاستگی انرژی

درس امروز ما:

- مسائلی درباره قضیه کارو انرژی جنبشی
  - پرتاب با فنر
  - سرعت فرار
  - مسئله حلقه
  - فنرهای قائم
- تعریف توان با مثال

مسئله : پرتاب با فنر

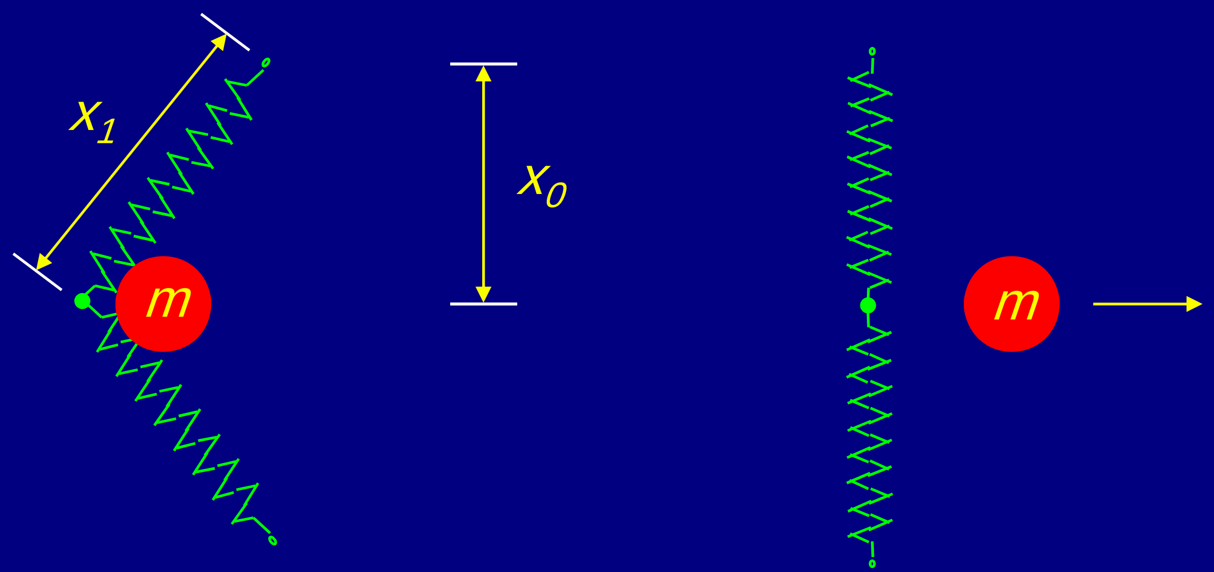
- یک جفت فنر با ثابت k مفروض است. طول اولیه هریک x_0 است. گلوله ای به جرم m در نقطه اتصال دو فنر که تا طول x_1 مطابق شکل زیر کشیده اند قرار می دهیم. گلوله را رها می کنیم. تندی v بعداز رها کردن آن چقدر است ؟ طول در حالت آرامش هر فنر x_r است.



مسئله : پرتاب با فنر

- فقط نیروها پایستار حضور دارند لذا انرژی مکانیکی K+U پایستار است
- $\Delta K = -\Delta U_s$ ⟸ $E_I = E_F$

$$\Delta U_s = 2 \cdot \frac{1}{2} k\left((x_0 - x_r)^2 - (x_1 - x_r)^2\right) = k\left((x_0 - x_r)^2 - (x_1 - x_r)^2\right)$$



مسئله : پرتاب با فنر

- فقط نیروها پایستار حضور دارند لذا انرژی مکانیکی K+U پایستار است
- $\Delta K = -\Delta U_s \Longrightarrow E_I = E_F$

$$\Delta K = \frac{1}{2} m v^2$$

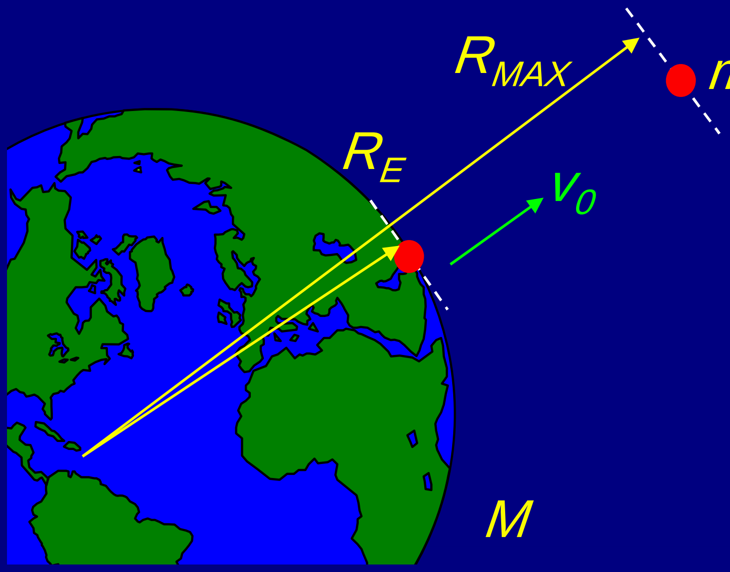
مسئله : پرتاب با فنر

- فقط نیروها پایستار حضور دارند لذا انرژی مکانیکی **K+U** پایستار است
- $\Delta K = -\Delta U_s$ ⟹ $E_I = E_F$

$$\frac{1}{2}mv^2 = -k\left((x_0 - x_r)^2 - (x_1 - x_r)^2\right)$$

مسئله : تاچه ارتفاعی ؟

- پرتابه ای به جرم m از سطح زمین با سرعت اولیه v_0 پرتاب می شود. بیشینه فاصله آن از سطح زمین R_{MAX} قبل از اینکه به پایین برگردد چقدراست؟



مسئله : تاچه ارتفاعی ؟

- ومی دانیم که:

$$\Delta K = -\frac{1}{2} m v_0^2$$

$$-\Delta U = -GMm\left(\frac{1}{R_E} - \frac{1}{R_{MAX}}\right)$$

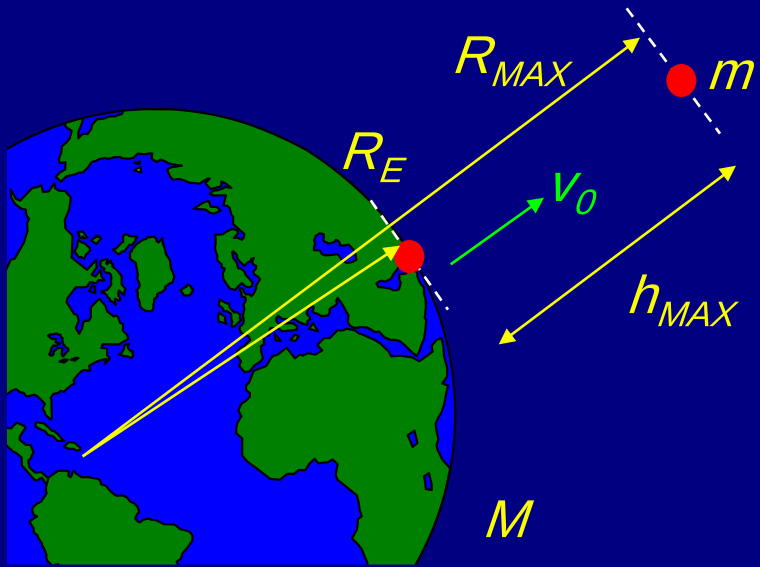
$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = GMm\left(\frac{1}{R_E} - \frac{1}{R_{MAX}}\right)$$

- کلیه نیروها پایستار هستند:

$\Rightarrow W_{NC} = 0$

$\Rightarrow \Delta K = -\Delta U$



مسئله : تاچه ارتفاعی ؟

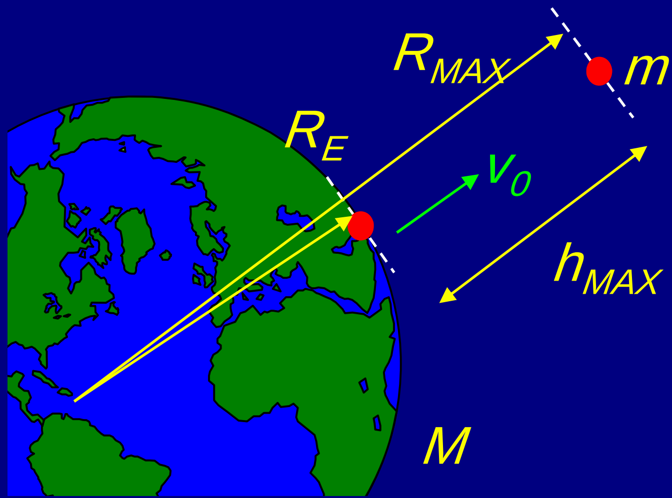
$$\frac{1}{2}mv_0^2 = GMm\left(\frac{1}{R_E} - \frac{1}{R_{MAX}}\right)$$

$$v_0^2 = 2GM\left(\frac{1}{R_E} - \frac{1}{R_{MAX}}\right)$$

$$= 2\left(\frac{GM}{R_E^2}\right)R_E\left(1 - \frac{R_E}{R_{MAX}}\right)$$

$$= 2gR_E\left(1 - \frac{R_E}{R_{MAX}}\right)$$

$$\frac{v_0^2}{2gR_E} = 1 - \frac{R_E}{R_{MAX}}$$



$$\boxed{R_{MAX} = \frac{R_E}{1 - \dfrac{v_0^2}{2gR_E}}}$$

سرعت فرار

$$R_{MAX} = \frac{R_E}{1 - \dfrac{v_0^2}{2gR_E}}$$

- اگر بخواهیم که جسم از جاذبه زمین فرار کند و به بینهایت برود مخرج کسر فوق را باید مساوی صفر قرار دهیم:

$$1 - \frac{v_0^2}{2gR_E} = 0 \Rightarrow \frac{v_0^2}{2gR_E} = 1 \Rightarrow \boxed{v_0 = \sqrt{2gR_E}}$$

مقدار این سرعت v_0 را *سرعت فرار* v_{esc}، *فرار می گویند.*

$$g = \frac{GM}{R_E^2}$$

سرعت فرار

- بادرنظر گرفتن رابطه سرعت فرار از سیاره ای به جرم M_p وشعاع R_p برابر است با: ($G = 6.67 \times 10^{-11}\ m^3\ kg^{-1}\ s^{-2}$)

$$v_{esc} = \sqrt{2\frac{GM_p}{R_p}}$$

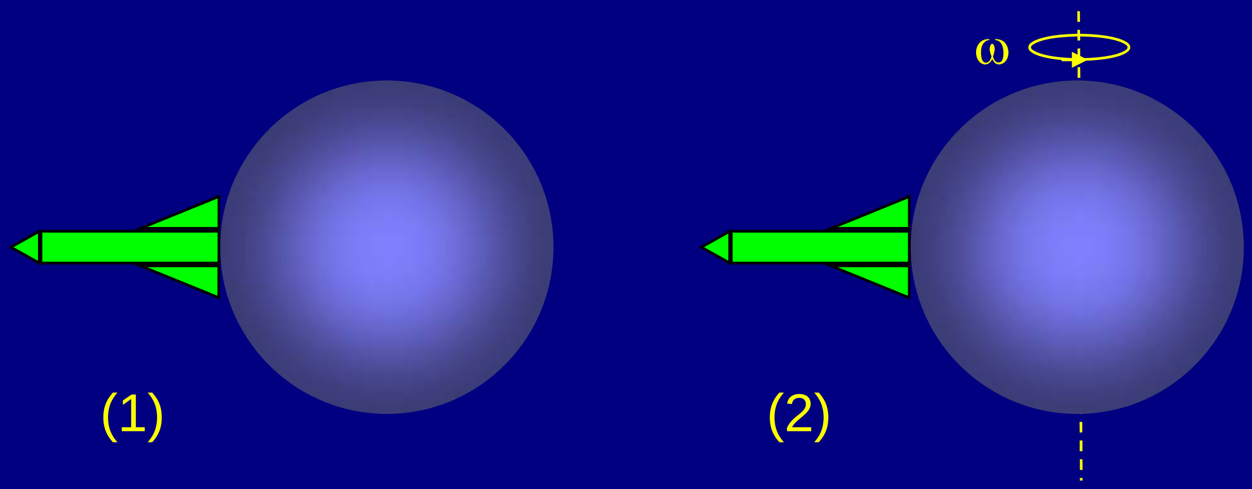
	$R_p(m)$	$M_p(kg)$	$g_p(m/s^2)$	$v_{esc}(m/s)$
زمین	6.378×10^6	5.976×10^{24}	9.81	11.2×10^3
ماه	1.737×10^6	7.349×10^{22}	1.62	2.38×10^3
مریخ	7.149×10^7	1.900×10^{27}	24.8	59.5×10^3
خورشید	6.950×10^8	1.989×10^{30}	275	$618.\times10^3$

سرعت فرار

- دو کشتی فضایی در انتظار فرود روی دو سیاره مشابه با جرم مساوی هستند .*سیاره ۱* درحال سکون است,درحالیکه *سیاره ۲* باسرعت زاویه ای ω درحال چرخش است .

کدام کشتی فضایی به انرژی بیشتری برای فرار به بینهایت نیاز دارد؟

الف - مساوی   ب-۲   ج- ۱

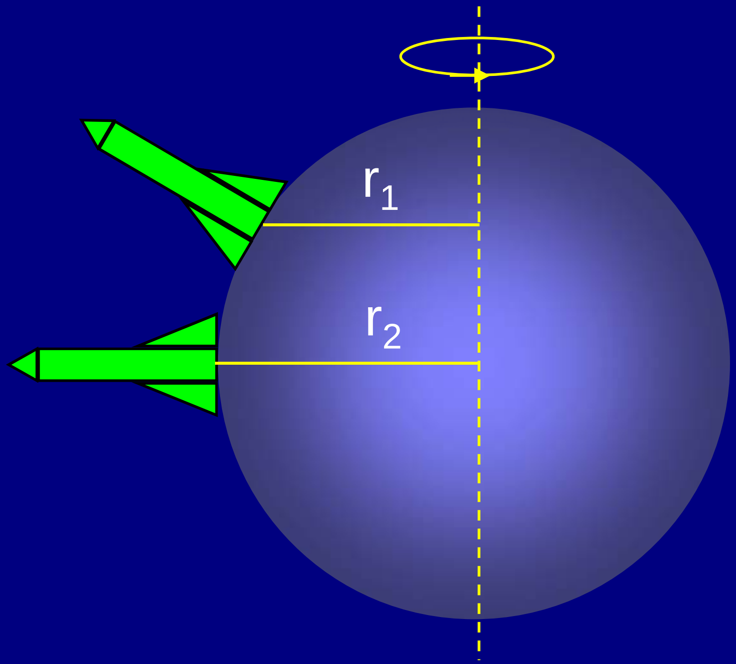


پاسخ:

- هردو کشتی فضایی برای فرار از جاذبه و رسیدن به بینهایت سرعت فرار یکسان دارند.
- بنابراین به انرژی جنبشی یکسان نیاز دارند .
- هردو دارای انرژی پتانسیل یکسان دارند.
- ***کشتی فضایی ۲ به علت حرکت چرخشی خود دارای مقداری انرژی جنبشی اولیه است لذا به کار کمتری نیازدارد(یعنی سوخت کمتری نیاز دارد).***

درضمن توجه کنید:

- به همین دلیل کلیه ایستگاههای فضایی در سرتاسر کره زمین تا حد امکان در نزدیکی استوار بر پا شده اند.



$$r_2 > r_1$$

$$\Downarrow$$

$$K_2 = \frac{1}{2}m(\omega r_2)^2 > K_1 = \frac{1}{2}m(\omega r_1)^2$$

راه حل ریاضی مسئله :

$$W_{NC} = \Delta K + \Delta U = \Delta E$$

برای کشتی فضایی ۱ : $W_1 = (K_f - K_0) + (U_f - U_0)$

$K_0 = 0 \, , U_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{W_1 = K_f + U_f}$

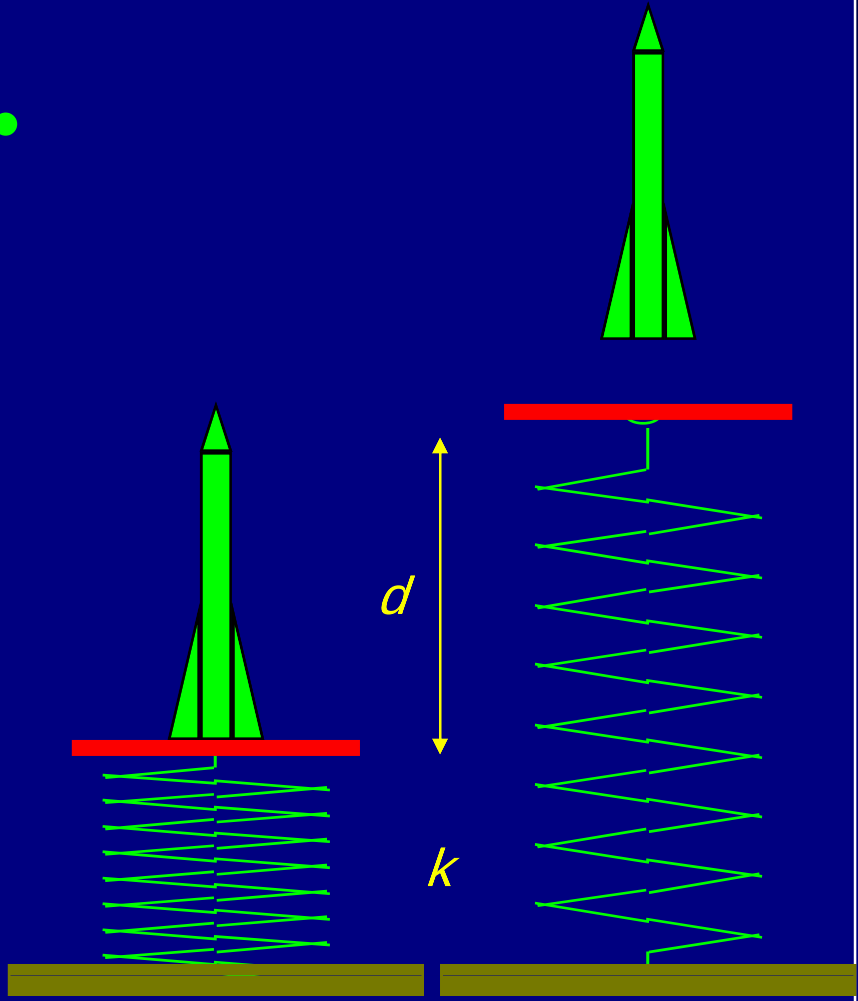
برای کشتی فضایی ۲ : $W_2 = (K_f - K_0) + (U_f - U_0) =$

$K_0 = \frac{1}{2} m(\omega r)^2, U_0 = 0 \Rightarrow \boxed{W_2 = K_f + U_f - \frac{1}{2} m(\omega r)^2}$

بنابراین کشتی فضایی ۱به سوخت بیشتیری نیاز دارد. $\boxed{W_1 > W_2}$

مسئله : فنر فضایی

- در یک برنامه فضایی تصمصیم می گیرند که یک کشتی فضایی به جرم ***10,000 kg*** با استفاده از یک فنر عظیم به فضا پرتاب کنند .اگر بخواهیم که این کشتی فضایی به ارتفاع R_E بالای سطح زمین برسد, این فنر به سختی 10^8 ***N/m*** باید به اندازه ***d فشرده شود*** .



ادامه مسئله ...

- چون نیروی جاذبه یک نیروی پایستار است واز طرفی   چون انرژی مکانیکی ابتدا و در بینهایت $K = 0$ در است ($v = 0$) لذا :
- $U_{before} = U_{after}$
- $(U_S + U_G)_{before} = (U_G)_{after}$

$$\left(\frac{1}{2}kd^2 - \frac{GMm}{R_E}\right) = \left(-\frac{GMm}{2R_E}\right)$$

$$\frac{1}{2}kd^2 = -\frac{GMm}{2R_E} + \frac{2GMm}{2R_E} = \frac{GMm}{2R_E} \Rightarrow \boxed{d = \sqrt{\frac{GMm}{kR_E}}}$$

ادامه مسئله فنر فضایی...

$$d = \sqrt{\frac{GMm}{kR_E}}$$

لذا :

- برای اعداد داده شده: $d = 79.1\ m$,

- ولی زیاد خوشحال نباشید...

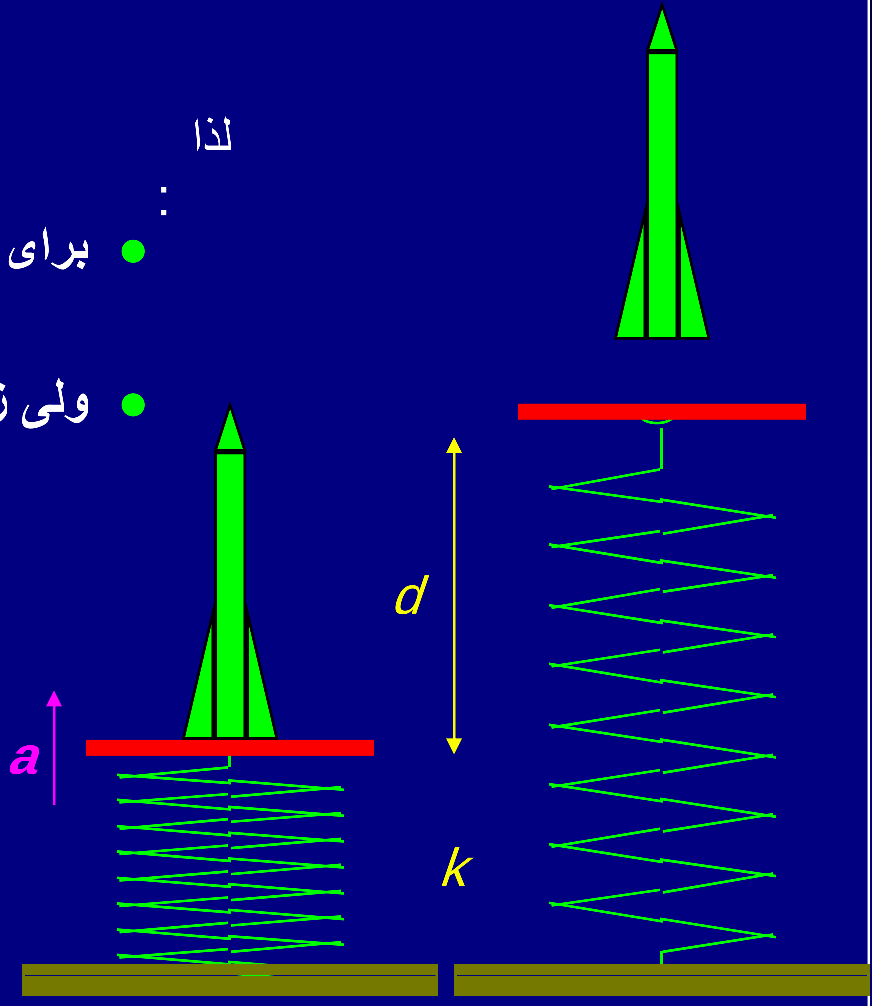
$F = kd = ma$

$a = kd/m$

$a = 79.1 \times 10^4\ m/s^2$

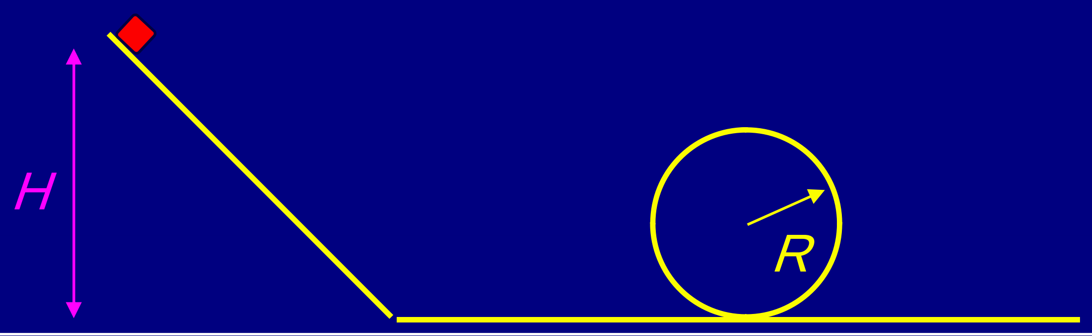
$a = 80,600\ g$

فضانورد غمگین !!!



مسئله حلقه ....

- جرم m از حالت سکون از ارتفاع H روی سطح شیبدار بدون اصطکاکی رها می شود .این جرم سپس وارد یک سطح تخت شده و یک حلقه به شعاع R را *می پیماید* .ارتفاع H چقدر باشد تا این جرم حلقه را کاملا بدون اینکه سطح آنرا ترک کند طی نماید؟.



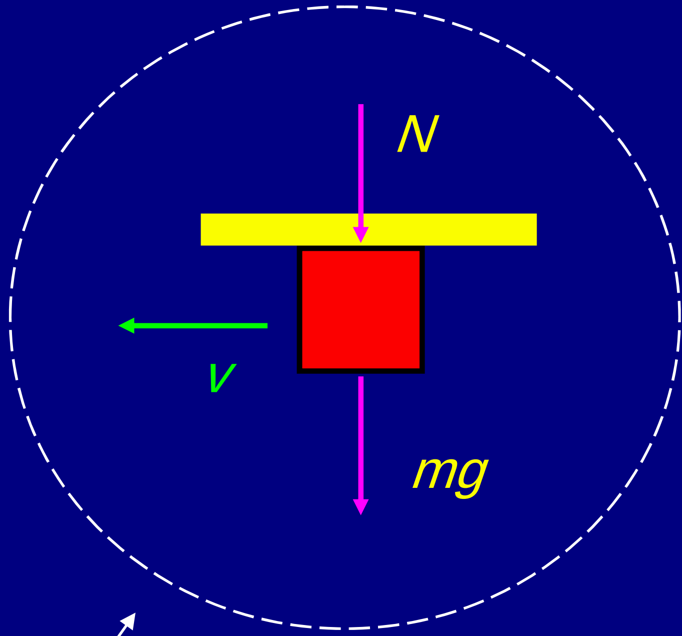
حلقه:

روی تصویر کلیک کنید!

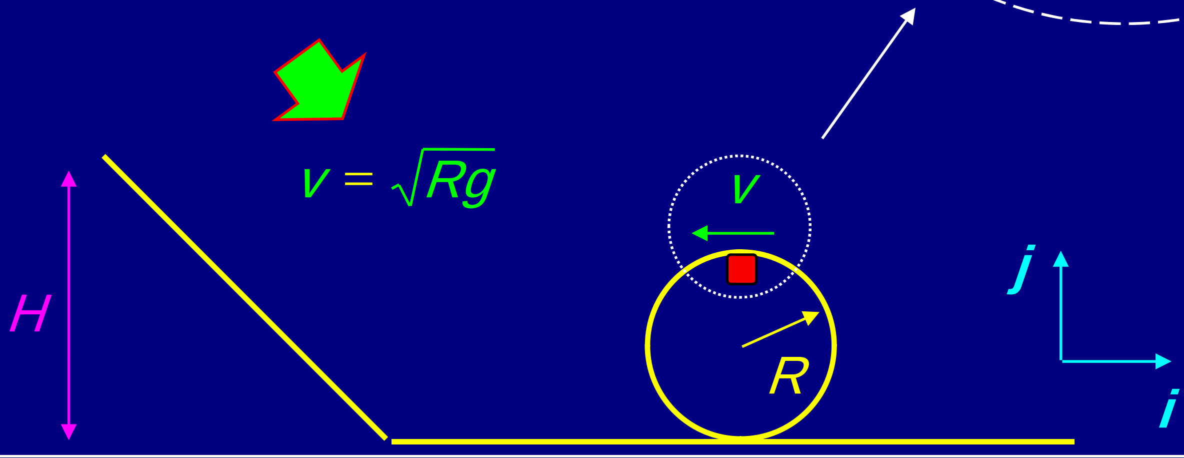
مسئله حلقه...

- نمودار جسم آزاد را برای بالای حلقه رسم کنید:
- $\mathbf{F}_{TOT} = -(mg+N)\,\mathbf{j}$
- $m\mathbf{a} = -mv^2/R\,\mathbf{j}$
- برای اینکه جسم حلقه را ترک نکند حداقل باید: $N = 0$,

$$mg = mv^2/R$$



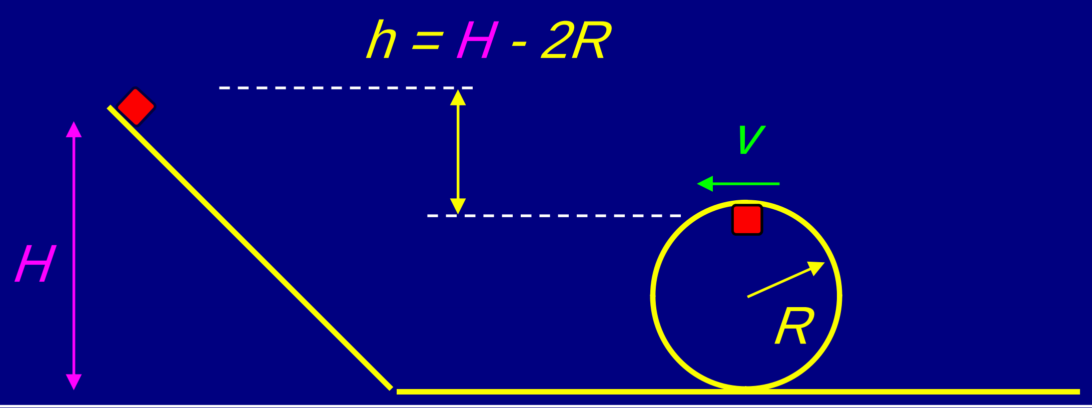
$$v = \sqrt{Rg}$$



مسئله حلقه...

- توجه کنید که انرژی K+U پایستار است : $\Delta K = -\Delta U$.
- $\Delta U = -mg(h) = -mg(H-2R)$
- $\Delta K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mRg$

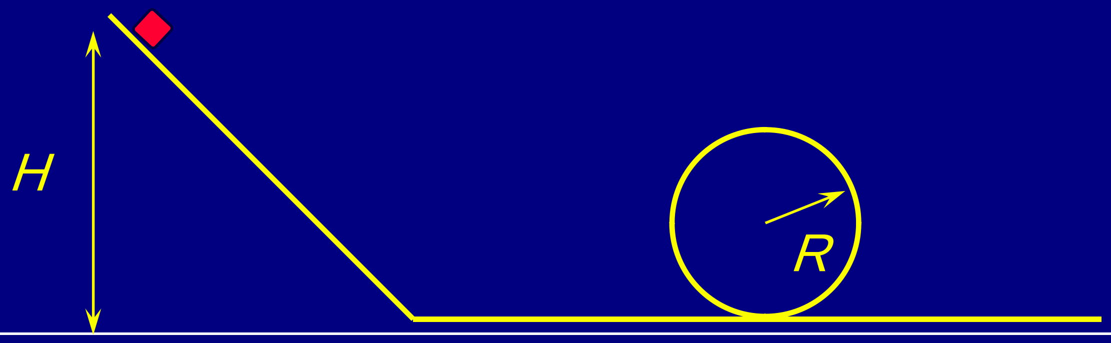
$$mg(H-2R) = \frac{1}{2}mRg \quad\Rightarrow\quad \boxed{H = \frac{5}{2}R}$$



پایستاری انرژی...

- جرم m از حالت سکون از ارتفاع H روی سطح شیبدار بدون اصطکاکی رها می شود .این جرم سپس وارد یک سطح تخت شده و یک حلقه به شعاع R را می پیماید ..ارتفاع H چقدر باشد تا نیروی قائم وارد بر این جسم در بالاترین نقطه حلقه برابر با وزن جسم باشد ؟

(a) $3R$ (b) $3.5R$ (c) $4R$

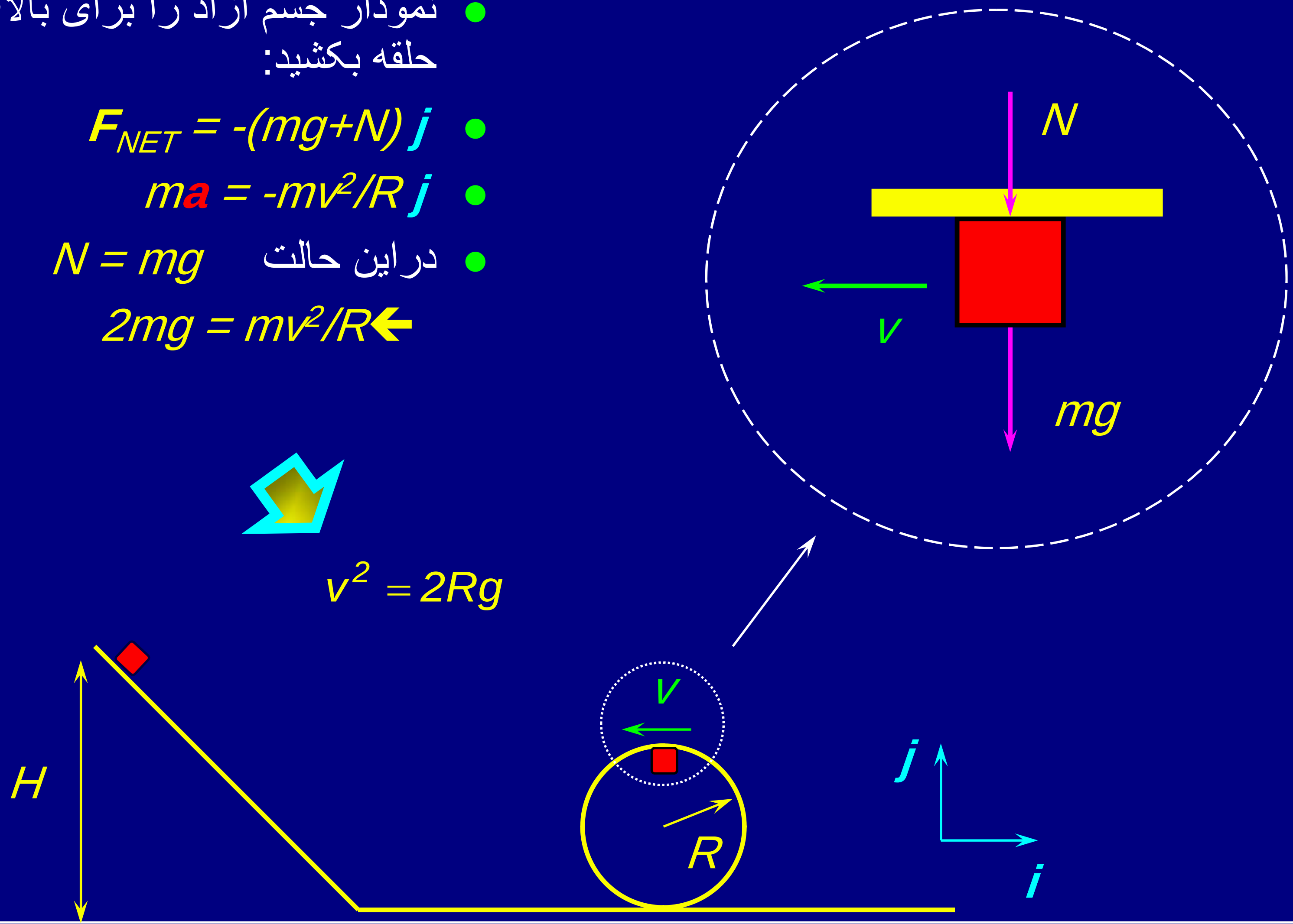


پاسخ مسئله ...

- نمودار جسم آزاد را برای بالای حلقه بکشید:
- $F_{NET} = -(mg+N)\,j$
- $ma = -mv^2/R\,j$
- دراین حالت $N = mg$ و

$$2mg = mv^2/R$$

$$v^2 = 2Rg$$



$$v^2 = 2Rg$$

ادامه...

- از این حقیقت که ا نرژی مکانیکی K+U پایستار است استفاده کنید

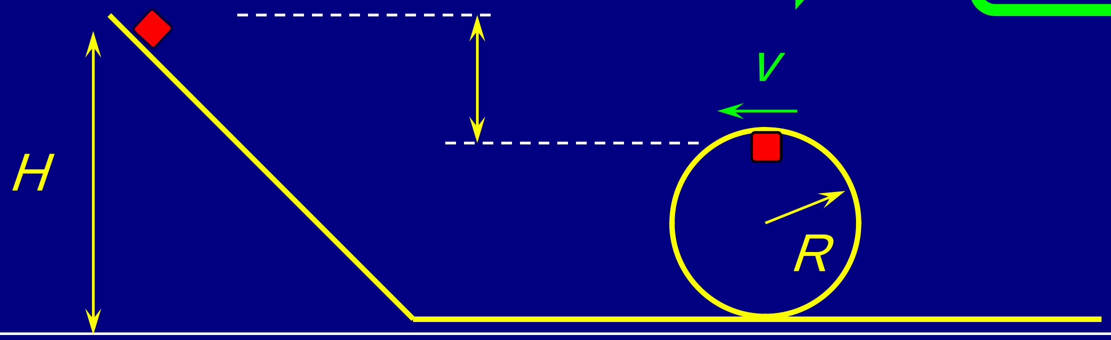
$$\Delta K = -\Delta U.$$

- $\Delta U = -mg(h) = -mg(H - 2R), \;\; \Delta K = \tfrac{1}{2} m v^2 = mRg$

- $mg(H - 2R) = mRg$

$$h = H - 2R$$

$$\boxed{H = 3R}$$



فنرهای قا ئم...

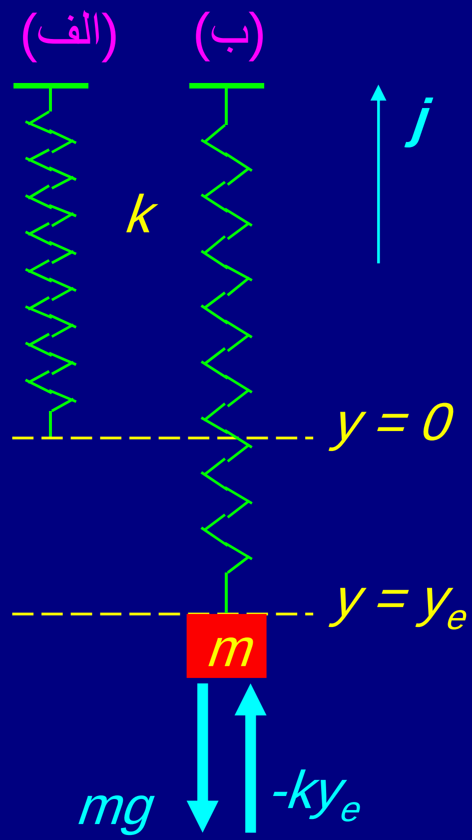
- فنری را به طور قائم آویزان می کنیم $y = 0$ وضعیت آرامش فنر است (الف) وقتی جرم m را به آن آویزان می کنیم و ضعیت جدید آن y_e (ب) می شود.

- توجه کنید که نیروی فنر برابر با $F_s = -kx$ است. دراین مورد (ب)
  $F_s = mg$ و: $x = y_e$

$$-ky_e - mg = 0 \quad (y_e < 0)$$

$$\boxed{mg = -ky_e}$$

(چون y_e یک عدد منفی است)



فنرهای قا ئم...

- انرژی پتانسیل فنر + جرم آویزان برابر است با::

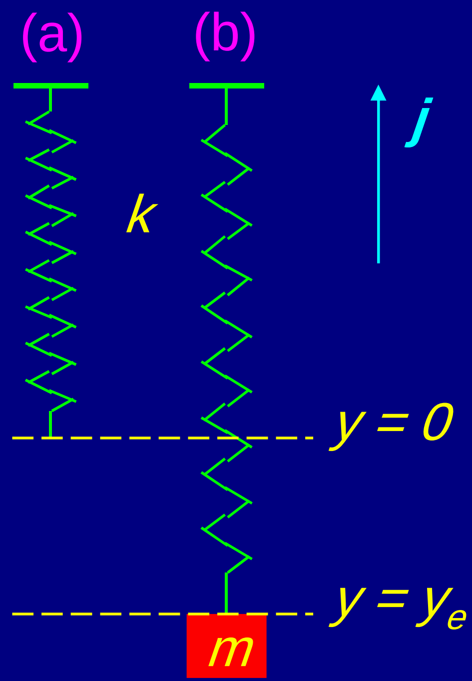
$$U = \frac{1}{2}ky^2 + mgy + C$$

ولی $mg = -ky_e$

$$U = \frac{1}{2}ky^2 - ky_e y + C$$

C را طوری انتخاب کنید که در $y = y_e$ برابر با $U=0$ باشد.

$$0 = \frac{1}{2}ky_e^2 - ky_e^2 + C \qquad C = \frac{1}{2}ky_e^2$$



فنرهای قا ئم...

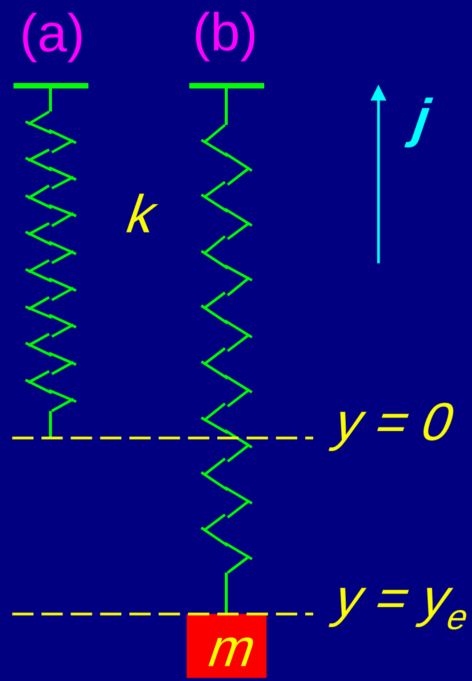
- لذا:

$$U = \frac{1}{2}ky^2 - ky_e y + \frac{1}{2}ky_e^2$$

$$= \frac{1}{2}k\left(y^2 + y_e^2 - 2y_e y\right)$$

می توان چنین نوشت :

$$U = \frac{1}{2}k(y - y_e)^2$$

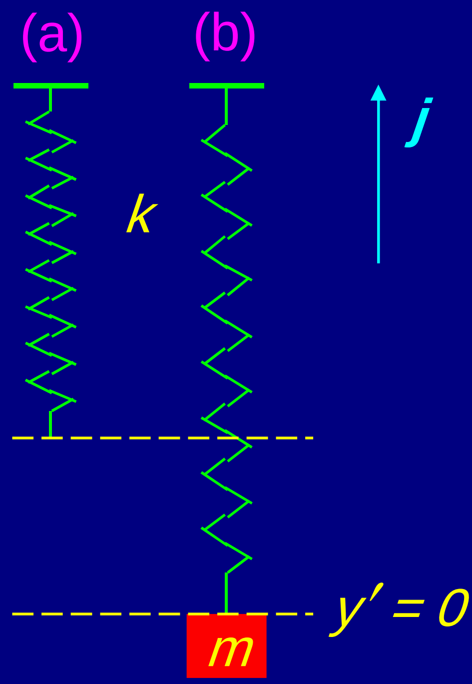


فنرهای قا ئم...

$$U = \frac{1}{2}k\left(y - y_e\right)^2$$

- لذا اگرمختصات جدید y' را طوری انتخاب کنیم که $y' = 0$ باشد یعنی $(y' = y - y_e)$ دراین, صورت نتیجه ساده زیر بدست می آید:

$$U = \frac{1}{2}ky'^2$$



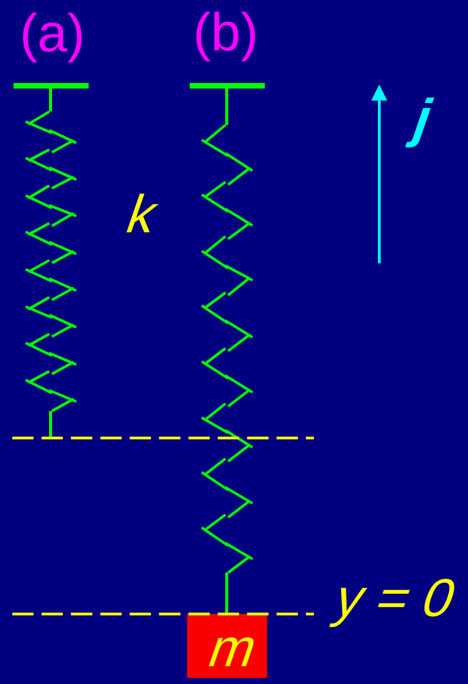
فنرهای قا ئم...

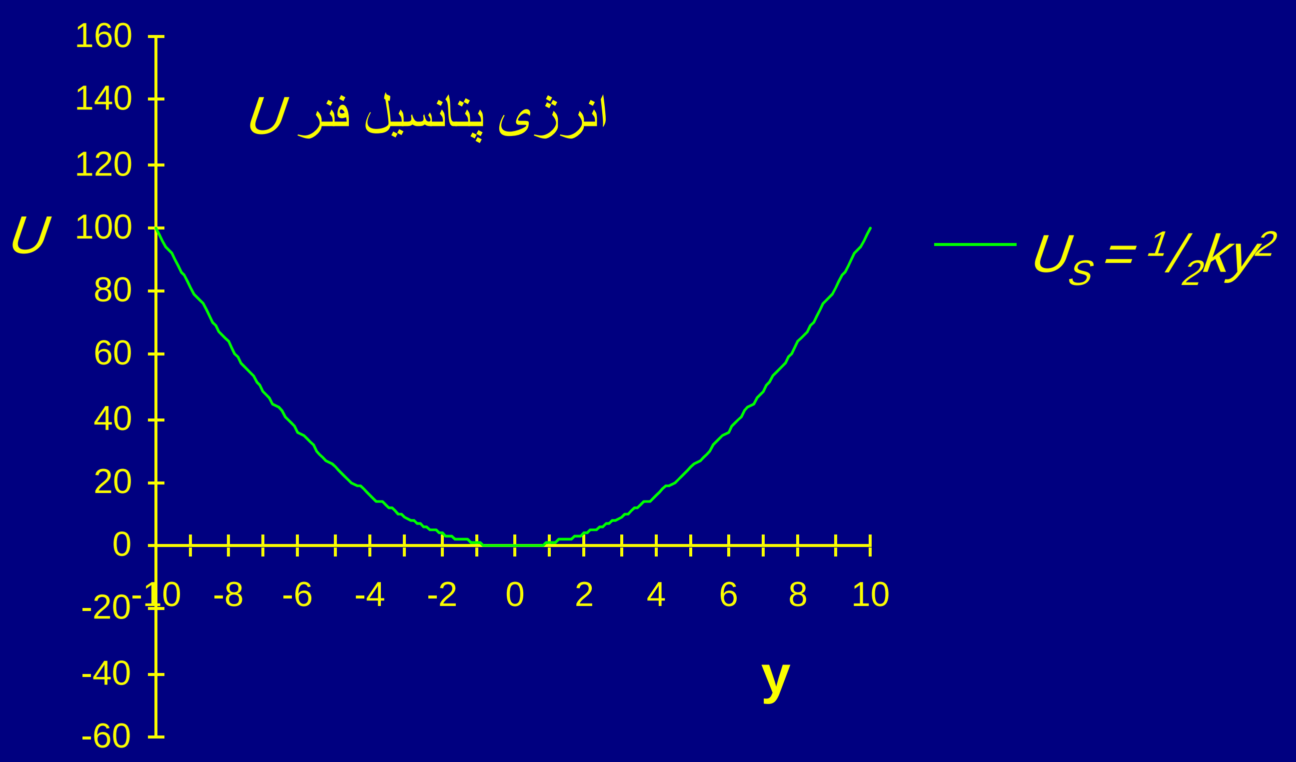
- اگر $y = 0$ وضعیت تعادل جسم آویزان باشد دراینصورت انرژی پتانسیل را می توانیم به گونه ساده زیر تعریف کنیم:.

$$\boxed{U = \frac{1}{2}ky^2}$$

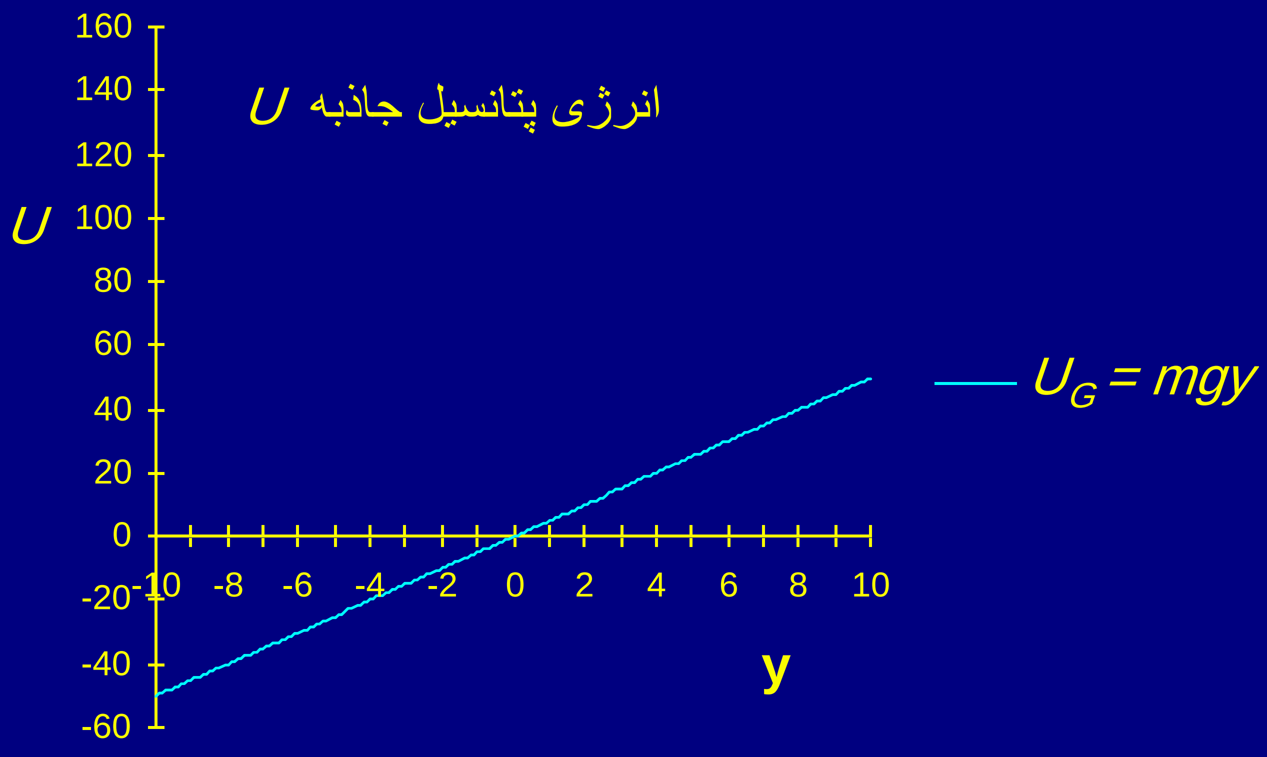
- توجه کنیدکه g دراین عبارت ظاهر نمی شود!!

با انتخاب دستگاه مختصات و ثابتهای مناسب می توان آثار جاذبه را پنهان کرد.

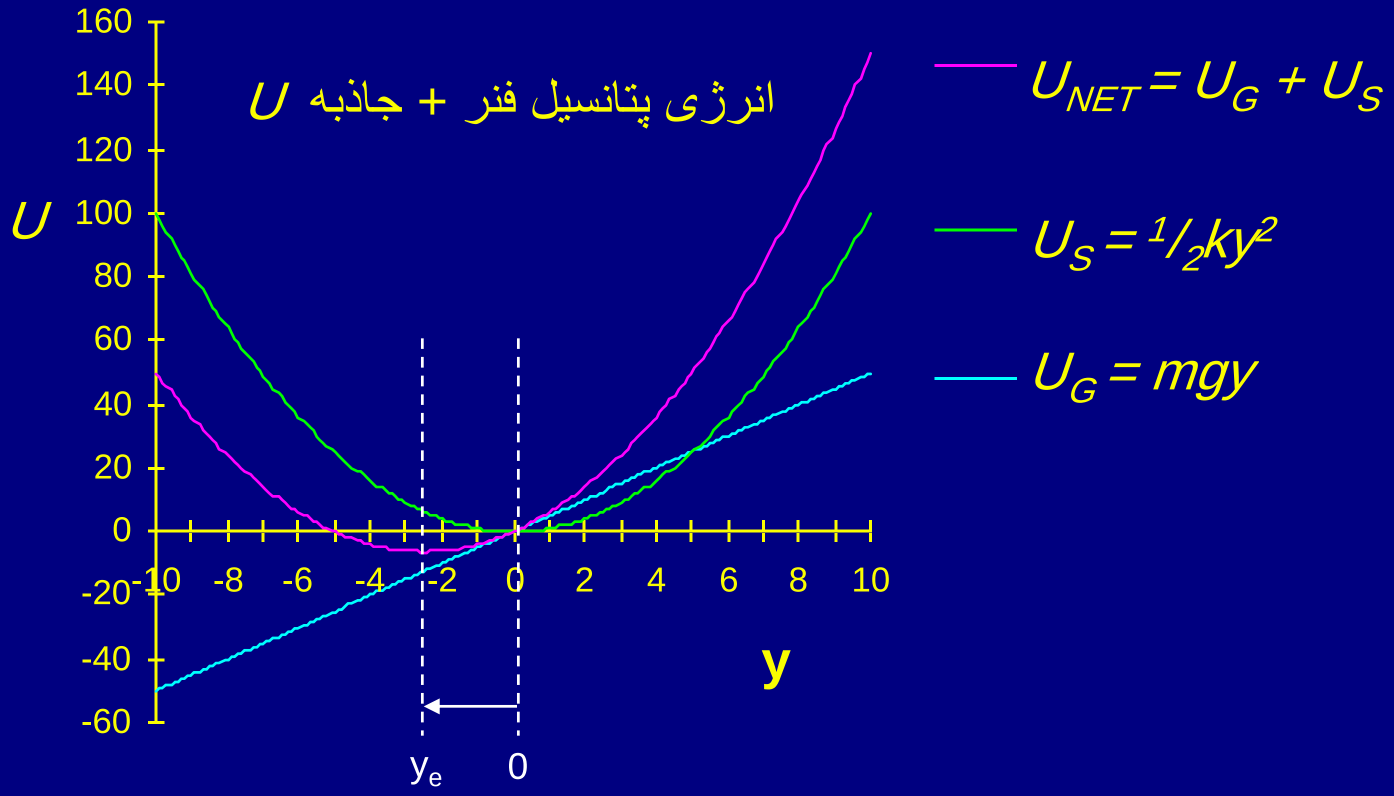




انرژی پتانسیل فنر U
U
160
140
120
100
80
60
40
20
0
-20
-40
-60
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10
y
$U_S = {}^1/_2 k y^2$

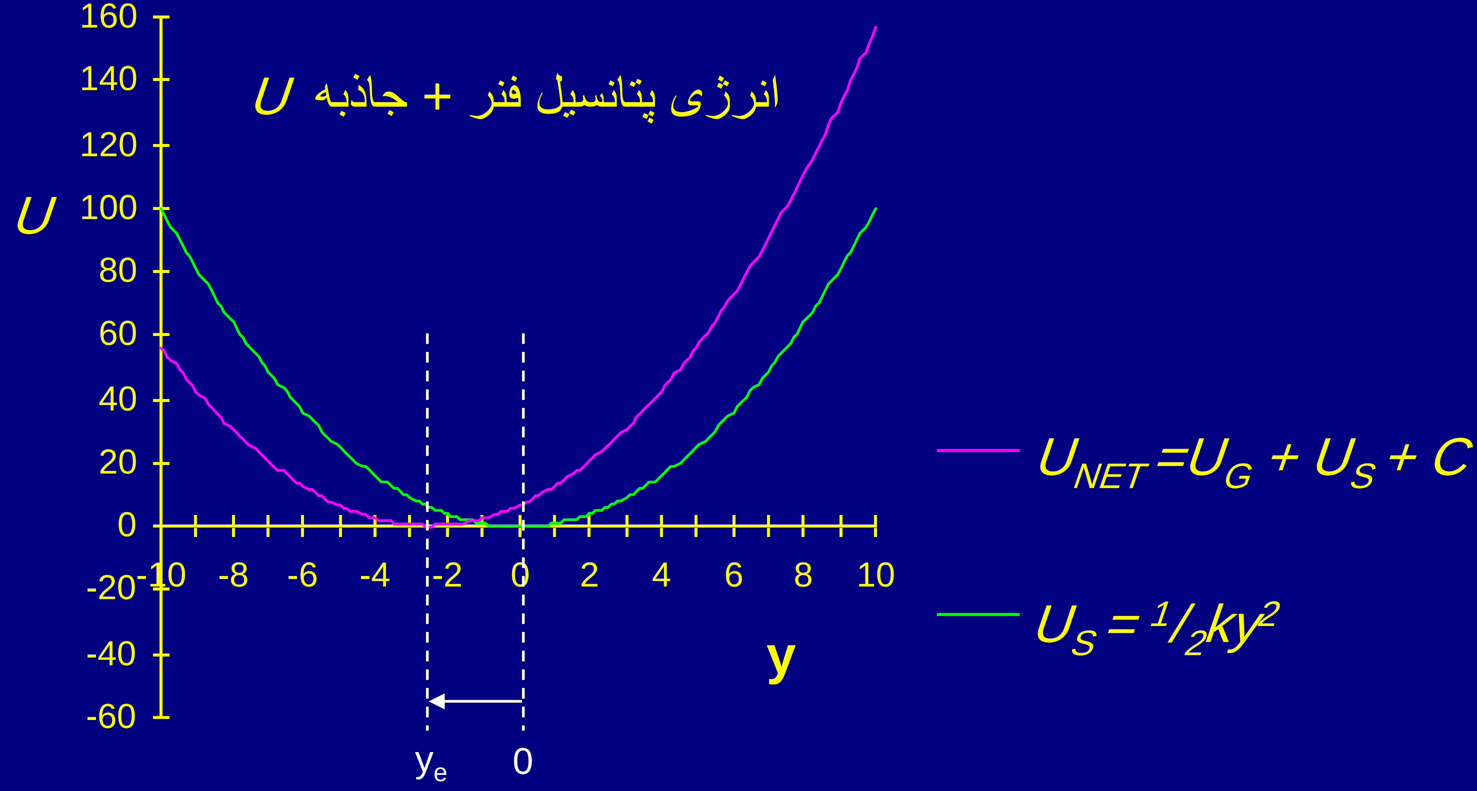


انرژی پتانسیل جاذبه U
U
160
140
120
100
80
60
40
20
0
-20
-40
-60
-10 -8 -6 -4 -2 0 2 4 6 8 10
y
$U_G = mgy$



انتقال به دلیل جمله *mgy*

C را طوری انتخاب کنید که
وضعیت تعادل جدید دارای
انرژی پتانسیل صفر باشد:



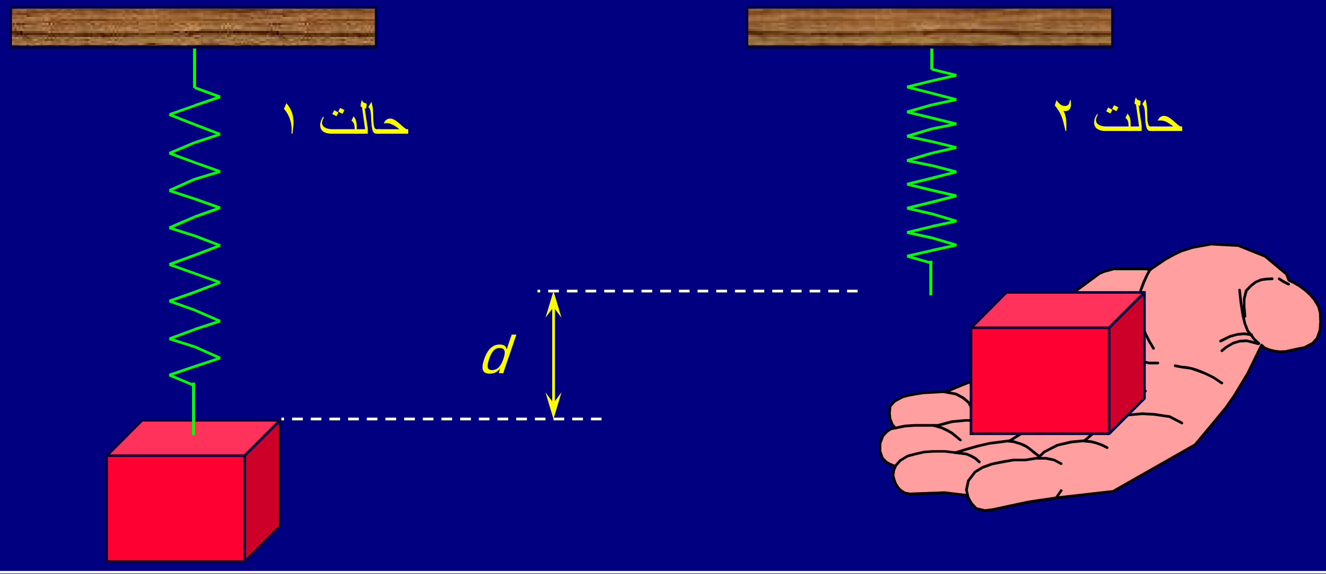
انتقال به دلیل جمله *mgy*

پایستار بودن انرژی ...

- در حالت (1)یک جرم از فنری آویزان شده است. در حاتلت (2) جرم مشابهی در ارتفاع ارامش فنر با دست نگهداشته شده است .

➔كدام گزینه رابطه انرژی پتانسیل دو حالت فوق را به درستی بیان می کند:؟

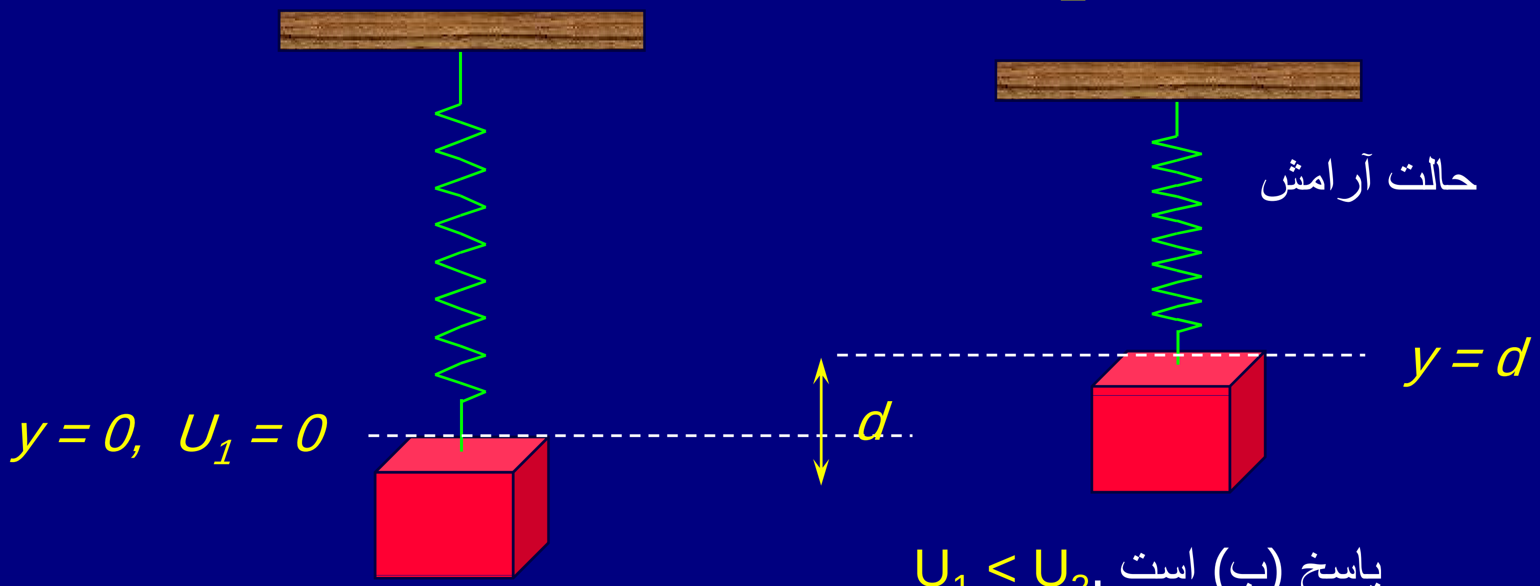
(الف) $U_1 > U_2$ (ب) $U_1 < U_2$ (ج) $U_1 = U_2$



پاسخ:

- درحالت ۱ می توان فرض کرد که انرژی پتانسیل کل جرم(مجموع انرژیهای پتانسیل فنر و جاذبه جسم)برابر با صفر بوده و سیستم در وضعیت تعادل خود قرار دارد.
- در حالت ۲ انرژی پتانسیل کل برابر است با.

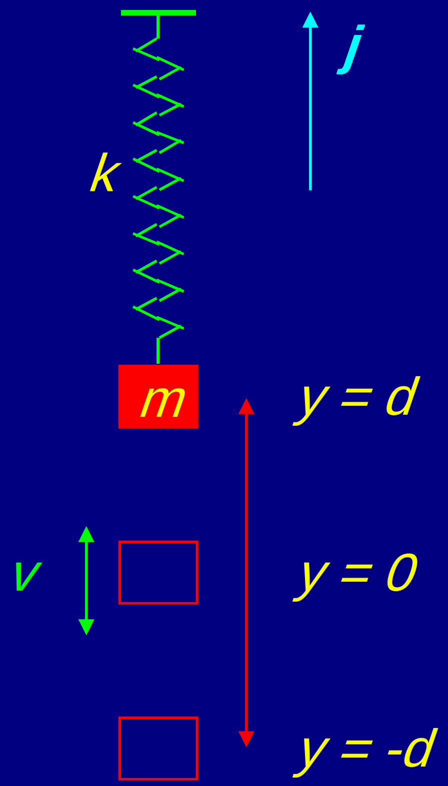
$$U_2 = \frac{1}{2}kd^2$$



پاسخ (ب) است. $U_1 < U_2$.

فنرهای قائم:

- اگر جرم آویزان را به اندازه d ازوضع تعادل دور و سپس آنرا رها کنیم این جرم به بالا و پایینن شروع به نوسان می کند , بیشینه تندی این جرم v وجابه جایی d وثابت فنر k چگونه *است ؟* .
- چون کلیه نیروها پایستار هستند لذا انرژی مکانیکی $E = K + U$ ثابت است .



می دانیم:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \qquad U = \frac{1}{2}ky^2$$

فنرهای قائم:

- در وضعیت ابتدایی
و $K = 0$ زیرا ($v=0$) است

$$U = \frac{1}{2}kd^2$$

- چون $E=K+U$ پایستار است ,
همواره درست است !

$$E = \frac{1}{2}kd^2$$

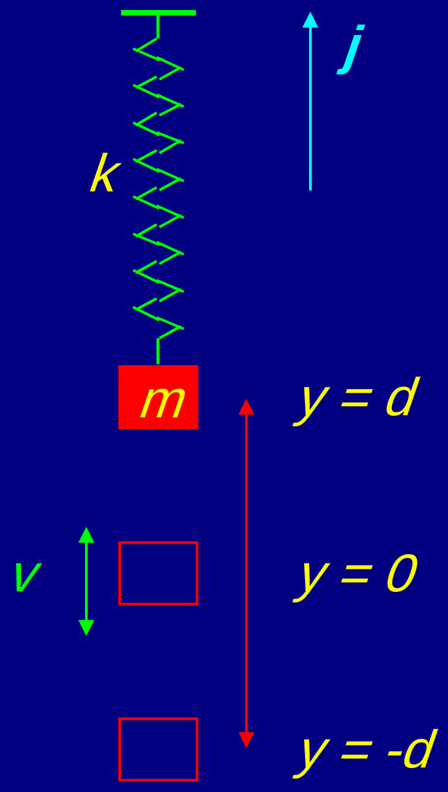
$$E = \frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}ky^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

- انرژی شامل دوجمله K و U است .

⬅ در $y = d$ یا $-d$ انرژی پتانسیل است

⬅ در $y = 0$, انرژی جنبشی است .

$$\frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = d\sqrt{\frac{k}{m}}$$



توان:

- دیدیم که $W = \mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{r}$

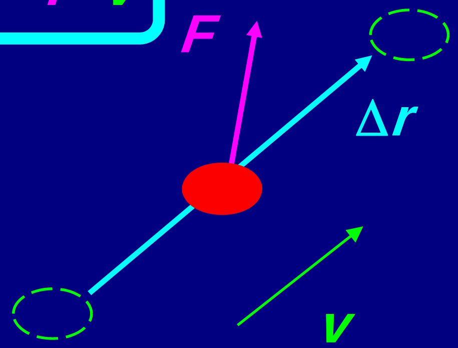
واین عبارت در برگیرنده زمان نیست!

- توان“ آهنگ انجام کار ” است:

$$\boxed{P = \frac{dW}{dt}}$$

- اگر نیرو به زمان بستگی نداشته باشد:

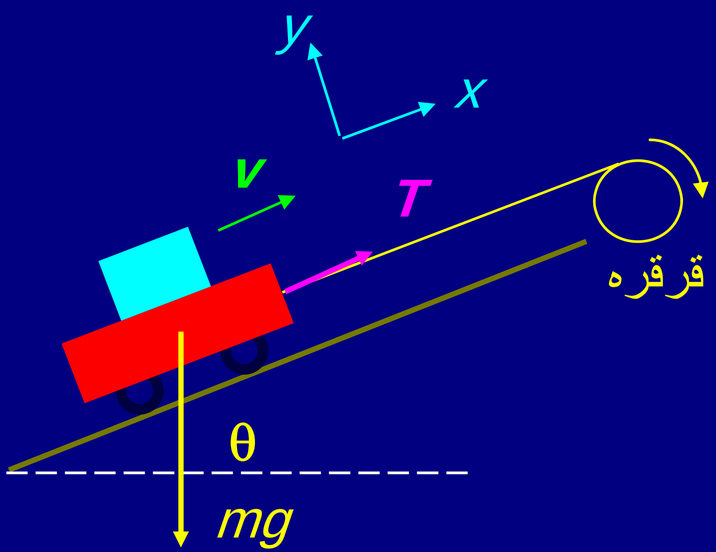
$$dW/dt = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}/dt = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} \qquad \boxed{P = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}}$$



- یکاهای توان : $J/sec = N\text{-}m/sec = Watts$

توان:

- یک جرم *2000 kg* را به کمک یک ارابه و قرقره از سطحی به شیب *30*درجه با سرعت *20 mi/hr* بالا می بریم چه توانی بکار می رود؟

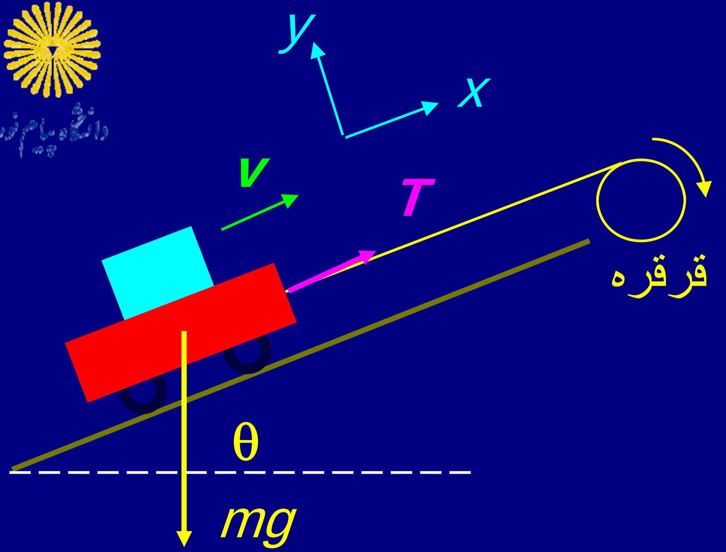


- توان برابر است با: $P = F \cdot v = T \cdot v$

- چون بالا بردن بدون شتاب انجام می گیرد لذا در جهت x :

$$T - mg \sin\theta = 0$$

$$T = mg \sin\theta$$



توان:

- $P = \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} = Tv$
  چون $\mathbf{T}$ موازی با $\mathbf{v}$ است

- چون $P = mgv \sin \theta$ لذا:

$$v = 20\ mi/hr = 8.94\ m/s$$
$$g = 9.81\ m/s^2$$
$$m = 2000\ kg$$
$$\sin\theta = \sin(30^o) = 0.5$$

و $P = (2000\ kg)(9.81\ m/s^2)(8.94\ m/s)(0.5) = 87{,}700\ \mathrm{W}$

یاد آوری درس امروز:

- مسائلی درباره قضیه کارو انرژی جنبشی
  - پرتاب با فنر
  - سرعت فرار
  - مسئله حلقه
  - فنرهای قائم
- تعریف توان با مثال
- کتاب درسی و مسائل آنرا به دقت بخوانید!!

فصل دهم

مرکز جرم وتکانه خطی

درس ا مروز ما:

- انرژی پتانسیل و نیرو
- سیستم ذرات
- مرکز جرم
- سرعت و شتاب مرکز جرم
- دینامیک مرکز جرم
  - تکانه خطی
- چند مثال

انرژی پتانسیل و نیرو

- برای نیروی پایستار انرژی پتانسیل را اینگونه تعریف می کنیم::

$$\Delta U = -W = -\int_{x_1}^{x_2} F\,dx$$

- بنابراین :

$$U = -\int F\,dx + C \qquad F = -\frac{dU}{dx}$$

- چند تابع انرژی پتانسیل را در نظر گرفته و نیرو را حساب کنید:

فنر :

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -kx \qquad U_x = \frac{1}{2}kx^2 + C$$

جاذبه مجاور زمین:

$$F_y = -\frac{dU}{dy} = -mg \qquad U_y = mgy + C$$

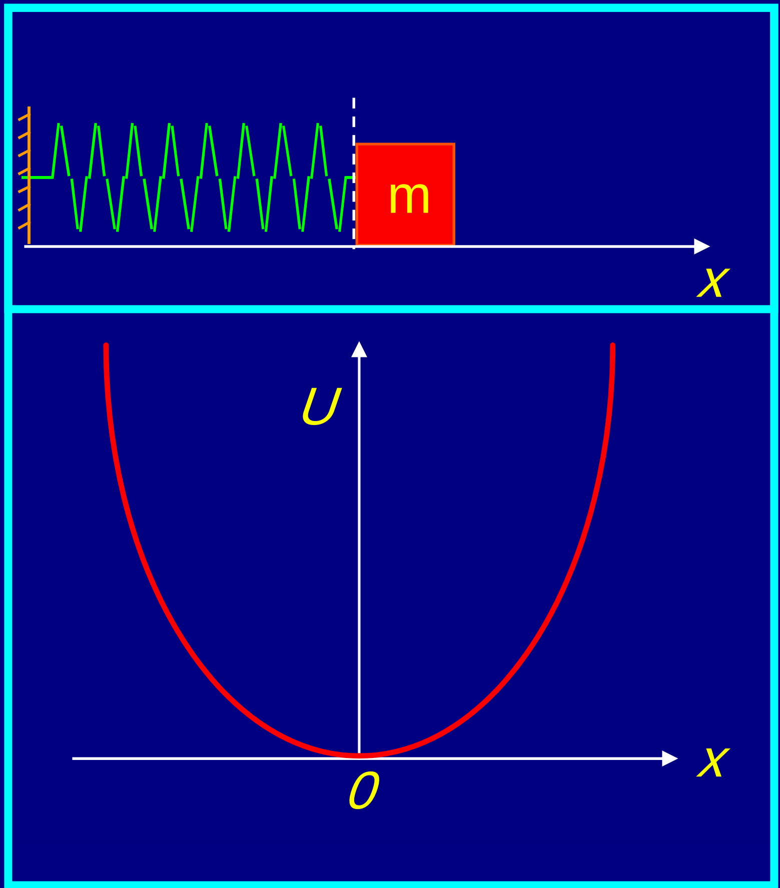
جاذبه نیوتن :

$$F_R = -\frac{dU}{dR} = -\frac{GMm}{R^2} \qquad U_R = -\frac{GMm}{R} + C$$

بسیار خوب!!

نمودارهای انرژی پتانسیل

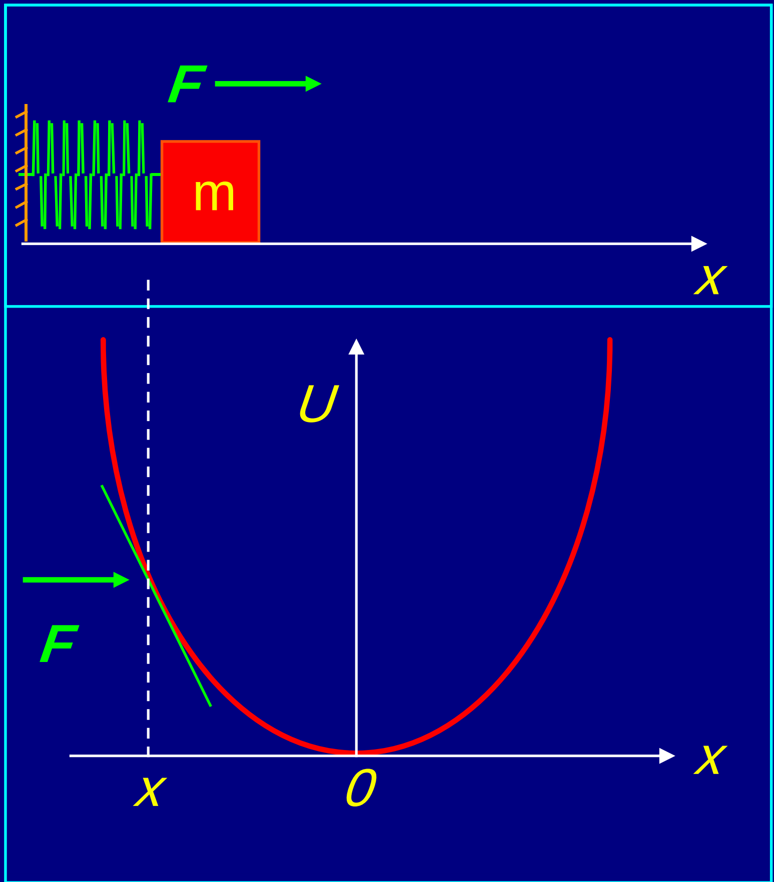
- جسمی را در نظر بگیردید که روی یک سطح بدون اصطکاک می لغزد و به یک فنر آرمانی وصل شده است:.



$$U_s = \frac{1}{2}kx^2$$

نمودارهای ا نرژی پتانسیل

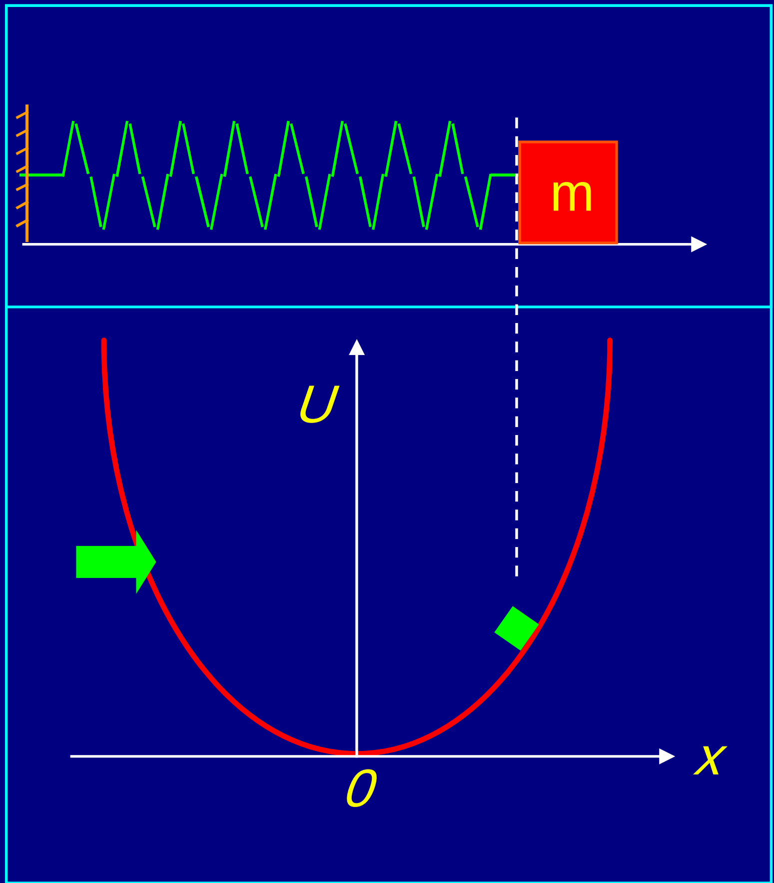
- جسمی را در نظر بگیردید که روی یک سطح بدون اصطکاک می لغزد و به یک فنر آرمانی وصل شده است:.



- $F = -dU/dx =$ -شیب

$$U_s = \frac{1}{2}kx^2$$

نمودارهای ا نرژی پتانسیل



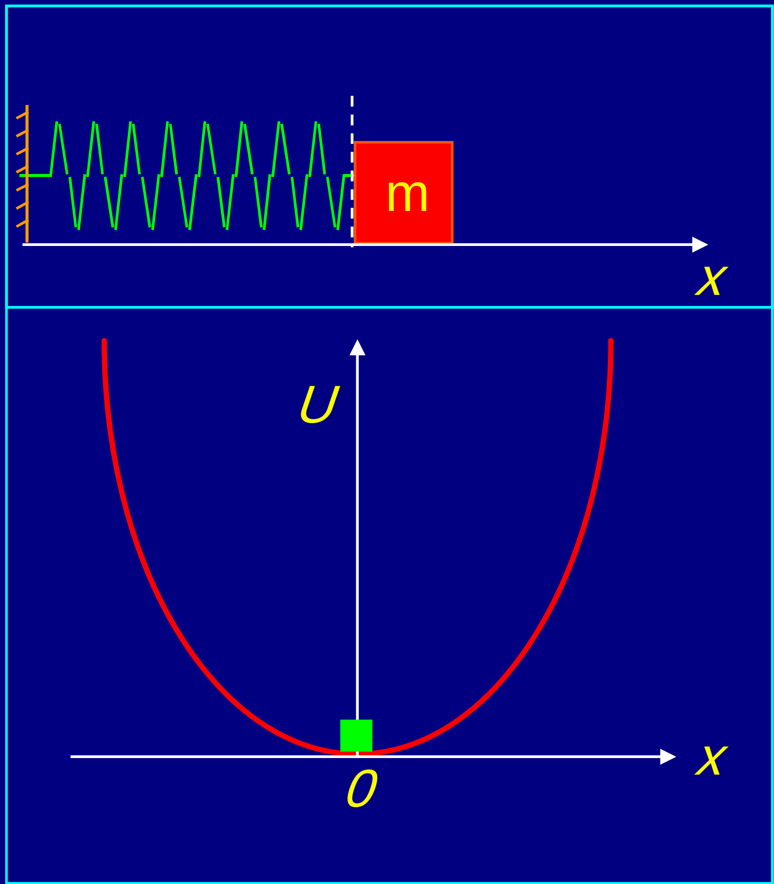
- انرژی پتانسیل جسم مشابه انرژی پتانسیل جسمی است که درون یک“ کاسه ” می لغزد:

$$U_g = mgy = {}^1/_2\, kx^2 = U_s$$

$$y = \frac{k}{2gm} x^2$$

برابراست با ا رتفاع جسم در وضعیت x

تعادل

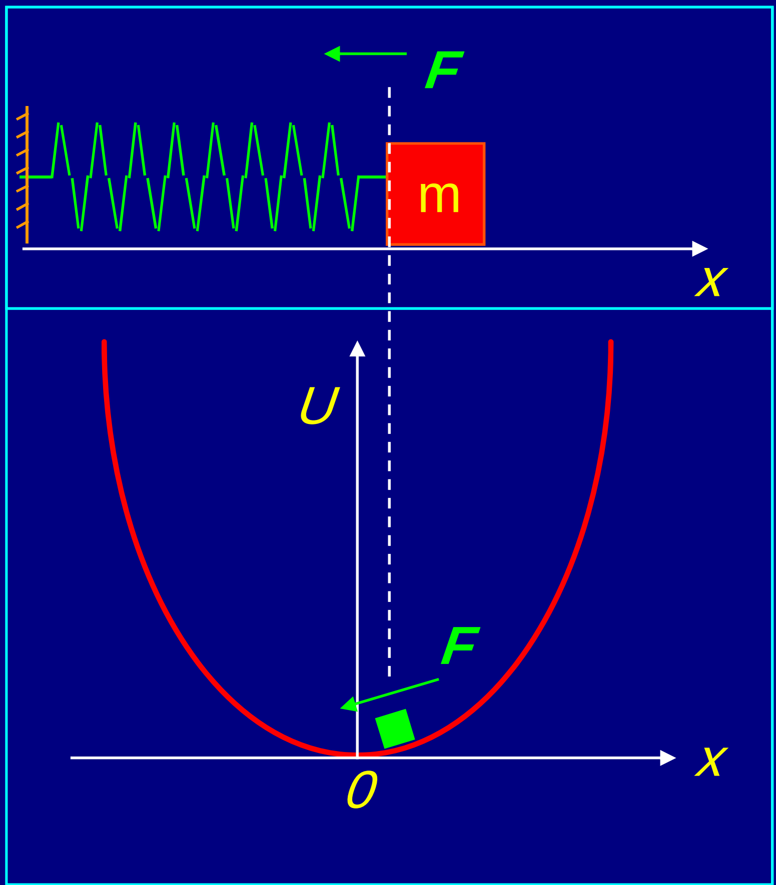


$F = -dU/dx =$ -شیب

- لذا $F = 0$ اگر شیب= 0 باشد .
- واین متناظر با حالت بیشینه یا کمینه انرژی پتانسیل $U(x)$ است .
- و این حالت تعادل جسم است .

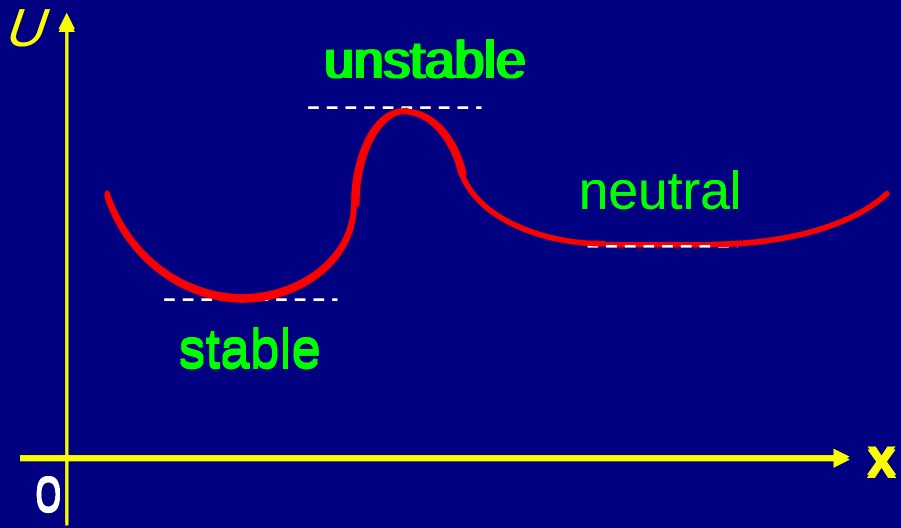
← اگر جسم را در وضعیت $x = 0$, قرار دهیم جسم حرکت نخواهد کرد..

تعادل



- اگر جابه جایی از وضعیت تعادل سبب ایجاد نیرویی شود که بخواهد جسم ر ا به وضعیت تعادل برگرداند این نوع تعادل را ***پایدار*** میگویند..
- واین متناظر با حالت کمینه انرژی پتانسیل ***U*** و وضعبت تعادل جسم است .
- به زبان ریاضی درحالت ***پایدار*** انحنا مثبت (مشتق دوم منحنی) مثبت است ..

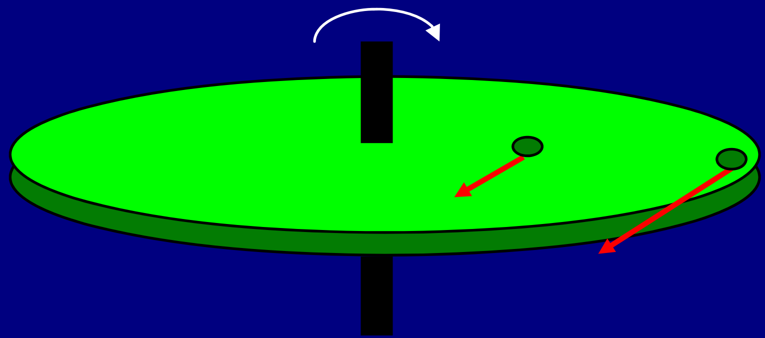
تعادل



- فرض کنید که تابع *U(x)* چنین باشد:
- این دو وضعیت تعادل دارد یکی پایدار (+انحنای) ویکی ناپایدار (انحنای -) است .
- جسم کوچکی را در نظر بگیردید که روی سطح *U(x)* می لغزد:
  - اگر بعد از تکان کوچکی به آن بخواهد به لغزش خود ادامه بدهد دراینصورت تعادل آن ناپایدار است.
  - اگر بعداز یک ضربه آرام بخواهد به وضعیت تعادل بگردد می گوییم که تعادش پایدار است.
  - اگر انحنا صفر باشد (سطح تخت) در اینصورت تعادل خنثی خواهد بود.)

سیستم چند ذره ای :

- تاکنون رفتارسیستم های بسیار ساده (متشکل از یک یا دو ذره) را بررسی کردیم.
- ولی سیستم های حقیقی بسیار جالب تر هستند!
- مثلا یک دیسک چرخنده را در نظر بگیرید.



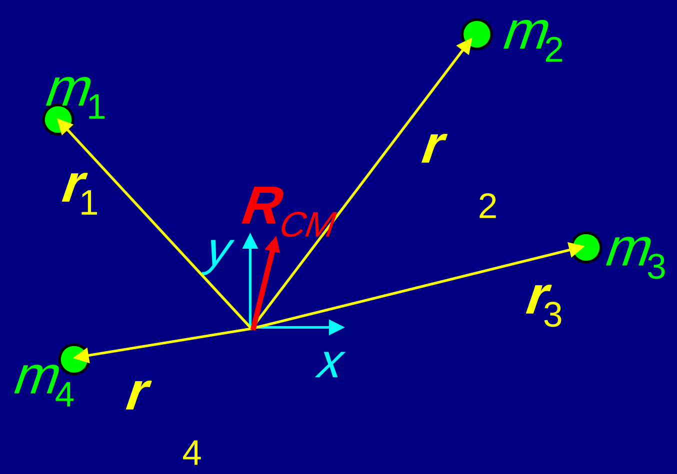
- یک جسم گسترده صلب را می توان فرض کرد که از چند قسمت تشکیل شده است دراین صورت حرکت هرقسمت بستگی به این دارد که کجا قرار گرفته است! . !

سیستم چند ذره ای : تعریف مرکز جرم

- "وضعیت " یک جسم متشکل از چند قسمت را چگونه توصیف کنیم ؟
- مرکز جرم را تعریف کنید (وضعیت میانگین) :

➔ برای N ذره مشابه و جدا ازهم که جرم و موقعیت آنها را می دانیم:

$$\mathbf{R}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$



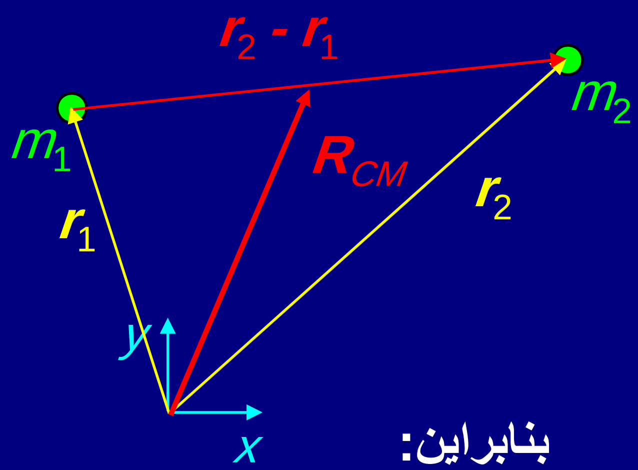
دراین حالت $N = 4$

سیستم چند ذره ای : تعریف مرکز جرم

- اگر سیستم فقط از دو ذره تشکیل شده باشددراین صورت :

$$\boldsymbol{R}_{CM}=\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}=\frac{m_1\boldsymbol{r}_1+m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1+m_2}$$

$$=\frac{(m_1+m_2)\boldsymbol{r}_1+m_2(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)}{(m_1+m_2)}$$



بنابراین:

$$\boldsymbol{R}_{CM}=\boldsymbol{r}_1+\frac{m_2}{M}(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)$$

که $M = m_1 + m_2$

سیستم چند ذره ای : تعریف مرکز جرم

- اگر سیستم فقط از دو ذره تشکیل شده باشد:

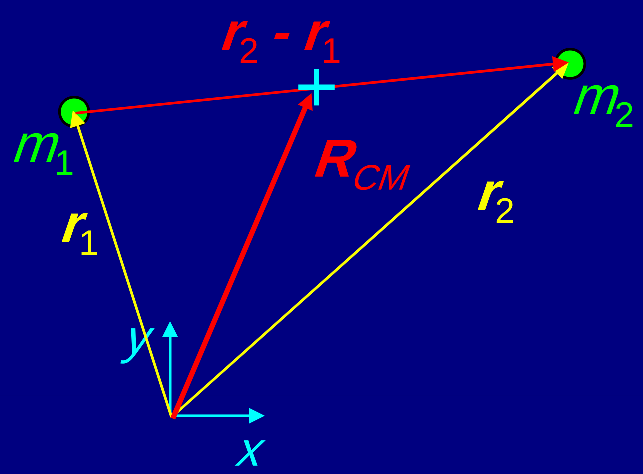
$$\boldsymbol{R}_{CM} = \boldsymbol{r}_1 + \frac{m_2}{M}(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)$$

که $M = m_1 + m_2$ است

واگر $m_1 = m_2$

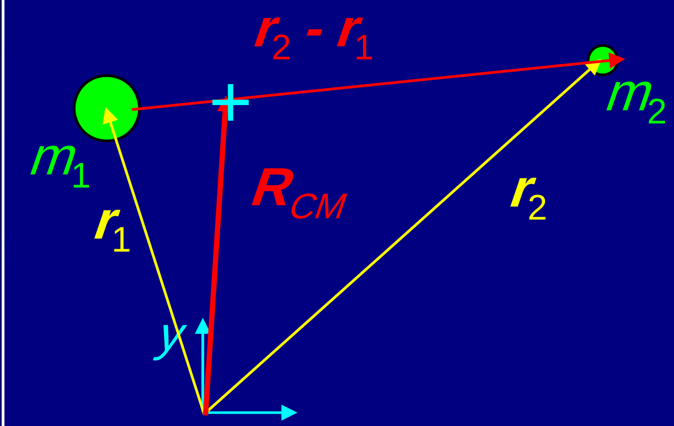
$$\boldsymbol{R}_{CM} = \boldsymbol{r}_1 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)$$

مرکز جرم CM وسط بین دوجسم قرار دارد



سیستم چند ذره ای : تعریف مرکز جرم

- اگر سیستم فقط از دو ذره تشکیل شده باشد



$$\boldsymbol{R}_{CM} = \boldsymbol{r}_1 + \frac{m_2}{M}(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)$$

که $M = m_1 + m_2$ است

اگر $m_1 = 3m_2$ باشد:

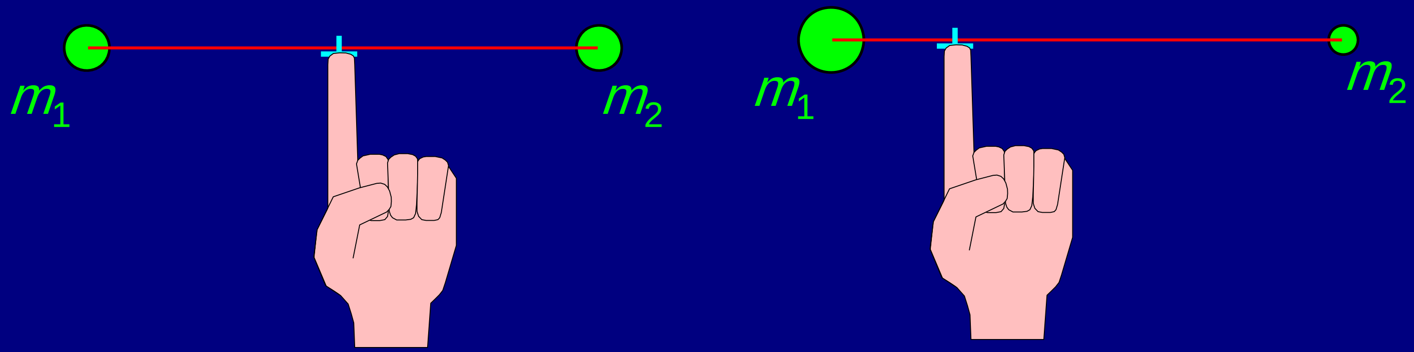
$$\boldsymbol{R}_{CM} = \boldsymbol{r}_1 + \frac{1}{4}(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)$$

مرکز جرم CM به جرم سنگین نزدیک تر است.

سیستم ذرات : مرکز جرم

- مرکز جرم جایی است که در آ ن سیستم درتعادل است !!

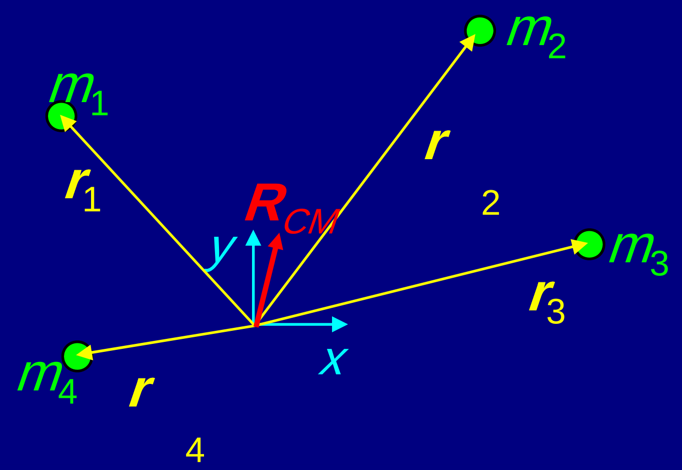
  درشکل زیر به مرکز جرم توجه کنید:.



سیستم ذرات : مرکز جرم

- مولفه های مرکزجرم را $\boldsymbol{R}_{CM}$ به طور جداگانه در نظر بگیرید :

$$(X_{CM}, Y_{CM}, Z_{CM}) = \left(\frac{\sum_i m_i x_i}{M}, \frac{\sum_i m_i y_i}{M}, \frac{\sum_i m_i z_i}{M} \right)$$



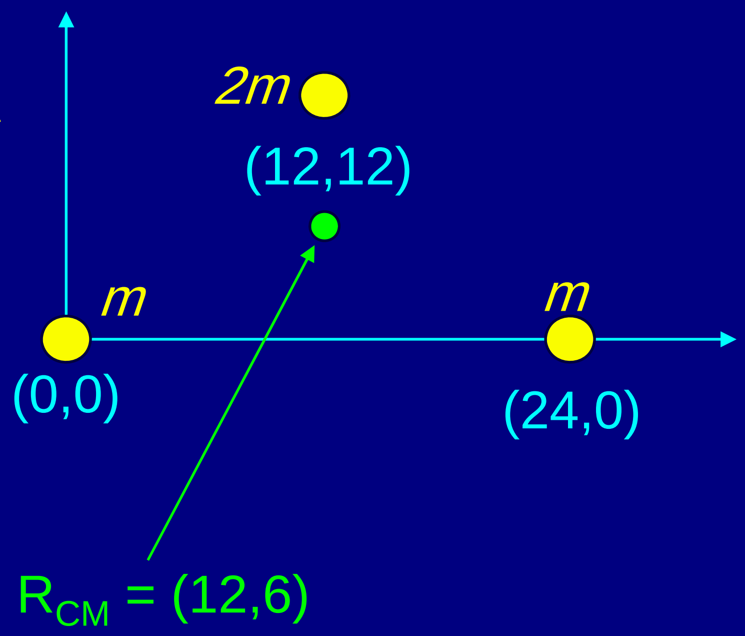
دراین حالت $N = 4$

یک مثال :

- توزیع جرم زیر را در نظر بگیرید:

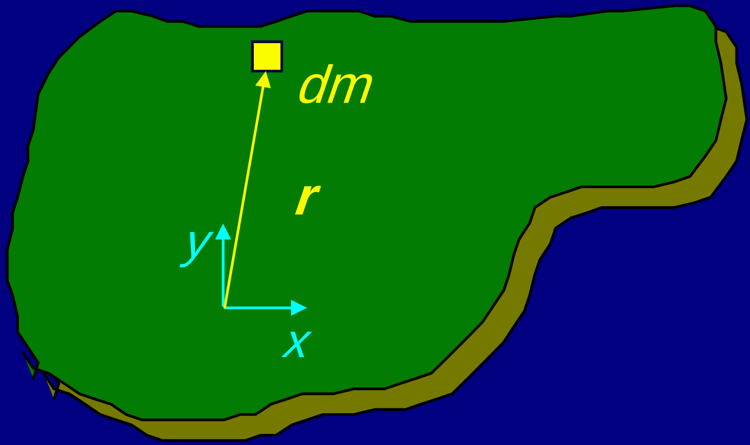
$$X_{CM} = \frac{\sum_i m_i x_i}{M} = \frac{m0 + (2m)12 + m24}{4m} = 12$$

$$Y_{CM} = \frac{\sum_i m_i y_i}{M} = \frac{m0 + (2m)12 + m0}{4m} = 6$$



سیستم ذرات : مرکز جرم

- در مورد یک جسم صلب از انتگرال استفاده می کنیم :



$$R_{CM} = \frac{\int r dm}{\int dm} = \frac{\int r dm}{M}$$

که dm یک عنصر کوچک از جرم است:

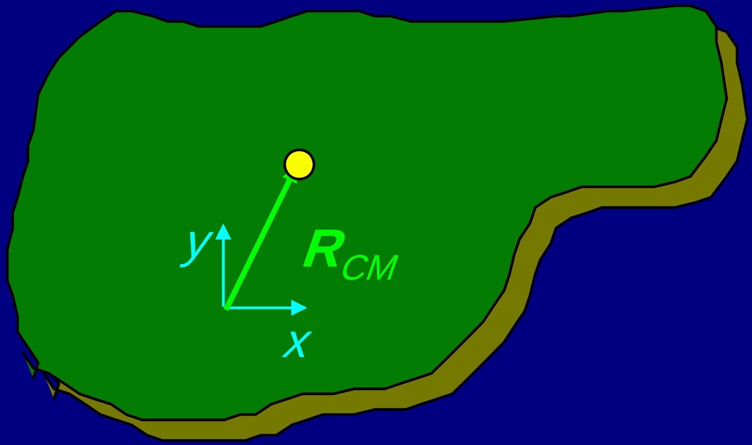
مولفه های مرکزجرم یک جسم صلب :

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\, dm$$

$$\begin{cases} x_{cm} = \dfrac{1}{M}\displaystyle\int x\, dm \\ y_{cm} = \dfrac{1}{M}\displaystyle\int y\, dm \\ z_{cm} = \dfrac{1}{M}\displaystyle\int z\, dm \end{cases}$$

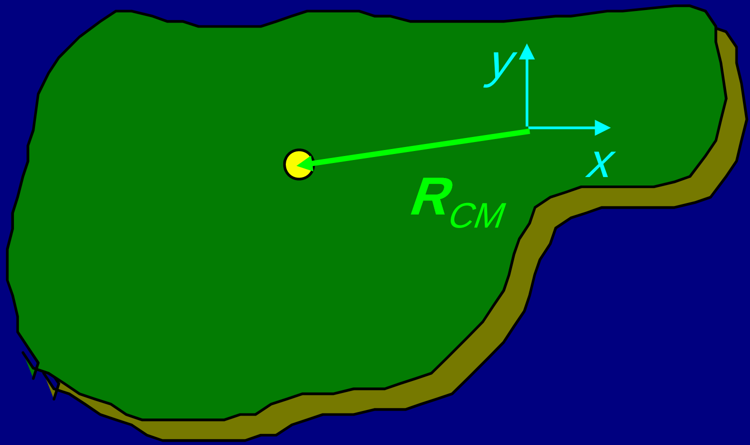
سیستم ذرات : مرکز جرم

- مرکز جرم در واقع " مرکز " جسم است .



سیستم ذرات : مرکز جرم

- می دانیم که مرکز جرم یک جسم " مرکز " جسم است :.

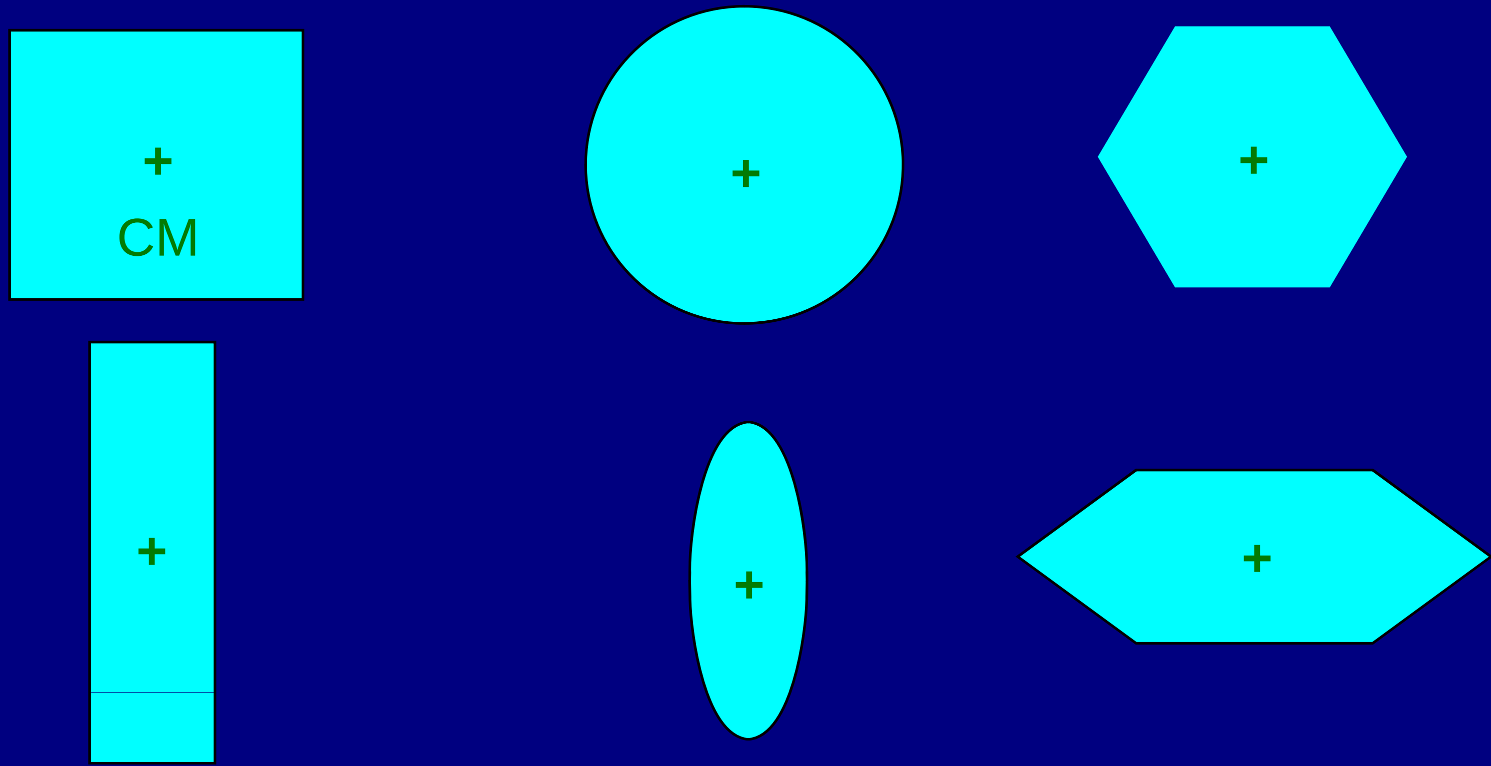


موقعیت مرکز جرم یک خصیت ذاتی جسم است !!

(بستگی به انتخاب دستگاه مختصتات ندارد!).

سیستم ذرات : مرکز جرم

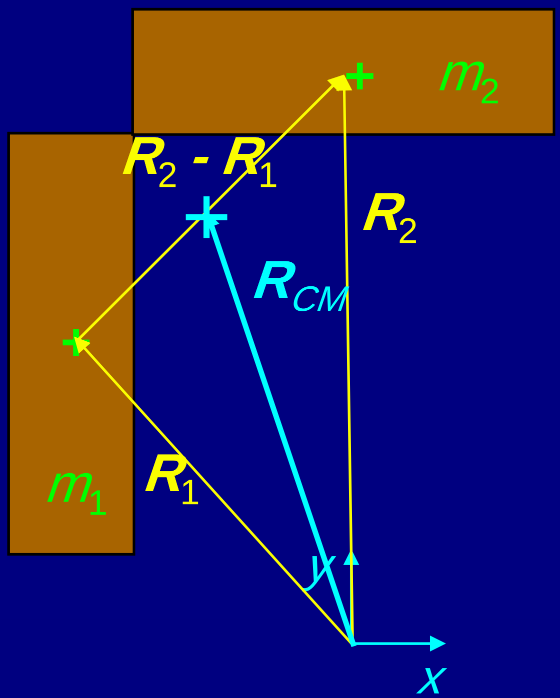
- از قدرت ابتکار خود برای یافتن مرکز جرم یک جسم استفاده می کنیم :
- مرکز جرم بر مرکز هندسی جسم منطبق است !



سیستم ذرات : مرکز جرم

- مرکز جرم ترکیبی از اشیا برابر با میانگین مراکز جرم آن اشیا است :

$$R_{CM}=\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{R}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$



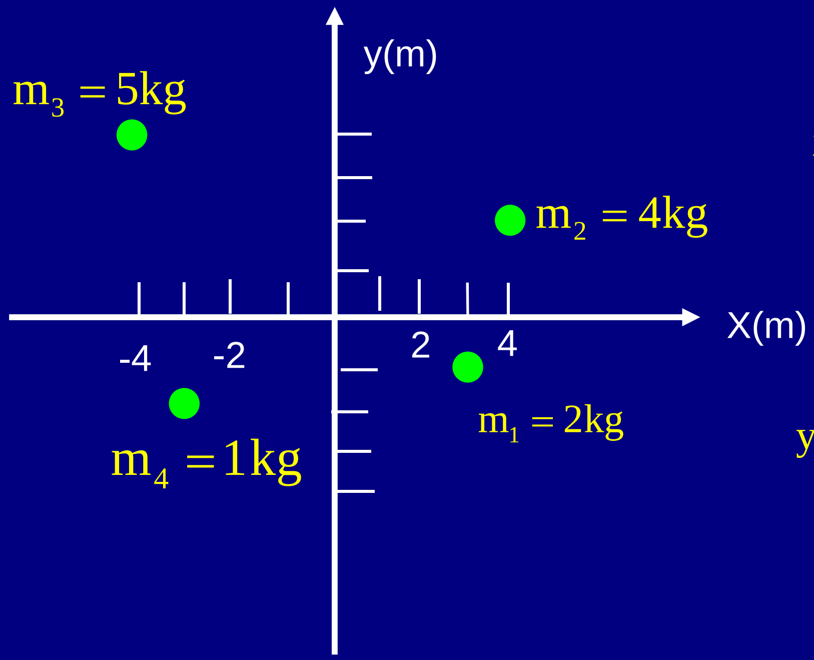
بنابراین در مورد دو شیئ:

$$R_{CM}=\frac{m_1\boldsymbol{R}_1+m_2\boldsymbol{R}_2}{m_1+m_2}$$

$$=\boldsymbol{R}_1+\frac{m_2}{M}\left(\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_1\right)$$

چند مثال:

مرکز جرم چهار جرم نقطه ای که در شکل زیر نشان داده شده است محاسبه کنید:

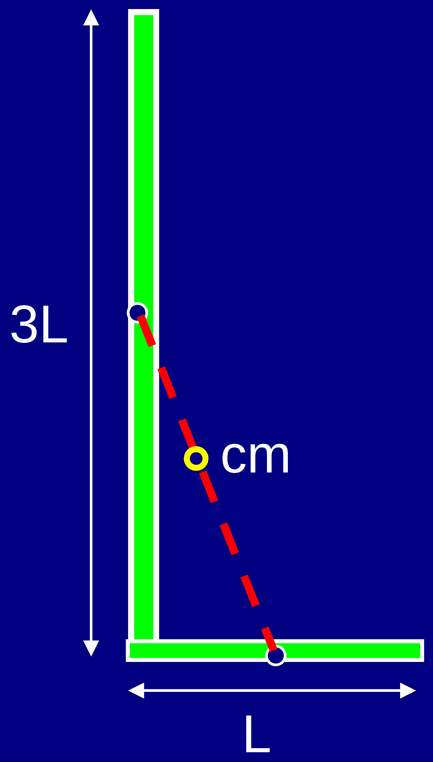


$$x_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} = \frac{2\times3+4\times3+5\times(-4)+1\times(-3)}{12} = -0.42\ m$$

$$y_{cm} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + m_4y_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} = \frac{2\times(-1)+4\times3+5\times4+1\times(-2)}{12} = 2.3\ m$$

$$r_{cm} = -0.42\hat{i} + 2.3\hat{j}$$

میله باریکی به طول را 3L در یک سوم طولش مطابق شکل خم کرده ایم . محل مرکز جرم را نسبت به راس زاویه پیدا کنید. L را برابر با ۱.۲ متر بگیرید:



$$x_1 = \frac{L}{2} \quad , \quad x_2 = 0$$

$$y_1 = 0 \quad , \quad y_2 = L$$

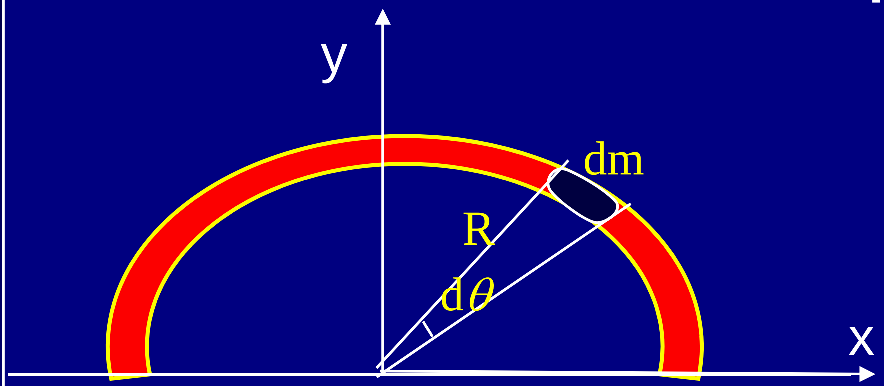
$$m_1 = m \quad , \quad m_2 = 2m \quad , M = 3m$$

$$x_{cm} = \frac{(m)(\frac{l}{2}) + 2m(0)}{3m} = 0.2m$$

$$y_{cm} = \frac{m(0) + 2m(L)}{3m} = 0.8m$$

$$\vec{r}_{cm} = 0.2\hat{i} + 0.8\hat{j}$$

۳- میله باریک و یکنواختی به چگالی خطی ρ کیلوگرم بر متر را خم کرده در آورده ایم . مرکز جرم این میله راR و به صورت نیمدایره ای به شعاع پیداکنید:



$$dm = \lambda dl \quad , dl = R d\theta \Rightarrow dm = \lambda R d\theta$$

$$y = R\sin\theta$$

$$x_{cm} = 0$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M}\int y dm = \frac{1}{M}\int (R\sin\theta)(\lambda R d\theta)$$

$$= \frac{\lambda R^2}{M}\int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta = \frac{\lambda R^2}{M}\left[-\cos\theta\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{2\lambda R^2}{M} \qquad , M = \pi R \lambda$$

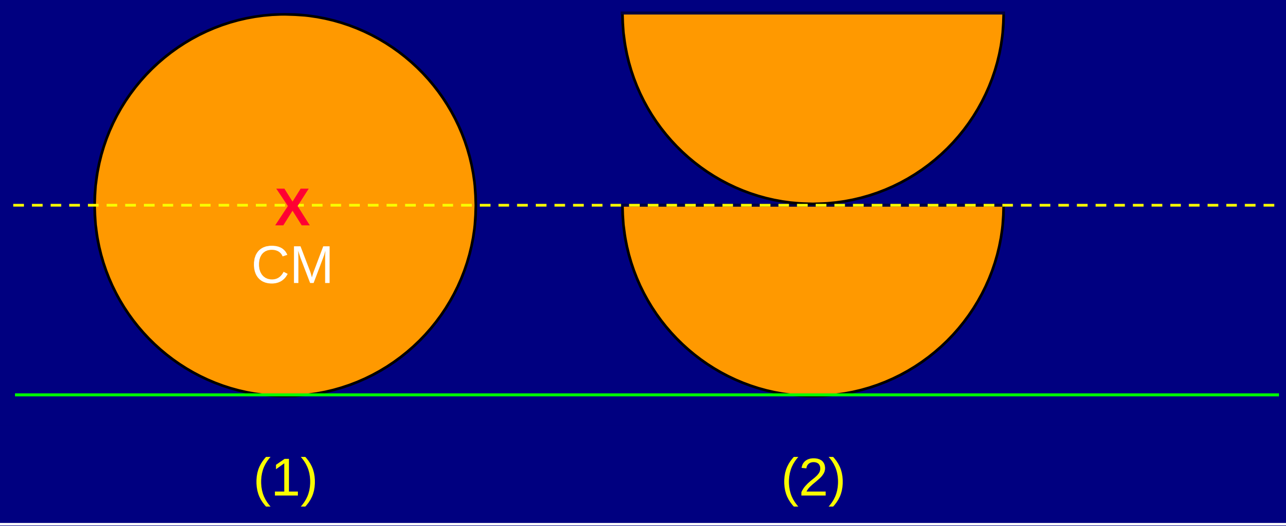
$$y_{cm} = \frac{2\lambda R^2}{\pi R \lambda} = \frac{2R}{\pi}$$

تمرین مرکز جرم:

- دیسک شکل (1) بوضوح مرکز جرم CM آن در مرکزش قرار دارد.
- فرض کنید که این دیسک را به دو قسمت تقسیم کرده و مطابق شکل (۲) روی هم قرار دهیم.

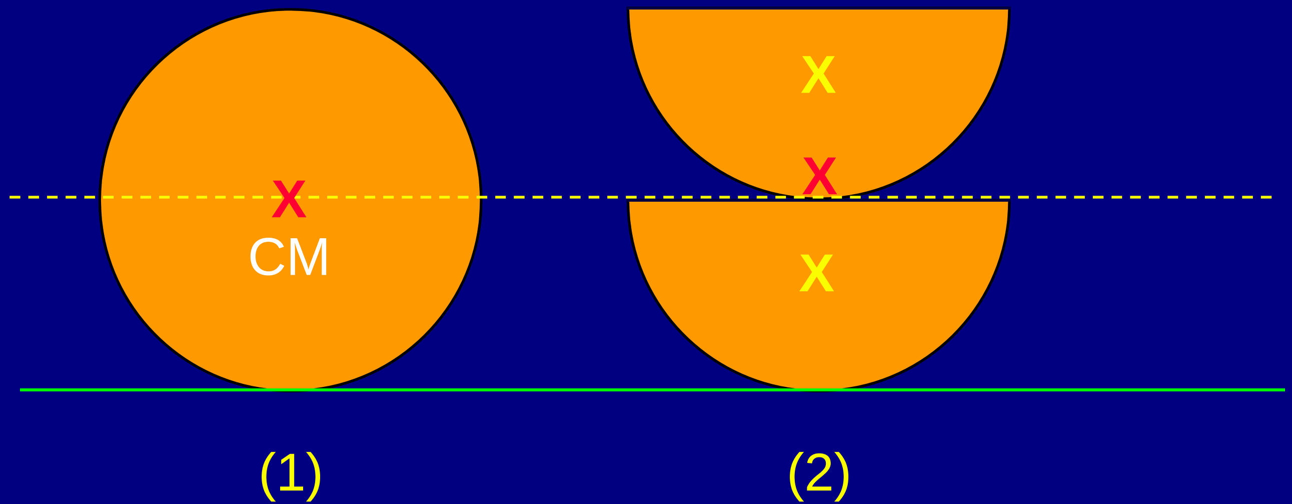
← مرکز جرم CM (2) در مقایسه با شکل (1) مطابق با کدام گزینه است ؟

الف -بالاتر   ب- پائین تر   ج- یکسان است



پاسخ:

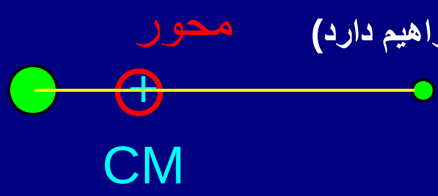
- مرکز جرم CM نیمه دیسک به قسمت تخت نزدیکتر از قسمت خمیده قرار دارد
- مرکز جرم CMاین شیئ مرکب درنیمه راه بین مراکز دو نیمه دیسک قرار دارد
- واین مرکز جرم بالاتراز مرکز جرم دیسک قراردارد:



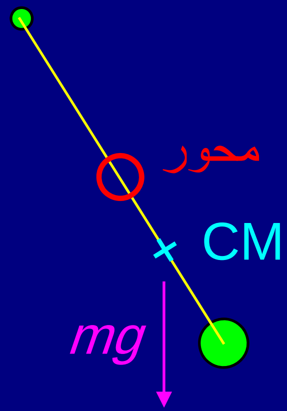
سیستم ذرات : مرکز جرم

- مرکز جرم (CM) یک شیئ جایی است که آزادنه می توان شیئ را روی آن به طور متعادل قرار داد.

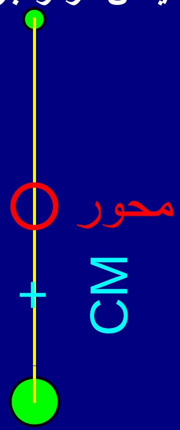
- نیروی جاذبه به مرکز جرم CM یک جسم وارد می شود (بعدا نشان خواهیم دارد)



- اگر جسم را روی محور دیگری غیراز مرکز جرم قرار دهیم
جسم طوری منحرف می شود که مرکز جرم پائین تراز آن محور قرار گیرد

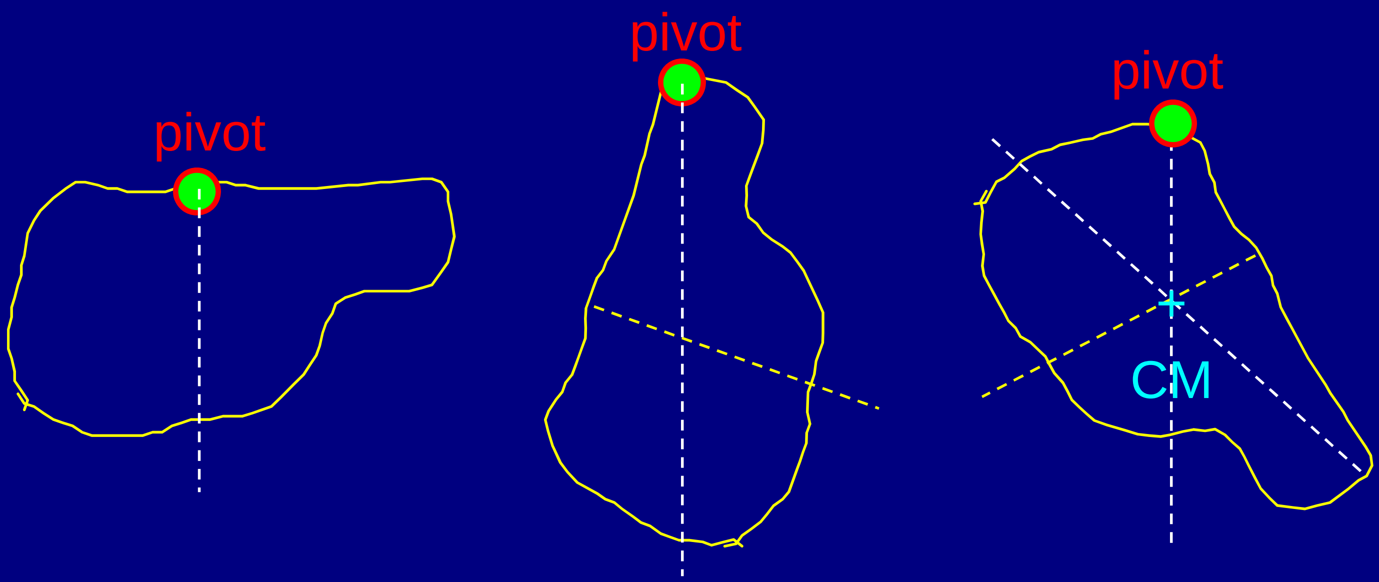


- ازاین خاصیت برای یافتن مرکز جرم یک جسم می توان استفاده کرد.



سیستم ذرات : مرکز جرم

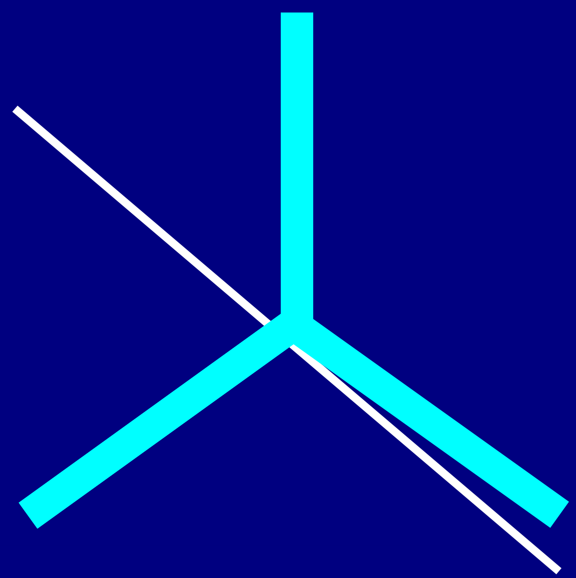
- جسمی را از چند محور مختلف آویزان کنید و خط شاقولی که از آن محور ها می گذرد رسم کنید محل تقاطع این خطوط شاقولی مرکز جرم جسم است !



- محل تقاطع این خطوط دقیقا مرکز جرم جسم است CM.

مرکز جرم

- جسمی از سه میله هم جرم که با هم زوایای مساوی تشکیل می دهند روی محوری مطابق شکل قرار می دهیم این جسم دارای چه نوع تعادلی است ؟



الف - پایدار

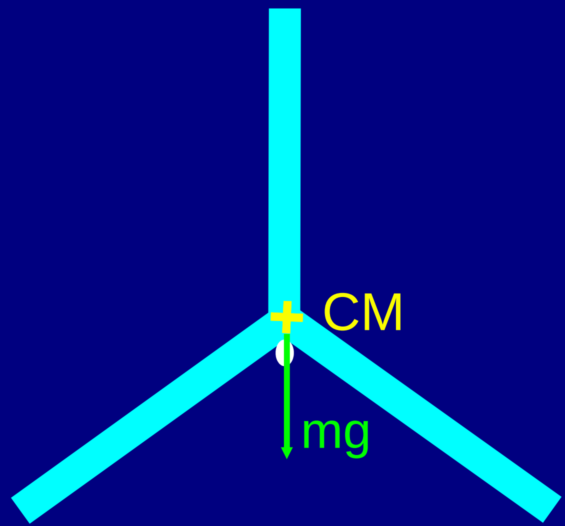
ب- خنثی

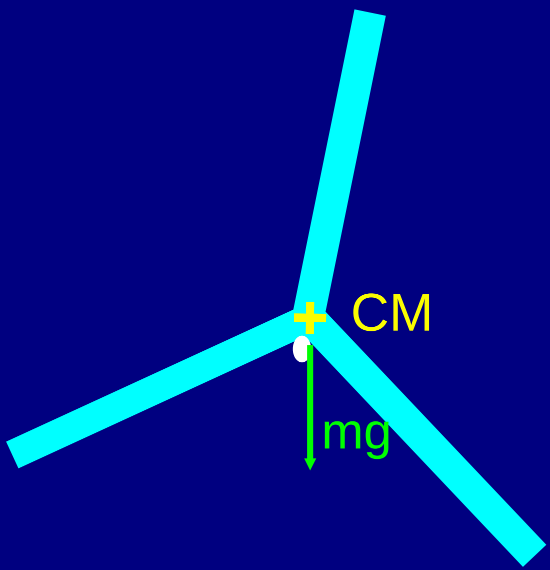
ج- ناپایدار

پاسخ:

مرکز جرم این شیئ دقیقا در مرکز و روی سیم قراردارد.

اگر جسم را اندکی به راست یا چپ منحرف کنیم مرکز جرم آن بالای سیم قرار نداشته ونیروی جاذبه سبب افتادن آن می شود.

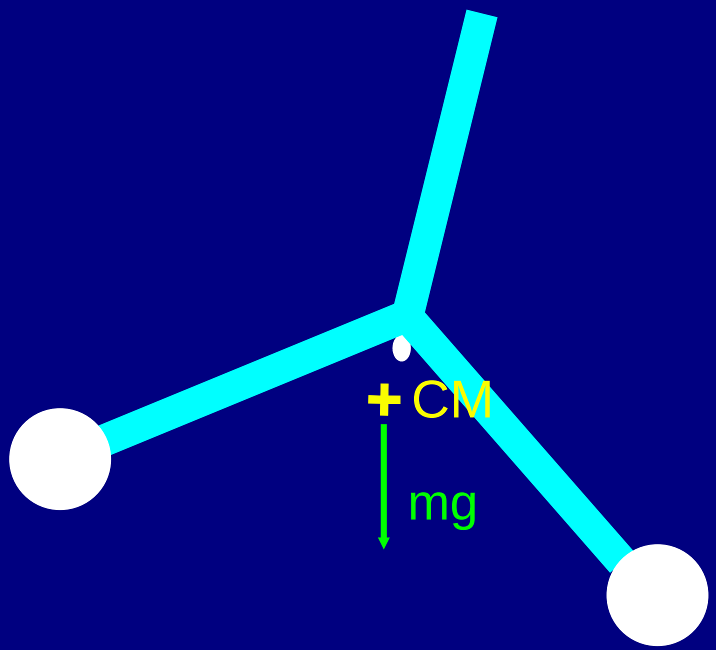


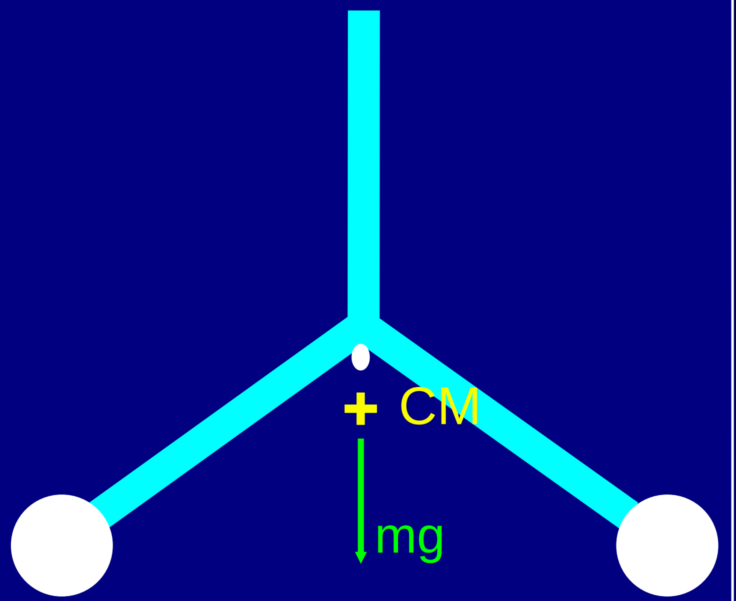


(نمای روبرو)

ادامه حل:

- حالتی را در نظر بگیرید که در آن به انتهای دومیله دو جرم مساوی آویزان کرده ایم :





اگر جسم را اندکی منحرف کنیم نیروی جاذبه نیروی برگرداننده لازم برای برگرداندن جسم به وضعیت تعادل ایجاد می کند.

دراین حالت مرکز جرم زیر میله قرار دارد

سرعت و شتاب مرکز جرم

- اگر ذرات حرکت کنند مرکز جرم آن ذرات نیز حرکت خواهد کرد.
- اگر بردار موقعیت $\boldsymbol{r}_i$ هر ذره از سیستم را بدانیم دراین صورت:

$$\boldsymbol{R}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}_i \qquad \left(M = \sum_{i=1}^{N} m_i \right)$$

بنابراین:

$$\boldsymbol{V}_{CM} = \frac{d\boldsymbol{R}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i$$

و:

$$\boldsymbol{A}_{CM} = \frac{d\boldsymbol{V}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{a}_i$$

- سرعت و شتاب مرکز جرم سیستم میانگین وزنی سرعت و شتاب ذرات سیستم است

تکانه خطی:

- **تعریف:** برای یک ذره تکانه $\boldsymbol{p}$ چنین تعریف می شود:

$$\boxed{\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}}$$

($\boldsymbol{p}$ یک بردار است زیرا $\boldsymbol{v}$ یک بردار است)

چون $p_x = mv_x$ و غیره است.

- طبق قانون دوم نیوتن :

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$$

$$= m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}) \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}}$$

- یکای تکانه خطی *kg m/s* است .

تکانه خطی:

- برای یک سیتم ذره ای تکانه خطی کل P جمع بردار تکانه خطی ذرات است

$$\boldsymbol{P} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i$$

ولی نشان دادیم که :

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i = M\boldsymbol{V}_{CM} \qquad \left(\boldsymbol{V}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i \right)$$

بنابراین :

$$\boxed{\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{V}_{CM}}$$

تکانه خطی:

- بنابراین تکانه کل یک سیتم ذره ای برابر است با جرم سیتستم در سرعت مرکز جرم آن سیستم

$$\boxed{\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{V}_{CM}}$$

- توجه کنید:

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = M\frac{d\boldsymbol{V}_{CM}}{dt} = M\boldsymbol{A}_{CM} = \sum_i m_i \boldsymbol{a}_i = \sum_i \boldsymbol{F}_{i,net}$$

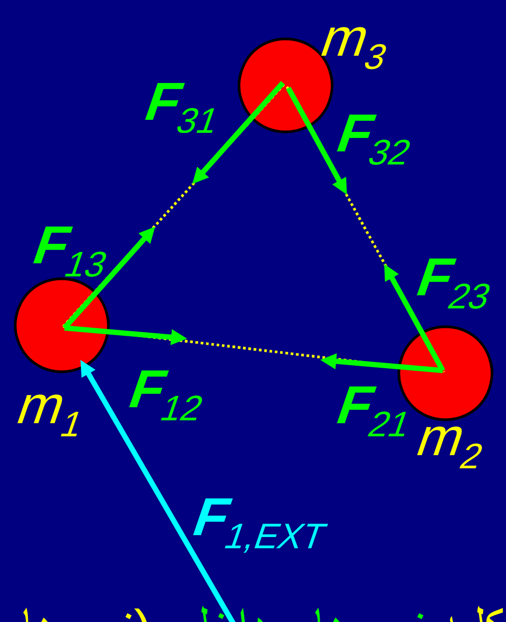
- ما به کمیت $\frac{d\boldsymbol{P}}{dt}$ علاقمندیم لذا باید $\sum_i \boldsymbol{F}_{i,net}$ را محاسبه کنیم

تکانه خطی:

- فرض کنید که یک سیستم سه ذره ای که برهم اثر متقابل دارند داشته باشیم و بر ذره اول یک نیروی خارجی وارد شود:.

$$\sum_i \boldsymbol{F}_{i,NET} = \left(\boldsymbol{F}_{13} + \boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_{1,EXT}\right)$$
$$+\left(\boldsymbol{F}_{21} + \boldsymbol{F}_{23}\right)$$
$$+\left(\boldsymbol{F}_{31} + \boldsymbol{F}_{32}\right)$$
$$= \boldsymbol{F}_{1,EXT}$$

(طبق قانون سوم نیوتن نیروهای اثر متقابل همدیگر را خنثی می کنند)



کلیه نیروهای داخلی (نیروهای عمل و عکس العمل همدیگر) را خنثی می کنند

وفقط نیروی خارجی بر سیستم اثر می کند!!

با این انیمیشن کوتاه قانون پایستاری تکانه خطی را مورد بررسی قرار دهید:

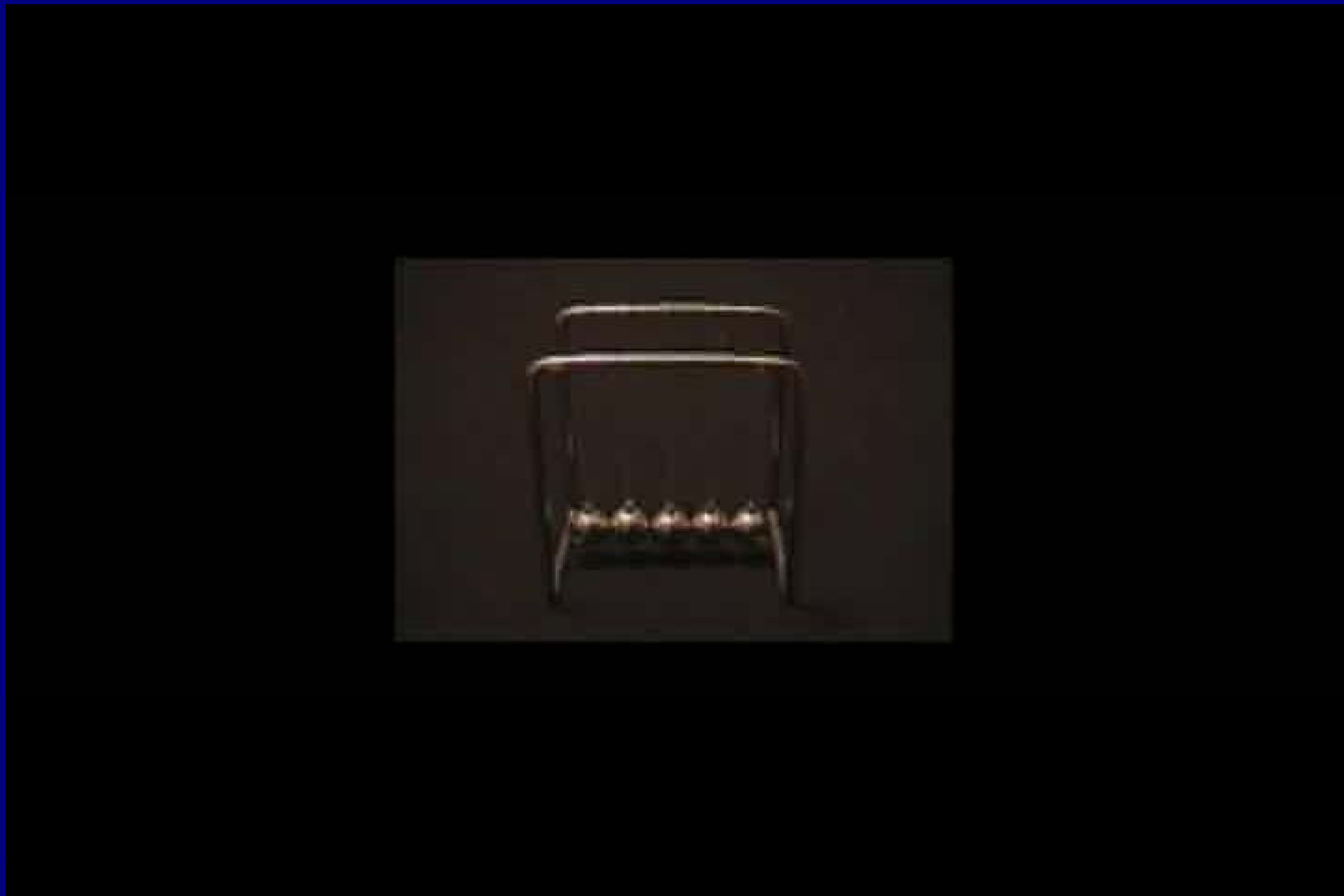
روی شکل کلیک کنید:

با این انیمیشن کوتاه قانون پایستاری تکانه خطی را مورد بررسی قرار دهید:

rollerblades.rn

روی شکل کلیک کنید:

آونگ نیوتن :



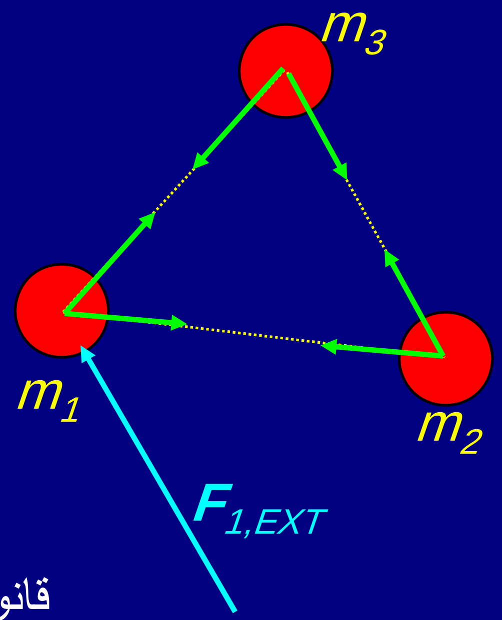
تکانه خطی:

- فقط نیروی خارجی کل وارد بر سیستم حائز اهمیت است!

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_i \mathbf{F}_{i,EXT} = \mathbf{F}_{NET,EXT}$$

که معادل است با:

$$\boxed{\mathbf{F}_{NET,EXT} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = M\mathbf{A}_{CM}}$$



قانون دوم نیوتن در مورد این سیستم ها نیز کاربرد دارد!

حرکت مرکز جرم : یادآوری

- قانون زیر را برای حرکت مرکز جرم داریم ::

$$F_{EXT} = \frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = M\boldsymbol{A}_{CM}$$

- واین دارای چند پیامد می باشد::

- این قانون می گوید که مرکز یک سیستم گسترده مانند یک جرم نقطه ای تحت تاثیر نیروهای خارجی حرکت می کند.

🡐این رابطه نیرو $\boldsymbol{F}$ وشتاب $\boldsymbol{A}$ مطابق معمول به همدیگر مربوط می کند.

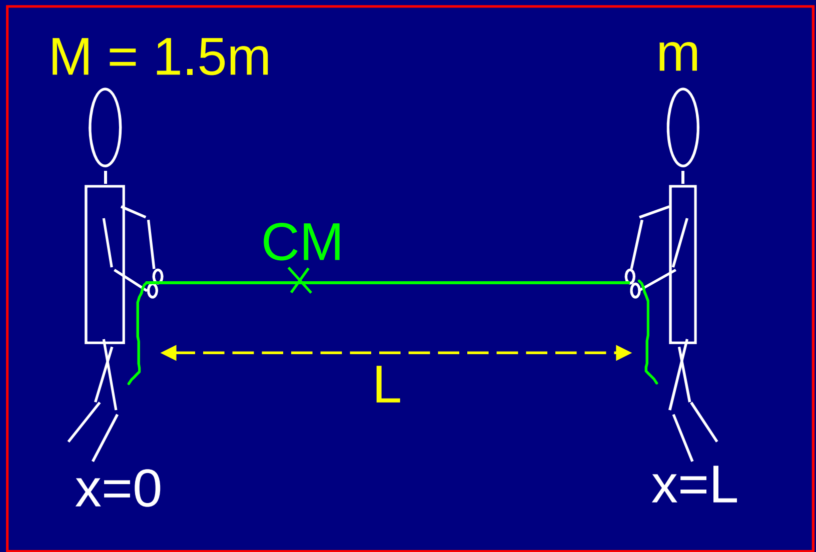
- طبق این رابطه اگر $\boldsymbol{F}_{EXT} = 0$, باشد تکانه کل سیستم تغییر نخواهد کرد

🡐تکانه کل سیستم پایستار می ماند اگر بر سیستم نیروی خارجی اثر نکند!.

مثال :فضانورد و طناب

- دو فضانورد در فضا به وسیله طنابی به همدیگر متصلند و طناب را می کشند . این دو فضانورد در کجا به همدیگر می رسند؟

مثال :فضانورد و طناب...



- انها از سکون شروع به حر کت می کنند لذا: $V_{CM} = 0$.
- V_{CM} ثابت می ماند زیرا نیروی خارجی به سییتم وارد نمی شود. .
- بنابراین مرکز جرم حرکت نمی کند!
- وآنها در مرکز جرم به همدیگر می رسند!

یافتن مرکز جرم:

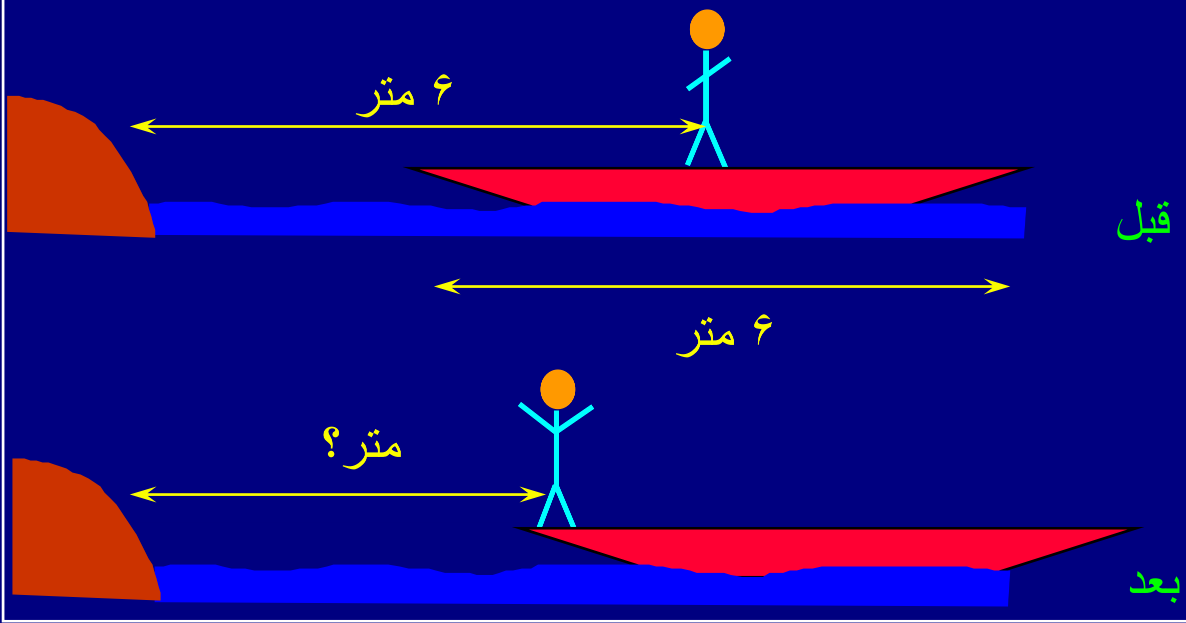
اگر فضانورد درسمت چپ و درنقطه $x = 0$ باشد:

$$x_{cm} = \frac{M(0) + m(L)}{M + m} = \frac{m(L)}{2.5m} = \frac{2}{5}L$$

حرکت مرکز جرم :

- وزن یک شخص باوزن قایق او به طول ۶ متر برابر است : .
- او ابتدا در مرکز قایق و به فاصله ۶متر از ساحل ایستاده است .او به طرف ساحل حرکت می کند تا به انتهای قایق برسد..

➔درااین حالت فاصله او از ساحل چقدراست ؟(هیچ نیروی افقی از طرف آب به قایق وارد نمی شود)



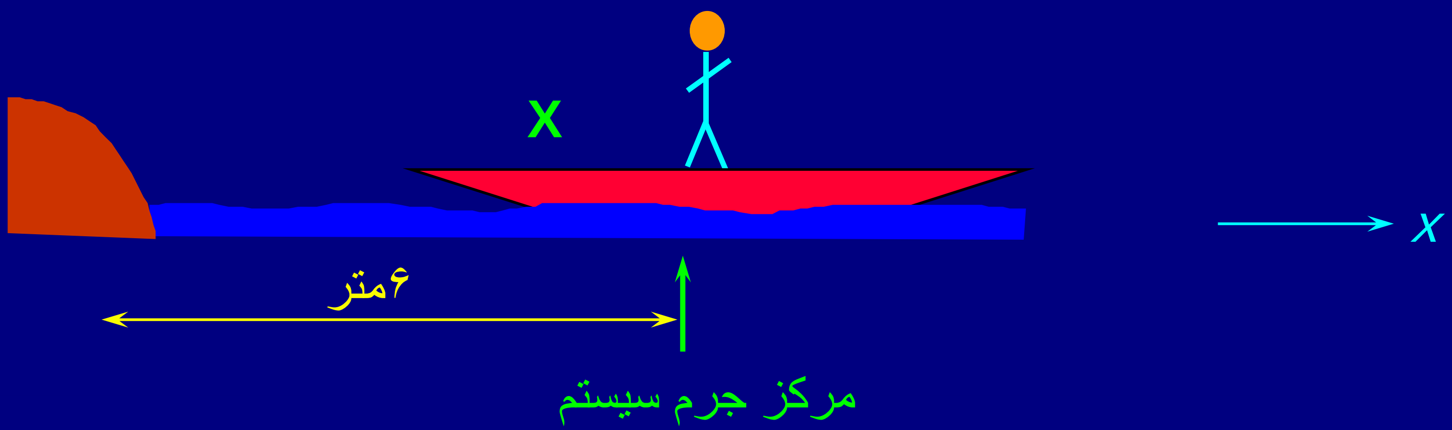
الف ــ ۳ متر

ب ــ ۵/۴ متر

ج- ۱/۹۴ متر

پاسخ:

- چون جرم شخص و قایق برابر است بنابراین مرکز سیستم قایق + شخص در وسط مراکز جرم آنها قراردارد
- درابتدا مرکز سیستم در فاصله ۶ متری از ساحل قراردارد.

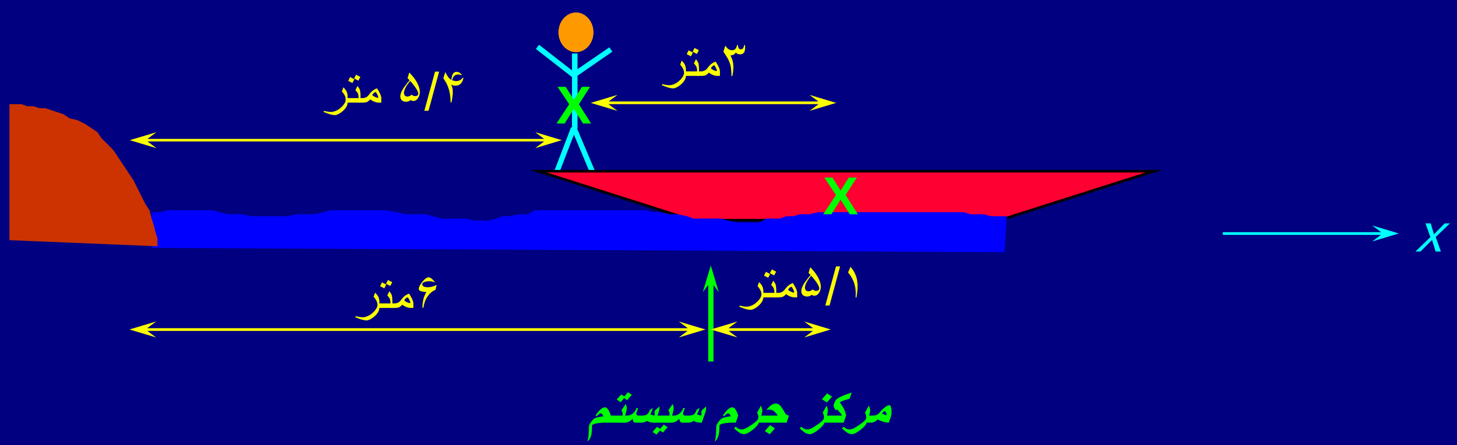


ادامه پاسخ:

- چون هیچ نیرویی در جهتX به سیستم وارد نمی شود لذا مرکز جرم سیستم دراین راستا نمی تواند تغییر کند!
- بنابراین شخص به فاصله ۵/۱ متر سمت چپ مرکز

جرم سیستم و مرکز جرم قایق به فاصله ۵/۱ متر در سمت راست مرکز جرم سیستم قرارد خواهد داشت.

- *لذا با ساحل ۵/۴ متر فاصله خواهد داشت* .



یادآ وری درس ا مروز:

- انرژی پتانسیل و نیرو
- سیستم ذرات
- مرکز جرم
- سرعت و شتاب مرکز جرم
- دینامیک مرکز جرم
  - تکانه خطی
- چند مثال
- مطالب کتاب درسی و مساءل آن را مرور کنید!

فصل نهم

تکانه خطی
برخورد

درس امروز ما:

- پایستاری تکانه
- برخورد کشسان در یک بعد
- برخورد کشسان در دو بعد
- انفجار
- توضیح قانون پایستار بودن انرژی
- آونگ بالستیک

حرکت مرکز جرم : یادآوری

- قانون زیر را برای حرکت مرکز جرم داریم ::

$$F_{EXT} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = M\mathbf{A}_{CM}$$

- واین دارای چند پیامد می باشد::

- این قانون می گوید که مرکز یک سیستم گسترده مانند یک جرم نقطه ای تحت تاثیر نیروهای خارجی حرکت می کند.

⬅این رابطه نیرو $\mathbf{F}$ وشتاب $\mathbf{A}$ مطابق معمول به همدیگر مربوط می کند.

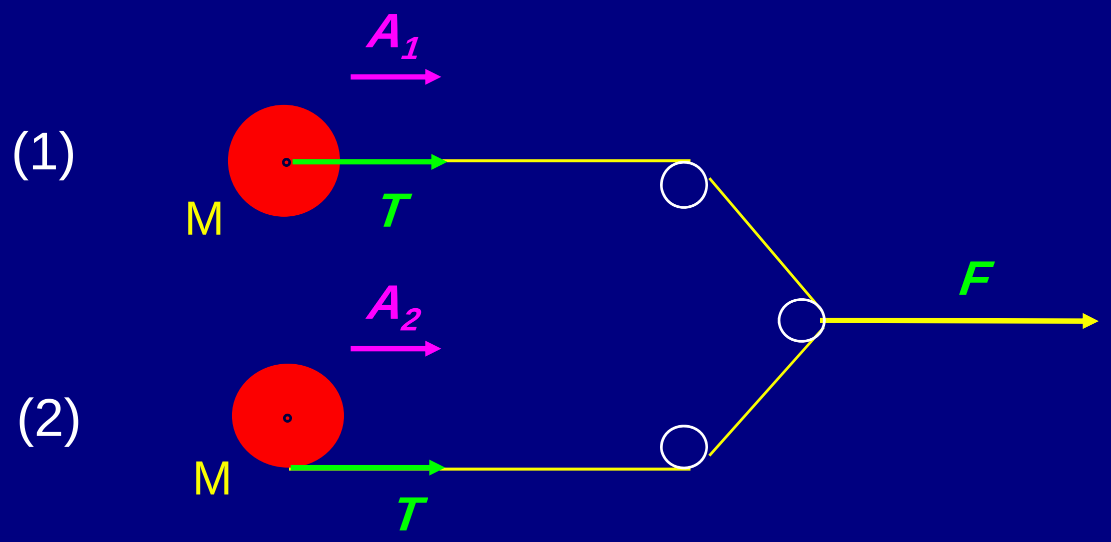
- طبق این رابطه اگر $F_{EXT} = 0$, باشد تکانه کل سیستم تغییر نخواهد کرد

⬅تکانه کل سیستم پایستار می ماند اگر بر سیستم نیروی خارجی اثر نکند!

حرکت مرکز جرم :

- دو قرقره به جرم مساوی را با اعمال نیروی مساوی که به نقاط مختلفی مطابق شکل وارد می شود می کشیم . شتاب کدام یک بیشتر خواهد بود:

(a) $A_1 > A_2$ (b) $A_1 < A_2$ (c) $A_1 = A_2$

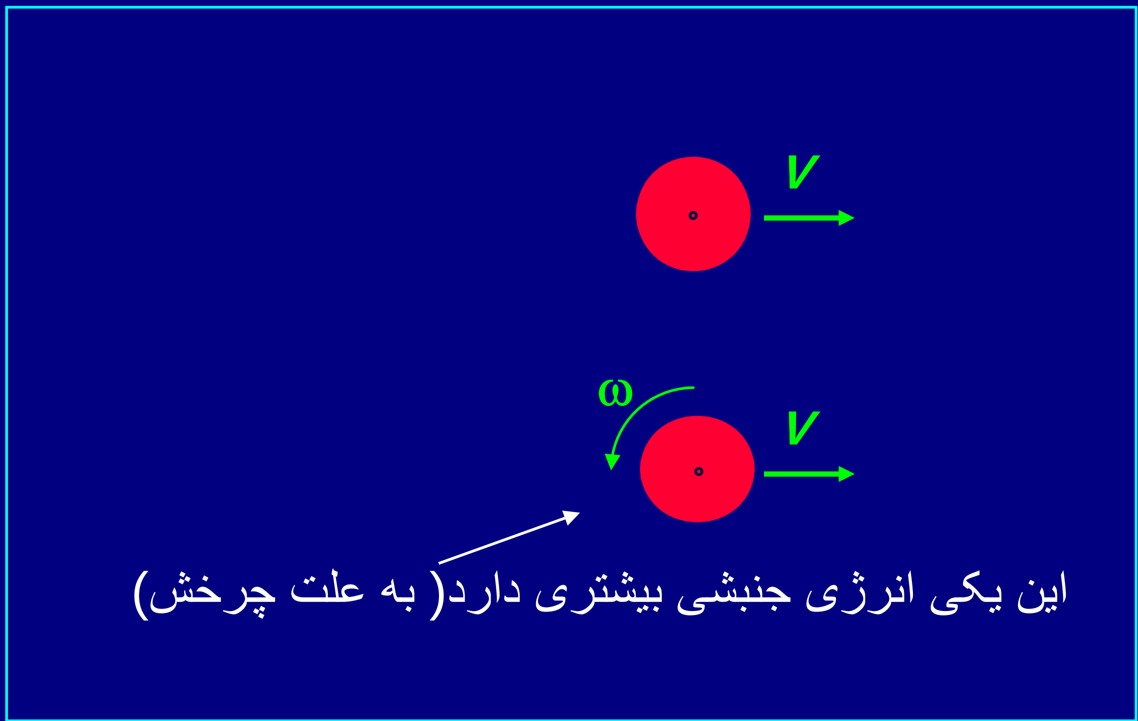


پاسخ:

- دقیقا نشان دادیم که $MA = F_{EXT}$
- شتاب فقط بستگی به نیروی خارجی دارد و نه محل اعمال نیرو!
- انتظار داریم که A_1 و A_2 مساوی باشند زیرا $F_1 = F_2 = T = F / 2$ است.
- پاسخ $A_1 = A_2$ (c) است
- بنابراین مرکز جرم آنها شتاب مساوی خواهد داشت.

ادامه...

- سرعت نهایی مرکز جرم دو قرقره برابر است .
- توجه کنید که حرکت ذرات هر یک از دو جسم باهمدیگر متفاوت است .(یکی از آنها می چرخد)



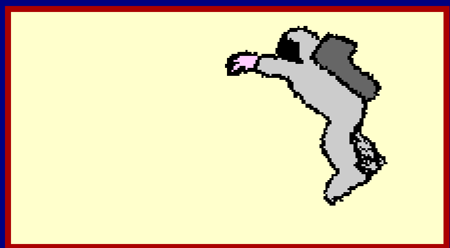
پایستاری تکانه :

$$F_{EXT} = \frac{dP}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{dP}{dt} = 0} \Leftarrow F_{EXT} = 0$$

- اصل پایستاری تکانه یکی از بنیادی ترین اصول فیزیک است .
- این یک معادله برداری است

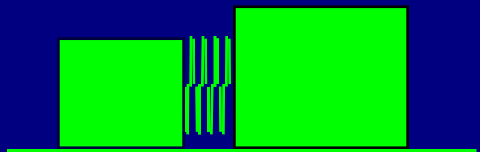
آن را می توان در راستایی که نیروی خارجی وارد نمی شود بکار برد.

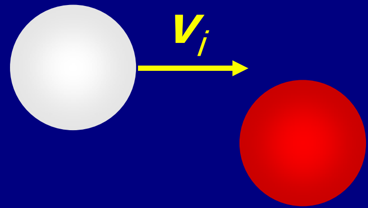
- خواهیم دید که قنون پایستاری تکانه حتی اگر انرژی پایستار نباشد نیز درست است .



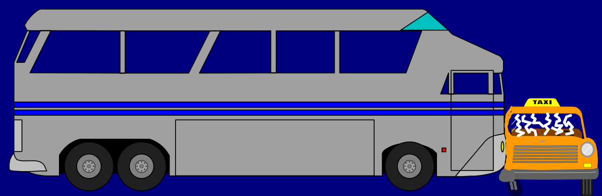
برخورد کشسان و غیر کشسان

- برخوردی را ***کشسان*** می گوییم که درآن انرژی جنبشی و تکانه قبل و بعد از برخورد یکسان باشد $K_{before} = K_{after}$.
  - مانند برخورد بین دوجسم که بین آنها یک فنر قراردارد و برخورد گلوله های بیلیارد



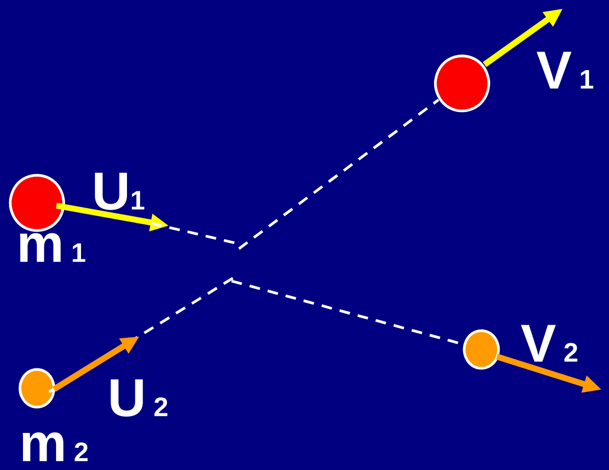


- برخوردی را ***غیر کشسان*** اگر انرژی جنبشی پایستار نماندهولی تکانه خطی پایستار بماند $K_{before} \neq K_{after}$.
  - مانند برخورد بین دو اتومبیل و یا برخوردی که درآن دو جسم بعد از برخورد به همدیگر می چسبند.



برخورد کشسان میان دو گلوله:

مطابق شکل زیر دوگلوله با جرم ها وسرعت های مشخص شده به طور کشسان با هم برخورد می کنند سرعت های بعداز برخورد را حساب کیند:



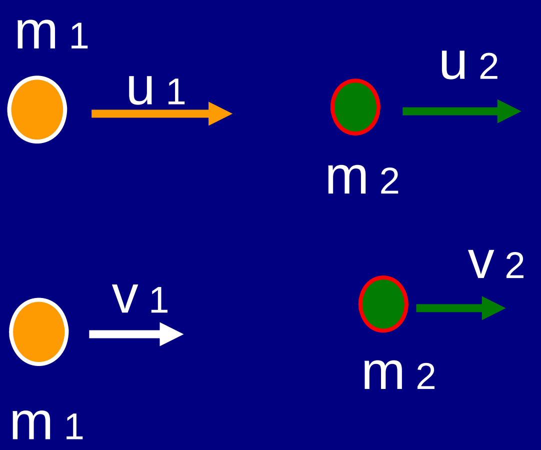
دوقانون پایستگی تکانه خطی و انرژی جنبشی را می نویسیم:

$$m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

جواب ها از حل این معادلات بدست می آید.

برخورد کشسان یک بعدی:



$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2$$

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

$$\begin{cases} m_1(u_1 - v_1) = m_2(v_2 - u_2) \\ m_1(u_1^2 - v_1^2) = m_2(v_2^2 - u_2^2) \end{cases} \Rightarrow \; v_2 - v_1 = -(u_2 - u_2)$$

مثال ۱: برخورد غیر کشسان یک بعدی

- جسمی به جرم M در ابتدا روی یک سطح افقی بدون اصطکاک قراردارد. گلوله ای به جرم m باسرعت v به طرف آن شلیک می شود. گلوله در جسم فرو رفته و سرعت نهایی به V می رسد. برحسب $m, M,$ و V:
  - تندی اولیه گلوله v چقدر است؟
  - انرژی اولیه سیستم چقدر است ؟
  - انرژی نهایی سیستم چقدراست؟
  - آیا انرژی جنبشی سیستم پایستار است؟

قبل از برخورد

بعداز برخورد

چند حالت خاص:

جرمها مساوی هستند: $m_1 = m_2 = m$

$$\begin{cases} u_1 + u_2 = v_1 + v_2 \\ u_1 - u_2 = -v_1 + v_2 \end{cases} \Rightarrow v_1 = u_2 \quad , v_2 = u_2$$

گلوله ها سرعت های خود را مبادله می کنند>

۲- جرمها نامساوی و هدف ساکن است($u_2=0$) :

$$\begin{cases} m_1u_1 = m_1v_1 + m_2v_2 \\ v_2 - v_1 = u_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}u_1 \quad , v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}u_1$$

۳- $m_1 >> m_2 \Leftarrow v_1 = u_1 \quad , v_2 = 2u_1$

۴- $m_1 << m_2 \Leftarrow v_1 = -u_1 \quad , v_2 = 0$

مثال ۱...

- گلوله و جسم را مانند یک سیستم در نظر بگیرید .بعداز پرتاب گلوله هیچ نیروی خارجی در جهت x به سیستم وارد نمی شود. **لذا تکانه دراین راستا پایستار است**

$$P_{x,\,i} = P_{x,\,f}$$

$$mv = (M+m)V$$

$$\boxed{v = \left(\frac{M+m}{m}\right)V}$$

قبل از برخورد

بعداز برخورد

$$v = \left(\frac{M+m}{m}\right)V$$

مثال ۱...

- اکنون انرژی جنبشی سیستم را قبل و بعداز برخورد در نظر بگیرید:

- قبل از برخورد:

$$E_B = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{M+m}{m}\right)^2 V^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{M+m}{m}\right)(M+m)V^2$$

بعدازبرخورد:

$$E_A = \frac{1}{2}(M+m)V^2$$

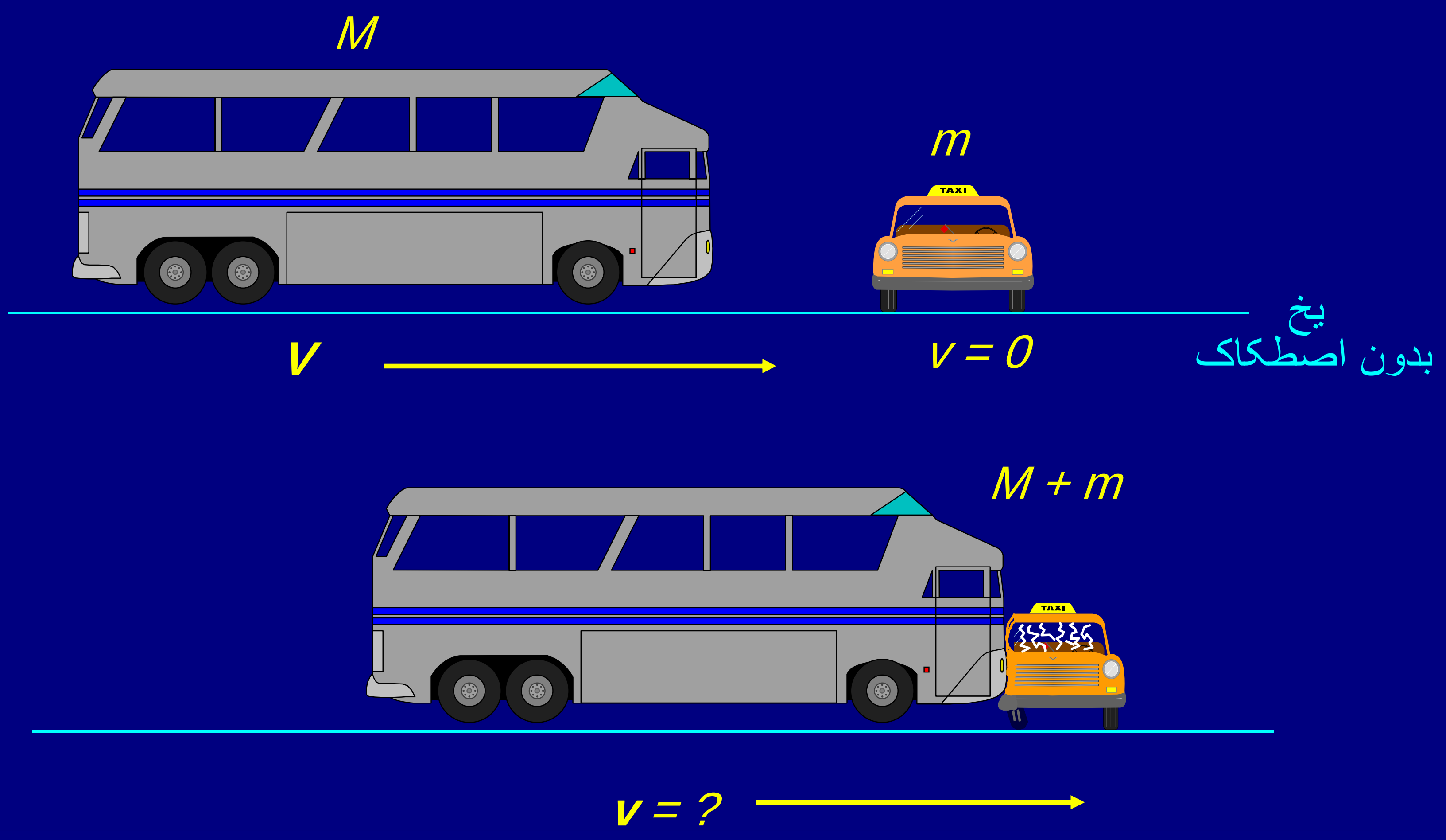
- لذا:

$$\boxed{E_A = \left(\frac{m}{M+m}\right)E_B}$$

انرژی جنبشی پایستار نیست (**!**اصطکاک گلوله را متوقف می کند)

ولی تکانه پایستار بوده و این سودمند است!.

مثال ۲ : برخوردی غیر کشسان یک بعدی



مثال ۲...

از قانون پایستاری تکانه برای یافتن سرعت $\boldsymbol{v}$ برخورد استفاده کنید

بعداز برخورد:

$$\boldsymbol{P}_f = (M + m)\boldsymbol{v}$$

قبل از برخورد:

$$\boldsymbol{P}_i = M\boldsymbol{V} + m(0)$$

پایستاری تکانه

$$\boldsymbol{P}_i = \boldsymbol{P}_f$$

$$M\boldsymbol{V} = (M + m)\boldsymbol{v}$$

$$\boxed{\boldsymbol{v} = \frac{M}{(M + m)}\boldsymbol{V}}$$

معادله برداری

$$v = \frac{M}{(M+m)} V$$

مثال ۲...

- اکنون انرژی جنبشی سیستم را قبل و بعداز برخورد در نظر بگیرید
- قبل از برخورد:

$$E_{BUS} = \frac{1}{2} M V^2 = \frac{1}{2} M \left(\frac{M+m}{M} \right)^2 v^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{M+m}{M} \right) (M+m) v^2$$

- بعداز برخورد:

$$E_A = \frac{1}{2} (M+m) v^2$$

- لذا:

$$\boxed{E_A = \left(\frac{M}{M+m} \right) E_B}$$

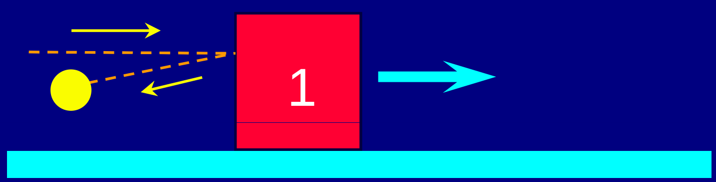
انرژی جنبشی در برخورد کشسان پایستار نیست!!!

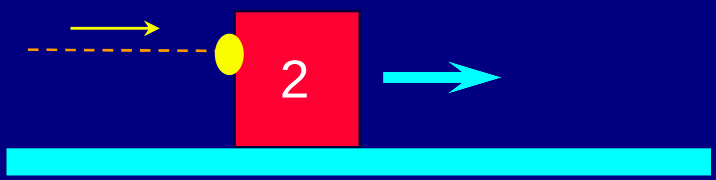
مسئله : پایستاری تکانه خطی

- دوگلوله به جرم های مساوی و با سرعت اولیه یکسان به طور افقی پرتاب می شوند .آنها به جعبه های یکسانی که روی سطح افقی بدون اصطکاک قرار دارند برخورد می کنند. .
- گلوله ای که به جعبه ۱ برخورد می کند برمی گردد و لی گلوله دو به جعبه می چسبد

کدام جعبه سرعت بیشتری پیدا می کند؟

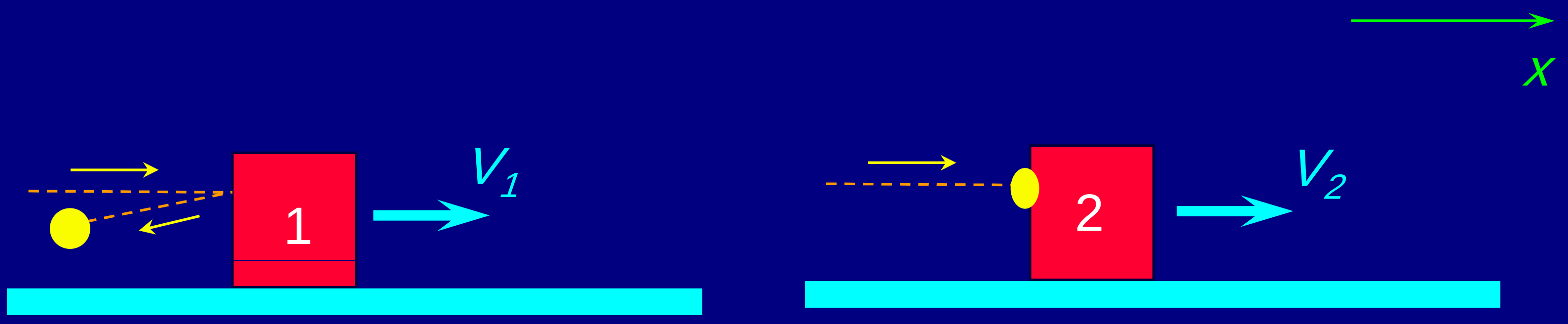
الف – جعبه ۱   **ب- جعبه ۲**   **ج - مساوی**





پایستاری تکانه خطی :

- چون نیروی خارجی در راستای x صفر است, تکانه در راستای x پایستار می ماند.
- در هر دو مورد تکانه مساوی است (mv گلوله) .
- درحالت ۱ تکانه بعد از برخورد منفی است, بنابراین اگرتکانه کل بخواهد پایستار به ماندد جعبه باید تکانه مثبت بیشتری پیدا کند.
- سرعت جعبه در حالت ۱ بیشترخواهد بود!



پایستاری تکانه خطی :

$$mv_{init} = MV_1 - mv_{fin}$$

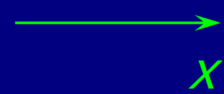
$$\Rightarrow V_1 = (mv_{init} + mv_{fin}) / M$$

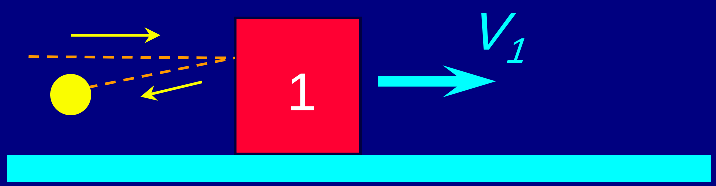
$$mv_{init} = (M+m)V_2$$

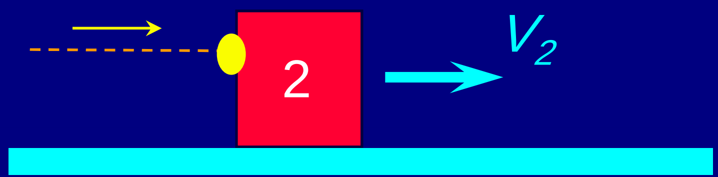
$$\Rightarrow V_2 = mv_{init} / (M+m)$$

صورت V_1 بیشتر و مخرج آن کمتر از V_2 است .

$$\Rightarrow V_1 > V_2$$

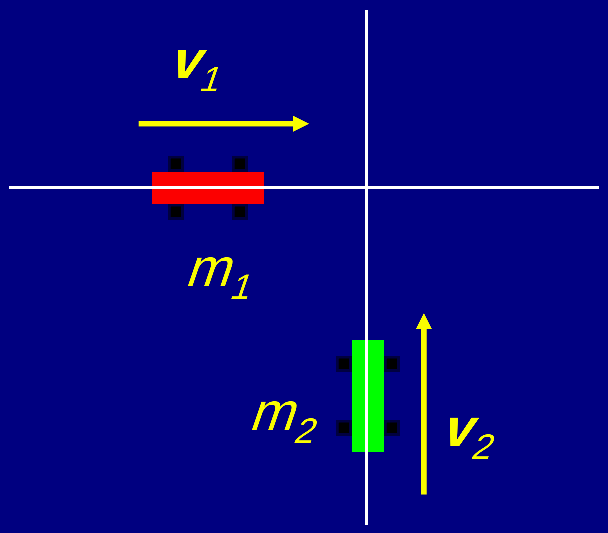




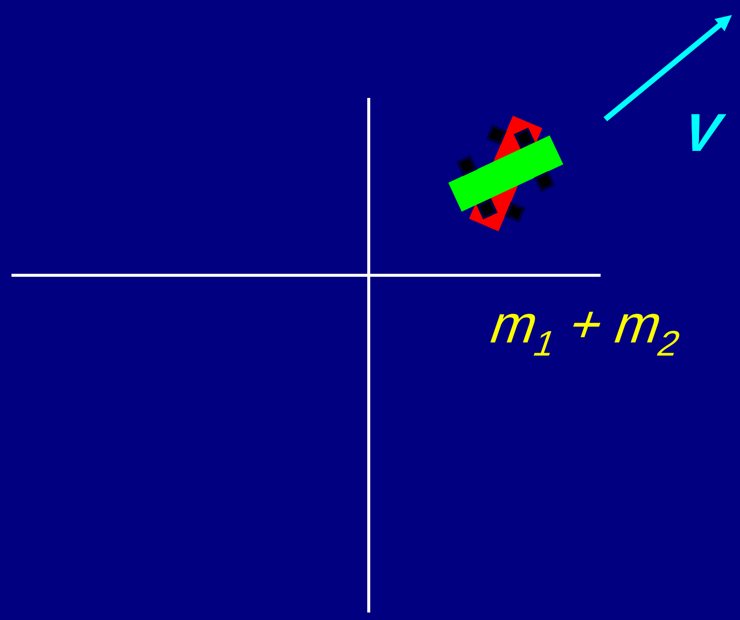


برخورد غیر کشسان دوبعدی

- دریک برخورد دوبعدی روی سطح بدون اصطکاک مطابق شکل زیر به هم برخورد می کنند.



قبل از برخورد



بعداز برخورد

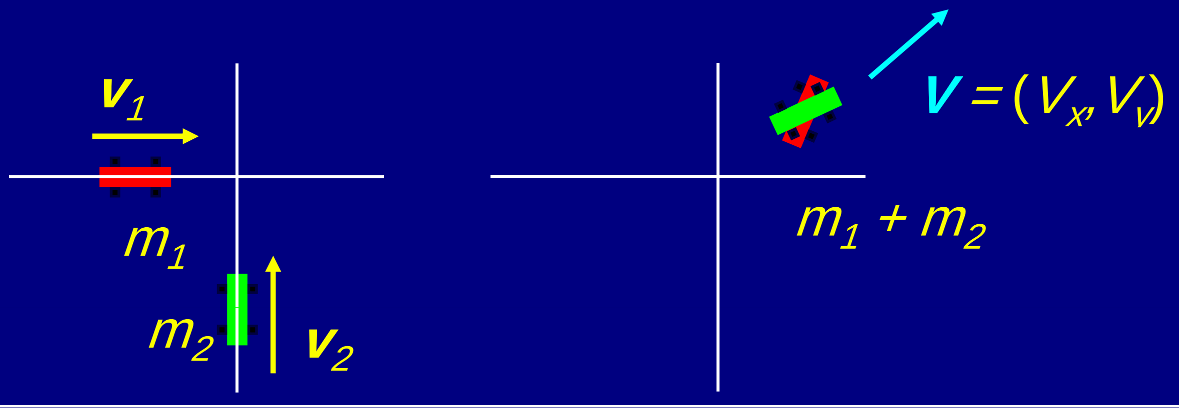
برخورد غیر کشسان دوبعدی

- نیروی خالص خارجی برابر با صفر است .

اصل پایستاری تکانه خطی را برای هردو حالت بکاربرید:

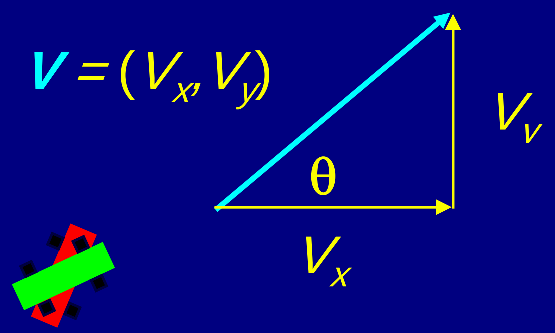
$$X:\quad P_{x,i} = P_{x,f} \Rightarrow m_1 v_1 = (m_1 + m_2) V_x \Rightarrow V_x = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)} v_1$$

$$y:\quad P_{y,i} = P_{y,f} \Rightarrow m_2 v_2 = (m_1 + m_2) V_y \Rightarrow V_y = \frac{m_2}{(m_1 + m_2)} v_2$$



برخورد غیر کشسان دوبعدی

- بنابراین همه چیز را درمورد حالت بعداز برخورد می دانیم :



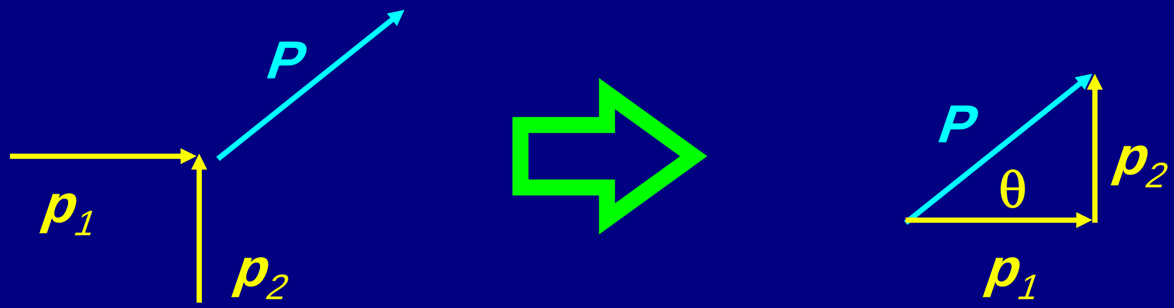
$$V_x = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)} v_1$$

$$V_y = \frac{m_2}{(m_1 + m_2)} v_2$$

$$\tan\theta = \frac{V_y}{V_x} = \frac{m_2 v_2}{m_1 v_1} = \frac{p_2}{p_1}$$

برخورد غیر کشسان دوبعدی

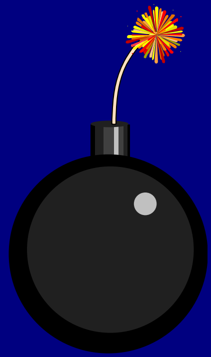
- باستفاده از دیاگرام برداری نیز:



$$\tan\theta = \frac{p_2}{p_1}$$

انفجار(غیر برخورد و غیر کشسان)

قبل از انفجاز:



M

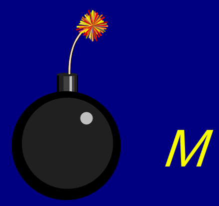
بعداز انفجار:

m_1 m_2

انفجار...

- هیچ نیروی خارجی وجود ندارد لذا, $\boldsymbol{P}$ پایستار است.
- در ابتدا $\Leftarrow$ $P = 0$
- در نهایت $\Leftarrow$ $P = m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0$

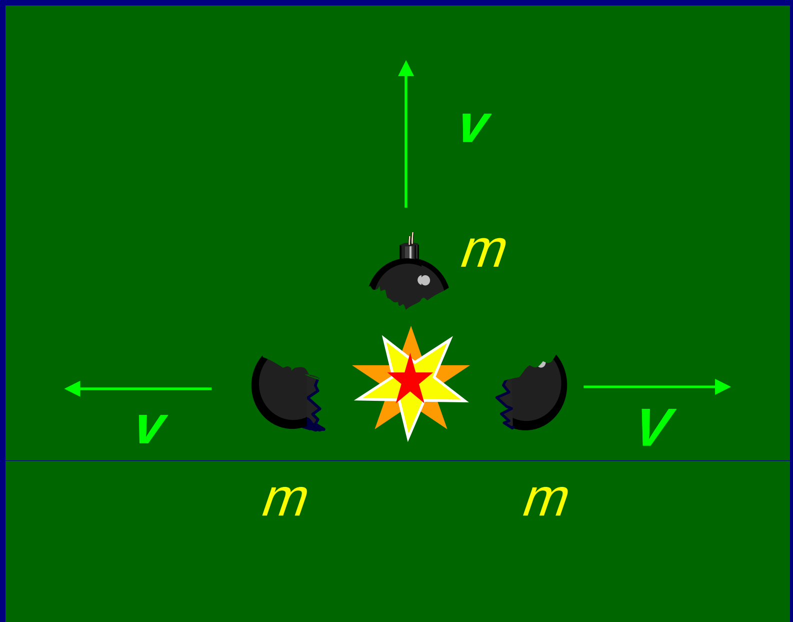
$$\boxed{m_1 v_1 = - m_2 v_2}$$



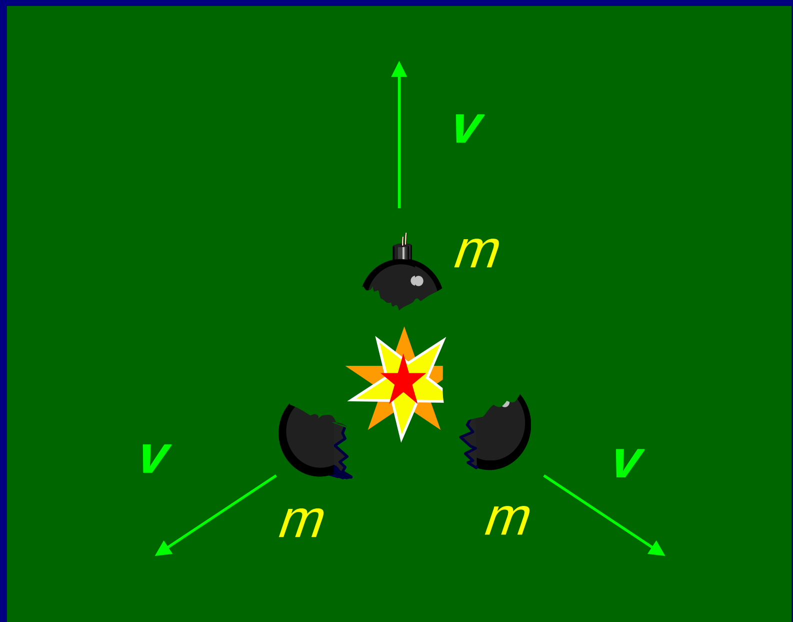
مرکز جرم :

- یک بمب به سه تکه مشابه منفجر می شود .کدام پیکره از سرعت های امکان پذیر است ؟

الف – ۱ ب- ۲ ج - هر دو



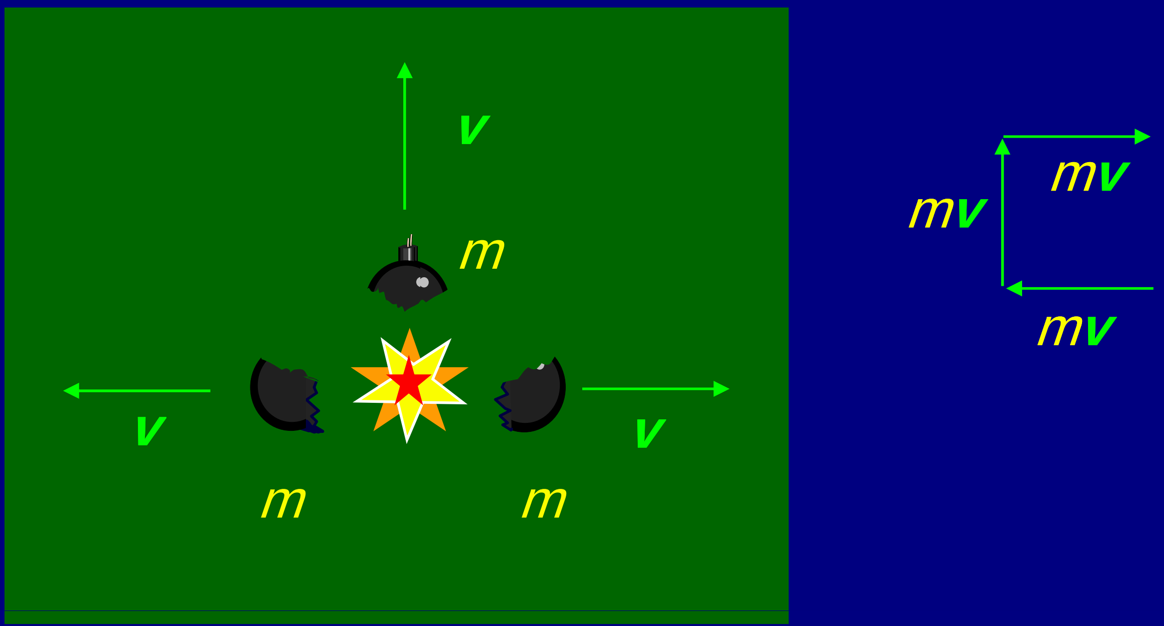
(1)



(2)

مرکز جرم

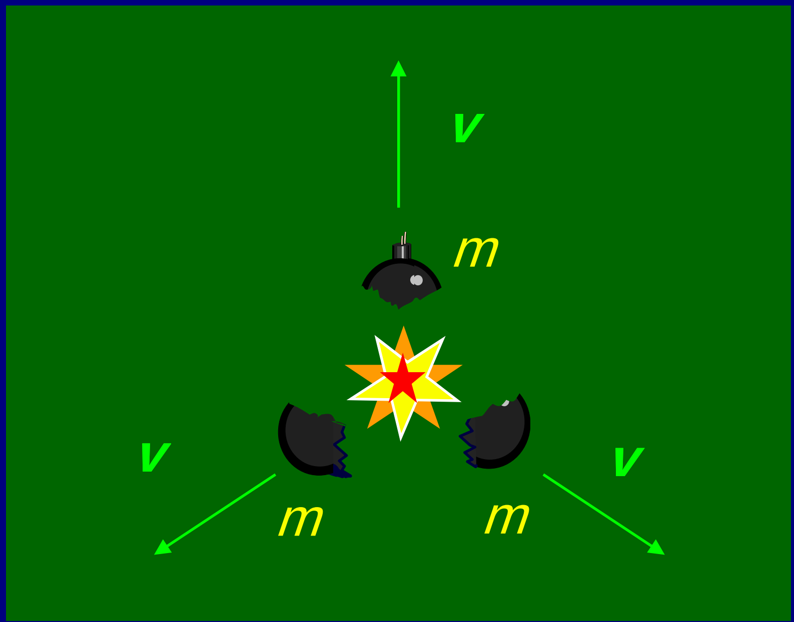
- نیروی خارجی حضور ندارد لذا P باید پایستار باشد.
- در ابتدا $P = 0$:
- در حالت (1) تکانه به سمت بالا خنثی نمی شود لذا $P_{final} \neq 0$ است.



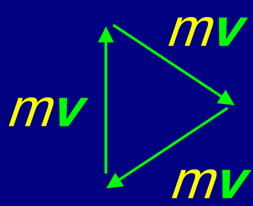
(1)

مرکز جرم

- نیروی خارجی وجود ندارد لذا $\boldsymbol{P}$ باید پایستار باشد.
- تکانه کل صفر است.
- $\boldsymbol{P}_{final} = 0$.



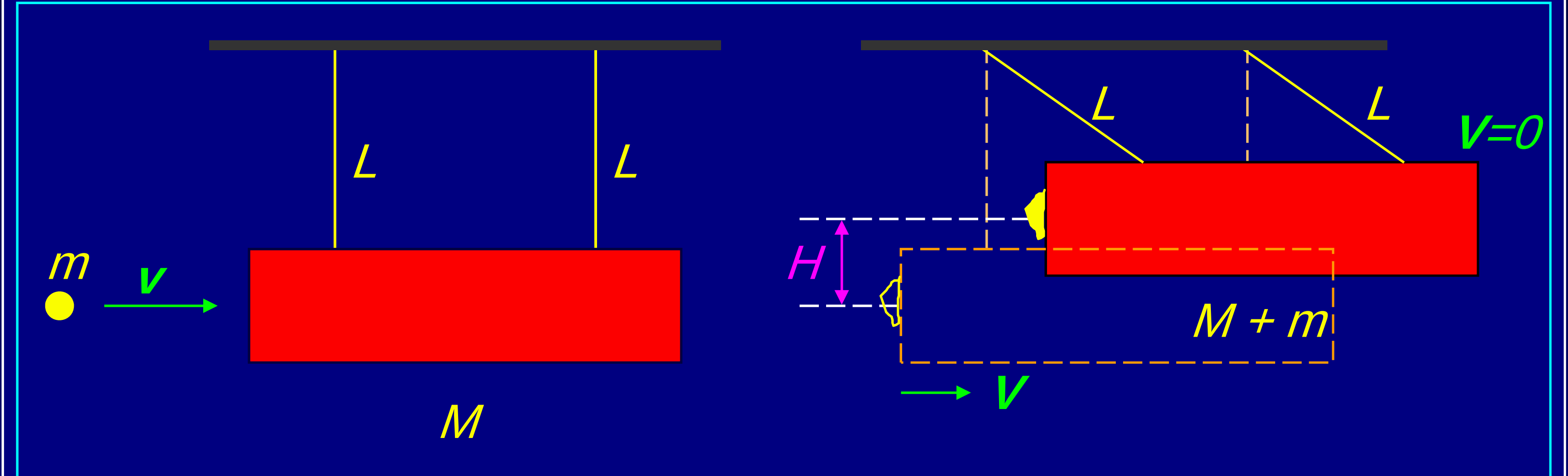
(2)



توضیح در مورد پایستار بودن انرژی

- دیدید که در برخورد غیر کشسان انرژی پایستار نیست .
  - ← انرژی تلف می شود به صورت :
    - « حرارت (بمب)
    - « خم شدن فلز(برخورد دو اتومبیل)
- انرژی جنبشی پایستار نمی ماند زیرا در ضمن برخورد کار انجام می شود.
- در برخورد در صورت عدم حضور نیروی خارجی , تکانه در راستای معین پایستار می ماند.
  - ← به طور کلی تحقق پایستاری تکانه ساده تر از تکانه است .

آونگ بالستیک



- گلوله ای به جرم m که به طور افقی با سرعت v حرکت می کند به تخته چوبی به جرم M که به وسیله طنابی به طول L *آویزان شده است برخورد می کند*. درنتیجه گلوله در تخته فرو رفته و جرم $m + M$, تاارتفاع H *بالا می رود* .

با اندازه گیری H, تندی اولیه v گلوله چقدر خواهد بود؟

آونگ بالستیک

- دو مرحله دراین برخورد وجود دارد::

۱- m با M, به طور غیر کشسان برخورد می کند . بعاز برخورد M و m با سرعت یکسان V حرکت می کنند .

۲- M و mتا ارتفاع H *بالا می روند*, انرژی K+U پایستارمی ماند .
(بعد از برخورد نیروی غیر پایستار ی اثر نمی کند)

آونگ بالستیک

- مرحله یک: تکانه پایستار است

در جهت x: $mv = (m+M)V$

$$\boxed{V = \left(\frac{m}{m+M}\right)v}$$

- مرحله دو: انرژی K+U پایستار است

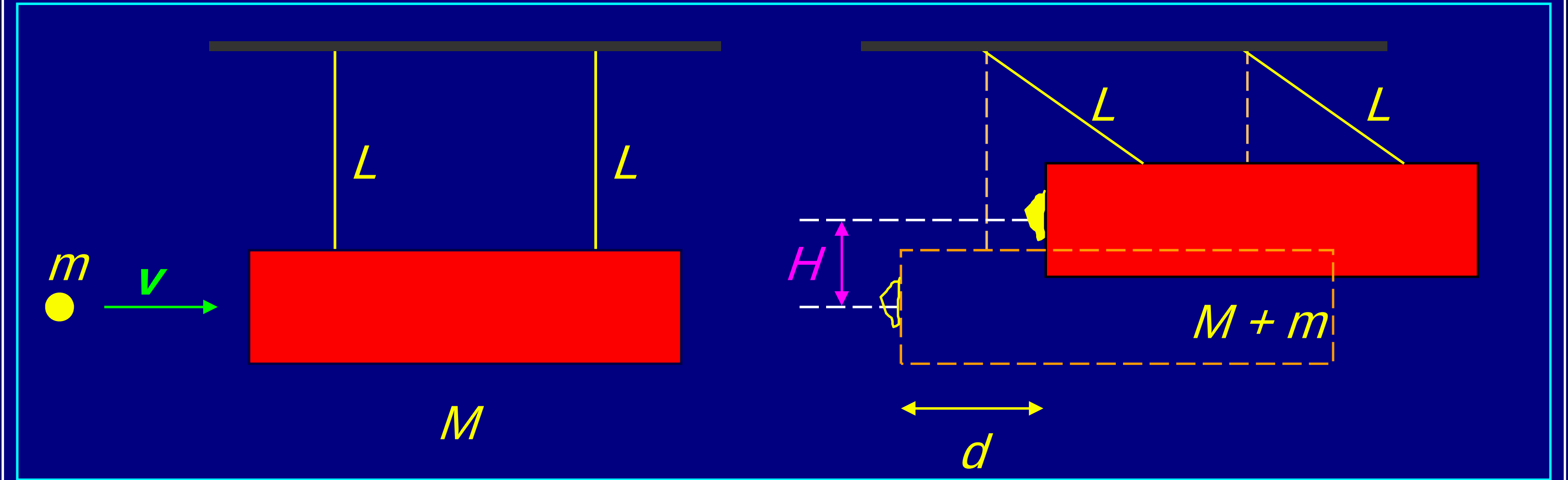
$$(E_I = E_F)$$

$$\tfrac{1}{2}(m+M)V^2 = (m+M)gH \quad \Rightarrow \quad \boxed{V^2 = 2gH}$$

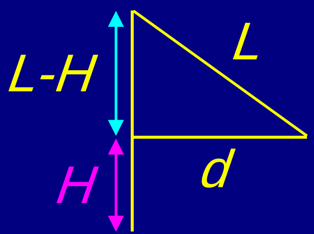
با حذف **V** داریم:

$$\boxed{v = \left(1 + \frac{M}{m}\right)\sqrt{2gH}}$$

آونگ بالستیک



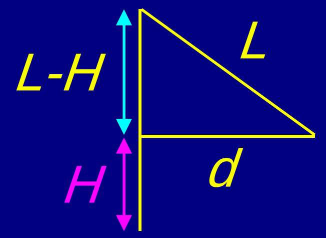
- دراینجا به جای H می‌توان d را اندازه گیری کرد :



$$L^2 = d^2 + (L-H)^2$$

$$H = L - \sqrt{L^2 - d^2}$$

آونگ بالیستیک ...



$$H = L - \sqrt{L^2 - d^2}$$

$$= L - L\sqrt{1 - \frac{d^2}{L^2}} \approx L - L\left(1 - \frac{d^2}{2L^2}\right) \approx \frac{d^2}{2L} \quad \text{for} \quad \frac{d}{L} << 1$$

$$v = \left(1 + \frac{M}{m}\right)\sqrt{2gH} \Rightarrow \boxed{v = \left(1 + \frac{M}{m}\right) d\sqrt{\frac{g}{L}}}$$

به ازای $d << L$

یادآوری نهایی درس امروز...

- پایستاری تکانه
- برخورد کشسان در یک بعد
- برخورد کشسان در دو بعد
- انفجار
- توضیح قانون پایستار بودن انرژی
- آونگ بالستیک
- **کتاب درسی و مسائل آنرا مطالعه کنید!!!**

ادامه فصل نهم و دهم

مطالعه اختیاری

مطالعه این بخش به دانشجویان
رشته فیزیک توصیه می شود!!

درس امروز ما...

- برخورد کشسان در یک بعد
- چهار چوب مرکز جرم
  - مسئله برخورد دو اتومبیل
- چند خاصیت جالب از برخورد کشسان
  - مسئله توپ باسکتبال

پایستاری تکانه :

$$F_{EXT} = \frac{dP}{dt} \qquad \boxed{\frac{dP}{dt} = 0} \qquad F_{EXT} = 0$$

- یکی از بنیادی ترین اصول فیزیک است . پایستاری تکانه اصل
- این یک معادله برداری است

آن را می توان در راستایی که نیروی خارجی وارد نمی شود بکار برد.

- خواهیم دید که قنون پایستاری تکانه حتی اگر انرژی پایستار نباشد نیز درست است .

توضیح در مورد پایستار بودن انرژی

- دیدید که در برخورد غیر کشسان انرژی پایستار نیست .
  - انرژی تلف می شود به صورت :
    - حرارت (بمب)
    - خم شدن فلز(برخورد دو اتومبیل)
- انرژی جنبشی پایستار نمی ماند زیرا در ضمن برخورد کار انجام می شود.
- در برخورد در صورت عدم حضور نیروی خارجی , تکانه در راستای معین پایستار می ماند.
  - به طور کلی تحقق پایستاری تکانه ساده تر از تکانه است .

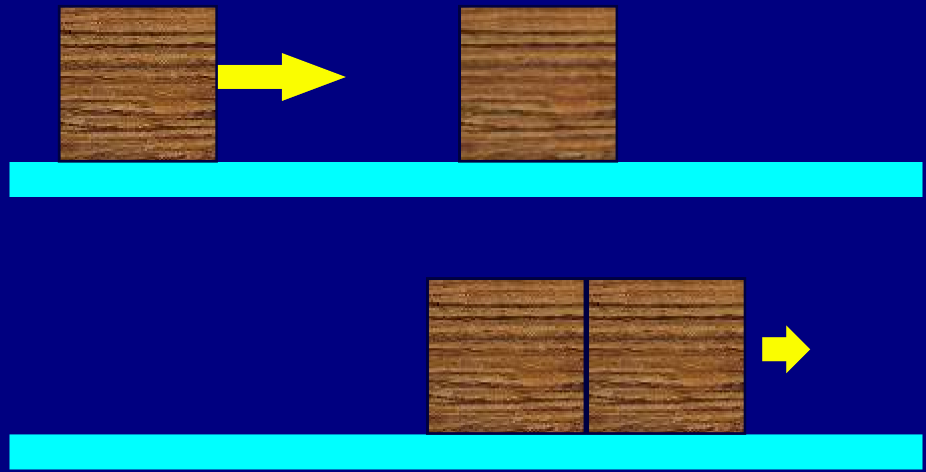
مثال برخورد:

- جعبه ای روی سطح تخت بدون اصطکاکی می لغزد وبا جعبه مشابهی برخورد کرده و به آن می چسبد .
- نسبت انرژی جنبشی اولیه به انرژی جنبشی نهایی سیستم چقدراست؟

(الف) 1

(ب) $\sqrt{2}$

(ج) 2

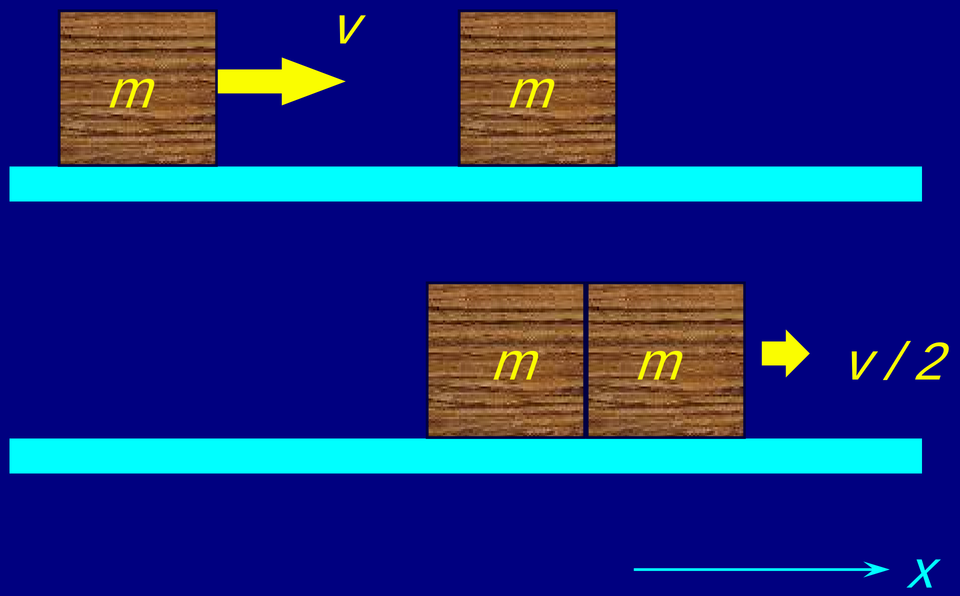


پاسخ:

- هیچ نیروی خارجی در جهت x *اثر نمی کند لذا* , P_X ثابت است.

$$P_I = mv$$

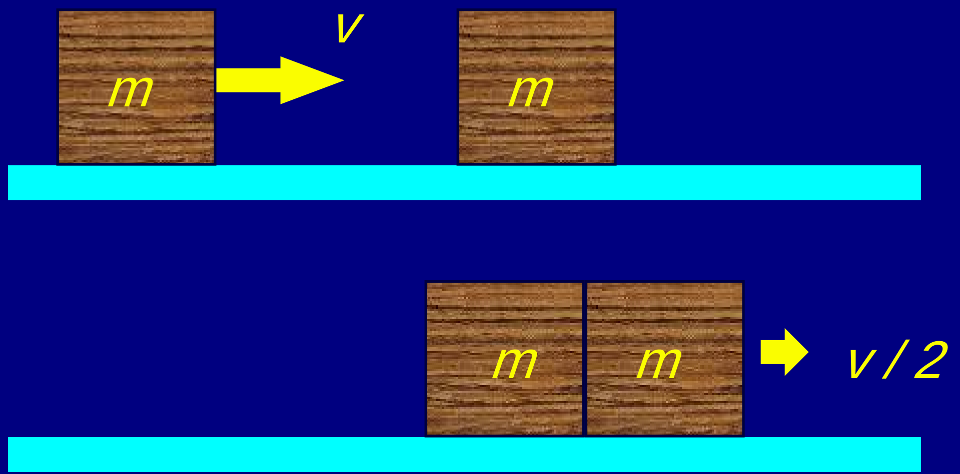
$$P_F = (2m)\left(\frac{v}{2}\right)$$



پاسخ:

- انرژی های جنبشی را محاسبه کنید:

$$K_I = \frac{1}{2}mv^2$$



$$K_F = \frac{1}{2}(2m)\left(\frac{v}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}K_I$$

$$\boxed{\frac{K_I}{K_F} = 2}$$

پاسخ دیگر:

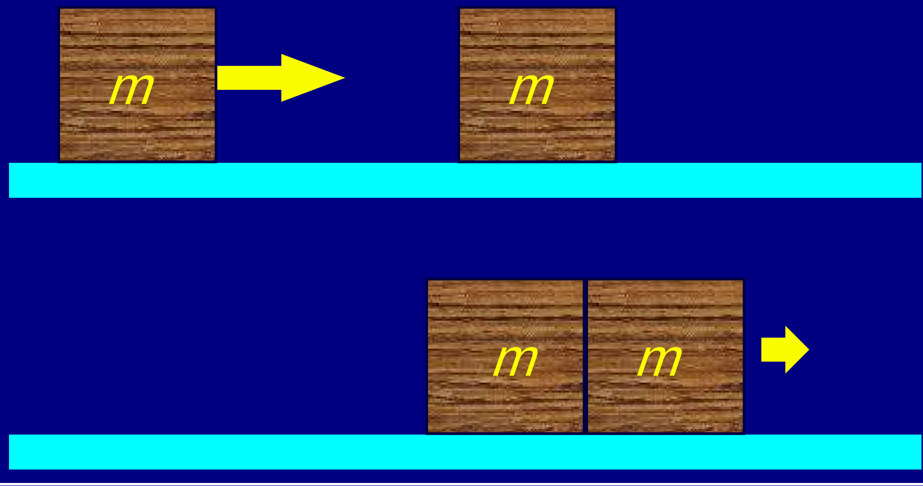
- می توان نوشت:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{P^2}{2m}$$

- Pقبل و بعداز برخورد یکسان است.

- جرم جسم متحرک دوبرابر شده است لذا انرژی جنبشی باید نصف شده باشد.

$$\frac{K_I}{K_F} = 2$$



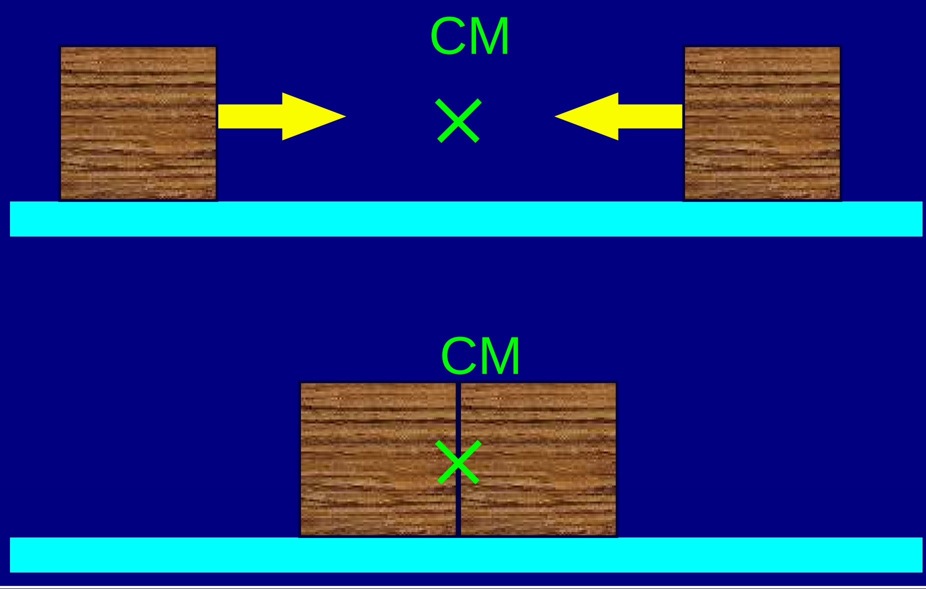
یک سئوائل دیگر:

- آیا امکان دارد که دو جسم به طور غیر کشسان به همدیگر برخورد کنند به طوری که بعداز بر خورد انرژی جنبشی صفر شود؟

ادامه ...

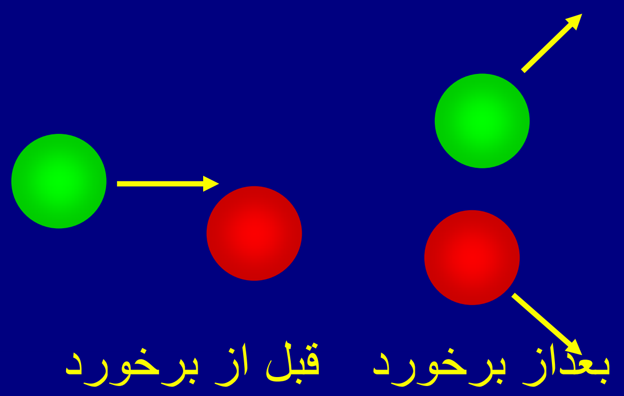
- آیا امکان دارد که دو جسم به طور غیر کشسان به همدیگر برخورد کنند به طوری که بعداز بر خورد انرژی جنبشی صفر شود؟

بلی **:**در صورتی که مرکز جرم حرکت نکند !

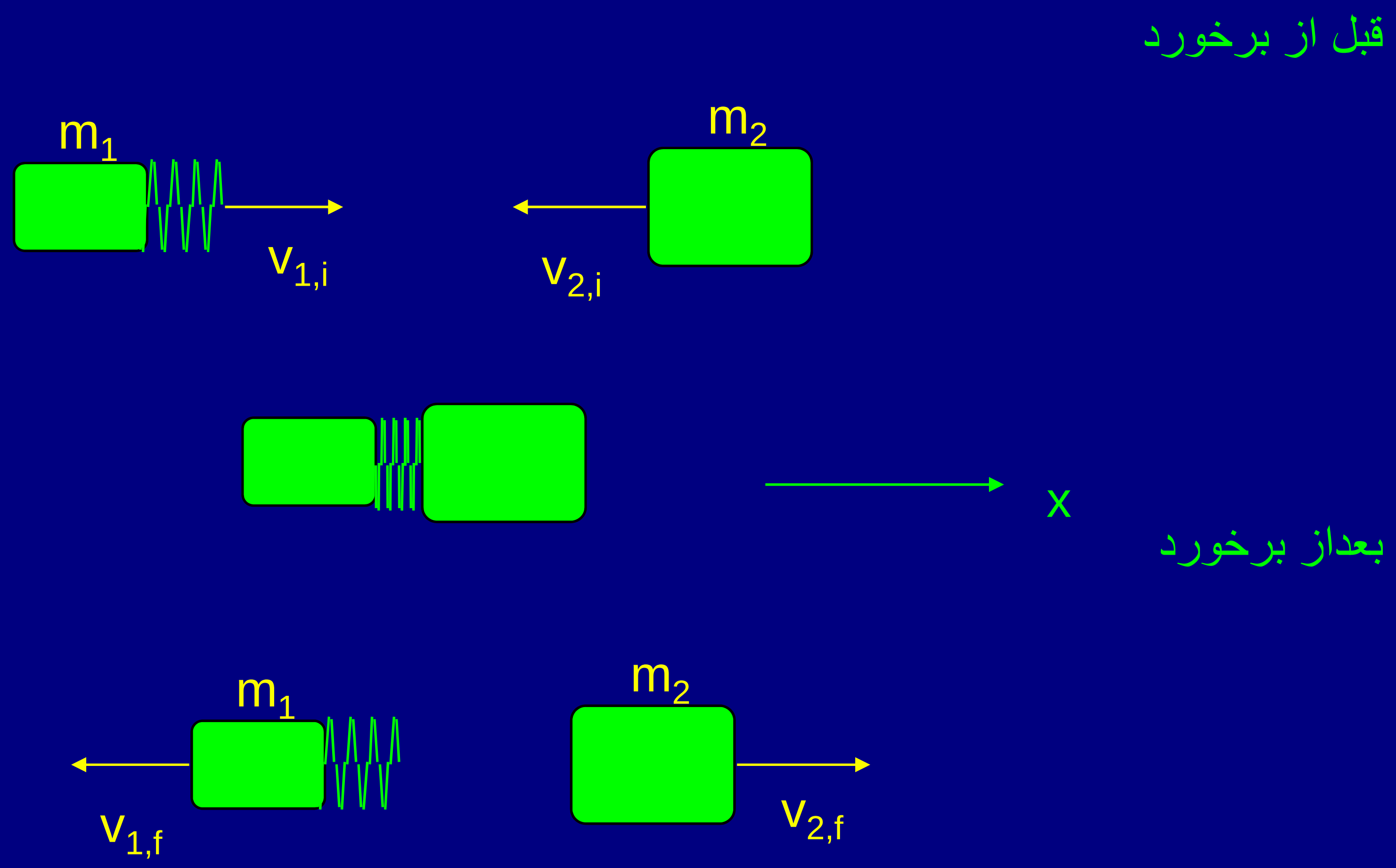


برخوردهای کشسان

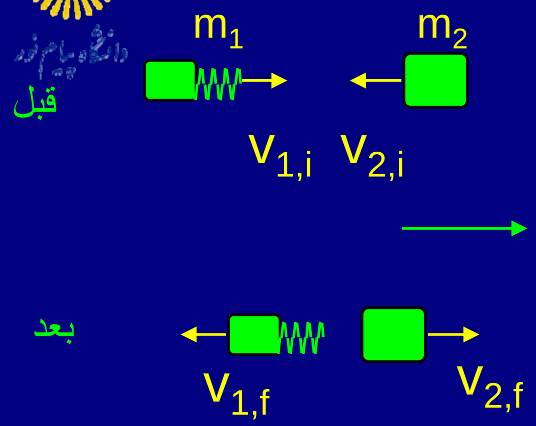
- کشسان یعنی انرژی جنبشی مانند تکانه پایستار است.
- واین سبب قیدهای دیگری می شود:
  - می توان مسائل پیچیده تری را حل کرد!!
  - گلوله های بیلیارد(برخورد دوبعدی)
  - اجسام برخورد کننده بعداز برخورد مانند قبل از برخورد حرکت های جداگانه دارند.
- با حالت یک بعدی شروع می کنیم



برخورد کشسان یک بعدی



برخورد کشسان یک بعدی



P_X پایستار است:

$$m_1v_{1,i} + m_2v_{2,i} = m_1v_{1,f} + m_2v_{2,f}$$

x

انرژی جنبشی پایستار است :

$$\tfrac{1}{2} m_1v^2_{1,i} + \tfrac{1}{2} m_2v^2_{2,i} = \tfrac{1}{2} m_1v^2_{1,f} + \tfrac{1}{2} m_2v^2_{2,f}$$

فرض کنیدکه $v_{1,i}$ و $v_{2,i}$ معلوم باشد
باید $v_{1,f}$ و $v_{2,f}$ را پیداکینیم

مشکلی وجود ندارد زیرا دومعادله و دو مجهول داریم !

برخورد کشسان یک بعدی

- حل اندکی مشکل است زیرا در برگیرنده معادله درجه دوم است!!

$$m_1v_{1,i} + m_2v_{2,i} = m_1v_{1,f} + m_2v_{2,f}$$

$$\tfrac{1}{2}\, m_1v^2_{1,i} + \tfrac{1}{2}\, m_2v^2_{2,i} = \tfrac{1}{2}\, m_1v^2_{1,f} + \tfrac{1}{2}\, m_2v^2_{2,f}$$

- راه حل ساده تر استفاده از چهارچوب مرجع مرکز جرم است

چهارچوب مرکز جرم

- می دانیم که تکانه کل یک سیستم برابراست با سرعت مرکز جرم ضرب در جرم کل سیستم:

$$P_{NET} = MV_{CM}.$$

- همچنین در باره چهاچوب های مرجعی که نسبت به هم با سرعت ثابت حرکت می کنند بحث کردیم.

- اکنون فرض کنید که درچهارچوب مرجعی قرار داشته باشید که در آن مرکز جرم ثابت باشد. .این چهارچوب را چهارچوب مرجع مرکز جرم می گویند.

➔در چهارچوب مرکز جرم $V_{CM} = 0$, *است (برطبق تعریف)* وبنابراین :

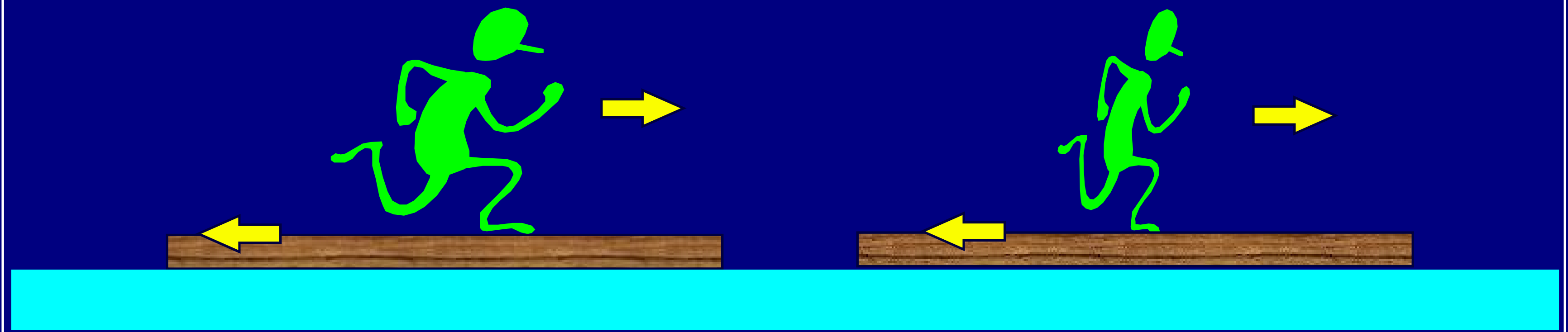
$$P_{NET} = 0.$$

نیرو و تکانه

- دو مرد یکی سنگین تر از دیگری روی دو تخته چوب قرار دارند. .این دو تخته چوب روی یک دریاچه یخ بسته بدون اصطحکاک قرار دارند
- این دو مرد با سرعت مساوی شروع به دویدن می کنند..

کدام مرد نسبت به دریاچه تندتر می دود؟

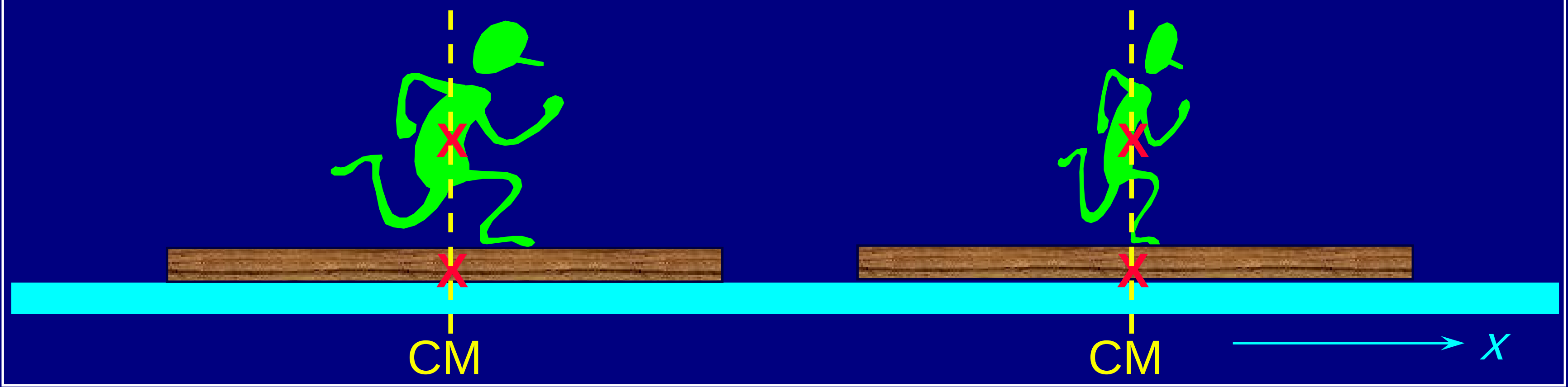
سنگین تر (الف)   سبک تر (ب)   یکسان (ج)



پاسخ مفهومی

- نیروی خارجی در جهت x صفراست (بدون اصطکاک) :

  ← لذا مرکز جرم سیستم نمی تواند حرکت کند!



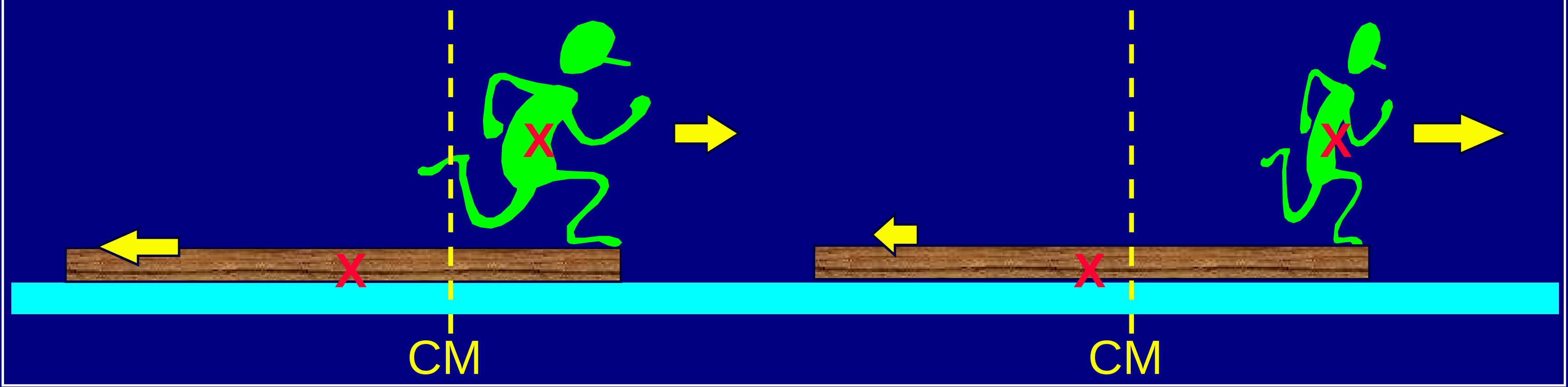
ادامه...

- نیروی خارجی در جهت x صفراست (بدون اصطکاک) :

  ←لذا مرکز جرم سیستم نمی تواند حرکت کند!!

- این دو مرد هم زمان به انتهای تخته می رسند ولی مرد سبک تر دراین لحظه فاصله کمتری با مرکز جرم خواهد داشت ..

- مرد سبکتر سرعت بیشتری نسبت به سطح یخ زده خواهد داشت.!



پاسخ ریاضی :

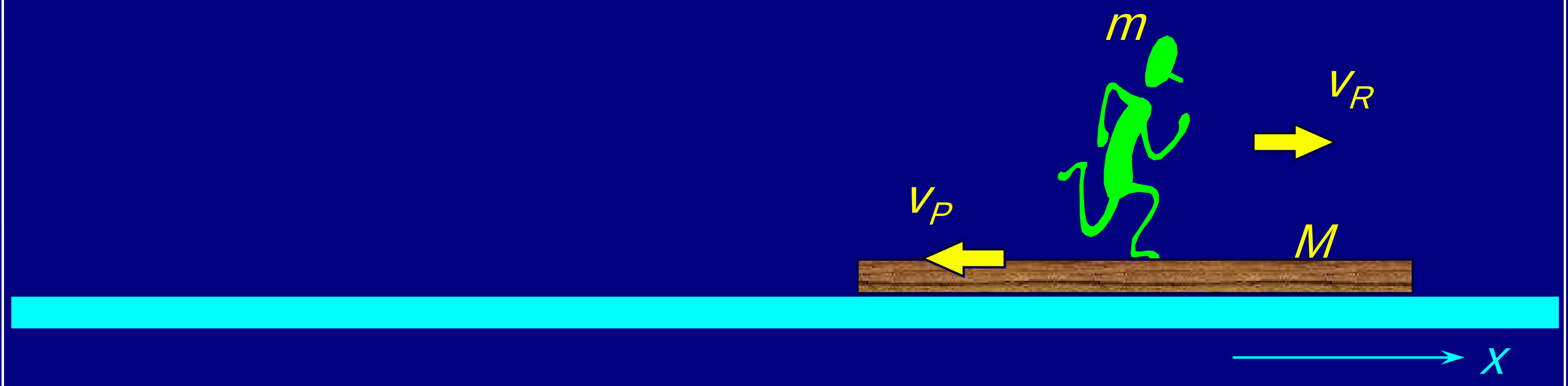
- یکی از سیستم های تخته – مرد را درنظر بگیرید.:
- هیچ نیروی خارجی در جهت x وجود ندارد:

⬅تکانه در جهت x پایستار است!

⬅تکانه کل اولیه صفر است لذا باید همین طور باقی بماند.

⬅ما به دونده از چهارچوب مرجع مرکز جرم نگاه می کنیم!

- فرض کنیدکه جرم دونده m وجرم تخته M باشد
- فرض کنید که جرم مرد و تخته نسبت به یخ به ترتیب برابر با V_R و V_Pباشد.



پاسخ ریاضی :

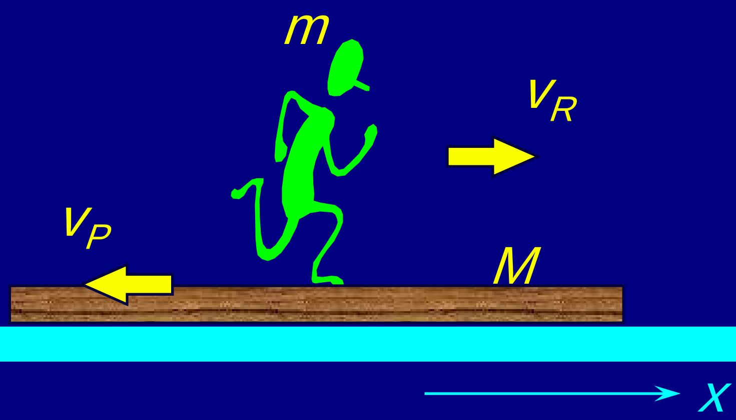
- تندی دونده نسبته به تتخته برابراست با $V = v_R + v_P$ (یرای هردو دونده یکسان است)
.

از پایستاربودن تکانه: $Mv_P = mv_R$

با قرار دادن $v_P = V - v_R$ دراین رابطه داریم:

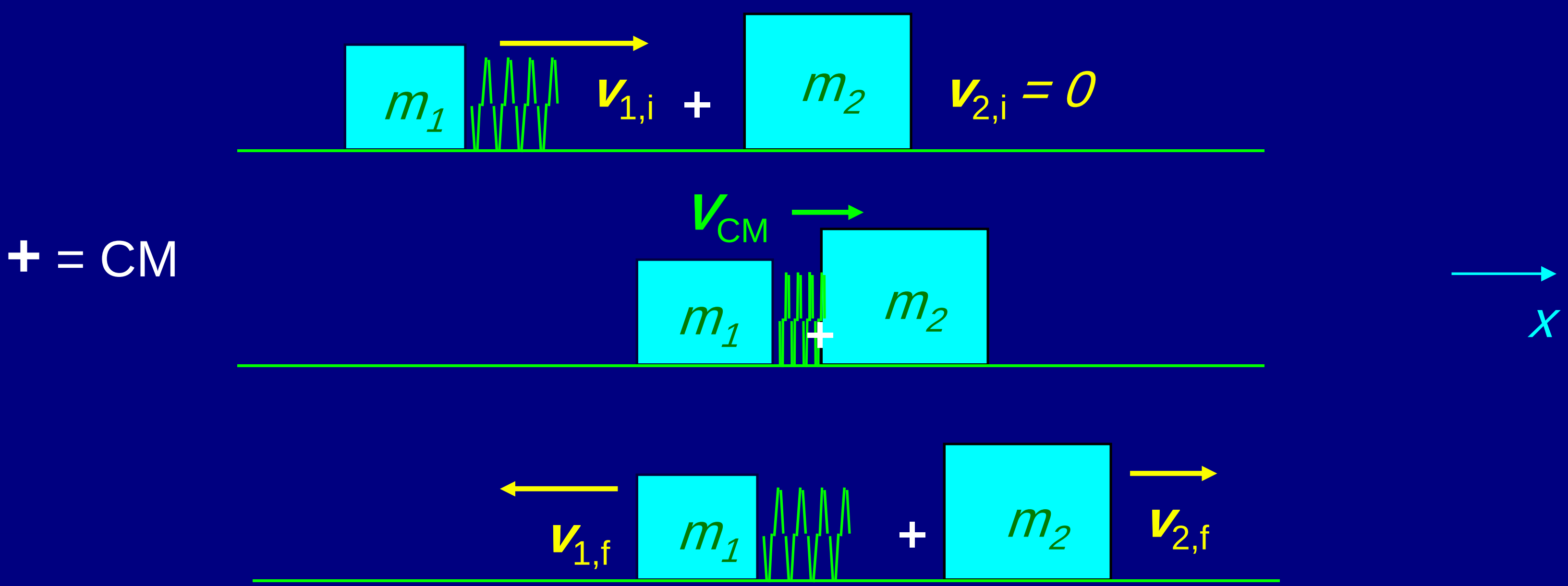
$$\boxed{v_R = V\frac{M}{m+M}}$$

بنابراین v_R بزرگتر است اگر m کوچکتر باشد.



مثال ۱ : کاربرد چهارچوب مرجع مرکز جرم

- یک لغزنده به جرم $m_1 = 0.2\ kg$ روی مسیر بدون اصطکاکی با سرعت $v_{1,i} = 1.5\ m/s$ می‌لغزد ویا یک لغزنده به جرم $m_2 = 0.8\ kg$ برخورد می‌کند. در ضمن این برخورد فنری که به لغزنده اول متصل است فشرده شده و باز می شود ولی هیچ گونه اصطکاکی وجود ندارد, (یعنی انرژی پایستار است). سرعت های نهایی چقدر است؟



ادامه مثال ۱...

- یک روش چهار مرحله ای

مرحله یک:

ابتدا سرعت مرکز جرم را بدست آورید V_{CM} :

» $V_{CM} = \left(\dfrac{1}{m_1 + m_2}\right)(m_1 v_{1,i} + m_2 v_{2,i})$,

» ولی $v_{2,i} = 0$ *است لذا:*

(فقط برای $v_{2,i} = 0$)

$$\boxed{V_{CM} = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1,i}}$$

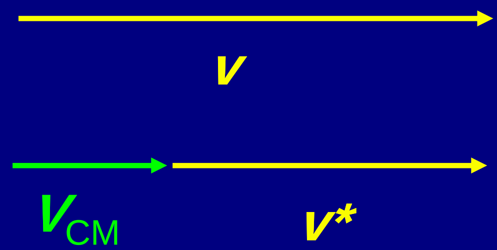
- بنابراین : $V_{CM} = {}^{1}/_{5}\,(1.5\ m/s) = 0.3\ m/s$

ادامه مثال ۱...

- اگر سرعت مرکز جرم در چهارچوب مرجع " آزمایشگاهی " V_{CM} باشد , وسرعت همین ذره در این چهارچوب v ***باشد***, دراینصورت سرعت ذره در چهارچوب مرجع مرکز جرم برابر خواهد بود با: v^* و:

$$v^* = v - V_{CM}$$

(که v^*, v, V_{CM} بردار هستند)



ادامه مثال ۱...

مرحله دو

← سرعت هارا در چهارچوب مرجع مرکز جرم حساب کنید:
کلیه سرعت ها در جهت x

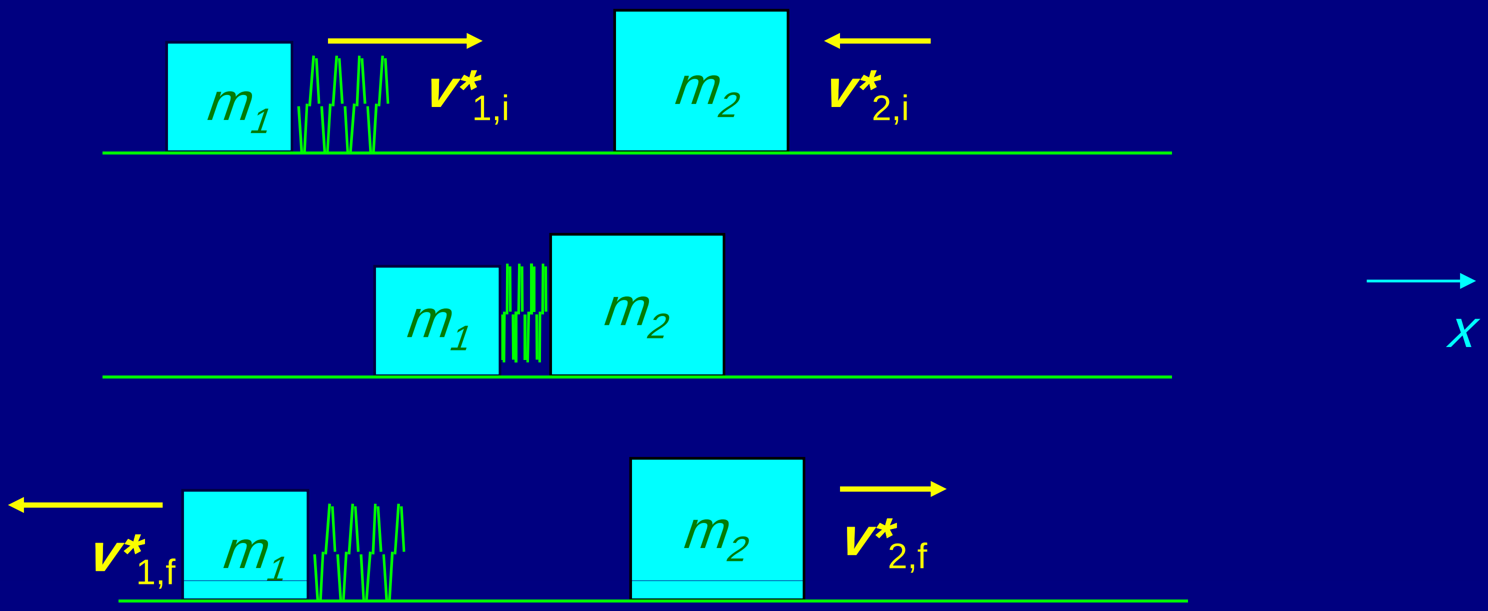
$$v^*_{1,i} = v_{1,i} - V_{CM} = 1.5 \text{ m/s} - 0.3 \text{ m/s} = 1.2 \text{ m/s}$$

$$v^*_{2,i} = v_{2,i} - V_{CM} = 0 \text{ m/s} - 0.3 \text{ m/s} = -0.3 \text{ m/s}$$

$$\boxed{\begin{aligned} v^*_{1,i} &= 1.2 \text{ m/s} \\ v^*_{2,i} &= -0.3 \text{ m/s} \end{aligned}}$$

ادامه مثال ۱ ....

- اکنون برخورد را از نگاه چهارچوبی که باسرعت V_{CM} حرکت می کند نگاه کنید.(چهارچوب مرکز جرم)



انرژی در برخورد کشسان...

- از پایستاربودن انرژی برای مرتبط کردن سرعت های اولیه ونهایی به همدیگر استفاده کنید
- انرژی جنبشی کل در چهارچوب مرکز جرم قبل و بعداز برخورد با هم مساوی هستند.

$$\frac{1}{2m_1}m_1^2 v^{*2}_{1,i} + \frac{1}{2m_2}m_2^2 v^{*2}_{2,i} = \frac{1}{2m_1}m_1^2 v^{*2}_{1,f} + \frac{1}{2m_2}m_2^2 v^{*2}_{2,f}$$

- ولی تکانه کل صفر است :

$$\Rightarrow \quad (m_1 v^*_{1,i})^2 = (m_2 v^*_{2,i})^2$$

- بنابراین :

$$\left(\frac{1}{2m_1}+\frac{1}{2m_2}\right)m_1^2 v^{*2}_{1,i} = \left(\frac{1}{2m_1}+\frac{1}{2m_2}\right)m_1^2 v^{*2}_{1,f}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v^{*2}_{1,i} = v^{*2}_{1,f}}$$

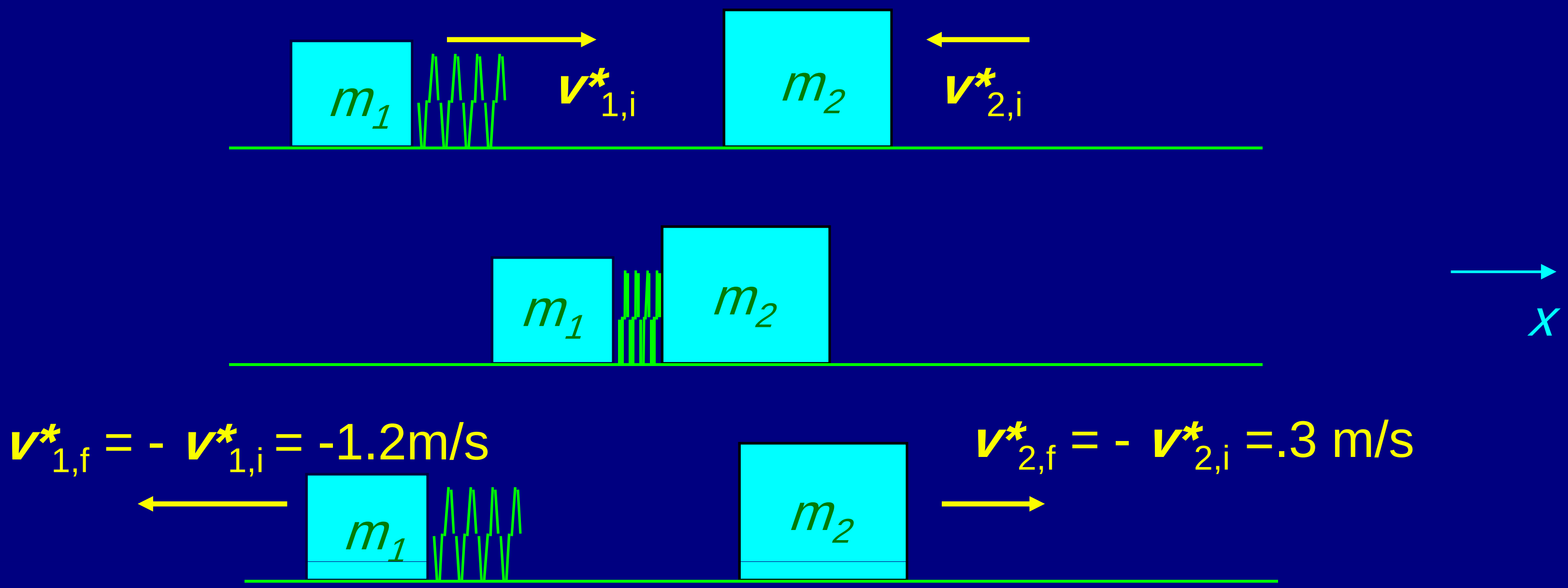
بنابراین در برخورد یک بعدی :

$$v^*_{1,f} = -v^*_{1,i} \qquad v^*_{2,f} = -v^*_{2,i}$$

ادامه مثال ۱...

مرحله ۳

$v^*_{1,f} = -v^*_{1,i}$ $\qquad$ $v^*_{2,f} = -v^*_{2,i}$



$v^* = v - V_{CM}$

ادامه مثال ۱...

مرحله ۴

اکنون سرعت های نهایی را با استفاده از رابطه زیر در چهارچوب مرجع آزمایشگاهی محاسبه می کنیم:

$$v = v^* + V_{CM}$$

$$v_{1,f} = v^*_{1,f} + V_{CM} = -1.2 \text{ m/s} + 0.3 \text{ m/s} = -0.9 \text{ m/s}$$

$$v_{2,f} = v^*_{2,f} + V_{CM} = 0.3 \text{ m/s} + 0.3 \text{ m/s} = 0.6 \text{ m/s}$$

$$\boxed{\begin{aligned} v_{1,f} &= -0.9 \text{ m/s} \\ v_{2,f} &= 0.6 \text{ m/s} \end{aligned}}$$

درمراحل ساده لزومی ندارد که معادله درجه دوم را حل کنید!!

حرکت بین چها رچوب های مرجع متحرک

- دو اتومبیل مشابه روی جاده مستقیمی به طرف همدیگر در حرکت هستند. .اتومبیل قرمز دارای سرعت *40 mi/hr* بوده به سمت چپ حرکت می کندو اتومبیل سبز دارای سرعت *80 mi/hr* بوده و به راست حرکت می نماید.

سرعت این اتومبیل ها در چهارچوب مرجع مرکز جرم چقدر است؟

(a) $V_{RED} = -20$ mi/hr, $V_{GREEN} = +20$ mi/hr

(b) $V_{RED} = -20$ mi/hr, $V_{GREEN} = +100$ mi/hr

(c) $V_{RED} = -60$ mi/hr, $V_{GREEN} = +60$ mi/hr

حرکت بین چها رچوب های مرجع متحرک

- سرعت مرکز جرم برابر است با:

$$V_{CM} = \frac{m \cdot 80 - m \cdot 40}{2m} \; mi / hr$$

$$= 20 \; mi / hr$$

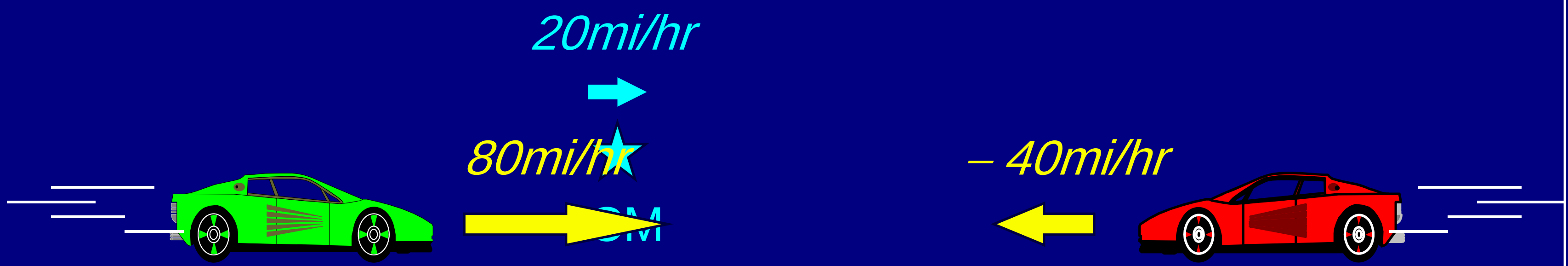
- بنابراین

$$V_{GREEN,CM} = 80 \; mi/hr - 20 \; mi/hr = 60 \; mi/hr$$

- لذا

$$V_{RED,CM} = -\,40 \; mi/hr - 20 \; mi/hr = -\,60 \; mi/hr$$

- سرعت های مرکز جرم مساوی و مخالف هم هستند زیرا $P_{NET} = 0$!!!



مسئله ای جنبی :

- به عنوان یک اقدام ایمنی شرکت اتومبیل سازی Volvo, به سپرهای جلو اتومبیل های تولیدی خود فنری اضافه کرده است تادر صورت برخورد رو در رو برخورد کشسان باشد .اگر دو اتومبیل به این وسیله ایمنی مجهز شده باشند سرعت های بعداز برخورد آنها در چهارچوب مرجع آزمایشگاهی چقدر خواهد بود؟

پاسخ مسئله جنبی :

$$v^*_{GREEN,i} = 60\ mi/hr$$

$$v^*_{RED,i} = -60\ mi/hr$$

$$v^*_{GREEN,f} = -v^*_{GREEN,i} \qquad v^*_{RED,f} = -v^*_{RED,i}$$

$$v^*_{GREEN,f} = -60\ mi/hr \qquad v^*_{RED,f} = 60\ mi/hr$$

$$v' = v^* + V_{CM}$$

$$v'_{GREEN,f} = -60\ mi/hr + 20\ mi/hr = -40\ mi/hr$$

$$v'_{RED,f} = 60\ mi/hr + 20\ mi/hr = 80\ mi/hr$$

خلاصه :کاربرد چهارچوب مرجع جرم

مرحله ۱: تعیین سرعت مرکز جرم

$$V_{CM} = \left(\frac{(m_1\mathbf{v}_{1,i} + m_2\mathbf{v}_{2,i})}{m_1 + m_2}\right)$$

مرحله ۲: محاسبه سرعت های اولیه در چهارچوب مرکز جرم

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{v} - \mathbf{V}_{CM}$$

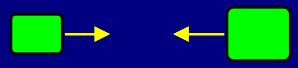
مرحله ۳: محاسبه سرعت های نهایی در چهارچوب مرکز جرم

$$v^*_f = -v^*_i$$

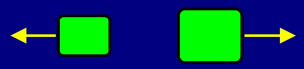
مرحله ۴: محاسبه سرعت ها در چهارچوب مرجع آزمایشگاهی

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^* + \mathbf{V}_{CM}$$

یک واقعیت جالب



$v^*_{1,i}$ $v^*_{2,i}$



$v^*_{1,f} = -v^*_{1,i}$ $v^*_{2,f} = -v^*_{2,i}$

- نشان دادیم که تندی یک جسم در چهارچوب مرکز جرمقبل وبعداز برخورد برابراست حتی اگر جهت تغییر کند..

- بنابراین تندی نسبی دو جسم قبل و بعداز برخورد مساوی ومختلف الجهت است .
$(v^*_{1,i} - v^*_{2,i}) = -(v^*_{1,f} - v^*_{2,f})$

- ولی چون اندازه گیری تفاوت تندی ها به چهارچوب مرجع بستگی ندارد می توانیم بگوییم که
تندی نسبی دو جسم قبل و بعداز برخورد, **در هر چهارچوب مرجعی مساوی و مختلف الجهت هستند. .**

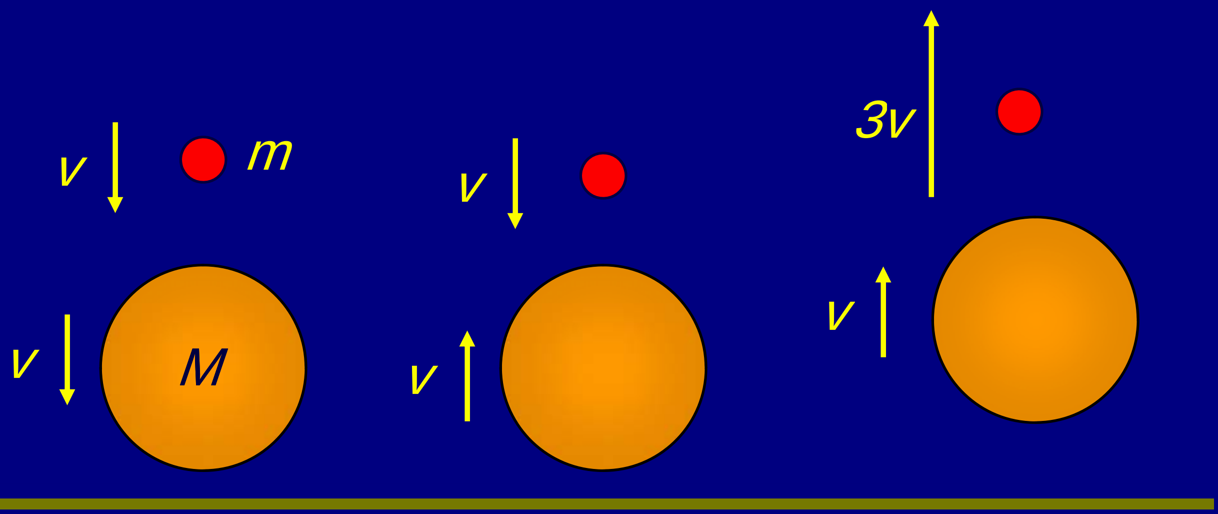
$\Leftarrow$آهنگ دور شدن = آهنگ نزدیک شدن

This is really cool and useful too!

مسئله توپ باسکتبال

- به دقت یک توپ لاستیکی کوچکی (جرم m) را روی یک توپ باسکتبال بسیاربزرگ تر (جرم M) قرار دهید .این توپ ها را از ارتفاع یکسانی رها کنید . ارتفاع "برگشت" توپ کوچک تر ~ 9 برابر ارتفاع اولیه است !! (فرض کنیدکه $M >> m$ وکلیه برخوردها کشسان باشد) .

← این مسئله را با توجه به اینکه " تندی نزدیک شدن = تندی دورشدن" دوجسم است توجیه کنید.



(a) (b) (c)

توضیح بیشتری درباره ا نرژی

- انرژی جنبشی کل سیستم را در چهارچوب مرجع آزمایشگاهی در نظر بگیرید :

$$E_{LAB} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

ولی:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{V}_{CM} + \mathbf{v^*}_1$$
$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{V}_{CM} + \mathbf{v^*}_2$$

بنابراین:

$$v_1^2 = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = V_{CM}^2 + v^{*2}_1 + 2\mathbf{V}_{CM} \cdot \mathbf{v^*}_1$$

(همچنین برای v_2)

$$E_{LAB} = \underbrace{\frac{1}{2} m_1 v^{*2}_1 + \frac{1}{2} m_2 v^{*2}_2}_{= K_{REL}} + \underbrace{\frac{1}{2}(m_1 + m_2) V_{CM}^2}_{= K_{CM}} + \mathbf{V}_{CM} \cdot \underbrace{(m_1 \mathbf{v^*}_1 + m_2 \mathbf{v^*}_2)}_{= P_{NET,CM} = 0}$$

توضیح بیشتری درباره ا نرژی

- انرژی جنبشی کل سیستم را در چهارچوب مرجع آزمایشگاهی در نظر بگیرید:

$$E_{LAB} = \underbrace{\frac{1}{2}m_1 v^{*2}_1 + \frac{1}{2}m_2 v^{*2}_2}_{= K_{REL}} + \underbrace{\frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2_{CM}}_{= K_{CM}}$$

بنابراین $E_{LAB} = K_{REL} + K_{CM}$

K_{CM} انرژی جنبشی مرکز جرم است.

K_{REL} انرژی جنبشی حرکت “نسبی” درچهارچوب مرجع مرکز جرم است.

واین نه تنها برای حرکت یک بعدی بلکه به طور کلی صحیح است!!!

توضیح بیشتری درباره ا نرژی

$E_{LAB} = K_{REL} + K_{CM}$

- آیا انرژی کل به چهار چوب مرجع بستگی دارد؟؟؟

- بلی شرط را بردید!! !

K_{REL} مسقل از چهارچوب مرجع است ولی K_{CM} بستگی به چهارچوب مرجع دارد(ودر چهارچوب مرجع مرکز جرم برابر با صفر است)

یادآوری نهایی درس

- برخورد کشسان در یک بعد
- چهار چوب مرکز جرم
  - مسئله برخورد دو اتومبیل
- چند خاصیت جالب از برخورد کشسان
  - مسئله توپ باسکتبال
  -
- باحل مسائل کتا ب درسی خودرا بیازمایید!!

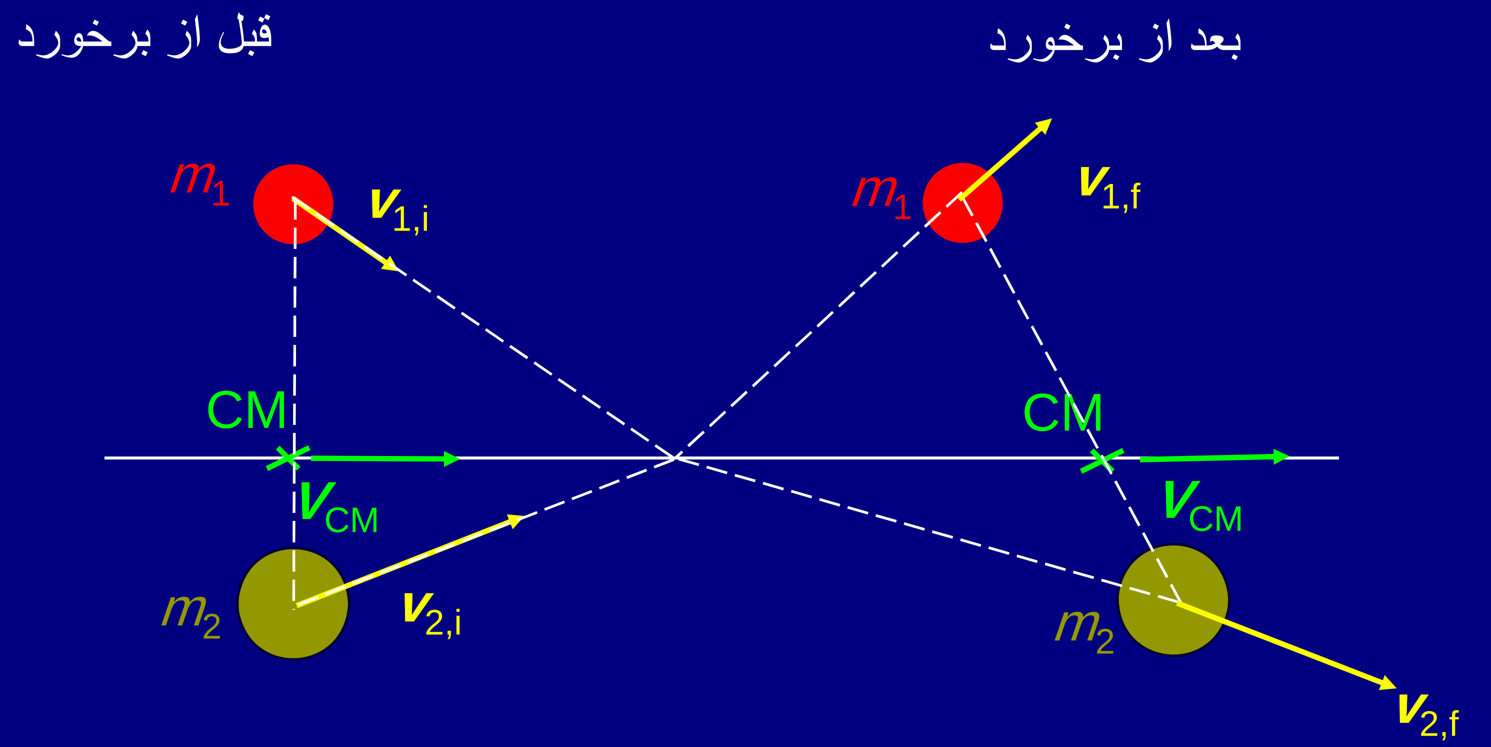
درس امروز ما...

- برخورد کشسان در دو بعد
- چند مثال (پراکندگی هسته ای وتوپ بیلیارد)

مطالعه اختیاری

- **تکان و نیروی متوسط تکان**

برخورد دو جسم در دو بعد



V_{CM} ثابت است زیرا P پایستار است !!

انرژی در برخوردهای کشسان ...

از درس قبل بیاد بیاورید:

$$v^*_{1,i}{}^2 = v^*_{1,f}{}^2$$

و این در یک بعد به این معنا است:

$$v^*_{1,f} = -v^*_{1,i} \qquad v^*_{2,f} = -v^*_{2,i}$$

در حرکت دو ویا چند بعدی :

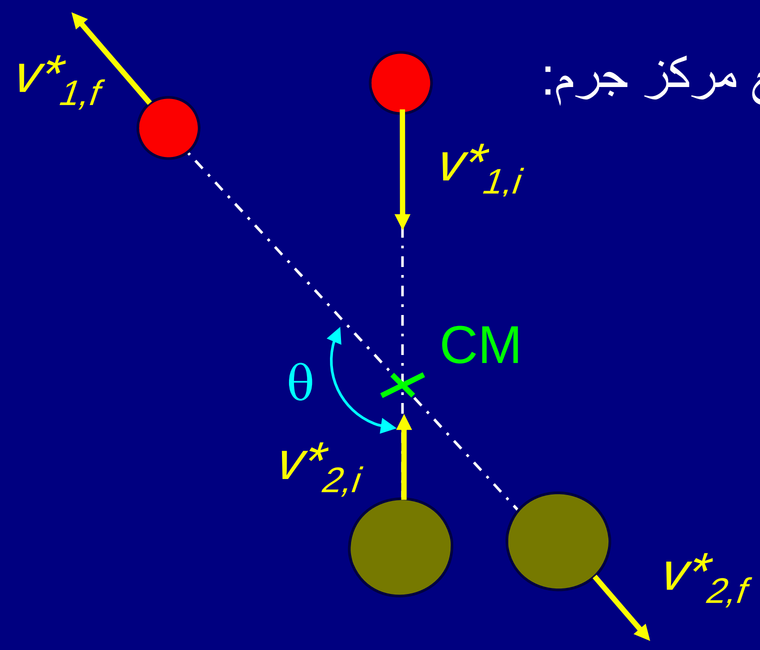
$$\boxed{\left|v^*_{1,i}\right| = \left|v^*_{1,f}\right| \qquad \left|v^*_{2,i}\right| = \left|v^*_{2,f}\right|}$$

برخوردهای کشسان:

- بنابراین می بینیم که:

$$|V^*_{2,i}| = |V^*_{2,f}| \qquad |V^*_{1,i}| = |V^*_{1,f}|$$

چهارچوب مرجع مرکز جرم:



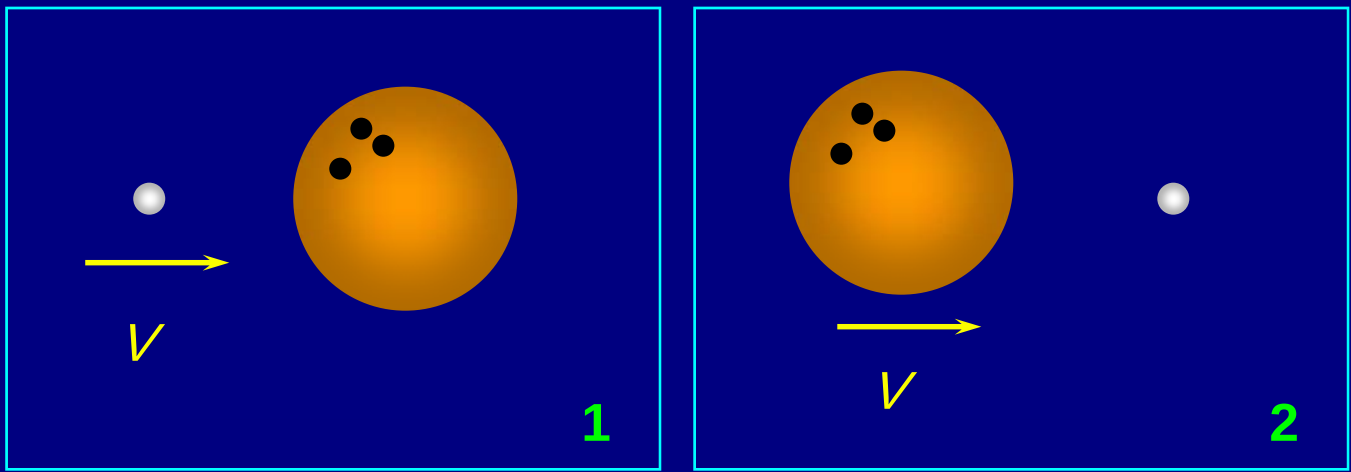
θ = "زاویه پراکندگی"

تمرین: برخوردهای کشسان

- دوبرخورد کشسان زیر را در نظر بگیرید .در 1, یک توپ گلف با سرعت V حرکت می کند و به طور رودررو به یک توپ ساکن برخورد می کند .در 2, یک توپ بولینگ با سرعت V حرکت می کند وبا یک توپ گلف برخورد میکند.

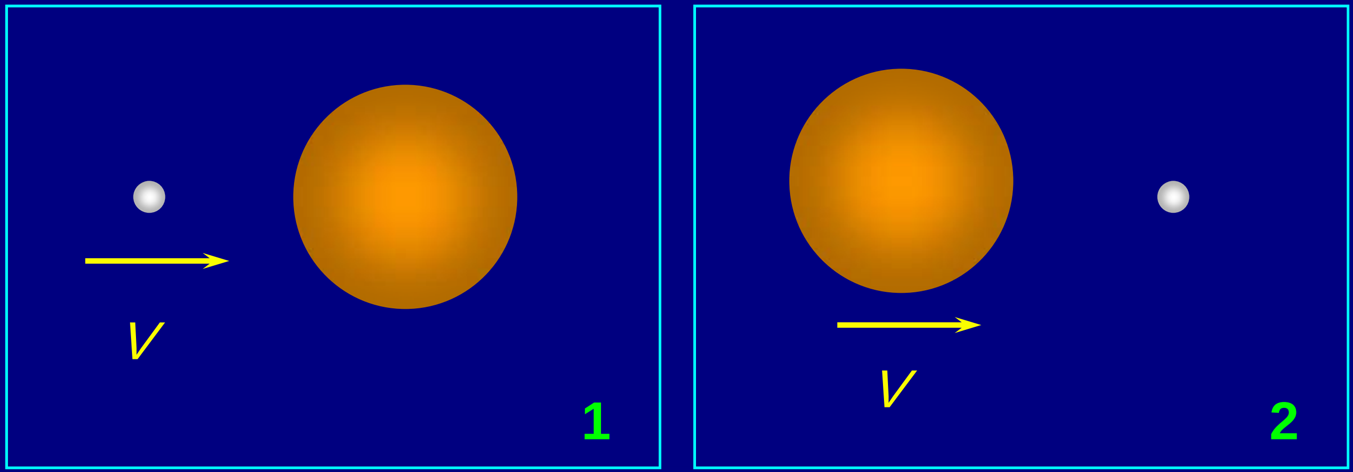
کدام حالت بعداز برخورد توپ گلف سرعت بیشتری دارد؟

(الف) یکسان (ب) 2 (ج) 1



پاسخ:

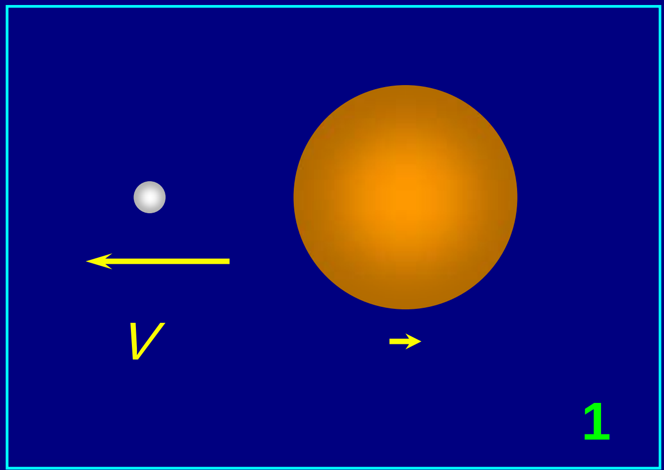
- تندی نزدیک شدن دوجسم قبل از برخورد کشسان برابر با سرعت دورشدن آنها بعداز برخورد است .
  - چون توپ بولینگ بسیار سنگین تراز سرعت گلف است بنابراین سرعت آن در هردو حالت تغییر زیادی نخواهدکرد .

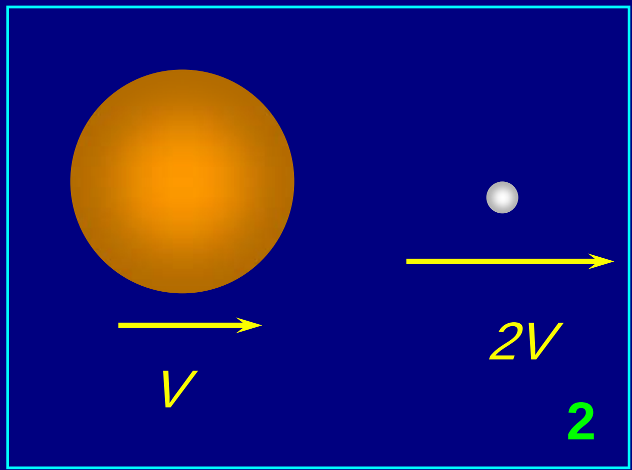


پاسخ:

- درحالت **1** توپ بولینگ تقریبا ساکن می ماند ولی توپ گلف با سرعت V برمی‌گردد.

- درحالت **2** توپ بولینگ با سرعت V به حرکت خود *ادامه* می دهد
و توپ گلف سرعت آن $2V$ *می شود* .





برخورد دو جسم در دو بعد

- فرض کنید که سرعت های قبل از برخورد رابدانیم .
- می خواهیم اطلاعاتی در وضعیت بعد از برخورد بدست آوریم..

← این کمیت هارا $v_{1x,\mathrm{f}}$, $v_{1y,\mathrm{f}}$, $v_{2x,\mathrm{f}}$, $v_{2y,\mathrm{f}}$ *را می خواهیم پیدا کنیم*

- این اطلاعات را نیز داریم:

← دربرخورد کشسان انرژی جنبشی و نیز تکانه سیستم پایستار است .بنابراین سه معادله زیر را داریم :

$$E_{\mathrm{f}} = E_{\mathrm{i}}$$

$$P_{x,\mathrm{f}} = P_{x,\mathrm{i}}$$ (که $P_x = p_{1x} + p_{2x} = m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}$ وغیره است)

$$P_{y,\mathrm{f}} = P_{y,\mathrm{i}}$$

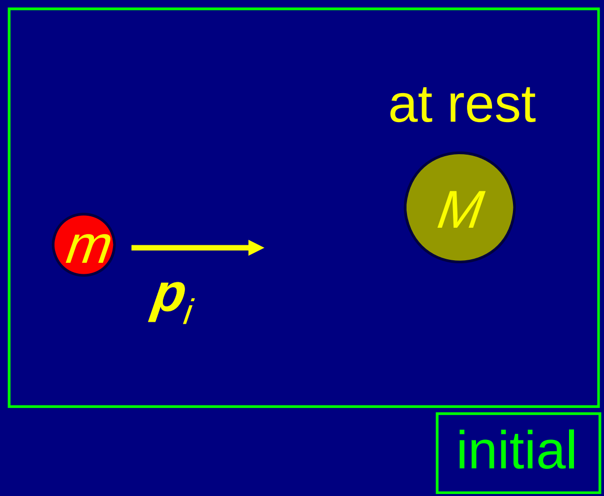
سه معادله و چهار مجهول داریم :

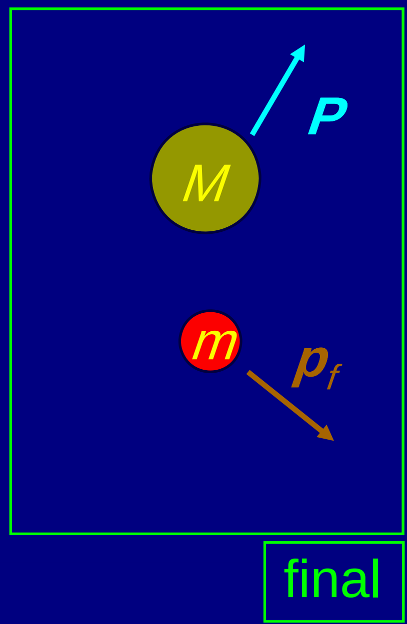
← به اطلاعات بیشتری مثلا زاویه پراکندگی و جرم ها نیاز داریم .

برخورد کشسان دوبعدی
پراکندگی هسته ای

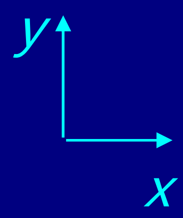
- ذره ای به جرم نامعین M ابتدا درحال سکون است .ذره ای به جرم m با تکانه اولیه $\mathbf{p}_i$ *به طرف آن پرتاب می شود* .بعداز برخورد تکانه ذره پرتابی برابر با $\mathbf{p}_f$ اندازه گیری می شود .

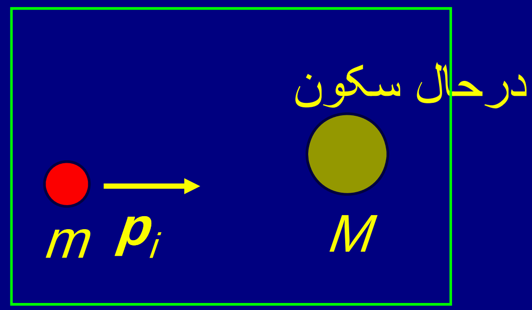
  ← مقدار M را برحسب $\mathbf{p}_i$ و $\mathbf{p}_f$ و m *پیداکنید*.



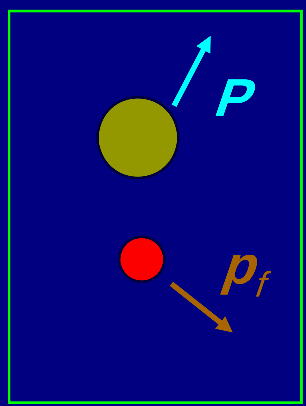


برخورد کشسان دوبعدی :
پراکندگی هسته ای





حالت ابتدایی



حالت نهایی

مقادیر زیر را می دانیم ::

p_i, p_f, m

این مقادیر را می خواهیم پیدا کنیم:

P_x, P_y, M

سه معادله داریم :

1) پایستاری تکانه در راستای x

2) پایستاری تکانه در راستای y

3) پایستاربودن انرژی کل

!بنابراین می توانیم مسئله را حل کنیم

مسئله جنبی : انرژی جنبشی

- می دانیم که $K = {}^1/_2 mv^2$

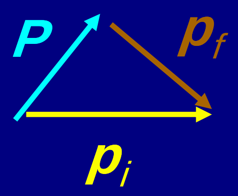
انرژی جنبشی را می توان برحسب تکانه بیان کرد:

$$K = {}^1/_2 mv^2$$

$$= \frac{m^2 v^2}{2m}$$

$$= \frac{(m\,v)^2}{2m} \Rightarrow K = \frac{p^2}{2m}$$

برخورد کشسان دوبعدی : پراکندگی هسته ای



- با استفاده از پایستاربودن تکانه $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_f + \mathbf{P}$:

  ← بنابراین $P^2 = (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_f)^2$

- با استفاده از پایستاربودن انرژی جنبشی :

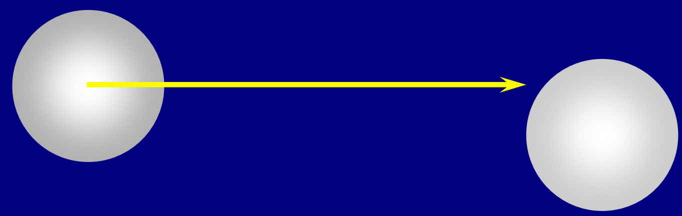
$$\frac{p_i^2}{2m} = \frac{p_f^2}{2m} + \frac{P^2}{2M} \quad \Rightarrow \quad P^2 = 2M\left(\frac{p_i^2}{2m} - \frac{p_f^2}{2m}\right)$$

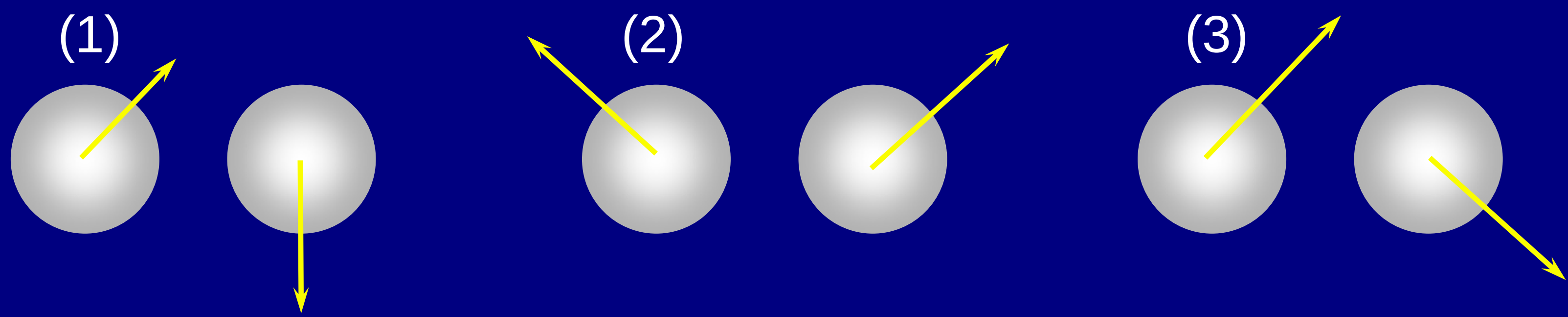
وبا استفاده از: $P^2 = (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_f)^2$

$$\Rightarrow \quad \boxed{M = m\left[\frac{(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_f)^2}{p_i^2 - p_f^2}\right]}$$

برخورد کشسان در د و بعد

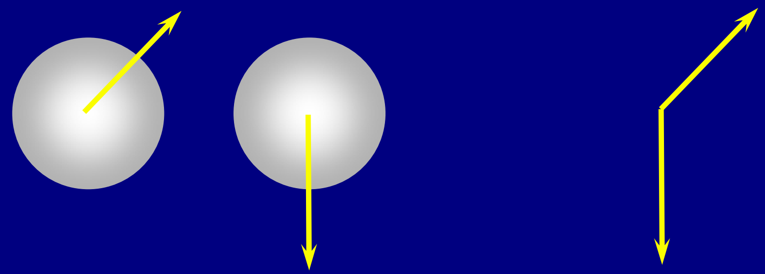
- توپ متحرکی در جهت نشان داده شده در شکل زیر حرکت می کند و با توپ مشابهی برخورد می کند.
  - بعداز برخورد جهت این توپ های برخورد کننده را چگونه پیش بینی می کنید؟.



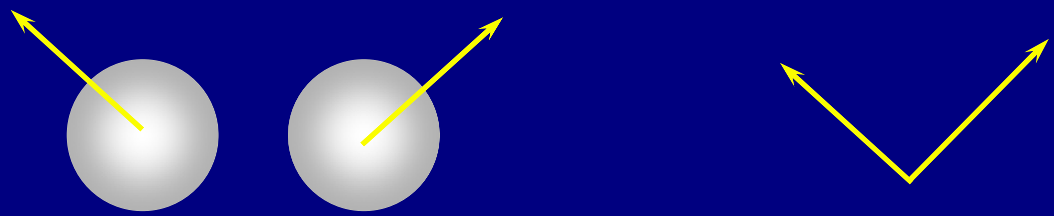


پاسخ:

- درگزینه ۱ زاویه بین توپ ها 90^o است .

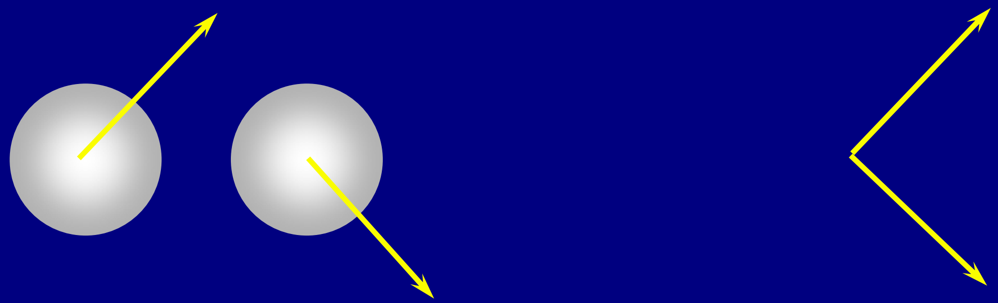


- درگزینه ۲ هیچ مولفه y که مولفه های y وبه سمت بالا را خنثی کند وجود ندارد.



ادامه پاسخ:

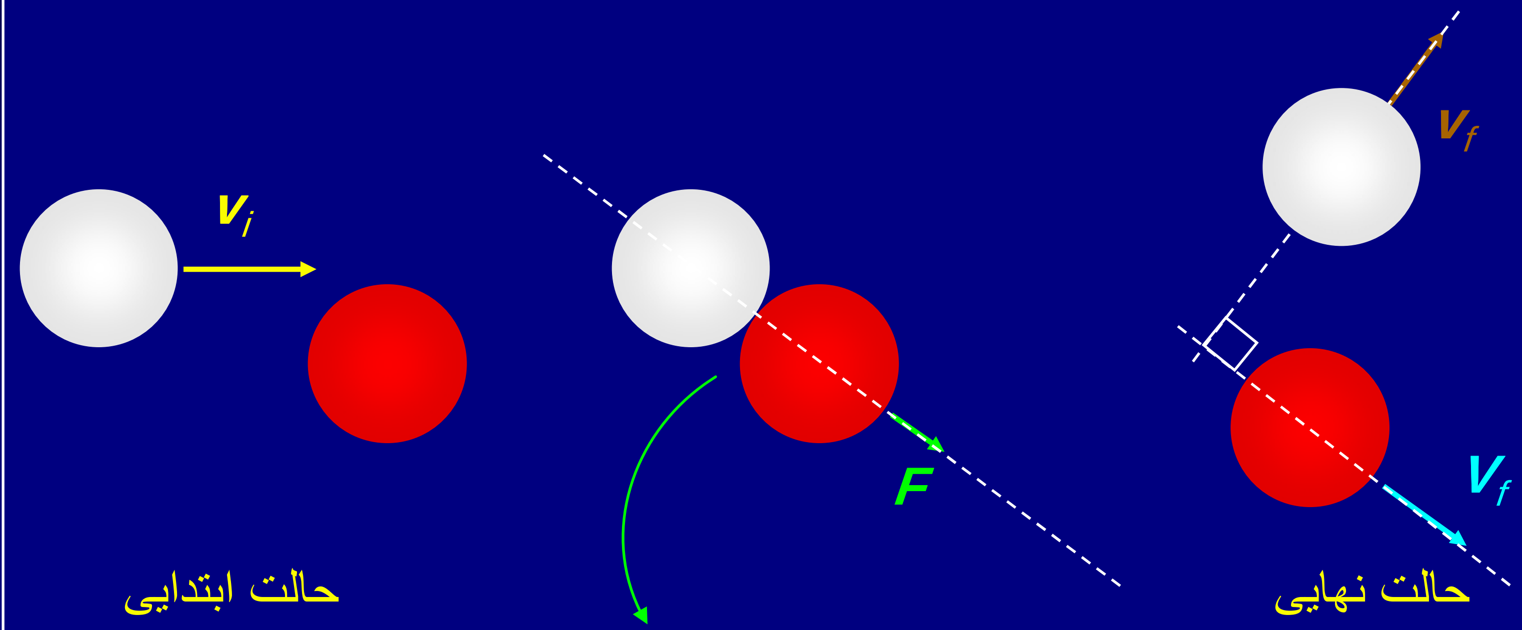
- درگزینه ۳ مولفه های y همدیگر را خنثی می کنندو زاویه 90^o بین بردارهای نهایی وجود دارد .



- بنابراین گزینه ۳ معیارهای برای پاسخ درست را دربردارد.

“مقیاس زمانی” برخورد

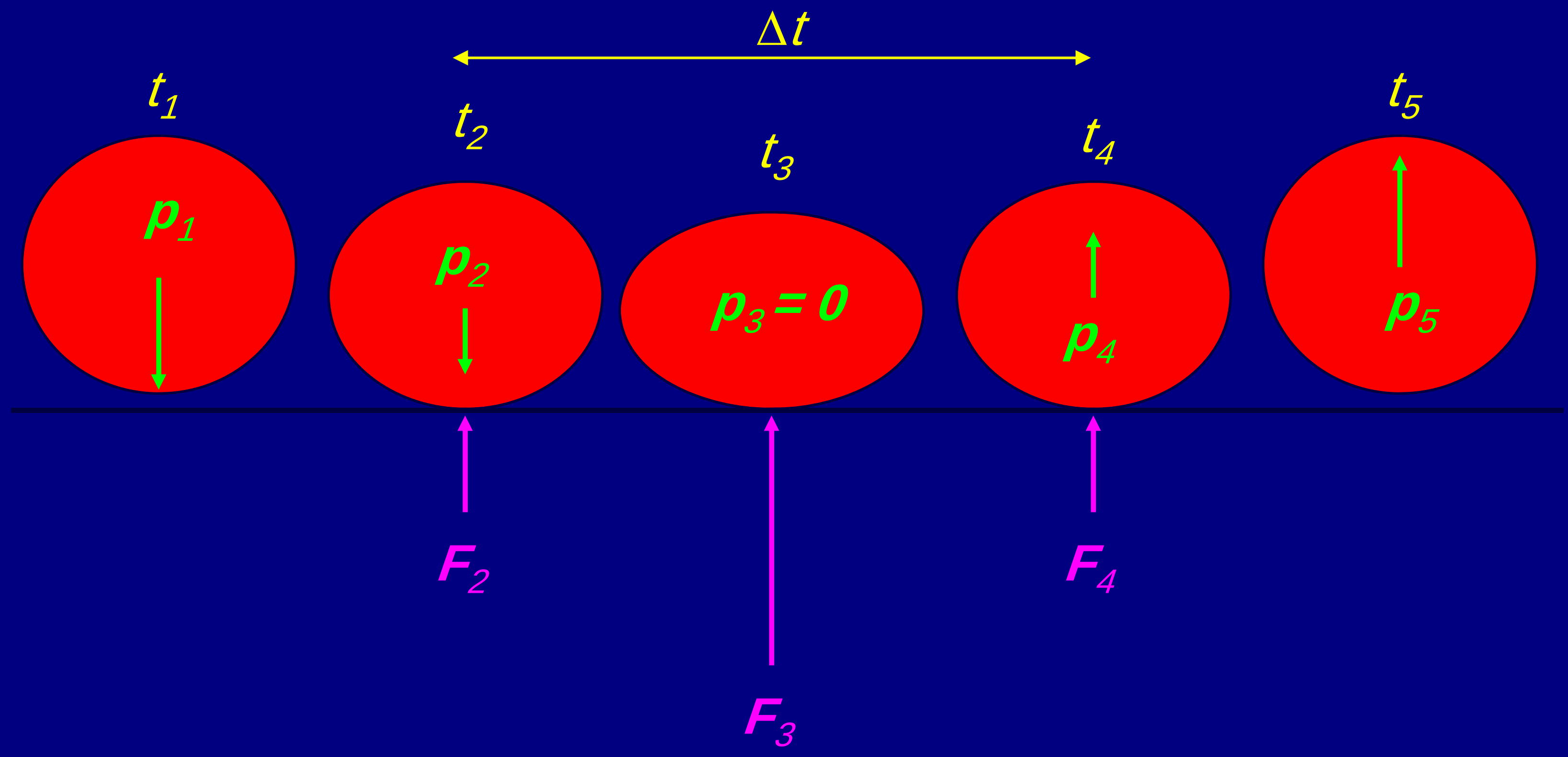
- برخوردها معمولا در زمان بسیارکوتاهی صورت می گیرند.



دوتوب به مدت زمان بسیار کوتاهی با هم تماس پیدامی کنند.

“مقیاس زمانی” برخورد

- در مدت زمان برخورد نیروهای برخورد بسیار بزرگی رد وبدل می شود

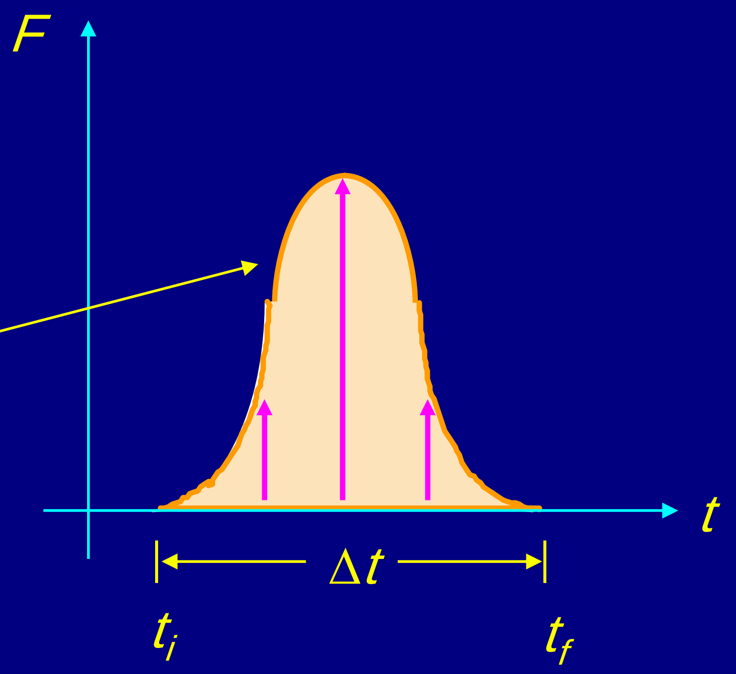


نیرو و تکان

- در نمودار زیر تغییر نیرو را برحسب زمان برخورد مشاهده می کنید .تکان, ***I***, برداری است که به صورت انتگرال نیرو در برخوردبه شکل زیر تعریف می شود.

$$\boxed{\boldsymbol{I} = \int_{t_i}^{t_f} \boldsymbol{F}\, dt}$$

! سطح زیراین منحنی = ***I***تکان



تکان دارای یکای *Ns* *است*.

نیرو و تکان

- با استفاده از: $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}$

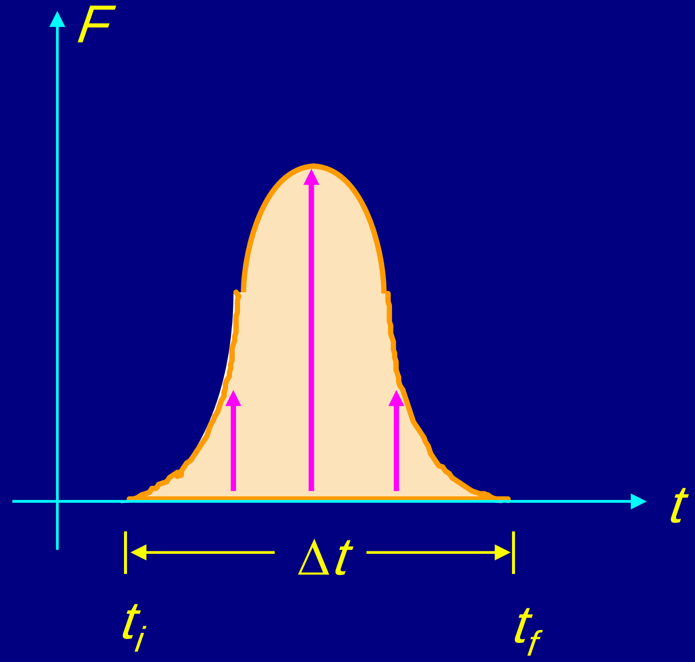
تکان برابر می شود با:

$$\mathbf{I} = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}\, dt = \int_{t_i}^{t_f} \frac{d\mathbf{P}}{dt} dt$$

$$= \int_{t_i}^{t_f} d\mathbf{P} = \mathbf{P}_f - \mathbf{P}_i \equiv \Delta \mathbf{P}$$

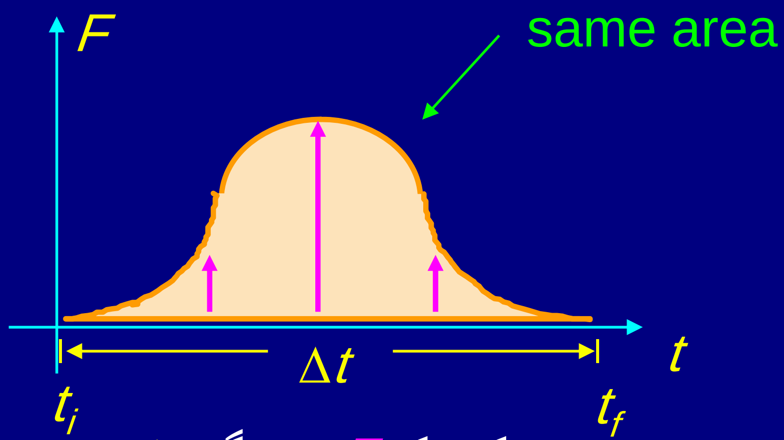
$$\boxed{\mathbf{I} = \Delta \mathbf{P}}$$

تغییر تکانه = تکان!

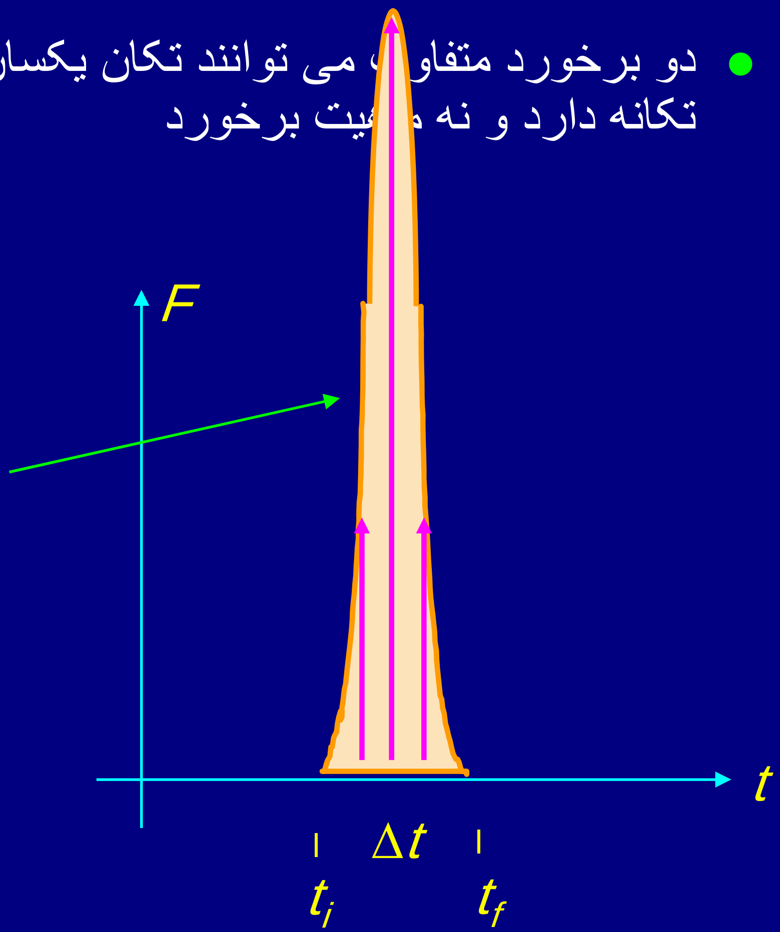


نیرو و تکان

- دو برخورد متفاوت می توانند تکان یکسان داشته باشند زیرا ***I*** بستگی به تغیر تکانه دارد و نه ماهیت برخورد

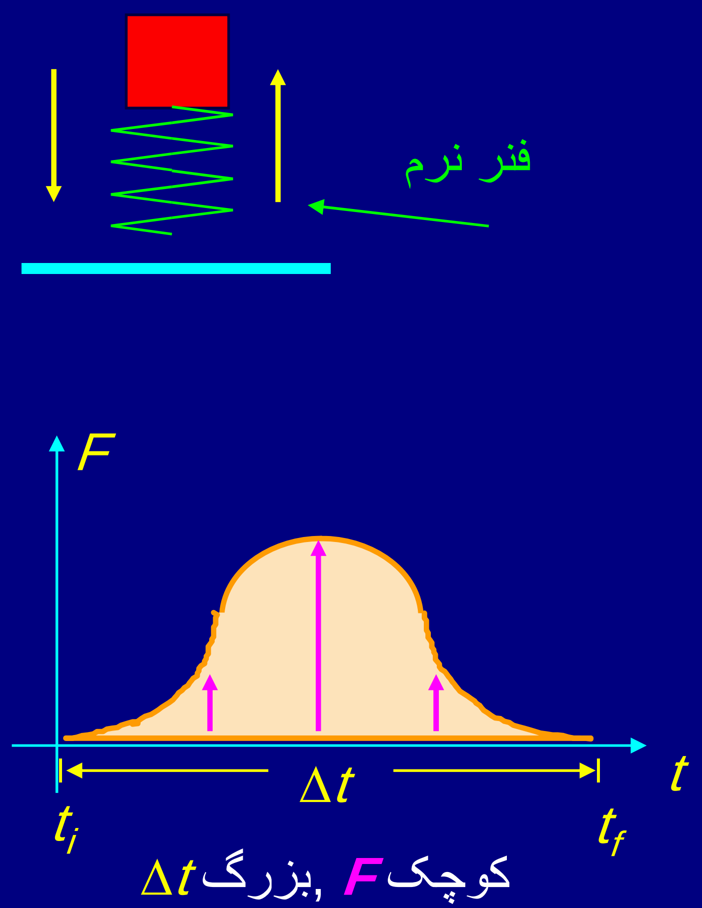


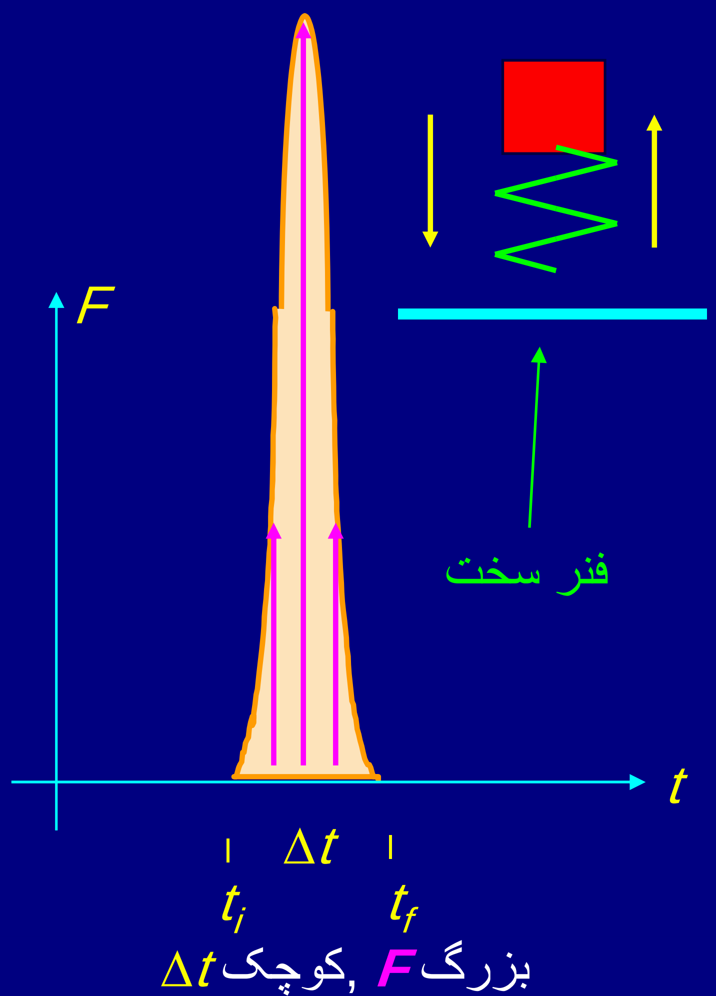
Δt بزرگ, ***F*** کوچک



Δt کوچک, ***F*** بزرگ

نیرو و تکان


فنر نرم
F
t
Δt
t_i
t_f
Δt بزرگ, F کوچک

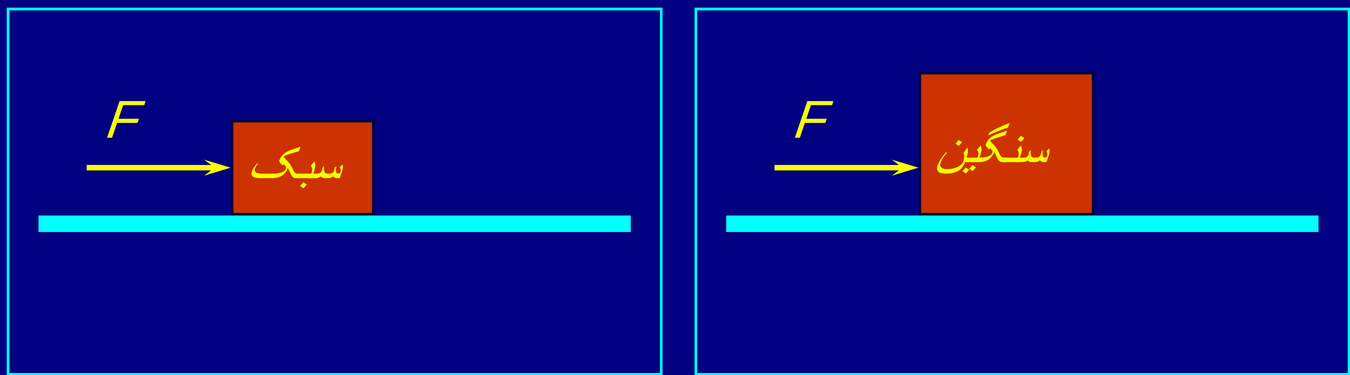

F
t
فنر سخت
Δt
t_i
t_f
Δt کوچک, F بزرگ

نیرو و تکان

- دوجعبه یکی سنگین تر از دیگری روی یک سطح تخت بدون اصطکاک قرار دارندو به مدت یک ثانیه تحت تاثیر نیروی F قرار می گیرند.

بعد از اثر این نیرو کدام یک تکانه بیشتری دارا خواهند بود؟

الف – سنگین تر　　　ب- سبک تر　　　ج- یکسان

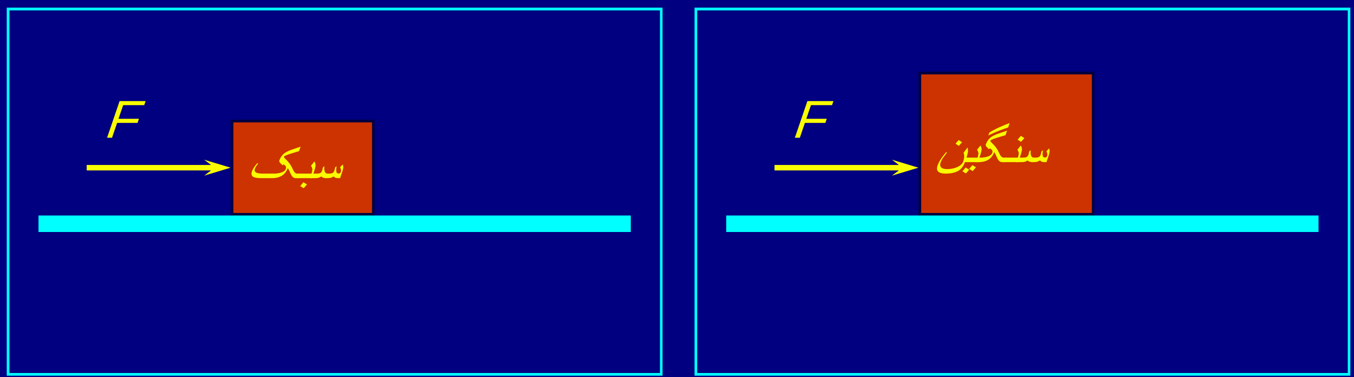


پاسخ:

می دانیم که: $F_{av} = \frac{\Delta p}{\Delta t}$ بنابراین : $\boxed{\Delta p = F_{av}\Delta t}$

دراین مسئله F و Δt برای هر دو جعبه یکسان است !

لذا دو جعبه تکانه مساوی خواهند داشت .



نیرو و تکان

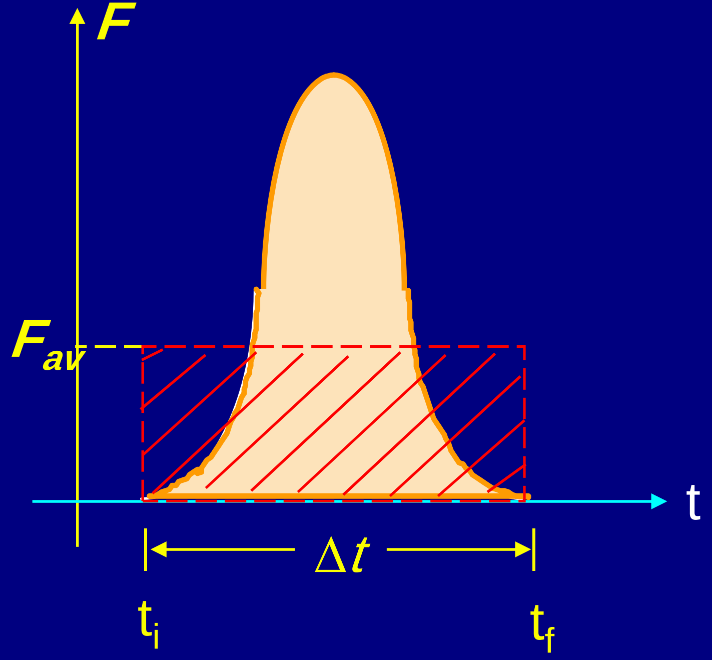
- از مفهوم تکان استفاده کرده و نیروی متوسط راکه اصل مفیدی است تعریف می کنیم :

$\Delta t = t_f - t_i$ میانگین زمانی نیرو در مدت زمان برابراست با :

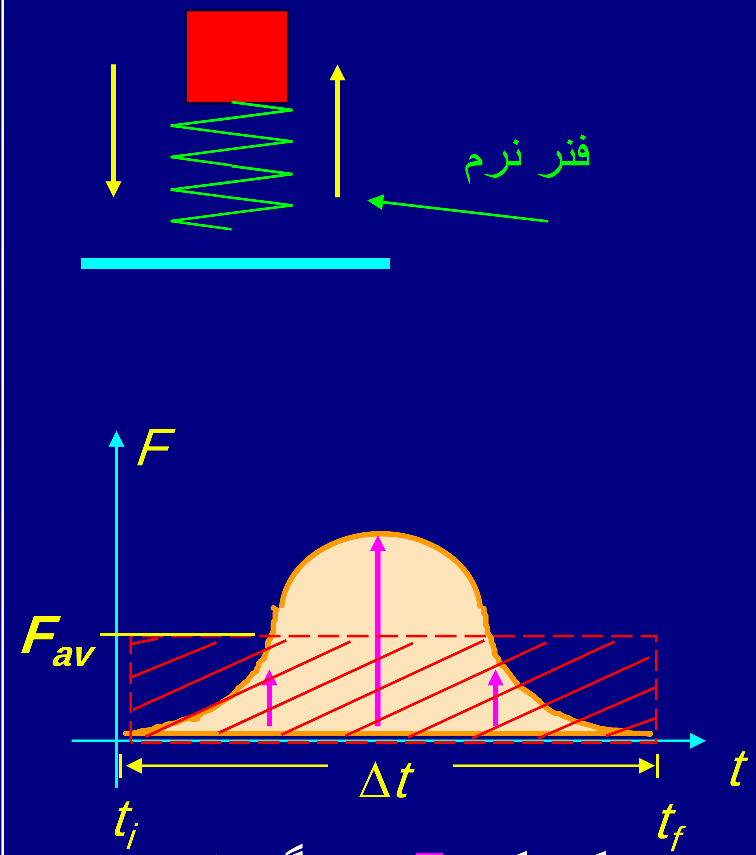
$$F_{av} = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_i}^{t_f} F\,dt = \frac{I}{\Delta t}$$

یا:

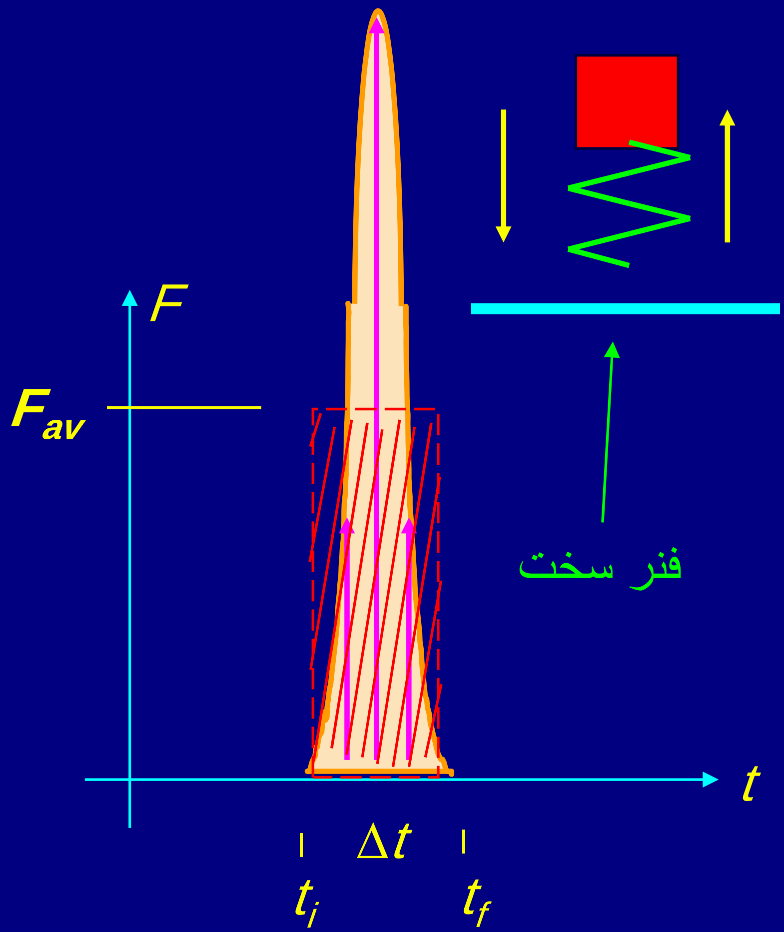
$$F_{av} = \frac{\Delta P}{\Delta t}$$



نیرو و تکان



Δt بزرگ, F_{av} کوچک



Δt کوچک, F_{av} بزرگ

نیرو وتکان:
مثال بیس بال

- بازیکنی توپی به جرم $m = .7\ kg$ که با سرعت $145\ km/hr$ در حرکت است می زند.

- چوب بازی مدت $.001\ s$ ثانیه با توپ تماس برقرار می کند و با سرعت $190\ km/hr$ آنرا ترک می کند.

- نیروی زمانی متوسط وارد برتوپ را پیدا کنید .

مثال بیس بال :

ابتدا سرعت ها را به متر بر ثانیه تبدیل کنید:

$$145 \text{ km/hr} = 40.28 \text{ m/s}$$

$$190 \text{ km/hr} = 52.78 \text{ m/s}$$

سپس تغییر تکانه که مساوی با تکان وارده است را محاسبه کنید :

$$P_f - P_i = (.7 \text{ kg})(52.78 \text{ m/s}) - (.7 \text{ kg})(-40.28 \text{ m/s})$$

$$P_f - P_i = 65.14 \text{ kg-m/s}$$

سرانجام نیروی متوسط را محاسبه کنید:

$$\boxed{F_{av} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{65.14Ns}{.001s} = 65142N}$$

یادآوری نهایی

- برخورد کشسان در دو بعد
- چند مثال (پراکندگی هسته ای وتوپ بیلیارد)
- تکان و نیروی متوسط تکان
- مطالب کتاب درسی را مطالعه نموده و با حل مسائل آن خود را بیازمایید!!!

فصل یازدهم

دوران جسم صلب حول محور ثابت

سینماتیک دورانی

درس امروز ما...

- سینماتیک دورانی
  - تشابه با سینماتیک یک بعدی
- انرژی جنبشی یک جسم چرخنده
  - گشتاور لختی (لختی دورانی)
  - سیستم ذرات
  - اجسام صلب پیوسته
- قضیه محورهای موازی

دوران

- تاکنو ن صحبتی از دوران اجسام به میان نیاوردیم .
  - لغزش اجسام را مورد بررسی قراردادیم ولی ا ز غلتش صحبت نکردیم
  - فرض کردیم که قرقره ها فاقد جرم هستند

- دوران بسیا ر مهم است و ما باید توجه کافی به آن مبذول داریم   !

- معادلات مربوط به دوران شباهت زیادی به معادلا ت سینماتیک و دینامیک یک بعد ی حر کت انتقالی   دارند.

دوران

- **پیش آزمون:** مهرداد روی لبه یک سکوی گردان و علی درمیانه خط واصل از مرکز به لبه این سکو نشسته است . این سکو هردو دقیقه یک دور کامل می چرخد..

  ⬅سرعت زاویه ای علی برابر است با:

الف – سرعت مهرداد

ب- دوبرابر سرعت مهرداد

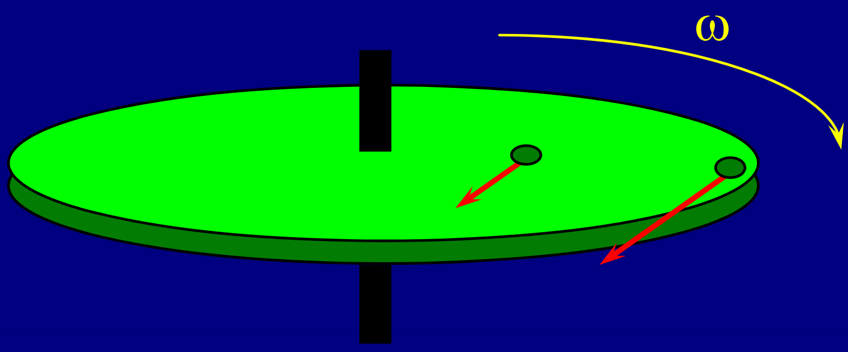
ج- نصف سرعت مهر داد

دوران

- سرعت زاویه ای ω هر نقطه از یک جسم صلب که به دور محوری می چرخد یکسان است.

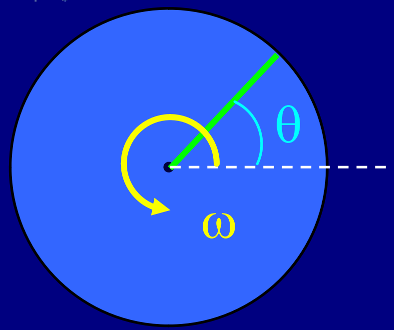
مهرداد وعلی هردو یک دور کامل (2π radians) در یک دقیقه می چرخند.

(سرعت "خطی" آنها v باهم متفاوت است زیرا $v = \omega r$ است).



$$V_{\text{علی}} = \frac{1}{2} V_{\text{مهرداد}}$$

متغییرهای دورانی



- دورا ن حول یک محور:
  - دیسکی را درنظر بگیرید که حول محور ش می چرخد:
- ابتدا آنچه را که در مورد حرکت دورانی یکنواخت آموختیم بیاد بیاورید:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

که مشابه است با:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

سرعت زاویه ای متوسط:

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_f - \theta_i}{t_f - t_i}$$

سرعت زاویه ای لحظه ای:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

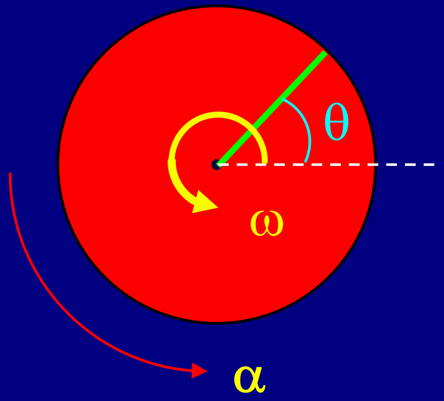
شتاب زاویه ای متوسط:

$$\bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

شتاب زاویه ای لحظه ای:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

متغییرهای دورانی



- اکنون فرض کنید که ω برحسب تابعی اززمان تغییرکند:
- شتاب زاویه ای را چنین تعریف می کنیم::

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

- حالتی را در نظر بگیرید که α ثابت است.

➔ برای یافتن ω و θبرحسب تابعی از زمان از این رابطه انتگرال می گیریم:

$$d\omega = \alpha dt \quad \Rightarrow \int_{\omega_o}^{\omega} d\omega = \int_0^t \alpha dt$$

$$\omega - \omega_o = \omega t$$

$$\int_{\theta_o}^{\theta} d\theta = \int_0^t \omega dt$$

$$\theta - \theta_o = \omega_o t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

بین دورابطه t را حذف می کینم:

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\theta$$

$\alpha =$ ثابت

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

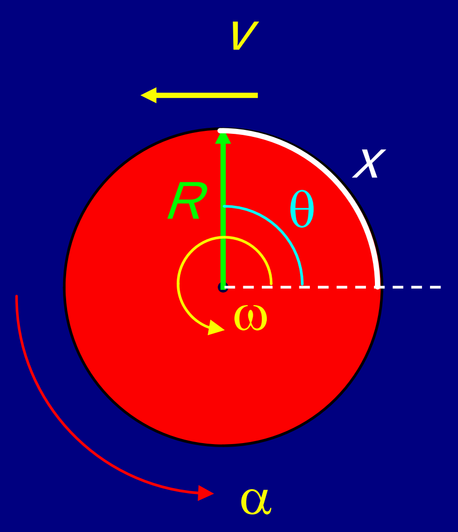
$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

متغییرهای دورانی

$$\alpha = constant$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$



- به خاطر بیاورید که در فاصله R ازمحور دوران داریم :

$$x = \theta R$$

$$v = \omega R$$

و با مشتق گرفتن از رابطه اخیر نسبت به زمان خواهیم داشت:

$$a = \alpha R$$

خلاصه
(مقایسه با سینماتیک یک بعدی)

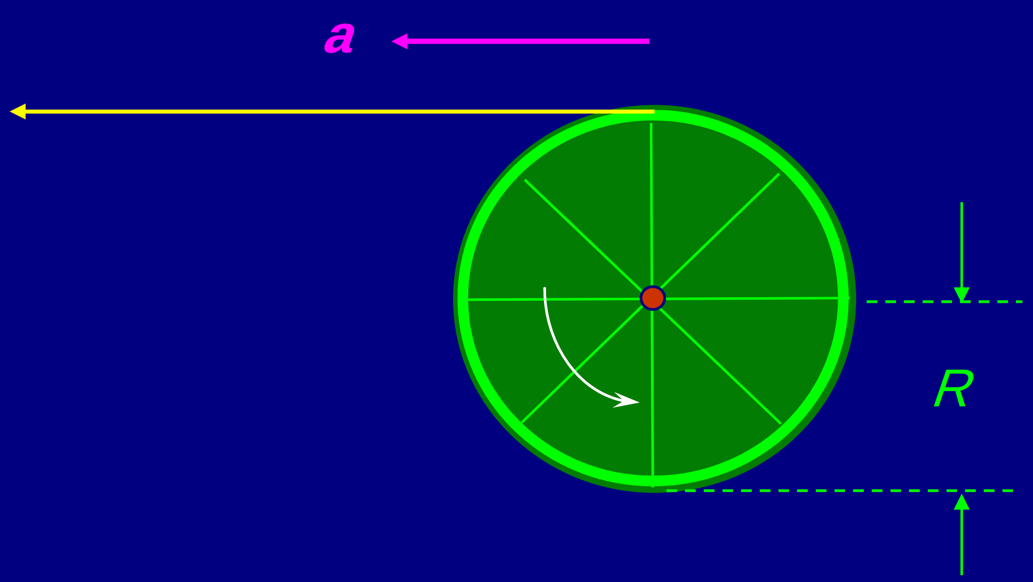
زاویه ای	خطی
$\alpha = constant$	$a = constant$
$\omega = \omega_0 + \alpha t$	$v = v_0 + at$
$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

وبرای یک نقطه در فاصله R از محور دوران :

$x = R\theta$ $\quad v = \omega R \quad$ $a = \alpha R$

مثال : چرخ و طناب

- چرخی به شعاع $R = 0.4\ m$ حول محورش می چرخد. طنابی به دور چرخ پیچیده شده است. چرخش از حالت سکون شروع می شود, $t = 0$ طناب را باشتاب $a = 4\ m/s^2$ می‌کشیم. بعداز ۱۰ ثانیه چرخ چند دور می زند؟
- (یک دور $= 2\pi$ رادیان)



چرخ و طناب ...

- از رابطه $a = \alpha R$ برای یافتن α استفاده می کنیم :

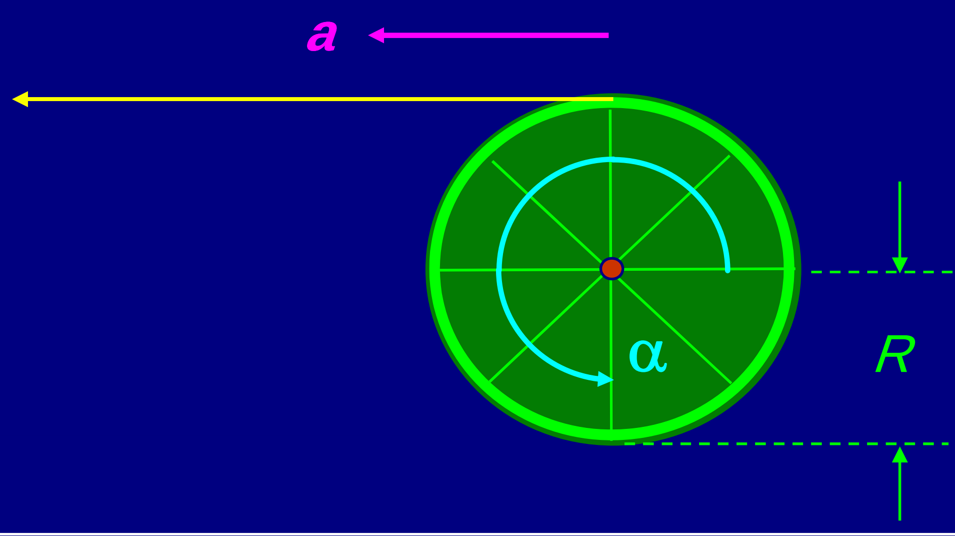
$$\alpha = a / R = 4\ m/s^2 / 0.4\ m = 10\ rad/s^2$$

- اکنون از معادله مربوط به جابه جایی زاویه ای استفاده می کنیم:

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = 0 + 0(10) + \frac{1}{2}(10)(10)^2 = 500\ rad$$

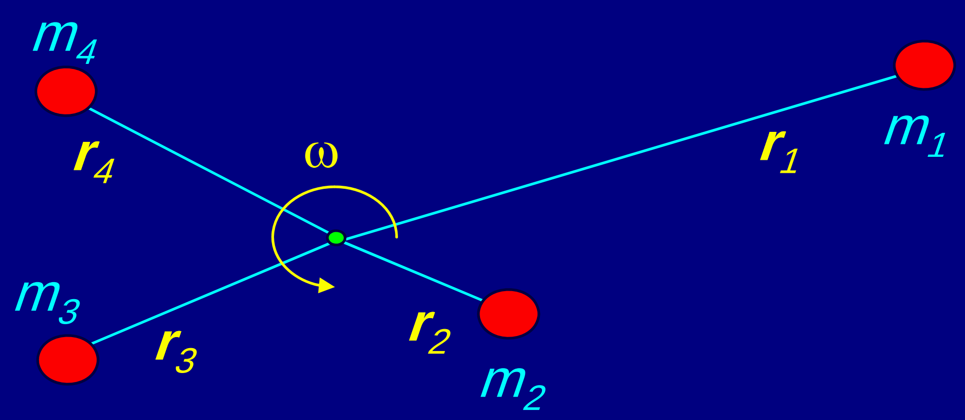
$$= 500\ rad\ x \frac{1}{2\pi}\frac{rot}{rad}$$

$$\approx 80\ rev$$



انرژی جنبشی دورانی

- سیستم ساده چرخان زیر را درنظر بگیرید . (فرض کنید که وزنه ها بوسیله میله های فاقد جرم به مرکز دوران وصل شده اند).
- انرژی جنبشی این سیستم از جمع انرژی های جنبشی اجسام تشکیل دهنده آن بدست می آید:



انرژی جنبشی دورانی ...

- بنابراین $K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$ ولی $v_i = \omega r_i$

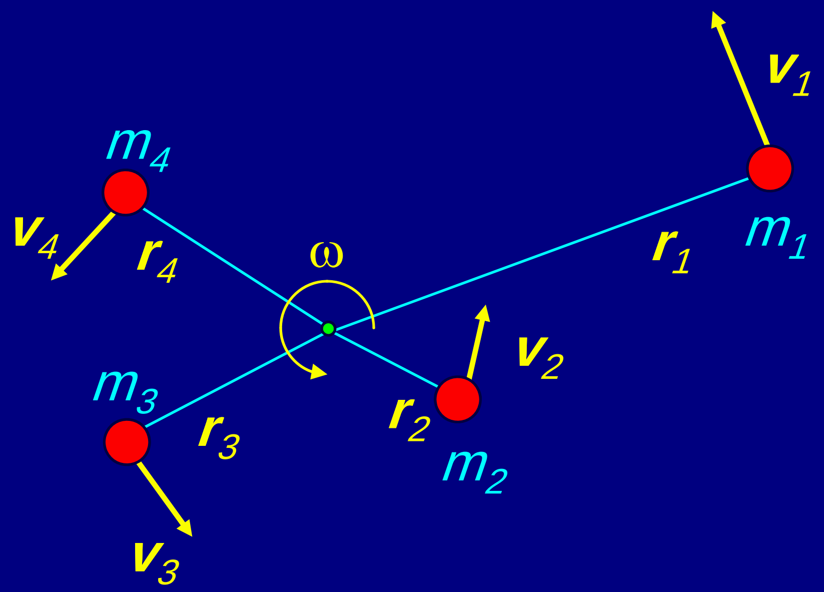
$$\Rightarrow K = \frac{1}{2}\sum_i m_i (\omega r_i)^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_i m_i r_i^2$$

به این صورت می نویسیم :

$$\boxed{K = \frac{1}{2} I \omega^2}$$

گشتاور لختی را چنین تعریف می کنیم :

$$\boxed{I = \sum_i m_i r_i^2}$$



I دارای یکای $kg\ m^2$ است.

انرژی جنبشی دورانی ...

- انرژی جنبشی دورانی یک جسم چرخان مشابه انرژی جنبشی یک ذره نقطه ای است :

سیستم چرخان	ذره
$K = \frac{1}{2}mv^2$ v سرعت خطی m جرم.	$K = \frac{1}{2}I\omega^2$ ω سرعت زاویه ای I گشتاور لختی حول محور دوران. $I = \sum_i m_i r_i^2$

گشتاور لختی

لذا: $K = \frac{1}{2} I \omega^2$ که در آن : $I = \sum_i m_i r_i^2$

- توجه کنید که لختی دورانی یک سیستم بستگی به پراکندگی جر م سیستم دارد .
  ← هرچه پراکندگی جرم از محوردوران بیشتر باشد لختی دورانی بیشتر خواهدبود.

- برای یک جسم گشتاور لختی آن بستگی به محوری دارد که جسم حول آن می چرخد(برخلاف مرکز جرم) .

- در دینامیک دورانی کمیت I مشابه جرم m در دینامیک خطی است !

محاسبه لختی دورانی

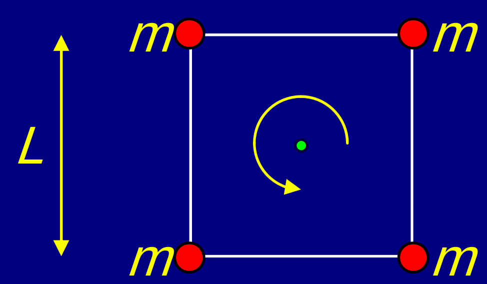
- برای N جرم نقطه ای مجزا از هم که حول محوری پراکنده هستند گشتاورلختی یا لختی دورانی چنین تعریف می شود :

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$$

که r فاصله جرم از محور دوران است .

مثا ل : لختی دورانی چهار جرم (m) که در گوشه های یک مربع به ضلع L *قراردارند را حول محوری که از مرکز مربع گذشته و بر سطح آن عمود است محاسبه کنید* ,

:



محاسبه لختی دورانی

- مربع فاصله هر جرم نقطه ای از مرکز دوران:

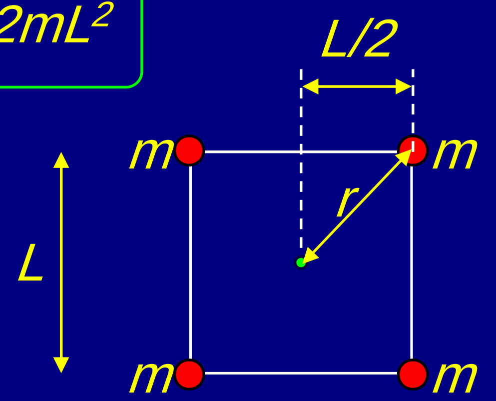
با استفاده از قضیه فیثاغورث

$$r^2 = 2\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{L^2}{2}$$

لذا:

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 = m\frac{L^2}{2} + m\frac{L^2}{2} + m\frac{L^2}{2} + m\frac{L^2}{2} = 4m\frac{L^2}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{I = 2mL^2}$$

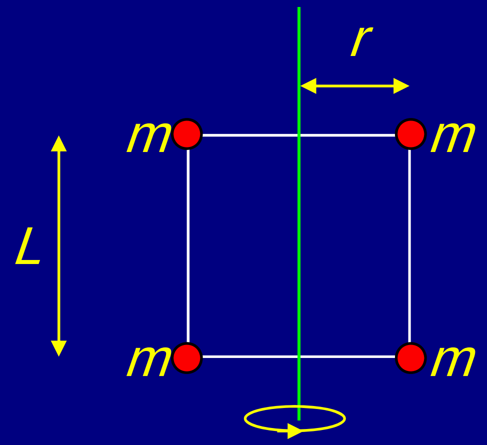


محاسبه لختی دورانی

- اکنون لختی دورانی همان جسم را حول محوری که مطابق شکل زیر در صفحه مربع قرار دارد محاسبه کنید :

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 = m\frac{L^2}{4} + m\frac{L^2}{4} + m\frac{L^2}{4} + m\frac{L^2}{4} = 4m\frac{L^2}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{I = mL^2}$$

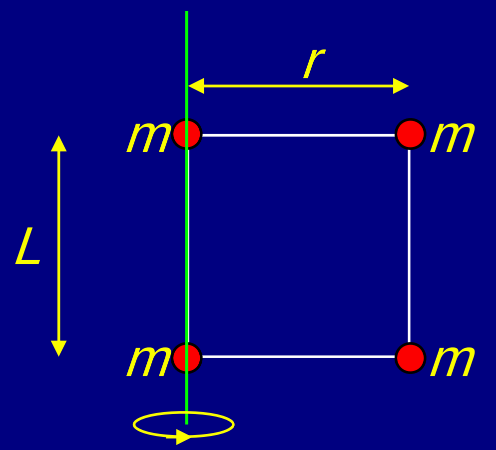


محاسبه لختی دورانی

- اکنون لختی دورانی همان سیستم را حول محور مشخص شده در شکل زیر محاسبه کنید :

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^{\,2} = mL^2 + mL^2 + m0^2 + m0^2$$

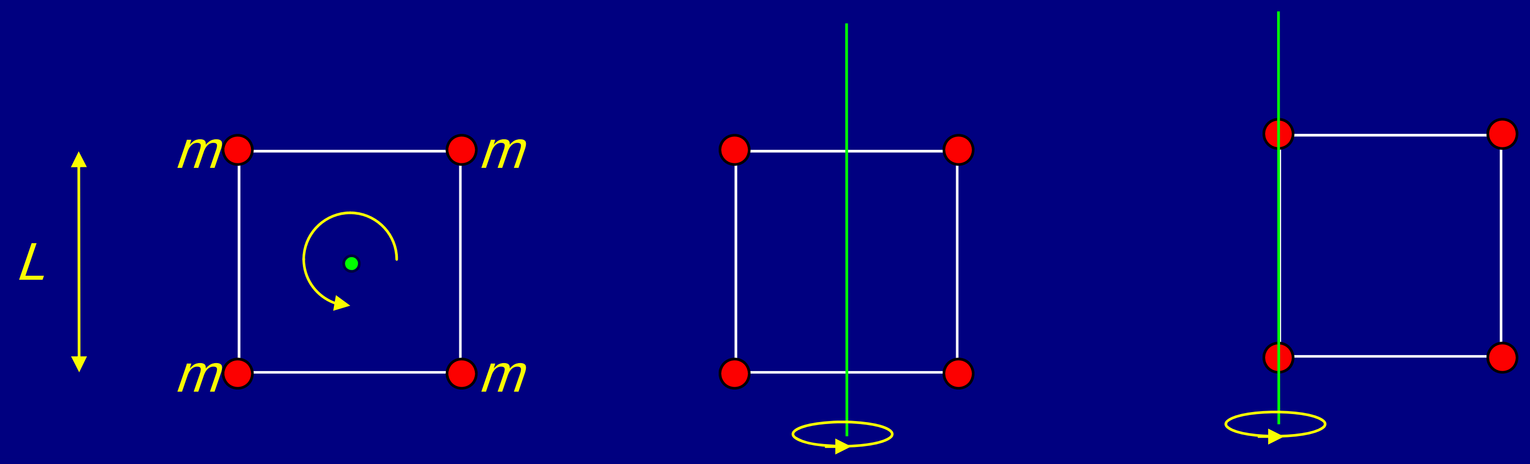
$$\boxed{I = 2mL^2}$$



محاسبه لختی دورانی

- مشاهده می کنید که برای یک سیستم لختی دورانی بستکی به محوردوران دارد!!

$I = 2mL^2$ $\qquad$ $I = mL^2$ $\qquad$ $I = 2mL^2$



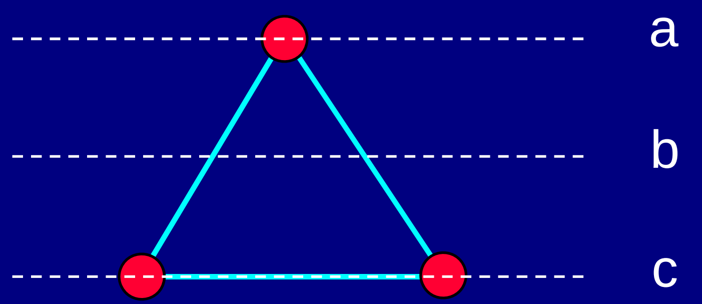
لختی دورانی

- مثلث زیر از گلوله های مشابه و میله های صلب بدون جرم مشابه تشکلیل شده است .
لختی دورانی حول محور a, b, و c به ترتیب برابر است با I_a, I_b, و I_c.
گزینه درست کدام است ؟:

(a) $I_a > I_b > I_c$

(b) $I_a > I_c > I_b$

(c) $I_b > I_a > I_c$



لختی دورانی

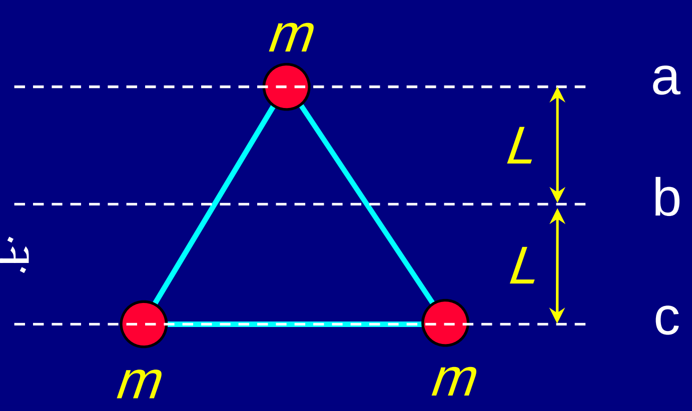
- طول ها وجرم ها را مشخص کنید:
  - لختی دورانی را محاسبه کنید:

$$I_a = m(2L)^2 + m(2L)^2 = 8mL^2$$

$$I_b = mL^2 + mL^2 + mL^2 = 3mL^2$$

$$I_c = m(2L)^2 = 4mL^2$$

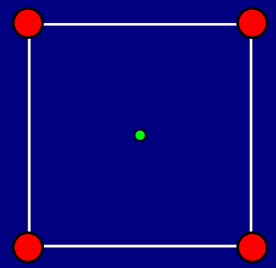
بنابراین رابطه b درست است $I_a > I_c > I_b$:



محاسبه لختی دورانی ...

- برای یک سیستم ذره ای :

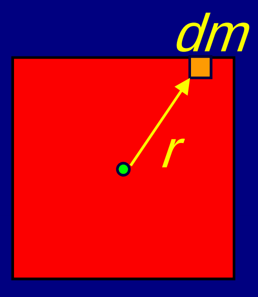
$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$$



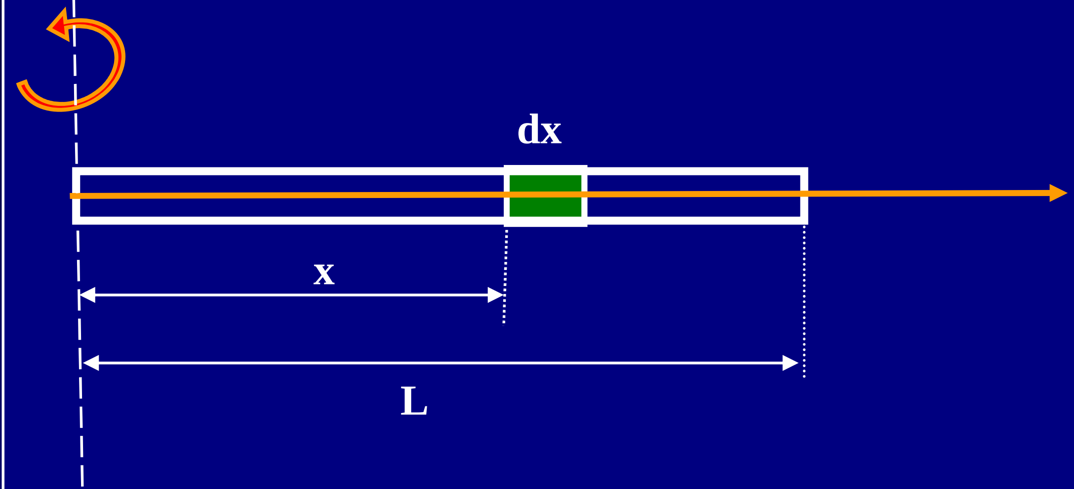
- برای یک جسم صلب سهم mr^2 را برای هر عنصر از جسم dm *را باید* به هم *بیفزاییم*.

➔یعنی برای محاسبه لختی دورانی I جسم صلب *باید انتگرال زیر را* محاسبه کنیم:

$$I = \int r^2 dm$$



مثال: می خواهیم لختی دورانی یک میله نا زک حول محوری که عمود بر میله از یک انتهای آن می گذرد حساب کنید:



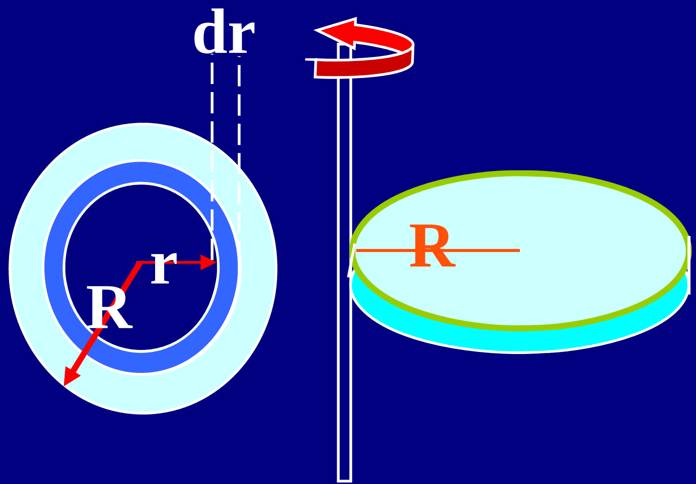
$$dm = \lambda dx$$

$$\lambda = \frac{M}{L}$$

$$dI = r^2\,dm = x^2(\lambda dx)$$

$$I = \int_0^L \lambda x^2 dx = \frac{1}{3}\lambda L^3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{I = \frac{1}{3}ML^2}$$

مثال: لختی دورانی یک دیسک یا یک استوانه توپر به شعاع قاعده
را حول محوری که عمود برقاعده از مرکز جسم می گذردو
(ب) عمود برقاعده از لبه جسم می گذرد حساب کنید:



$$dm = \sigma dA \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{M}{A}$$

$$dI = r^2 dm = 2\pi\sigma\, r^3 dr$$

$$I = 2\pi\sigma \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2}\pi\sigma R^4$$

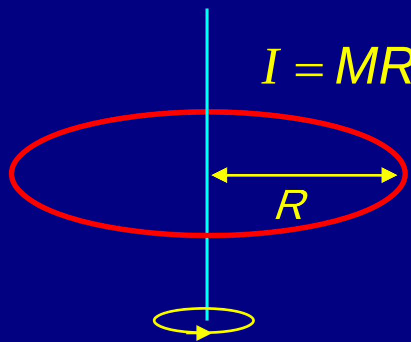
$$M = \sigma A = \sigma MR^2$$

$$\boxed{I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2}$$

$$I_{end} = I_{cm} + MR^2 = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$$

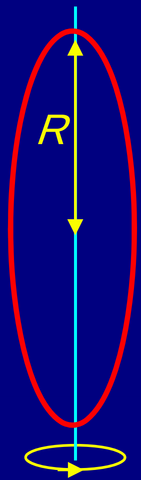
لختی دورا نی ...

- چند مثال از لختی دورانی اجسام:



$$I = MR^2$$

یک حلقه نازک ویا یک استوانه نازک به جرم M وشعاع R, حول محورکه از مرکز حلقه گذشته و بر سطح آن عمود است .



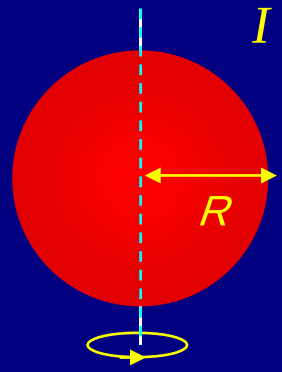
$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

یک حلقه به جرم M وشعاع R
حول یک قطر آن

گشتاور لختی ...

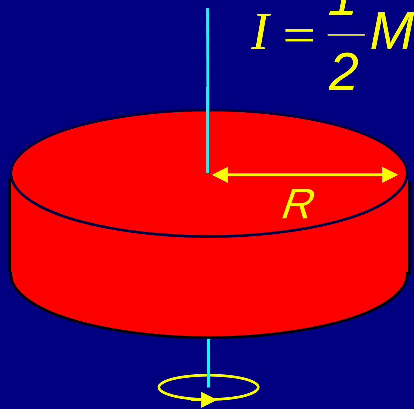
- چند مثال در موردگشتاور لختی اجسام صلب :

$$I = \frac{2}{5}MR^2$$



R, وشعاع *M* کره صلب به جرم
حول محوری که ا ز مرکز آن می گذرد.

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$



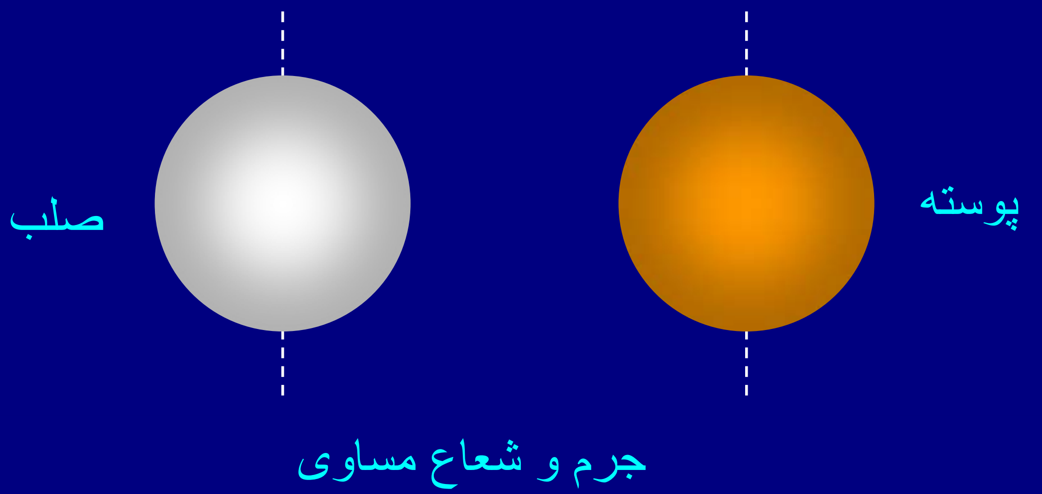
R, وشعاع *M* یک دیسک صلب به جرم
حول محوری که از مرکز آن می گذرد.

تمرین : گشتاورلختی

- دوکره به جر م و شعاع یکسان مفروض است .یکی از آلومینیوم ودیگری از پوسته ای از طلا ساخته شده است

➔کدام یک گشتاور لختی بیشتری نسبت به محوری که از مرکز ش می گذرد دارد؟

الف – کره صلب آلومینوم **ب- پوسته طلا** **ج- یکسان**



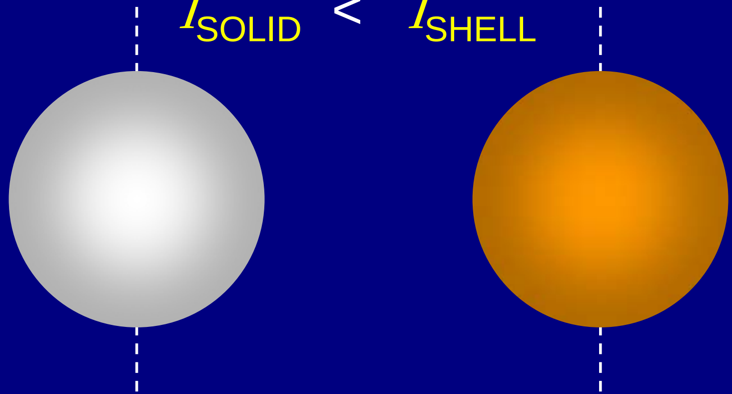
ادامه تمرین گشتاور لختی

- گشتاور لختی به جرم و مجذور فاصله آن از محور دوران بستگی دارد که برای پوسته طلا به علت اینکه جرم آن دورتر از مرکز دوران آن قرار دارد می باشد , .

  بنابراین پوسته طلا دارای لختی دورانی بیشتری است.

$$I_{\mathrm{SOLID}} < I_{\mathrm{SHELL}}$$

کره صلب آلومینیومی



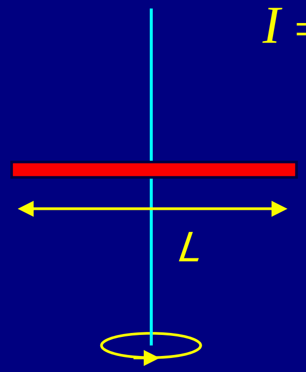
پوسته طلا

جرم و شعاع مساوی

ادامه گشتاور لختی ...

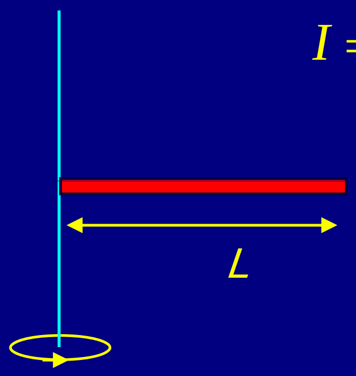
- گشتاور لختی چند جسم صلب :

$$I = \frac{1}{12} ML^2$$



لختی دورانی یک میله نازک به جرم M وطول L, حول محوری عمودبرطول آن که از مرکز میله می گذرد.

$$I = \frac{1}{3} ML^2$$



لختی دورانی یک میله نازک به جرم M وطول L حول محوری عمودبرطول آن که از انتهای آن می گذرد.

قضیه محورهای موازی

- لختی دورانی یک جسم به جرم M حول محوری که از مرکز جرم I_{CM}, آن می گذرد معلوم است.
- لختی دورانی حول محور موازی با این محور و به فاصله D از آن از رابطه زیر که به قضیه محورهای موازی مشهور است بدست می آید:

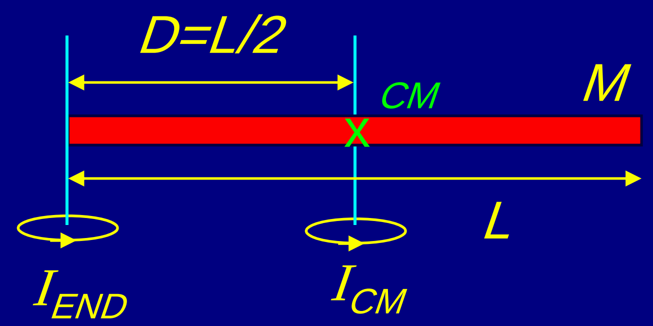
$$\boxed{I_{PARALLEL} = I_{CM} + MD^2}$$

- لذا اگر I_{CM} را بدانیم به سادگی می توانیم لختی دورانی حول محور موازی با
- آن را محاسبه کنیم .

مثال :قضیه محورهای موازی

- میله یکنواختی به جرم M وطول D در نظر بگیرید .گشتاور لختی را حول محوری که از انتهای آن می گذرد محاسبه کنید.

$$I_{PARALLEL} = I_{CM} + MD^2$$



می دانیم که: $I_{CM} = \frac{1}{12} ML^2$

بنابراین: $I_{END} = \frac{1}{12} ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} ML^2$

که با نتیجه آنچه که قبلا گفتیم مطابقت دارد.

ارتباط با حرکت مرکز جرم

- انرژی جنبشی یک سیستم ذره ای برابر بود با :

$$K_{NET} = \underbrace{\sum \frac{1}{2} m_i u_i^2}_{K_{REL}} + \underbrace{\frac{1}{2} M V_{CM}^2}_{K_{CM}}$$

- برای یک جسم صلب که حول مرکز جرم خود می چرخد جمله اول چنین است :

$$K_{REL} = \sum \frac{1}{2} m_i u_i^2 \qquad \text{باجاگذاری} \qquad u_i = \omega\, r_i$$

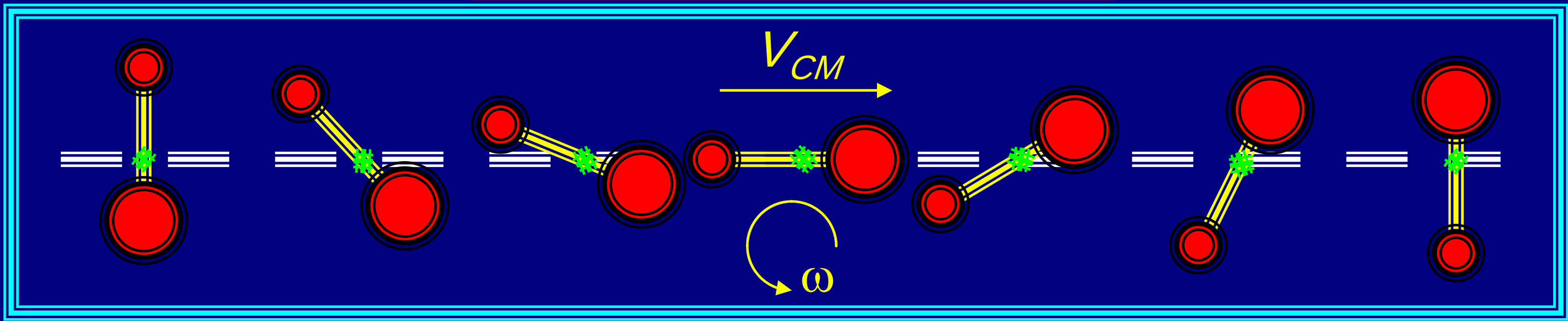
$$K_{REL} = \frac{1}{2} \omega^2 \sum m_i r_i^2 \qquad \text{ولی می دانیم که :} \qquad \sum m_i r_i^2 = I_{CM}$$

$$K_{REL} = \frac{1}{2} I_{CM}\, \omega^2$$

ارتباط با حرکت مرکز جرم ...

- بنابراین برای یک جسم که حول مرکز جرمش می چرخد و مرکز جرم آن حرکت می کند داریم:

$$\boxed{K_{NET} = \frac{1}{2} I_{CM}\, \omega^2 + \frac{1}{2} M V_{CM}^2}$$



از این فورمول در درس های بعد استفاده می کنیم.

یادآوری درس امروز...

- سینماتیک دورانی
  - تشابه باسینماتیک یک بعدی
- انرژی جنبشی یک جسم چرخنده
  - گشتاور لختی (لختی دورانی)
  - سیستم ذرات
  - اجسام صلب پیوسته
- قضیه محورهای موازی
- مطالب درسی و مسائل کتاب را مرور کنید

ادامه فصل یازدهم...

دوران جسم حول محور ثابت
سینماتیک دورانی

درس امروز ...

- غلتش
- جهت و قاعده دست راست
- دینامیک دورانی و گشتاور
- کار وانرژی و چند مثال

یادآوری
(مقایسه با سینماتیک یک بعدی)

خطی	زاویه ای
$a = constant$	$\alpha = constant$
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$

وبرای یک نقطه در فاصله R از محور دوران :

$x = R\theta \qquad v = \omega R \qquad a = \alpha R$

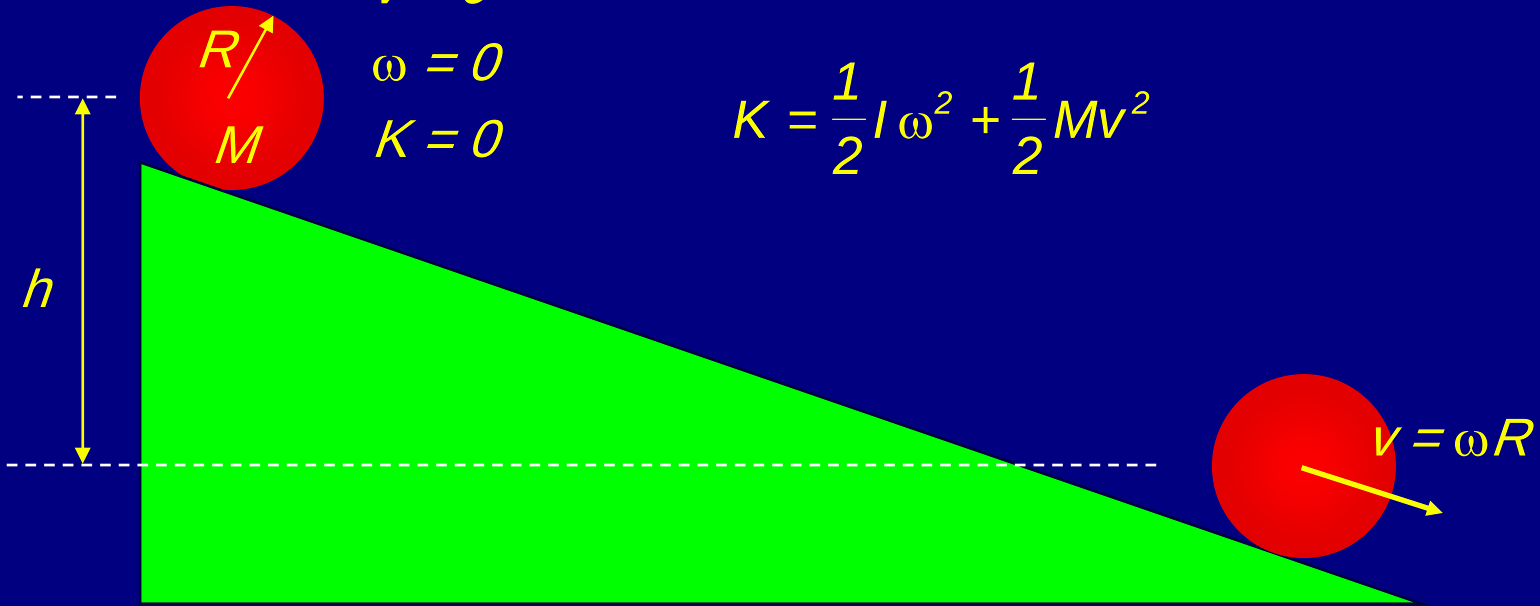
حرکت غلتشی

- اجسام با لختی دورانی مختلف از یک سطح شیبدارپایین می ایند:

$$v = 0$$
$$\omega = 0$$
$$K = 0$$

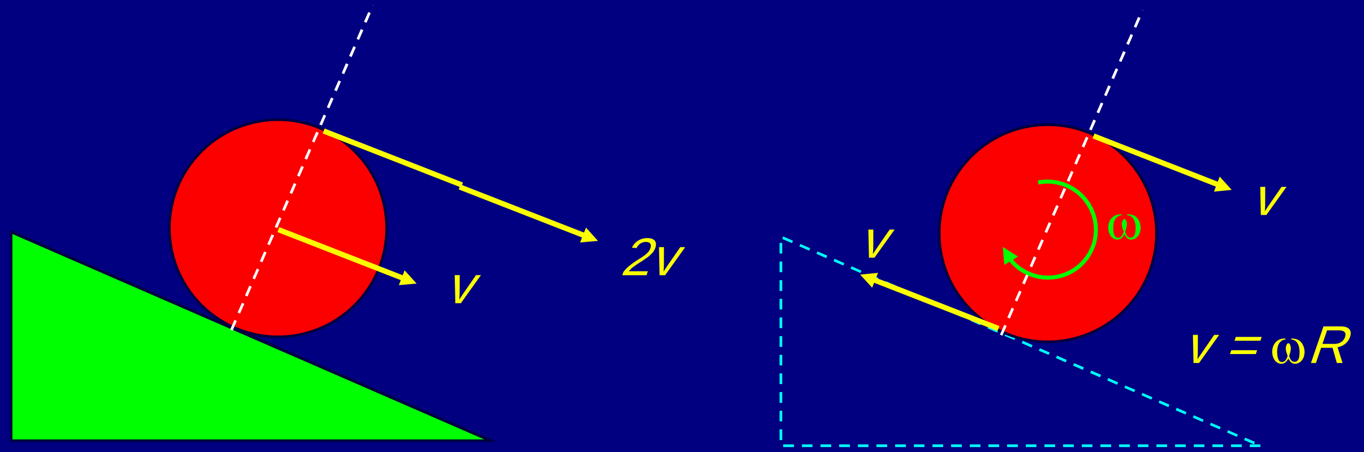
$$\Delta K = -\Delta U = Mgh$$

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} M v^2$$



غلتش ...

- درصورت عدم لغزش :



در چهارچوب مرجع آزمایشگاه

در چهارچوب مرجع مرکز جرم

غلتش...

از رابطه $v=\omega R$ و $I=cMR^2$ استفاده کنید.

حلقه $c = 1$:

دیسک $c = 1/2$:

کره $c = 2/5$:

وغیره...

$$K=\frac{1}{2}I\omega^2+\frac{1}{2}Mv^2$$

$$K=\frac{1}{2}\,cMR^2\omega^2+\frac{1}{2}Mv^2=\frac{1}{2}(c+1)Mv^2$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{2}(c+1)Mv^2=Mgh\ \Rightarrow\ \boxed{v=\sqrt{2gh}\sqrt{\frac{1}{c+1}}}$$

درغلتش سرعت کمتراز حالت لغزش است زیرا انرژی جنبشی بین حرکت مرکز جرم و دوران تقسیم می شود

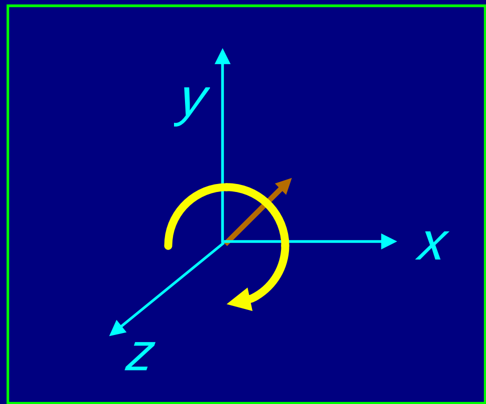
در درس آینده بیشتر درمورد غلتش صحبت خواهیم کرد.!

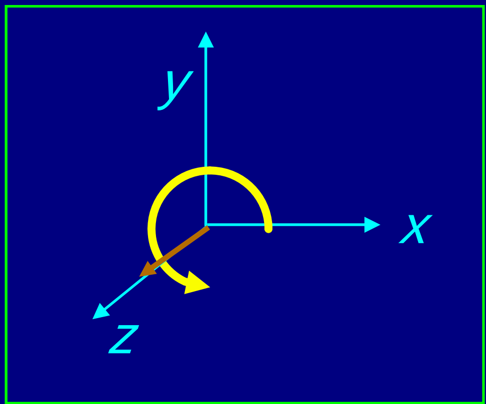
جهت دوران:

- به طور عمومی متغییرهای دوران بردار هستند یعنی دارای جهت می باشند
- اگر دوران در صفحه *x-y* باشد دراین صورت قرارداد این است که:

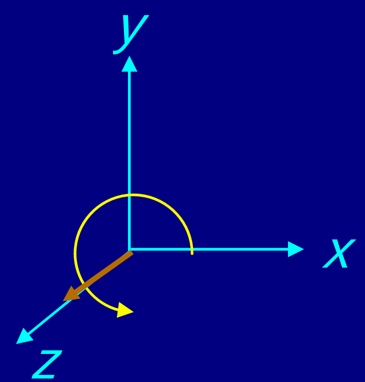
دوران خلاف عقربه های ساعت (CCW) درجهت *z +* است

دوران در جهت عقربه های ساعت (CW) درجهت *z -* است

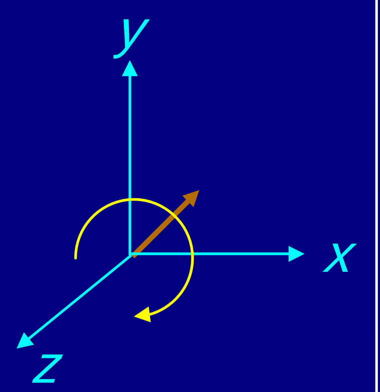




جهت دوران :
قاعده دست راست



- **برای تعیین جهت برداردوران ,انگشتان دست راست خود را در جهت دوران خم کنید دراین صورت انگشت شست شما جهت بردار دوران را نشان می دهد.!**



- عموما محور z را محور دوران انتخاب می کنیم

$\Leftarrow \theta = \theta_z$

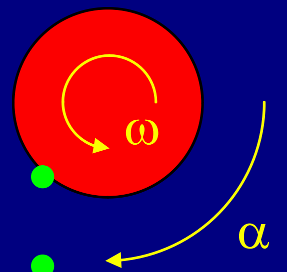
$\Leftarrow \omega = \omega_z$

$\Leftarrow \alpha = \alpha_z$

- ازنظر سادگی اندیس را حذف می کنیم مگر اینکه نیازی به این کار وجود داشته باشد..

مثال...

- یک چرخ لنگر با سرعت زاویه ای $\omega_0 = 500\ rad/s$ می چرخد. درلحظه $t = 0$ با آهنگ $0.5\ rad/s^2$ حرکت آن کند می شود. چه مدت طول می کشد تا متوقف شود؟



- می دانیم که $\alpha = -0.5\ rad/s^2$.
- از رابطه $\omega = \omega_0 + \alpha t$ برای یافتن زمان توقف وقتی $\omega = 0$
- می شود *استفاده کنید*:

$$t = -\frac{\omega_0}{\alpha}$$

- لذا دراین مورد $$t = \frac{500\ \ rad/s}{0.5\ \ rad/s^2} = 1000\ \ s = 16.7\ \ \min$$

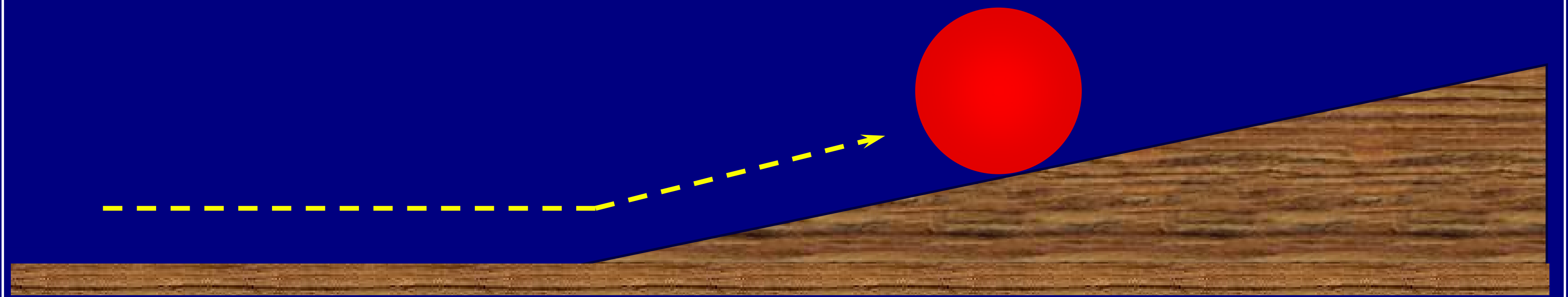
دوران...

- گلوله ای در روی کف اتاق می غلتدو سپس از یک سطح شیبدار بالا می رود . درروی سطح شیبدار شتاب زاویه ای در کدام جهت است؟

(a) پایین سطح

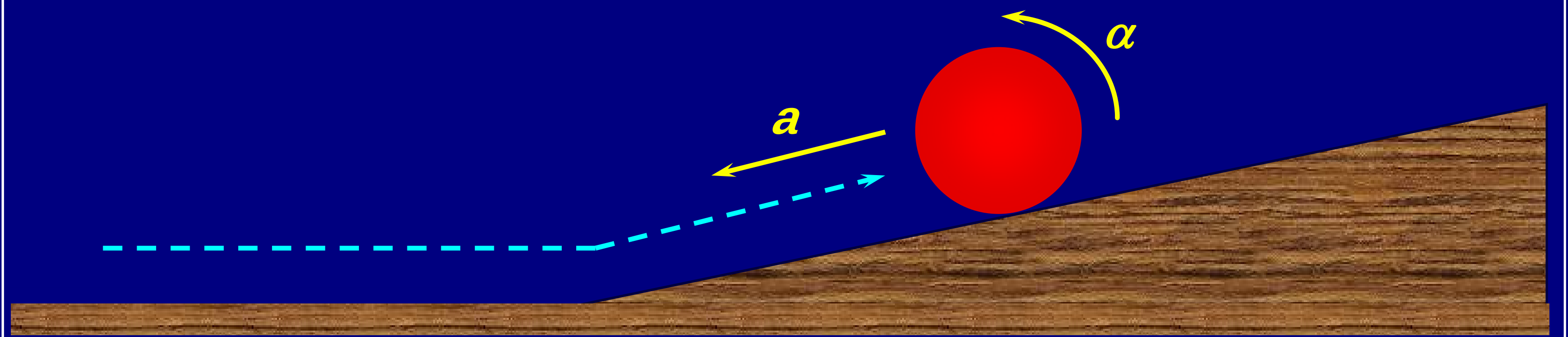
(b) به داخل صفحه

(c) به خارج صفحه



پاسخ:

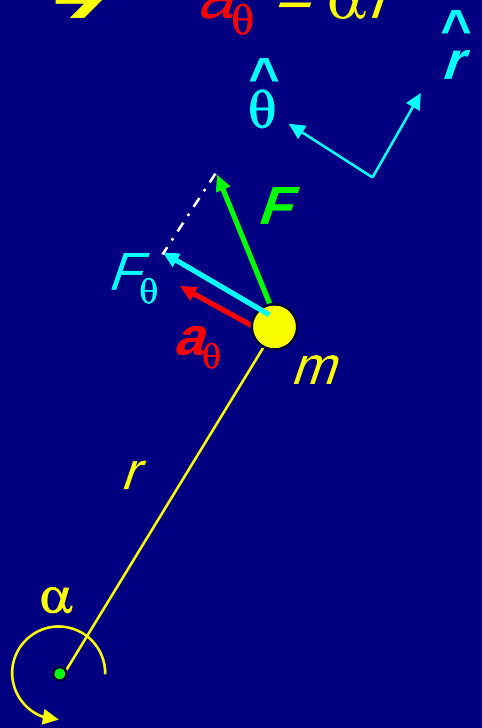
- وقتی گلوله رو ی سطح شیبدار است شتاب خطی a همواره روبه پایین سطح است(به علت جاذبه زمین) .
- دراین صورت شتاب زاویه ای در جهت خلاف عقربه های ساعت است
- با استفاده از قاعده دست راست α ,به طرف خارج صفحه است!



دینامیک دورانی :
عامل دوران چیست؟

- نیرویی به جسمی که مقید به حرکت روی یک دایره است واردمی شود .
فرض کنید که شتاب آن در یک لحظه درجهت $\hat{\theta}$ باشد:

$$\Rightarrow \quad a_\theta = \alpha r$$



- اکنون قانون دوم نیوتن را درجهت $\hat{\theta}$ می نویسیم:

$$F_\theta = m\, a_\theta = m\, \alpha\, r$$

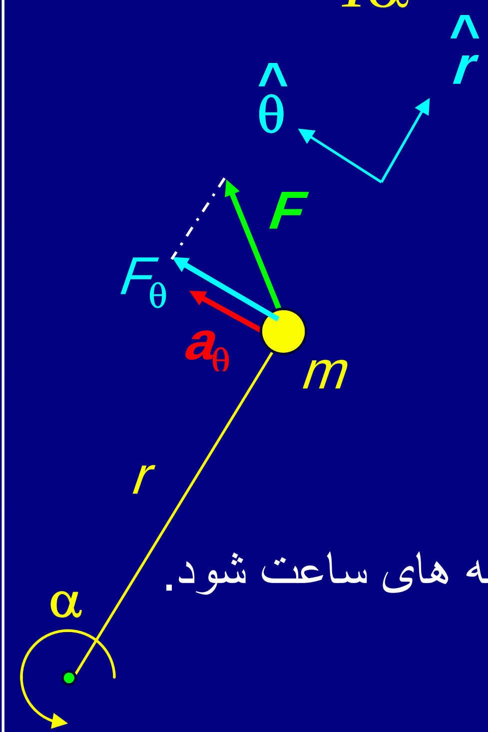
- باضرب درr :

$$\boxed{r\, F_\theta = m r^2 \alpha}$$

دینامیک دورانی :
عامل دوران چیست؟

$rF_\theta = mr^2\alpha$ با استفاده از $\Rightarrow$ $I = mr^2$

$= I\alpha$



- گشتاور را اینگونه تعریف می کنیم : $\tau = rF_\theta$

  $\Leftarrow$ τ برابر با نیروی مماسی F_θ در بازوی اهرم گشتاور r است .

$$\boxed{\tau = I\alpha}$$

- گشتاور بردار بوده و جهت دارد.جهت آن:

  $\Leftarrow$ $z+$ اگر سبب چرخش سیستم در جهت خلاف جهت عقربه های ساعت شود.

  $\Leftarrow$ $z-$ اگر سبب چرخش درجهت عقربه های ساعت شود.

:دینامیک دورانی
عامل دوران چیست؟

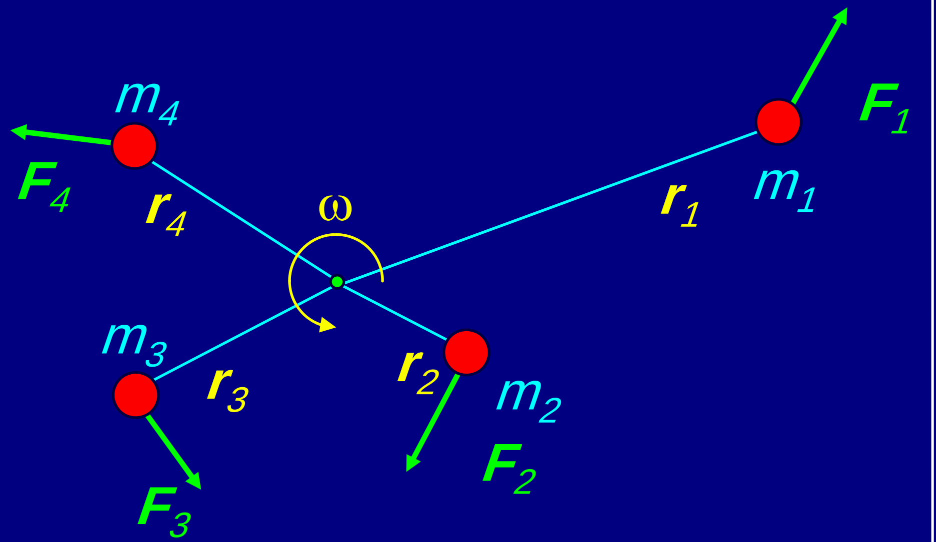
- بنابراین برای مجوعه ای از ذرات در پیکره یک جسم صلب داریم:

$$\sum_i \underbrace{r_i F_{i,\theta}}_{\tau_i} = \sum_i \underbrace{m_i r_i^2}_{I} \alpha_i$$

- در یک جسم صلب کلیه ذرات آن دارای α یکسان هستند.

$$\sum_i \tau_i = I\alpha$$

$$\boxed{\tau_{NET} = I\alpha}$$



دینامیک دورانی:
عامل دوران چیست؟

$$\tau_{NET} = I\alpha$$

- واین مشابه رابطه مربوط به دینامیک خطی است $F_{NET} = ma$
- گشتاور مشابه دورانی نیرو است :
  - معیاری برای میزان "چرخش " جسم است.
- گشتاور لختی *I* مشابه چرخشی جرم است.
  - اگر *I* بزرگ باشد برای رسیدن به یک شتاب زاویه ای معین به گشتاوربزرگی نیاز است .
- گشتاور دارای یکای $kg\ m^2/s^2 = (kg\ m/s^2)\ m = Nm$ *است* .

گشتاور

- تعریف گشتاور را به خاطر آورید:

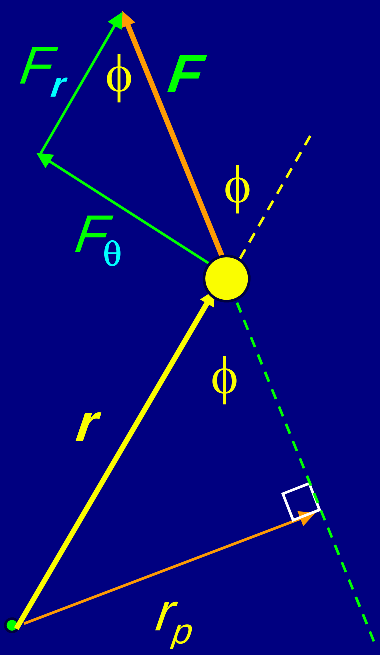
$$\boxed{\tau = rF_\theta}$$

$$= r\,F\sin\phi$$

$$= r\sin\phi\;F$$

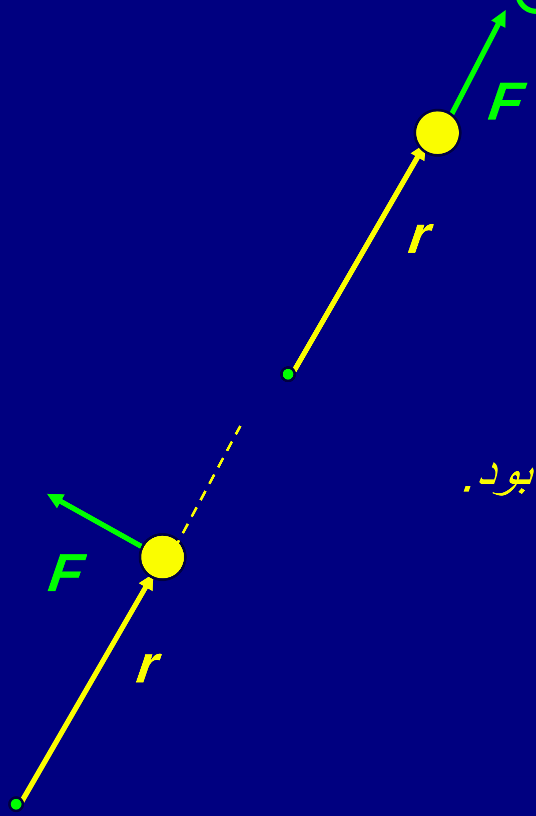
$$\boxed{\tau = r_pF}$$

r_p = "فاصله عمودی مرکز دوران از راستای نیرو"



گشتاور

$$\boxed{\tau = r F \sin\phi}$$



- لذا اگر $\phi = 0^o$ باشد, دراین صورت $\tau = 0$ خواهد بود.

- واگر $\phi = 90^o$ باشد, دراین صورت $\tau =$ بیشینه خواهد بود.

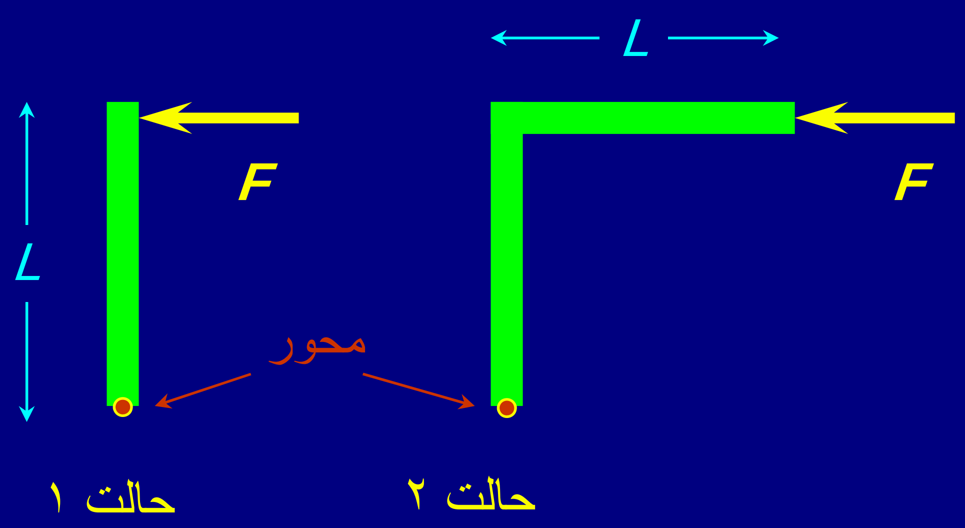
گشتاور

- **<u>درکدام مورد گشتاور نیروی ایجاد شده حول محور چرخش بیشتر است؟در هردو مورد بزرگی و جهت نیروی اعمالی یکسان است.</u>**

(a) حالت ۱

(b) حالت ۲

(c)برابر



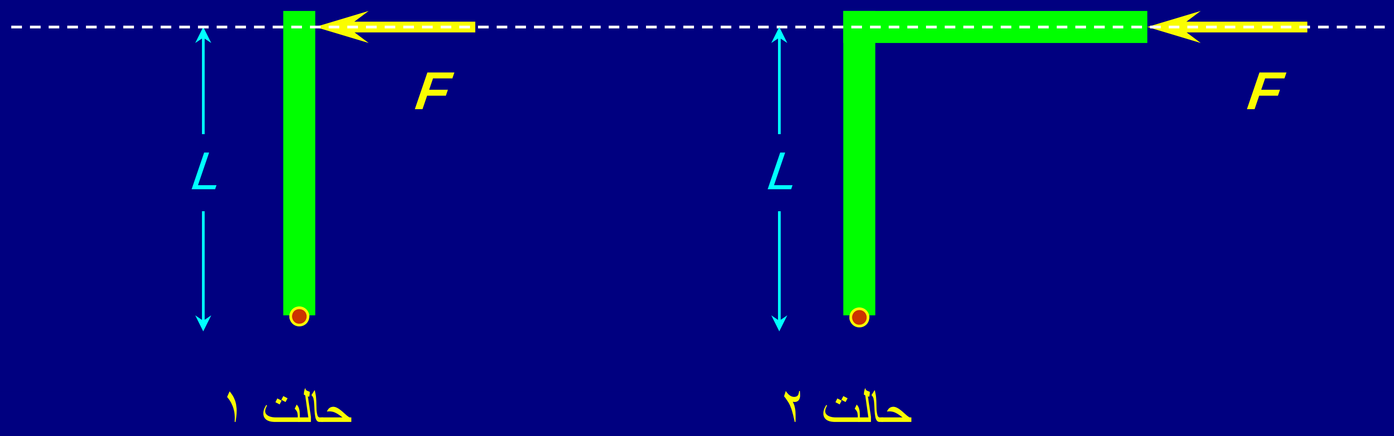
پاسخ:

- گشتاور = F x (فاصله عمودی)

نیروی اعمالی یکسان است.

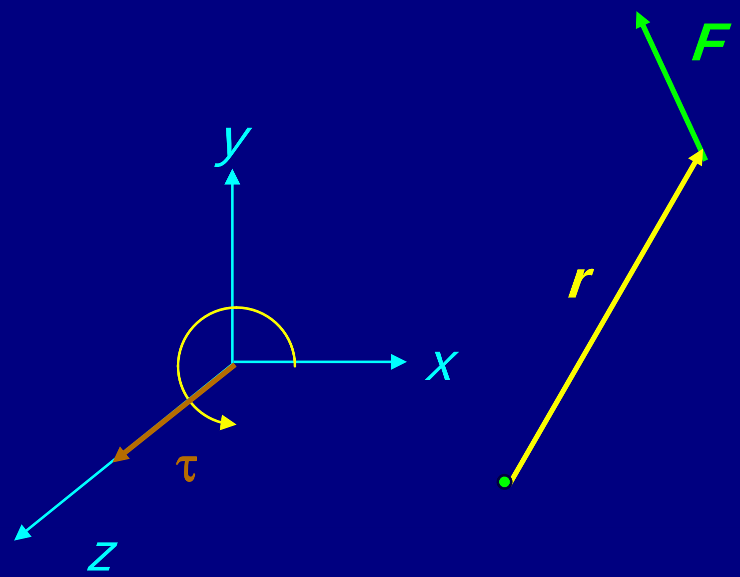
فاصله عمودی یکسان است.

گشتاور در هردو مورد برابر است.!



گشتاور و قاعده دست راست:

- قاعده دست راست جهت گشتاور را مشخص می کند:
  - دست راست خود را در طول راستای محور به طرف نقطه ای که نیرو واردمی شود قرار دهید.
  - انگشتان خود را درجهت نیرو به چرخانید
  - انگشت شست شما جهت گشتاور را نشان می دهد .



یادآوری : ضرب برداری(ضرب خارجی)

- ماهیت برداری گشتاور را با کمک حاصل ضرب برداری بیان می کنیم .

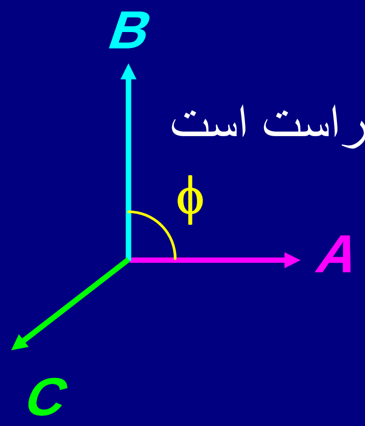
  ➔ضرب بردار دو بردار یک بردار است:

$$\boxed{\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{C}}$$

- بزرگی بردار **C** برابراست با:

$$C = AB \sin\phi$$

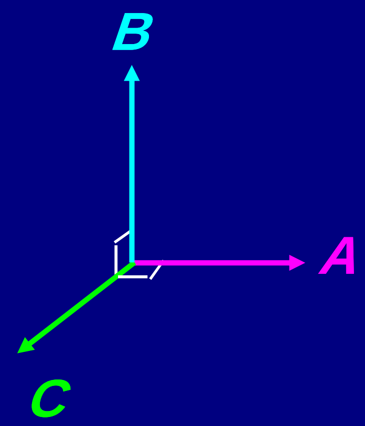
- جهت بردار **C** عمودبر صفحه **A** و **B**, ودرجهت قاعده دست راست است



ضرب برداری دو بردار...

- مولفه های قائم ضرب برداری :

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$$



$$C_X = A_Y B_Z - B_Y A_Z$$

$$C_Y = A_Z B_X - B_Z A_X$$

$$C_Z = A_X B_Y - B_X A_Y$$

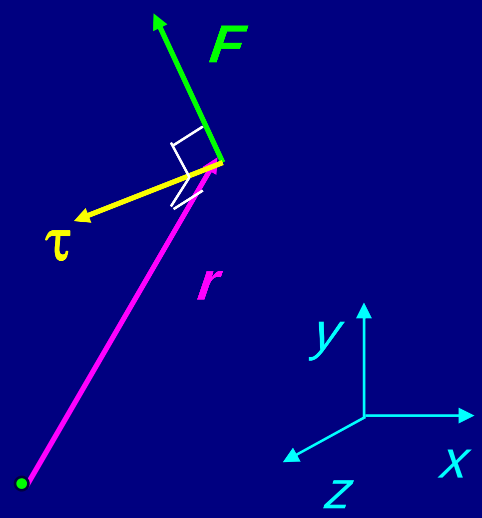
توجه کنید که $B \times A = - A \times B$ است

گشتاور و ضرب برداری:

- لذا گشتاور را می توان چنین تعریف کرد:

$$\tau = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$
$$= rF \sin\phi$$

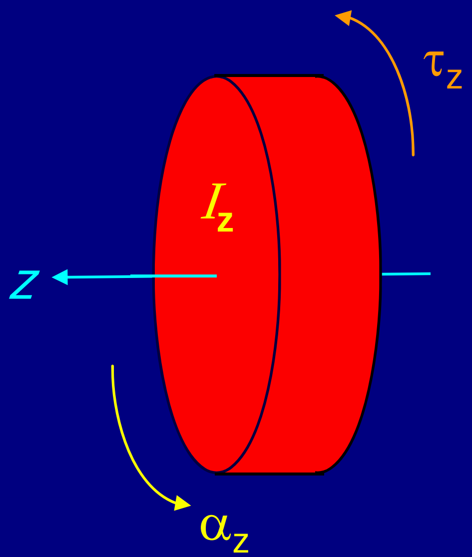
$$\tau_X = r_Y F_Z - F_Y r_Z = y F_Z - F_Y z$$
$$\tau_Y = r_Z F_X - F_Z r_X = z F_X - F_Z x$$
$$\tau_Z = r_X F_Y - F_X r_Y = x F_Y - F_X y$$



توضیحی در مورد $\tau = I\alpha$

- وقتی رابطه $\tau = I\alpha$ را می نویسیم در واقع مولفه z یک معادله برداری مورد نظر ما است . (به خاطر داشته باشید که محورz را محور دوران درنظر می گیریم) .

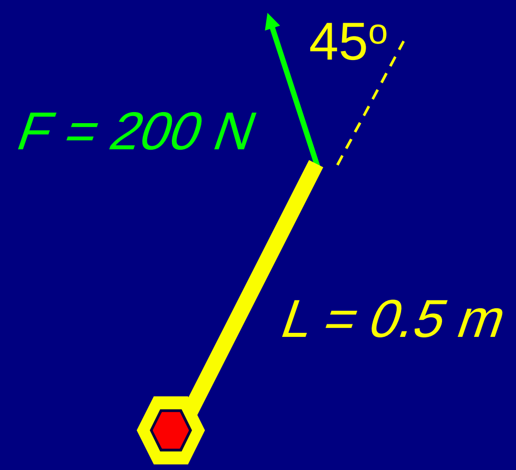
$$\boxed{\tau_z = I_z\alpha_z}$$



- معمولا اندیس z به منظور سادگی حذف می کنیم.

مثال

- برای باز کردن یک مهره شخصی نیروی $200\ N$ را تحت زاویه 45^o به دسته یک اچار به طول $50\ cm$ وارد می کند .
  - بزرگی گشتاور وارد بر مهره چقدر است؟
  - اگر مهره ناگهان باز شده و تحت این گشتاور شروع به چرخش کند شتاب زاویه ای ان چقدر است؟(آچار جرمش $3\ kg$ است)

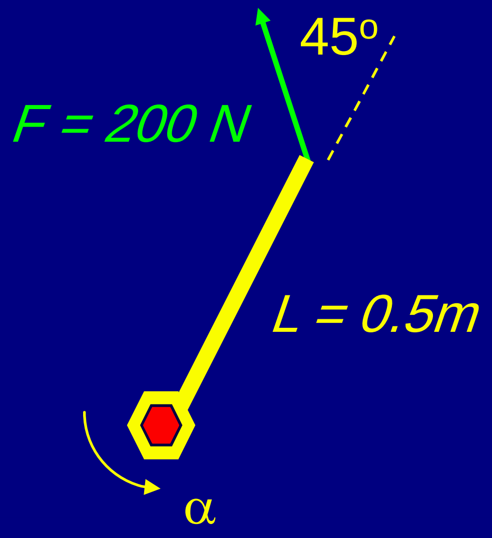


ادامه مثال

- گشتاور : $\tau = LF\sin\phi = (0.5\ m)(200\ N)(\sin 45) \quad = 70.7\ Nm$
- اگر مهره آزادانه به چرخد $\tau = I\alpha$,

← τ و α را میدانیم, لذا I را محاسبه می کنیم.

$$I = \frac{1}{3}ML^2 = \frac{1}{3}(3\ \ kg)(0.5\ \ m)^2 = 0.25\ \ kgm^2$$



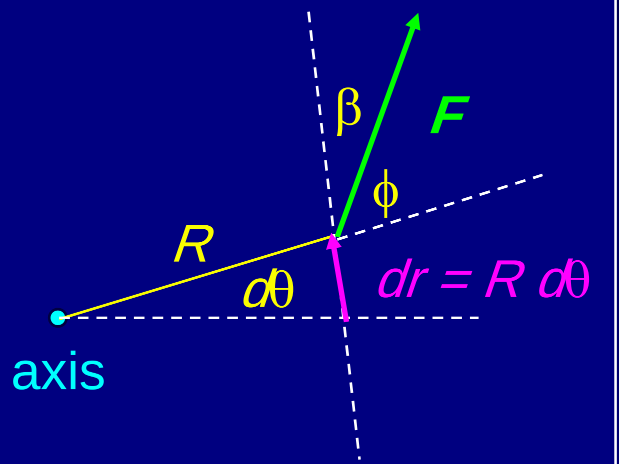
$$\alpha = \tau\ /\ I = (70.7\ Nm)\ /\ (0.25\ kgm^2)$$

$$\boxed{\alpha = 283\ rad/s^2}$$

کار درحرکت دورانی

- کار نیروی $\boldsymbol{F}$ وارد برجسمی که مقید به دوران حول یک محور است را پیدا می کنیم .برای جابه جایی زاویه ای بسیار کوچک $d\theta$ داریم :

$$\Leftarrow dW = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dr} = FR\, d\theta\, cos(\beta)$$
$$= FR\, d\theta\, cos(90-\phi)$$
$$= FR\, d\theta\, sin(\phi)$$
$$= FR\, sin(\phi)\, d\theta$$
$$dW = \tau\, d\theta$$



- ازاین رابطه انتگرال می گیریم تا رابطه $\boxed{W = \tau\theta}$: بدست آید
- این رابطه مشابه $W = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\Delta r}$ است
- W منفی خواهد بود اگر τ و θ مختلف الجهت باشند!

کار و انرژی جنبشی :

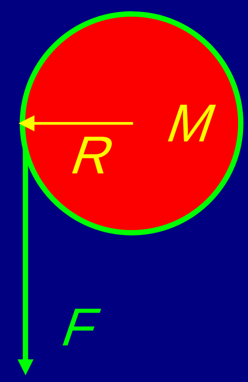
- قضیه کار و انرژی جنبشی را به خاطر بیاورید $\Delta K = W_{NET}$:
- این رابطه به طورکلی درست بوده و درحرکت دورانی نیز بکار می رود.
- بنابراین برای جسمی که حول یک محور ثابت می چرخد:

$$\Delta K = \frac{1}{2} I\left(\omega_f^2 - \omega_i^2\right) = W_{NET}$$

مثال : دیسک و طناب

- یک طناب بدون جرم 10 بار به دور یک دیسک به جرم $M = 40\ g$ وشعاع
- $R = 10\ cm$ *بسته شده است*. این دیسک حول محوری که از مرکز آن می گذرد می چرخد. طناب را با نیروی $F = 10\ N$ می کشیم تا باز شودو فرض می کنیم که طناب نمی لغزدو دیسک در ابتدا درحال سکون بوده است. .

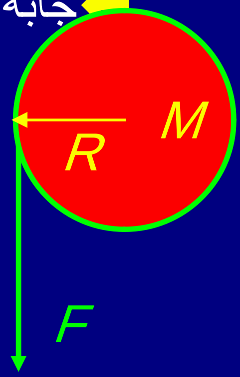
بعداز باز شدن کامل طناب دیسک با چه سرعتی می چرخد؟



دیسک و طناب ...

- کارانجام شده برابر است با: $W = \tau\,\theta$
  - گشتاور نیروی وارد شده: $\tau = RF$ (چون $\phi = 90^o$)
  - جابه جایی زاویه ای θ است:

$$2\pi \text{ rad/rev} \times 10 \text{ rev}$$

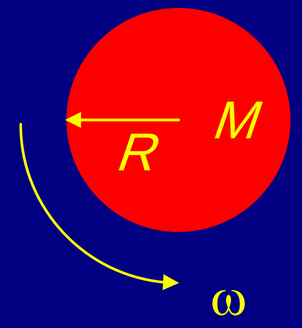


لذا: $W = \underbrace{(.1\text{ m})(10\text{ N})}_{\tau}\underbrace{(20\pi\text{ rad})}_{\theta} = 62.8\text{ J}$

دیسک و طناب ...

$$W_{NET} = W = 62.8\text{ J} = \Delta K = \frac{1}{2} I\,\omega^2$$

به خاطر بیاورید که لختی دوران دیسک برابر است با:



$$I = \frac{1}{2} MR^2$$

لذا :

$$\Delta K = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} MR^2\right)\omega^2 = W$$

$$\omega = \sqrt{\frac{4W}{MR^2}} = \sqrt{\frac{4(62.8J)}{(.04kg)(1)^2}}$$

$$\boxed{\omega = 792.5\ rad/s}$$

تمرین کارو انرژی

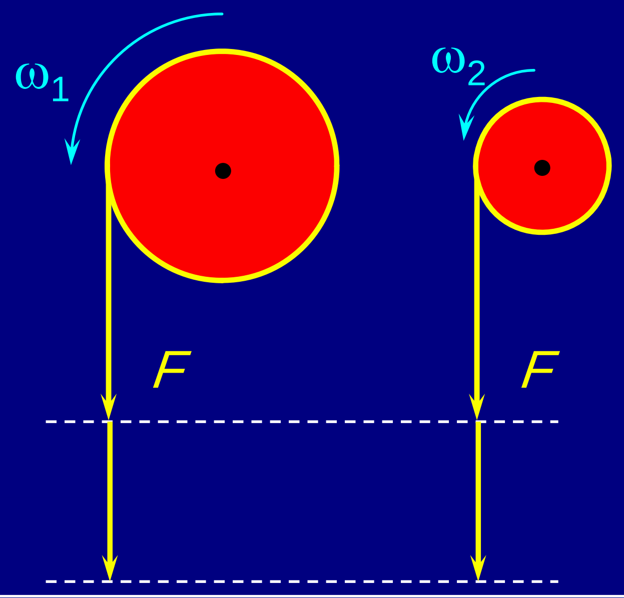
- طناب هایی به دور محیط دو دیسک پیچیده ایم و آنها را با نیروی مساوی به فاصله مشخصی می کشیم .
دیسک ۱ شعاع بزرگتری دارد ولی گشتاور لختی انها برابر است .هر دو حول محوری که از مرکزشان می گذر د می چرخند و در ابتدا در حال سکون بوده اند.

بعد از این کشیدن کدام دیسک سرعت زاویه ای بیشتری خواهد داشت؟

(a) دیسک ۱

(b) دیسک ۲

(c) مساوی



پاسخ:

- کار انجام شده رو ی دو دیسک برابر است!

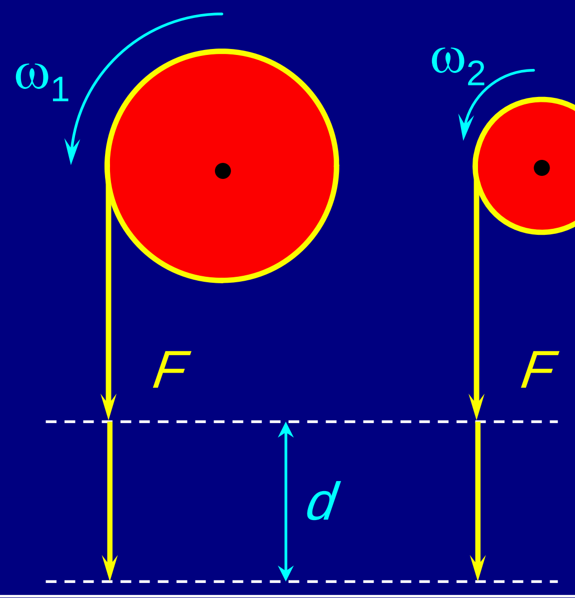
$$W = Fd$$

- تغییر انرژی جنبشی دو دیسک برابر است زیرا $W = \Delta K$

ولی می دانیم $\Delta K = \frac{1}{2} I \omega^2$

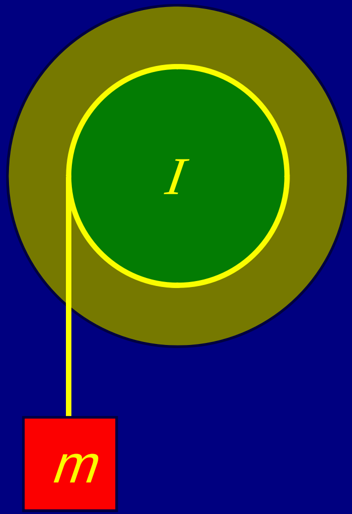
چون $I_1 = I_2$

$$\boxed{\omega_1 = \omega_2}$$



دیسک چرخنده:

- می توانیم این را با چرخ لنگر بزرگی آزمایش کنیم.



دراین حالت قابل صرفنظر کردن است

$$W = \Delta K = \frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{2} mv^2$$

$$\Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{2W}{I}}$$

دراین حالت , $I = 1\ kg - m^2$

$$W = mgh = (2\ kg)(9.81\ m/s^2)(1\ m) = 19.6\ J$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\omega = 6.26\ rad/s \sim 1\ rev/s}$$

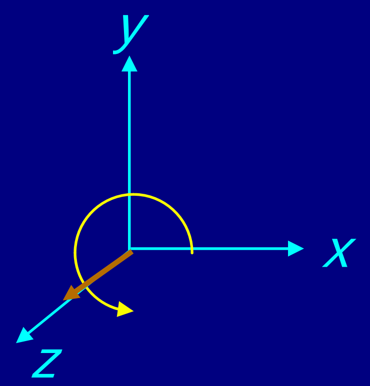
یاد آوری نهایی درس :

- غلتش
- جهت و قاعده دست راست
- دینامیک دورانی و گشتاور
- کار وانرژی و چند مثال
- مطالب کتاب درسی و مسائل آنرا مرور کنید

درس امروز ما...

- مرور
- دینامیک چند جسمی
- وزنه و قرقره جرم دار
- مثالهایی در باره غلتش و لغزش
- دوران حول یک محور متحرک
- غلتش روی سطح شیبدار به پایین
- توپ بولینگ: لغزش به غلتس
- ماشین آتوود با قرقره سنگین

مرور جهت دوران :
قاعده دست راست

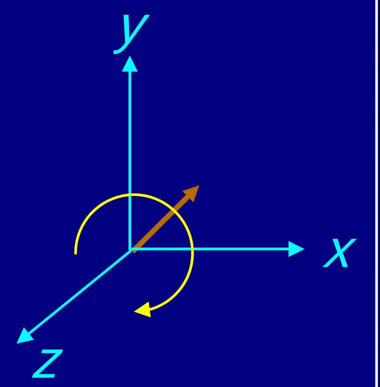


- برای تعیین جهت برداردوران, انگشتان دست راست خود را در جهت دوران خم کنید دراین صورت انگشت شست شما جهت بردار دوران را نشان می دهد.!
- عموما محور z را محور دوران انتخاب می کنیم

$\Leftarrow \theta = \theta_z$

$\Leftarrow \omega = \omega_z$

$\Leftarrow \alpha = \alpha_z$



- ازنظر سادگی اندیس را حذف می کنیم مگر اینکه نیازی به این کار وجود داشته باشد..

مرور دینامیک دورانی :
عامل دوران چیست؟

$$\boxed{\tau_{NET} = I\alpha}$$

- واین مشابه رابطه مربوط به دینامیک خطی است $F_{NET} = ma$
- گشتاور مشابه دورانی نیرو است :
  - معیاری برای میزان "چرخش " جسم است.
- گشتاور لختی I مشابه چرخشی جرم است.
  - اگر I بزرگ باشد برای رسیدن به یک شتاب زاویه ای معین به گشتاوربزرگی نیاز است .
- گشتاور دارای یکای $kg\ m^2/s^2 = (kg\ m/s^2)\ m = Nm$ *است* .

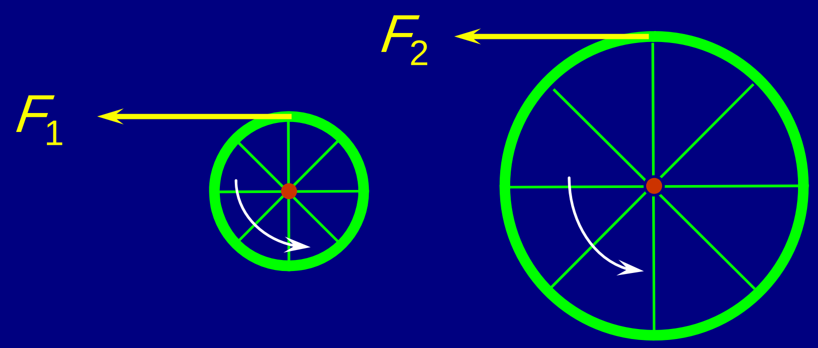
دوران

- دوچرخ آزادانه حول محوری که از مراکزشان می گذرد می چرخند. .این دو چرخ جرم مساوی دارند ولی شعاع یکی دوبرابر دیگری است .
- نیروهای F_1 و F_2 مطابق شکل به آنها وارد می شود. .اگر شتاب زاویه ای دوچرخ یکسان باشد نسبت F_2 / F_1 برابر با کدام گزینه است؟

الف- 1

ب - 2

ج- 4



پاسخ:

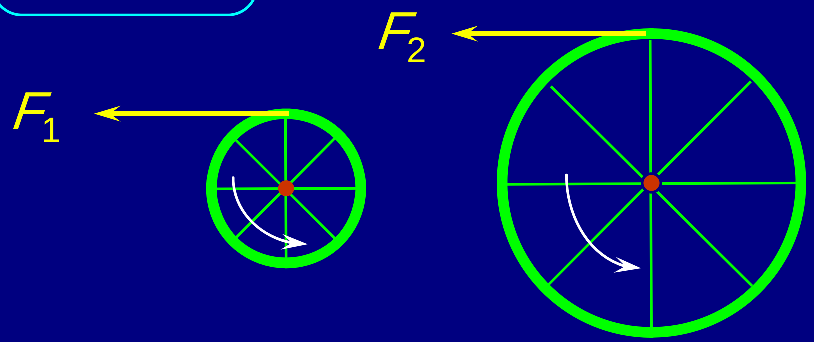
می دانیم: $\tau = I\alpha$

ولی $I = mR^2$ و $\tau = F\,R$

بنابراین:

$$FR = mR^2\alpha$$
$$F = mR\alpha \;\Rightarrow\; \frac{F_2}{F_1} = \frac{mR_2\alpha}{mR_1\alpha} = \frac{R_2}{R_1}$$

$$R_2 = 2R_1 \;\Rightarrow\; \boxed{\frac{F_2}{F_1} = 2}$$



مرور: کار وانرژی

- کار انجام شده به وسیله گشتاور τ در جابه جایی زاویه ای θ برابر است با:

$$\boxed{W = \tau\theta}$$

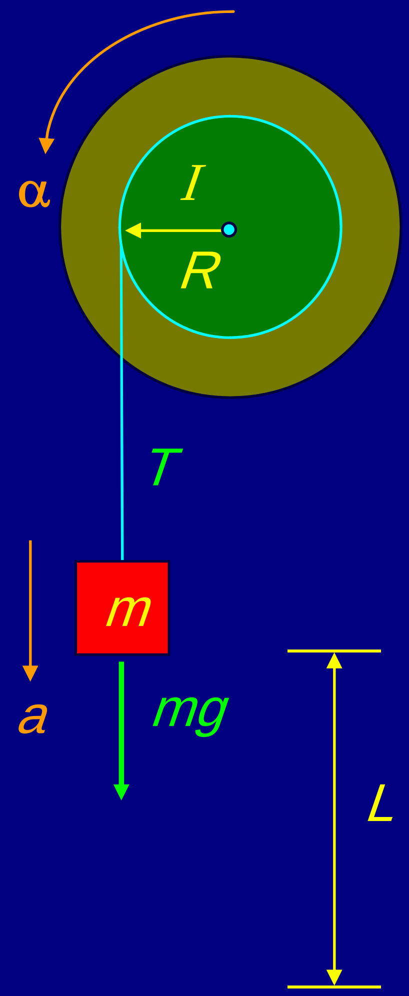
- توان ایجاد شده به وسیله گشتاور ثابت وارده برابر است با:

$$\boxed{P = \frac{dW}{dt} = \tau\frac{d\theta}{dt} = \tau\omega}$$

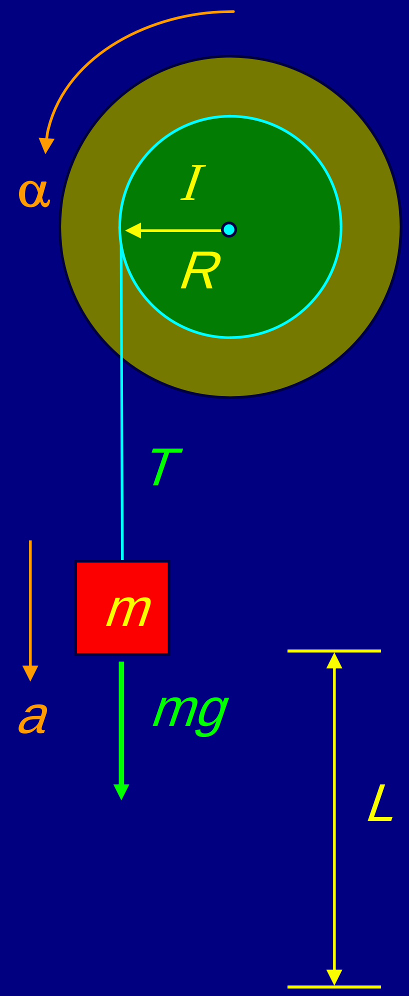
وزنه و قرقره جرم دار

- جرم m به وسیله طنابی حول قرقره ای به شعاع R متصل به یک چرخ لنگر آویزان شده است. گشتاور لختی قرقره و چرخ لنگر I است. طناب روی قرقره نمی لغزد.

➔ با شروع حرکت از حالت سکون چقدر طول می کشد تا این جرم به فاصله L سقوط کند.



وزنه و قرقره جرم دار...



- برای جرم درحال سقوط

$$F = ma$$

$$mg - T = ma$$

- برای قرقره و چرخ لنگز

$$\tau = I\alpha$$

$$\tau = TR = I\alpha$$

- می دانیم: $a = \alpha R$ ⟹ $TR = I\frac{a}{R}$

- اکنون این معادلات را برای یافتن a حل می کنیم:

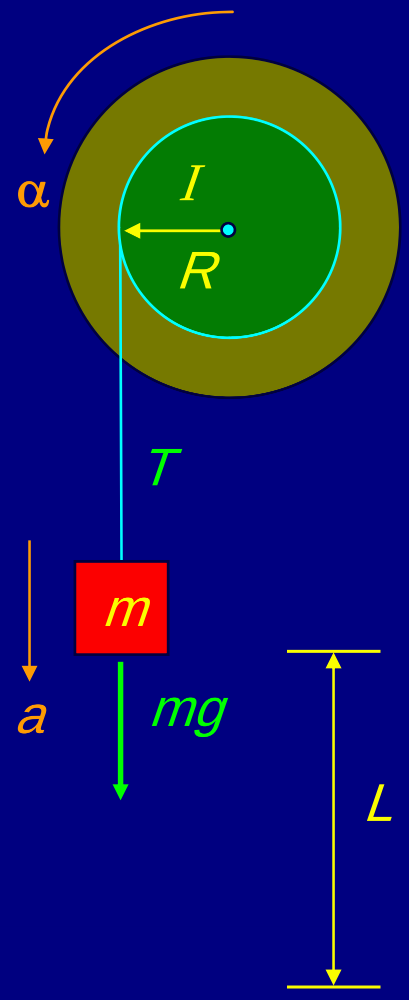
$$\boxed{a = \left(\frac{mR^2}{mR^2 + I}\right)g}$$

وزنه و قرقره جرم دار...

- از دینامیک یک بعدی برای یافتن زمان لازم برای سقوط در فاصله *L* استفاده می کنیم :

$$L = \frac{1}{2}at^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2L}{a}}$$

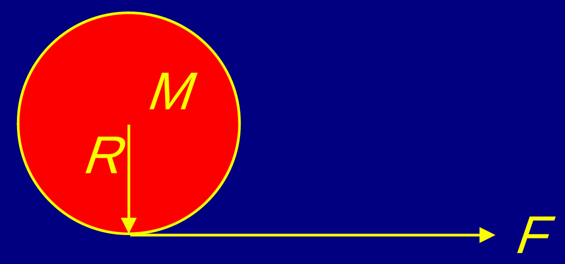
$$\Rightarrow \quad a = \left(\frac{mR^2}{mR^2 + I}\right)g$$



دوران حول یک محور متحرک:

- طنابی دور یک دیسک به جرم M وشعاع R *بسته شده است*. این دیسک درحال سکون روی یک سطح تخت و بدون اصطکاک قرار دارد. طناب را با نیروی F می کشیم و بدون لغزش دیسک شروع به غلتش می کند.

➔چه طولی از طناب L باید باز شود تا مسافت D *را طی* کند؟



نما از بالا

دوران حول یک محور متحرک:

- مرکز جرم طبق قانون دوم نیوتن حرکت می کند

$$F = MA \longrightarrow A = \frac{F}{M}$$

- مسافت طی شده به وسیله مرکز جرم

$$D = \frac{1}{2}At^2 = \frac{F}{2M}t^2$$

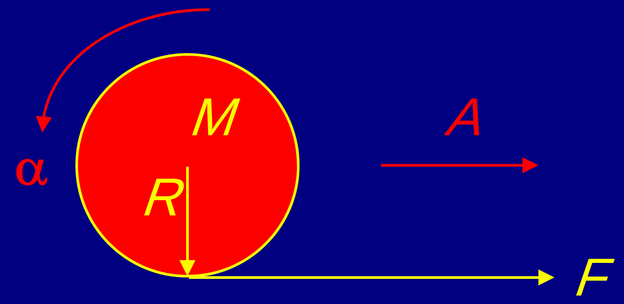
- دیسک حول مرکز جرم طبق رابطه $\tau = I\alpha$ دوران می کند

$$\longrightarrow \quad \alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{RF}{\frac{1}{2}MR^2} = \frac{2F}{MR}$$

- لذا جابه جایی زاویه ای برابر است با:

$$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{F}{MR}t^2$$

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$



دوران حول یک محور متحرک:

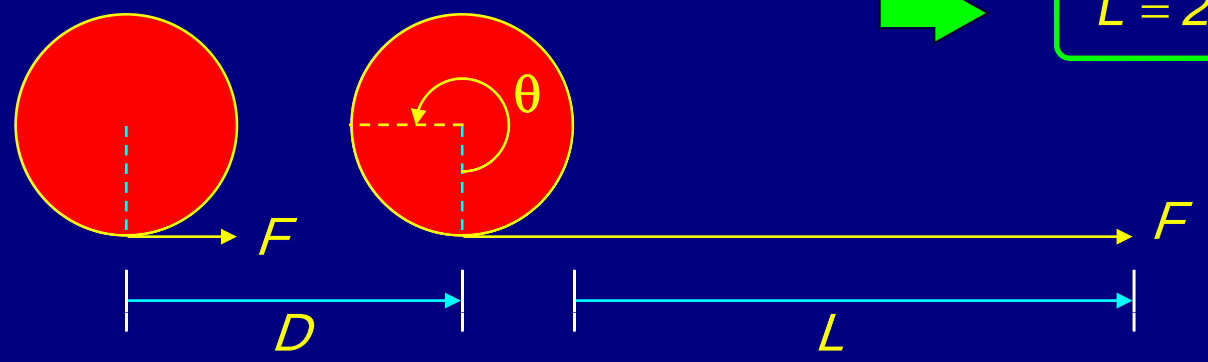
- بنابراین مسافت طی شده به وسیله مرکز جرم و وزاویه دوران حول مرکز جرم برحسب تابعی از زمان می دانیم:

$$D = \frac{F}{2M}t^2 \quad \text{(a)} \qquad\qquad \theta = \frac{F}{MR}t^2 \quad \text{(b)}$$

طول بازشده طناب $L = R\theta$:

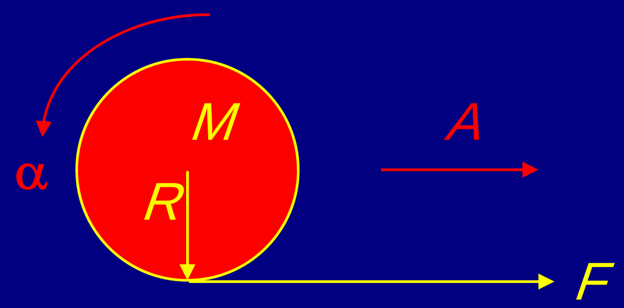
از تقسیم (b) بر (a): $\Rightarrow \frac{\theta}{D} = \frac{2}{R} \Rightarrow R\theta = 2D$

$$\Rightarrow \boxed{L = 2D}$$



توضیح در باره شتاب مرکز جرم:

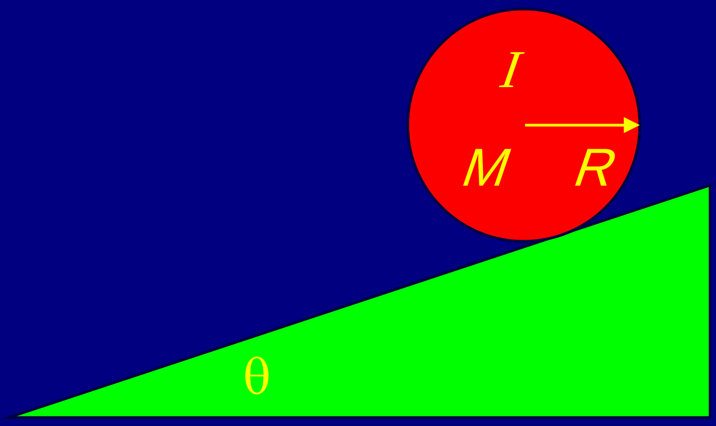
- از رابطه $\tau = I\alpha$ برای چرخش حول محور جرم استفاده می کنیم حتی اگر مرکز جرم دارا شتاب باشد !
  - مرکز جرم یک چهارچوب لخت نیست ! آیا موافقید؟؟
  (سرانجام از رابطه $F = ma$ فقط در چهارچوب لخت استفاده می کنیم)
- بلی ! می توانیم همواره از رابطه $\tau = I\alpha$ برای محوری که از مرکز جرم می گذرد استفاده کنیم.
  - واین حتی وقتی که مرکز جرم شتاب داشته باشد نیز درست است.
  - این موضوع را هنگام بحث تکانه زاویه ای اثبات می کنیم !



غلتش

- جسمی به جرم M, وشعاع R, ولختی دورانی I روی سطح شیبداری به شیب θ نسبت به افق می غلتد. شتاب آن چقدر است ؟

- هنگام حل این مسئله حرکت مرکز جرم و دوران حول مرکز جرم رادر نظر بگیرید.



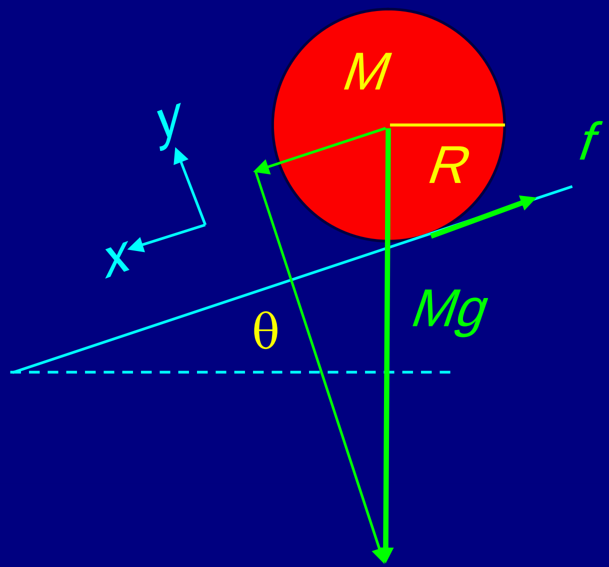
غلتش ...

- اصطکاک ایستایی f سبب غلش می شود .این نیرو نامشخص است با ید آنرا پیدا کنیم.
- ابتدا نمودار جسم آزاد را کشیده و از رابطه $F_{NET} = MA_{CM}$ *استفاده کنید*:

درجهت x داریم: $Mg \sin\theta - f = MA$

- اکنون حرکت حول مرکز جرم و رابطه $\tau = I\alpha$ استفاده کنیدوتوجه کنید که

$A = \alpha R$ و $\tau = Rf$



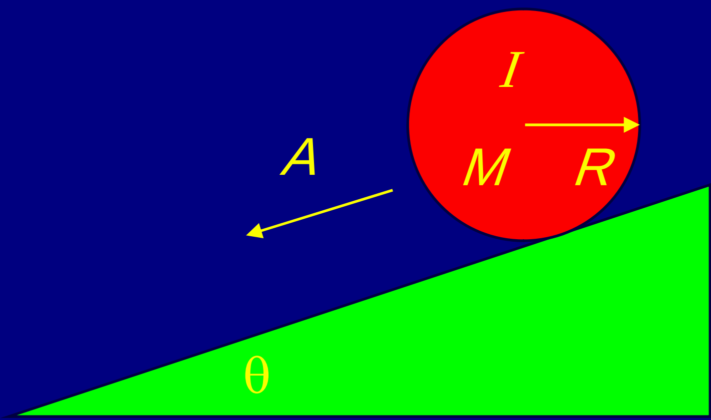
$$Rf = I\frac{A}{R} \Rightarrow f = I\frac{A}{R^2}$$

غلتش ...

- دو معادله داریم: $f = I\frac{A}{R^2}$ و $Mg\sin\theta - f = MA$

- f را بین آنها حذف می کنیم:

$$\boxed{A = g\,\frac{MR^2\sin\theta}{MR^2 + I}}$$



برای یک کره :

$$A = g\,\frac{MR^2\sin\theta}{MR^2 + \frac{2}{5}MR^2} = \frac{5}{7}g\sin\theta$$

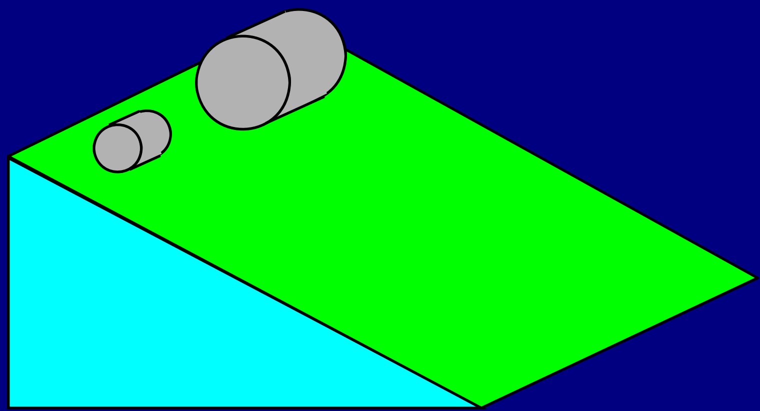
چرخش ها:

- دواستوانه صلب از آلومینیوم که شعا ع یکی دوبرابر دیگری است رو ی سطح شیبدار ی قرار دارند.
  - اگر آنها را از بالای سطح رها کنیم کدام یک در پایین سطح سرعت بیشتری خواهد داشت :

(a) استوانه بزرگتر

(b) استوانه کوچکتر

(c) مساوی



پاسخ:

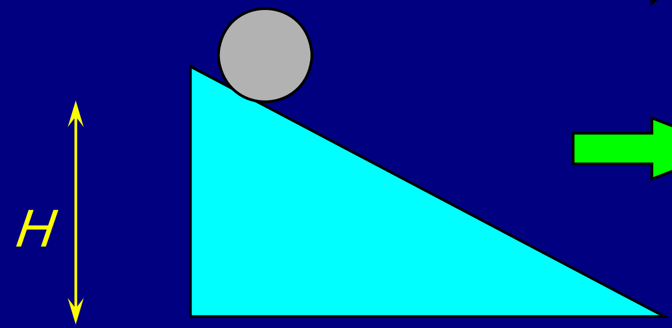
- یکی از آنهار ادر نظر بگیردید .فرض کنید که شعاع آن R, وجرمش M باشدوازارتفاع H *پایین بیاید* .

از پایستاری انرژی: $-\Delta U = \Delta K$ ⇨ $MgH = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}MV^2$

ولی $\omega = \frac{V}{R}$ و $I = \frac{1}{2}MR^2$

⇨ $MgH = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\frac{V^2}{R^2} + \frac{1}{2}MV^2$

⇨ $MgH = \frac{1}{4}MV^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{3}{4}MV^2$



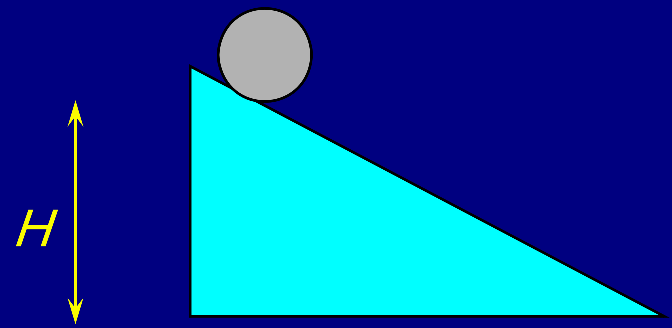
ادامه پاسخ:

لذا:

$$\cancel{M}gH = \frac{3}{4}\cancel{M}V^2 \Rightarrow gH = \frac{3}{4}V^2$$

$$\Rightarrow V = \sqrt{\frac{4}{3}gH}$$

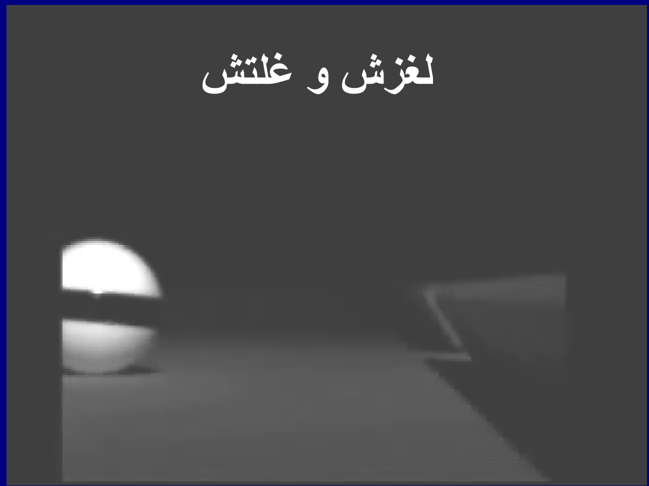
بنابراین سرعت در پایین سطح بستگی به شعاع ندارد .!!



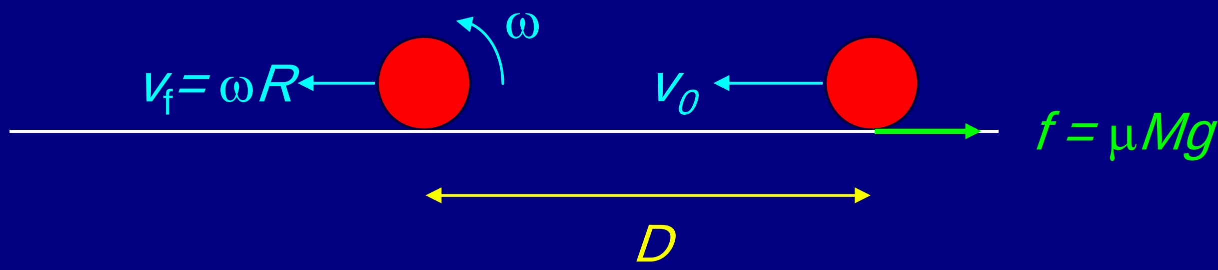
لغزش به غلتش

- یک توپ بولینگ به جرم M وشعاع R با سرعت v_0 پرتاب می شود. در ابتدا غلتس وجو د ندارد . بعداز لغزش در حضور اصطکاک جنبشی به اندازه فاصله D غلتش بدون لغزش شروع می شود و سرعت به v_f می رسد.ضریب اصطکاک جنبشی بین توپ و سطح برابر با μ است .

➔ سرعت نهایی توپ, v_f, چقدر است ؟



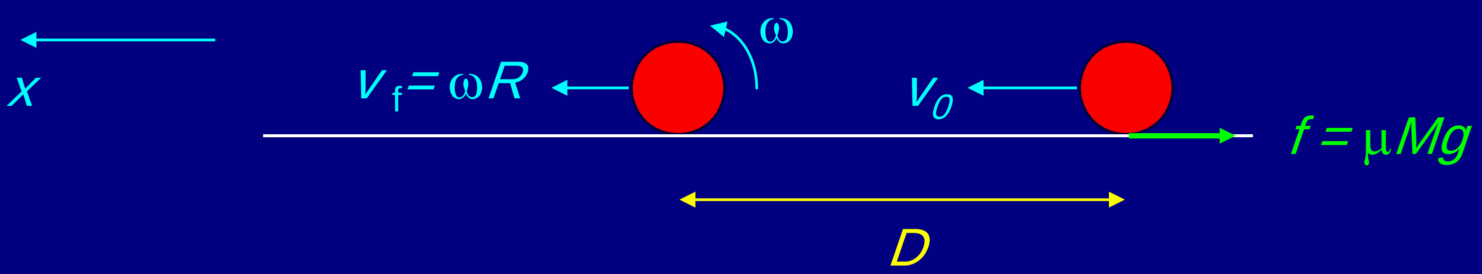
روی شکل کلیک کنید.



لغزش به غلتش...

- هنگام لغزش نیروی اصطکاک سبب شتاب توپ در جهت $-x$ می شود : $F = -\mu Mg = Ma$ لذا $a = -\mu g$
- سرعت توپ برابر است با:(a) $v = v_0 - \mu g t$
- اصطکاک گشتاوری حول مرکزجرم وارد می کند.
با استفاده از $\tau = I\alpha$ وبا توجه به اینکه برای یک کره صلب $I = {}^2/_5 MR^2$ است :

$$\tau = \mu MgR = \frac{2}{5}MR^2\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{5\mu g}{2R} \Rightarrow \omega = \omega_0 + \alpha t = \frac{5\mu g}{2R}t \quad (b)$$



لغزش به غلتش...

- دو معادله داریم:

$$v = v_0 - \mu g t \qquad (a)$$

$$\omega = \frac{5\mu g}{2R} t \qquad (b)$$

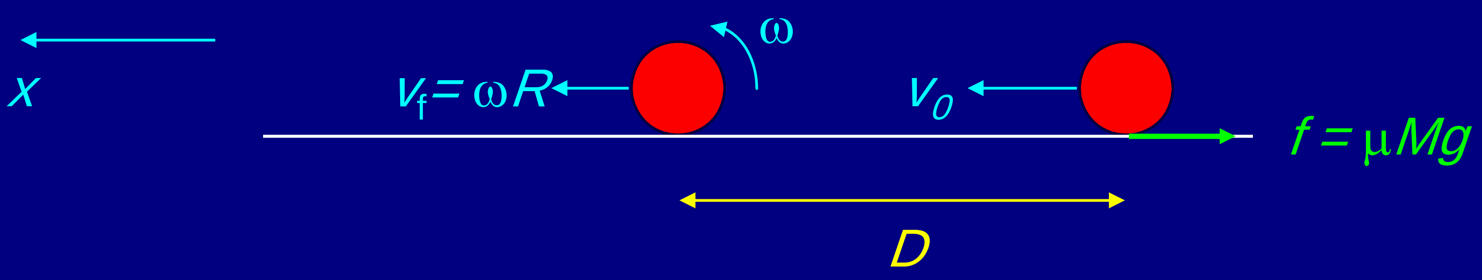
- با استفاده از (b) می توانیم t برحسب ω بدست آوریم:

$$t = \frac{2R\omega}{5\mu g}$$

- با قرار دادن در (a) واستفاده از $v_f = \omega R$ (شرط غلتسش بدون لغزش) :

$$\boxed{v_f = \frac{5}{7} v_0}$$

بستگی به μ و g, M, ندارد !!

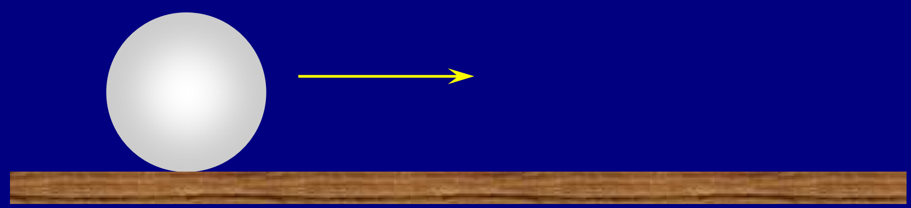


دوران

- یک توپ بولینگ روی کف اتاق بدون لغزش می غلتد(کره صلب).

نسبت انرژی جنبشی دورانی به انرژی جنبشی انتقالی توپ چقدر است؟

(a) $\frac{1}{5}$ (b) $\frac{2}{5}$ (c) $\frac{1}{2}$



توجه کنیدکه $I = \frac{2}{5}MR^2$ برای کره صلب حول مرکز جرمش است :

پاسخ:

- انرژی جنبشی قسمتی مربوط به دوران و قسمتی مربوط به انتقال مرکز جرم است

$$\Rightarrow \quad K = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} M V^2$$

دوران   انتقال

K   K

ادامه پاسخ:

$\omega = \dfrac{V}{R}$ چون غلتش بدون لغزش است: $K = \dfrac{1}{2} I\omega^2 + \dfrac{1}{2} MV^2$

دوران انتقال

K K

$$\Rightarrow \frac{K_{ROT}}{K_{TRANS}} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}} I\omega^2}{\cancel{\frac{1}{2}} MV^2} = \frac{\left(\frac{2}{5} MR^2\right)\frac{V^2}{R^2}}{MV^2} = \frac{2}{5}$$

ماشین آتوود با قرقره دارا ی جرم

- دو جرم از قرقره ای به شکل دیسک آویزان هستند.
  شتاب این جرم ها را پیدا کنید.

- برای جرم های آویزان: $F = ma$

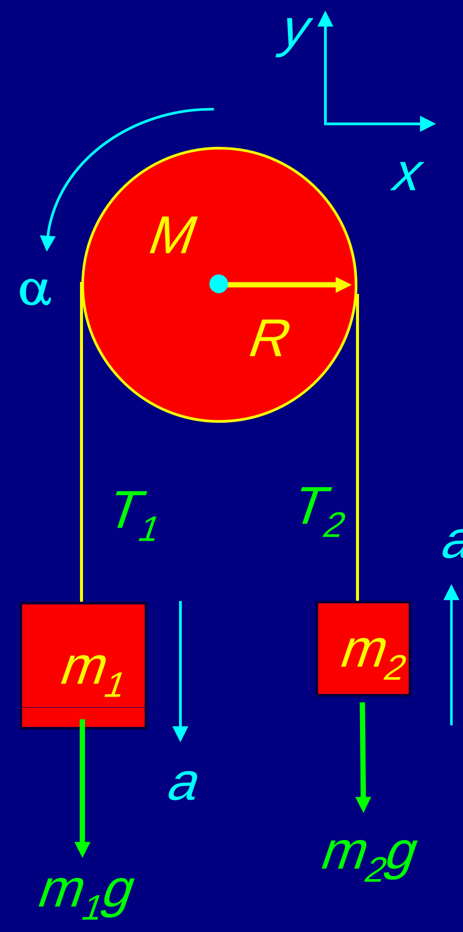
$$-m_1g + T_1 = -m_1a$$

$$-m_2g + T_2 = m_2a$$

برای قرقره $\tau = I\alpha$ $\quad = I\dfrac{a}{R}$

$$\rightarrow \quad T_1R - T_2R = I\frac{a}{R} = \frac{1}{2}MRa$$

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$



ماشین آتوود با قرقره دارا ی جرم

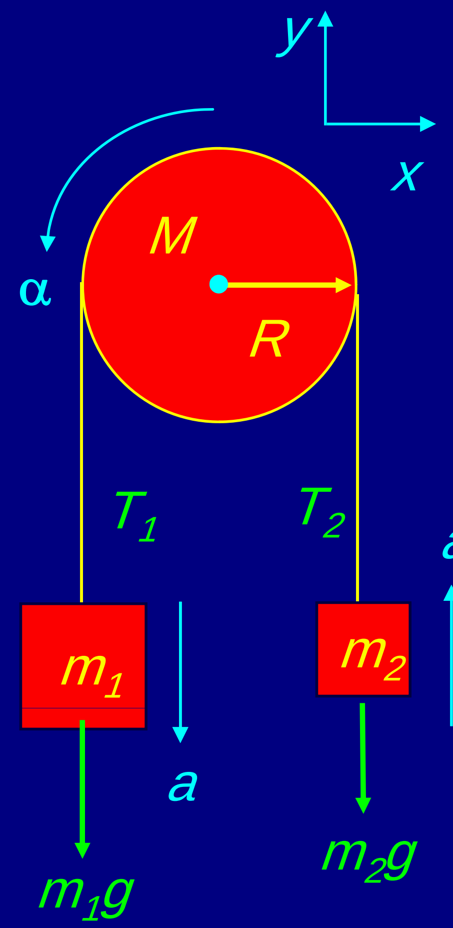
- سه معادله و سه مجهول داریم .$(T_1,\ T_2,\ a)$ A را بدست می آوریم:.

$$-m_1g + T_1 = -m_1a \qquad (1)$$

$$-m_2g + T_2 = m_2a \qquad (2)$$

$$T_1 - T_2 = \frac{1}{2}Ma \qquad (3)$$

$$\boxed{a = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + M/2}\right)g}$$



یادآوری درس امروز...

- مرور
- دینامیک چند جسمی
- وزنه و قرقره جرم دار
- مثالهایی در باره غلتش و لغزش
- دوران حول یک محور متحرک
- غلتش روی سطح شیبدار به پایین
- توپ بولینگ: لغزش به غلتس
- ماشین آتوود با قرقره سنگین
- کتاب درسی و مسائل آنرا مرور کنید!!!

فصل دوازدهم

تکانه زاویه ای ، تعادل اجسام صلب

درس امروز ما...

- گشتاور ناشی از جاذبه
- یادآوری دوران

- **ایستایی**
- اتومبیل روی تپه
- معادلات تعادل ایستایی
- چند مثال :

← مسئله تیر آویزان

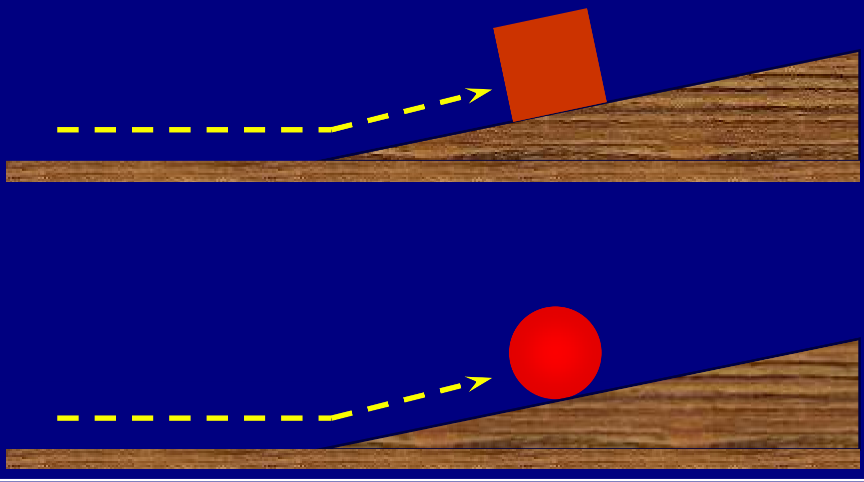
← مسئله لامپ آویزان

← مسئله نردبان

پیش آزمون : دوران

- یک توپ و یک جعبه روی سطح افقی با سرعت یکسان حرکت می کنند .توپ بدون لغزش و جعبه بدون اصطکاک رو ی سطح می لغزد .آنها با یک سطح شیبدار برخورد کرده واز آن بالا می روند .کدام یک قبل از توقف مسافت بیشتری بالا می رود؟

(a) توپ (b) جعبه (c) مساوی



پاسخ:

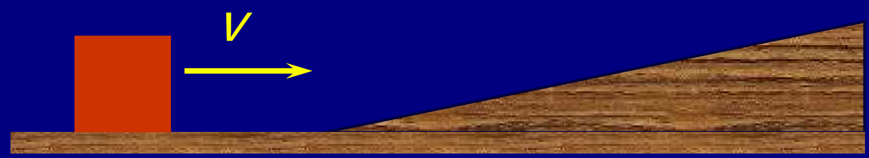
- توپ وجعبه وقتی انرژی جنبشی خود را تبدیل به انرژی پتانسیل کردند متوقف می شوند (mgH) .

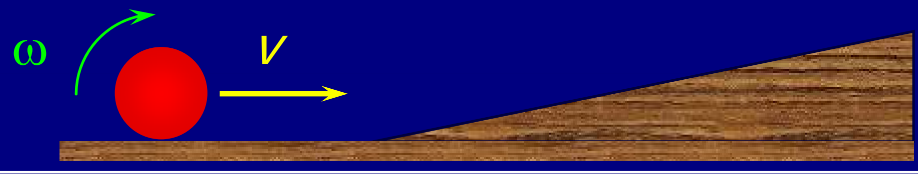
- انرژی جنبشی اولیه جعبه

$$K=\frac{1}{2}mv^2$$

- انرژی جنبشی اولیه توپ: **بزرگتر است**

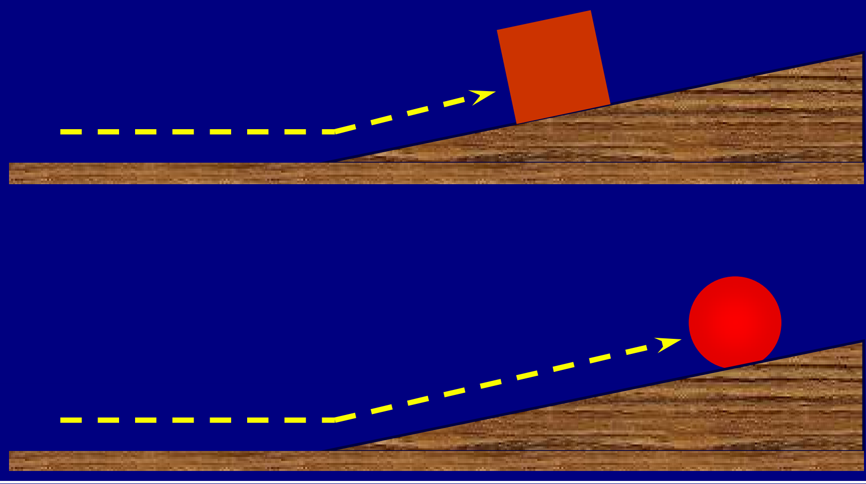
$$K=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}I\omega^2$$





پاسخ :

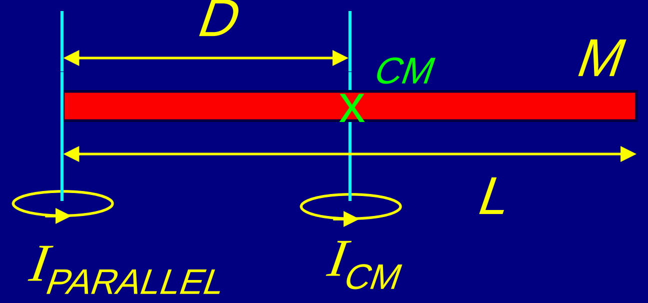
- چون توپ انرژی جنبشی بیتشری دارد بنابراین بیشتر بالا می رود!



یادآوری دوران:

- حول یک محور دوران همواره می توان رابطه $\tau = I\alpha$ را نوشت τ گشتاور I , گشتاور لختی ,و α شتاب زاویه ای است.
- برای سیستم ذره ای $I = \Sigma m_i r_i^2$,
- طبق قضیه محورهای موازی اگر گشتاور لختی حول مرکز جرم I_{CM} معلوم باشد می توانیم لختی دورانی حول محور موازی با آن را ا ز قضیه محورهای موازی حساب کنیم::

$$I_{PARALLEL} = I_{CM} + MD^2$$



- اگر جسم دارای شتاب باشدبازهم می توانیم از رابطه $\tau = I\alpha$ استفاده کنیم به شرط اینکه چرخش حول محور مرکز جرم باشد.

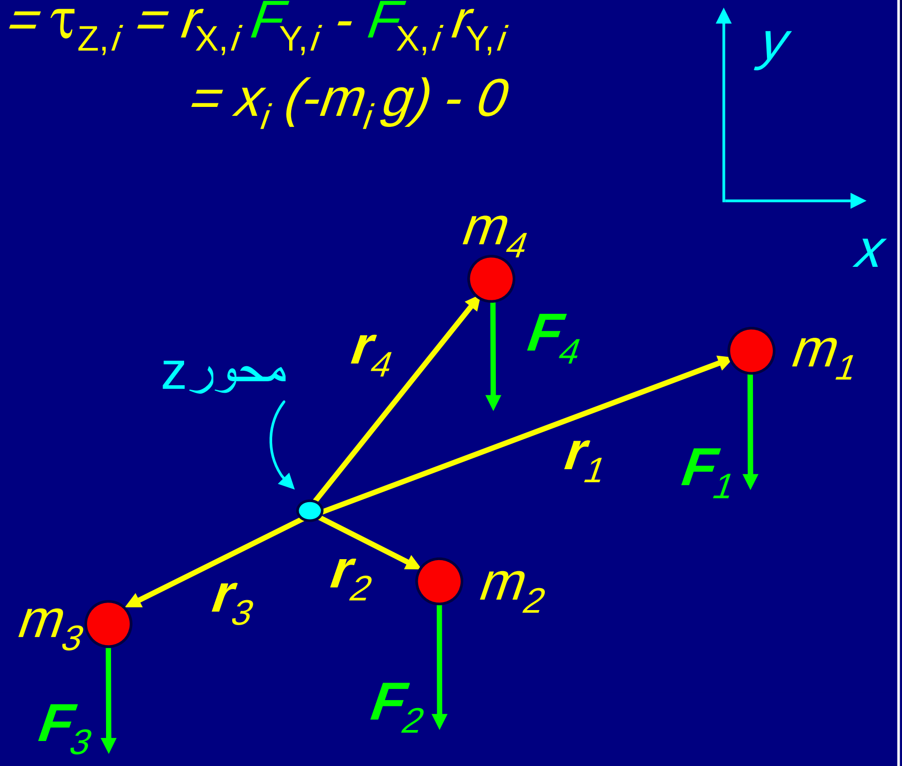
گشتاور ناشی ا ز جاذبه زمین

- آن گونه که می دانیم $\sum_i \tau_i = I\alpha$ که $\tau_i = r_i \times F_i$ است

محور دوران را درراستای محور z فرض کرده و به خاطر بیاورید که

$$\tau_i = \tau_{Z,i} = r_{X,i} F_{Y,i} - F_{X,i} r_{Y,i}$$

$$= x_i(-m_i g) - 0$$



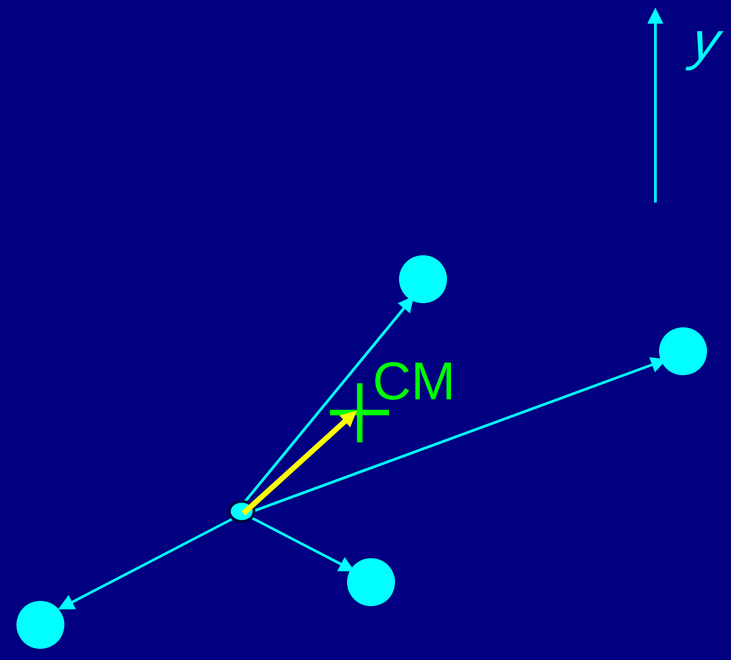
$$\sum_i \tau_i = -g \sum_i m_i x_i = -gMx_{cm}$$

لذا: $\tau = -Mgx_{cm}$

و: $M = \sum_i m_i$

گشتاور ناشی ا ز جاذبه...

- واین همان عبارتی است که اگر می خواستیم مرکز جرم را بدست آوریم به آن می رسیدیم...



$$\tau_{NET} = -Mgx_{cm}$$

$$M = \sum_i m_i$$

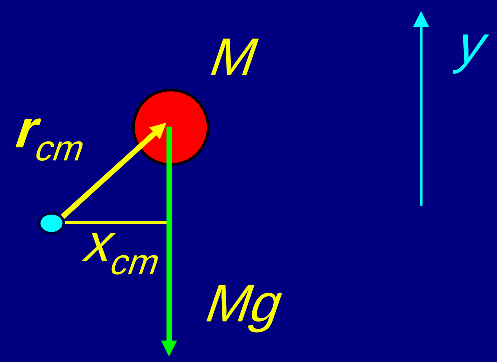
گشتاور ناشی ا ز جاذبه...

- ...وفرض کنید که همه جرم درآن نقطه متمرکز بود!

- بنابراین برای یافتن گشتاور ناشی از جاذبه فرض می کنیم که همه جرم جسم در یک نقطه بنام مرکز جرم متمرکز است.

$$\tau_{NET} = -Mgx_{cm}$$

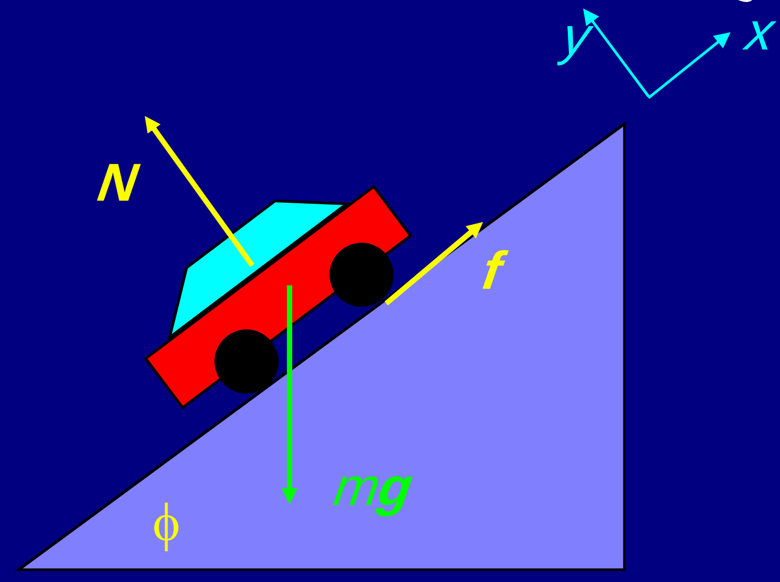
$$M = \sum_i m_i$$



بحث جدید – ایستایی شناسی :

- آن گونه که از اسم آن بر می آید" ,ایستاتیک "مطالعه سیستم هایی است که حرکت نمی کنند.

- مثال :چه نیروهایی بر اتومببیلی که روی یک سطح شیبدار قرارد ارد وارد می شود؟



اتومبیل روی تپه...

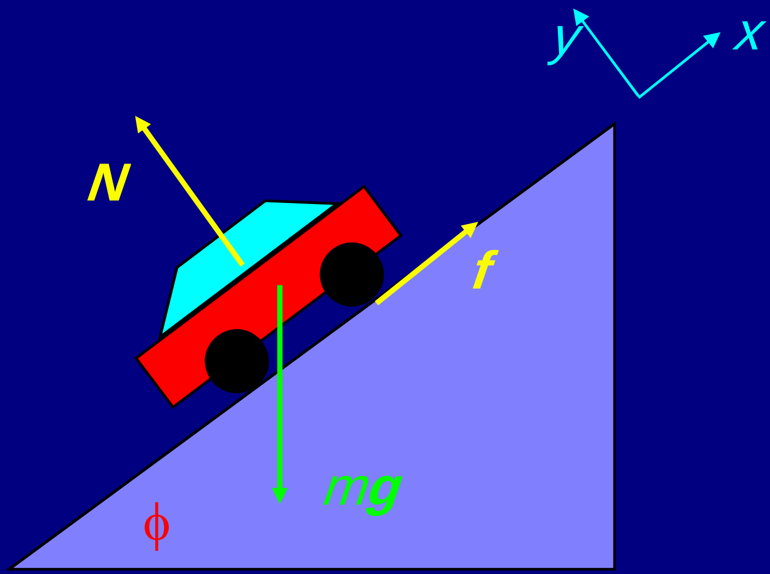
- قانون دوم نیوتن را در نظر بگیرید : $F_{NET} = MA_{CM} = 0$ ⟹ $\boxed{\sum F = 0}$
- آنرا به مولفه های x و y تجزیه کنید :

$$x: \quad f - mg \sin\phi = 0$$

⟹ $$\boxed{f = mg \sin\phi}$$

$$y: \quad N - mg \cos\phi = 0$$

⟹ $$\boxed{N = mg \cos\phi}$$



کاربرد گشتاور...

- تخته ای به جرم M به وسیله دو طناب آویزان شده است. کشش هر طناب را حساب کنید:

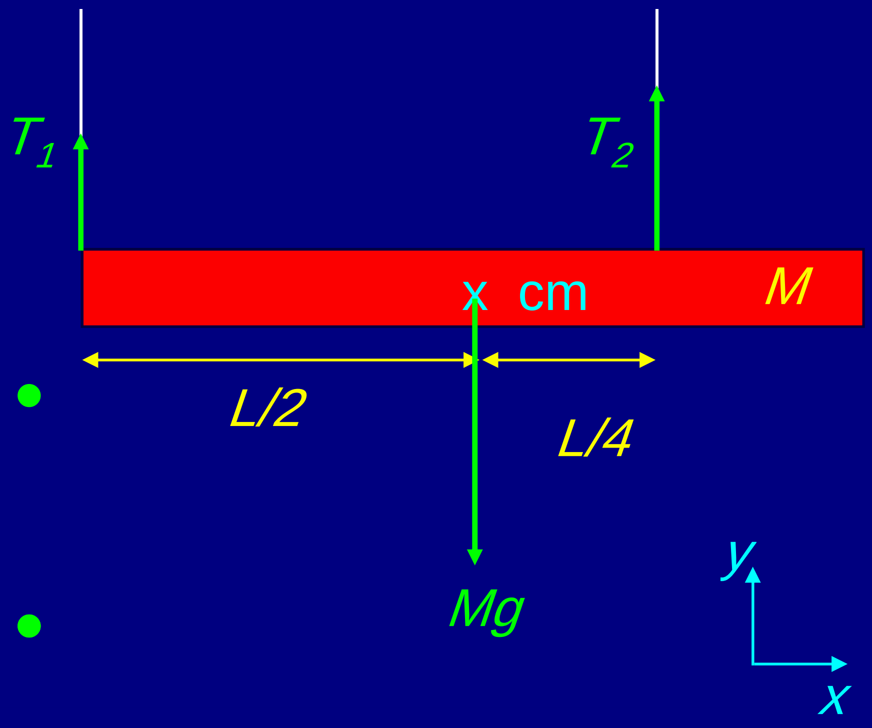
- $$\sum F = 0$$

$$T_1 + T_2 = Mg$$

- با این معادله نمی توان مسئله را حل کرد!

  ۱ معادله و ۲ مجهول داریم!!.

- به معلومات بیشتری نیاز است!!

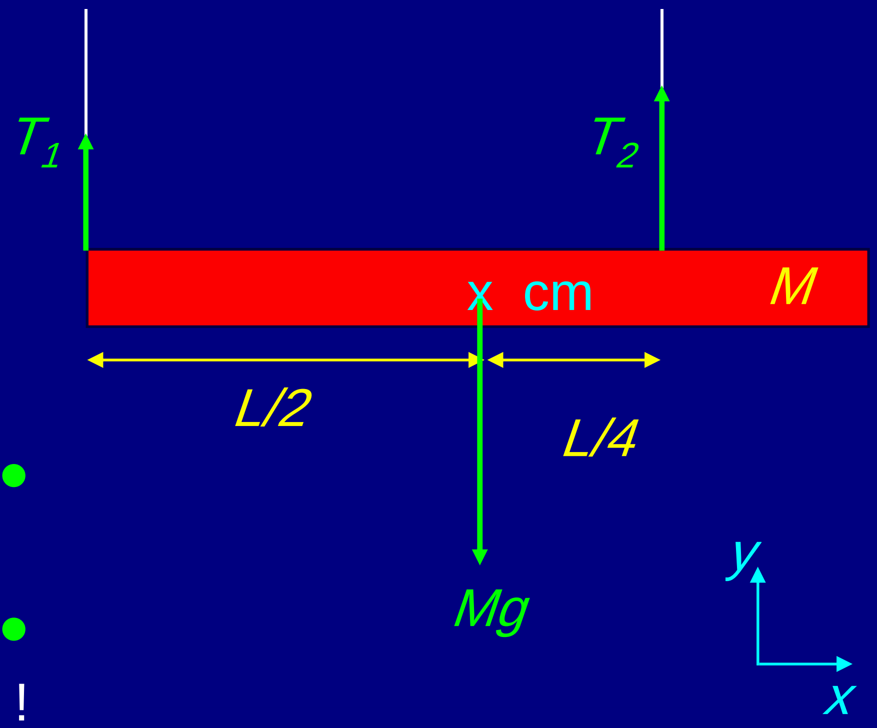


کاربرد گشتاور...

- اطلاعات بیشتری در این مورد داریم :
  - می دانیم که تخته نمی چرخد!

$\Leftarrow \tau_{NET} = I\alpha = 0$

$$\boxed{\sum \tau = 0}$$



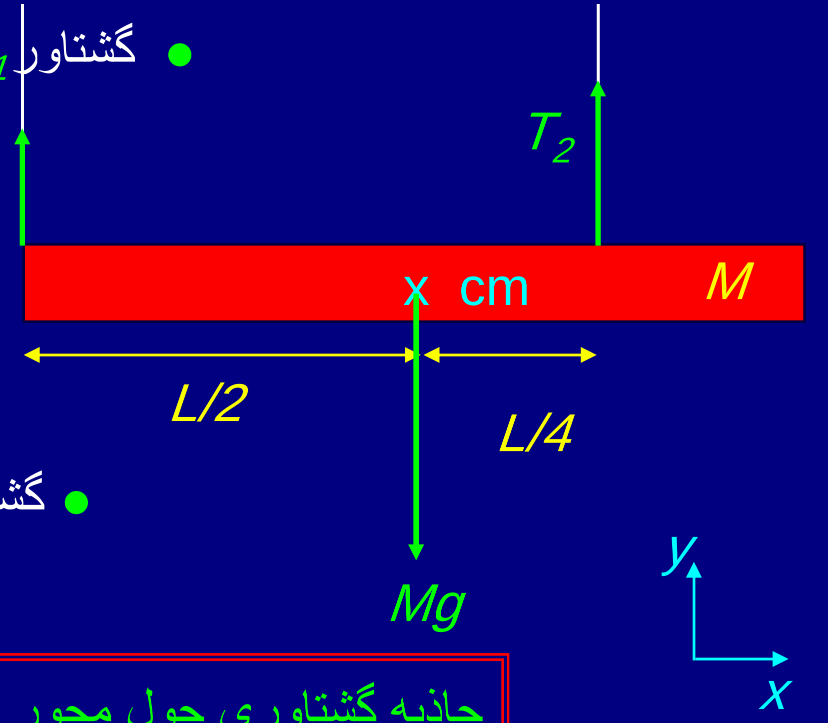
- برایند کلیه گشتاورها صفر است!
- واین درمورد هر محور که انتخاب کنیم درست است !

کاربرد گشتاور...

- محور چرخش را محور z که از مرکز جرم گذشته و به طرف خارج صفحه انتخاب کنید

- گشتاور ناشی از طناب سمت راست حول این محور:

$$\tau_2 = T_2 \frac{L}{4}$$



- گشتاور ناشی از طناب سمت چپ حول این محور:

$$\tau_1 = -T_1 \frac{L}{2}$$

جاذبه گشتاوری حول محور ایجاد نمی کند.

کاربرد گشتاور...

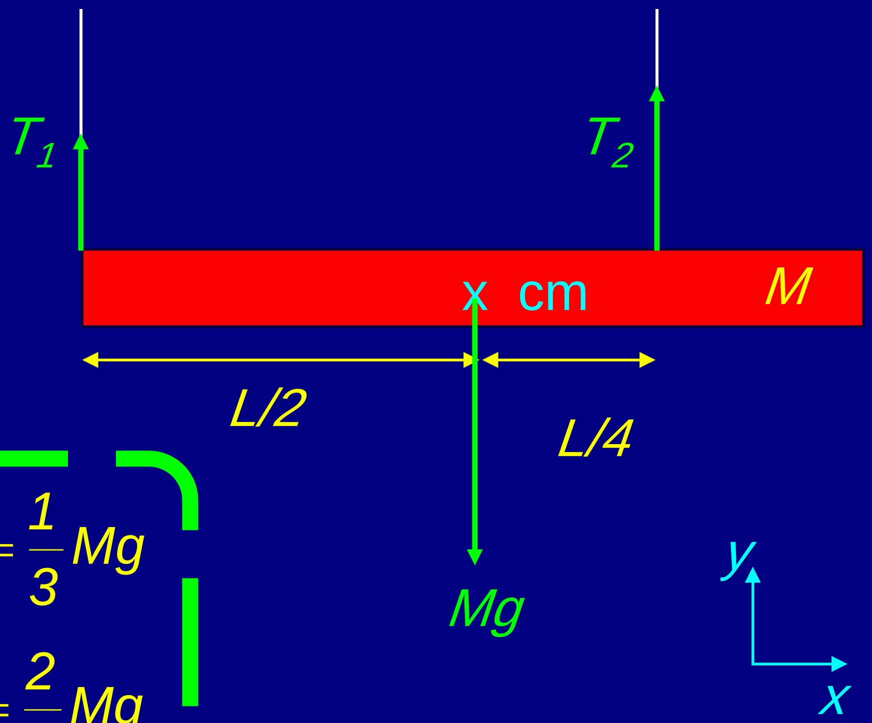
- چون براَیند کلیه گشتاورها باید صفر باش :

$$T_2 \frac{L}{4} - T_1 \frac{L}{2} = 0$$

$$T_2 = 2T_1$$

قبلا دیدید:

$$T_1 + T_2 = Mg$$



$$T_1 = \frac{1}{3}Mg$$

$$T_2 = \frac{2}{3}Mg$$

راه حل ایستایی شناسی :

- عموما از این دو معادله استفاده می کنیم:

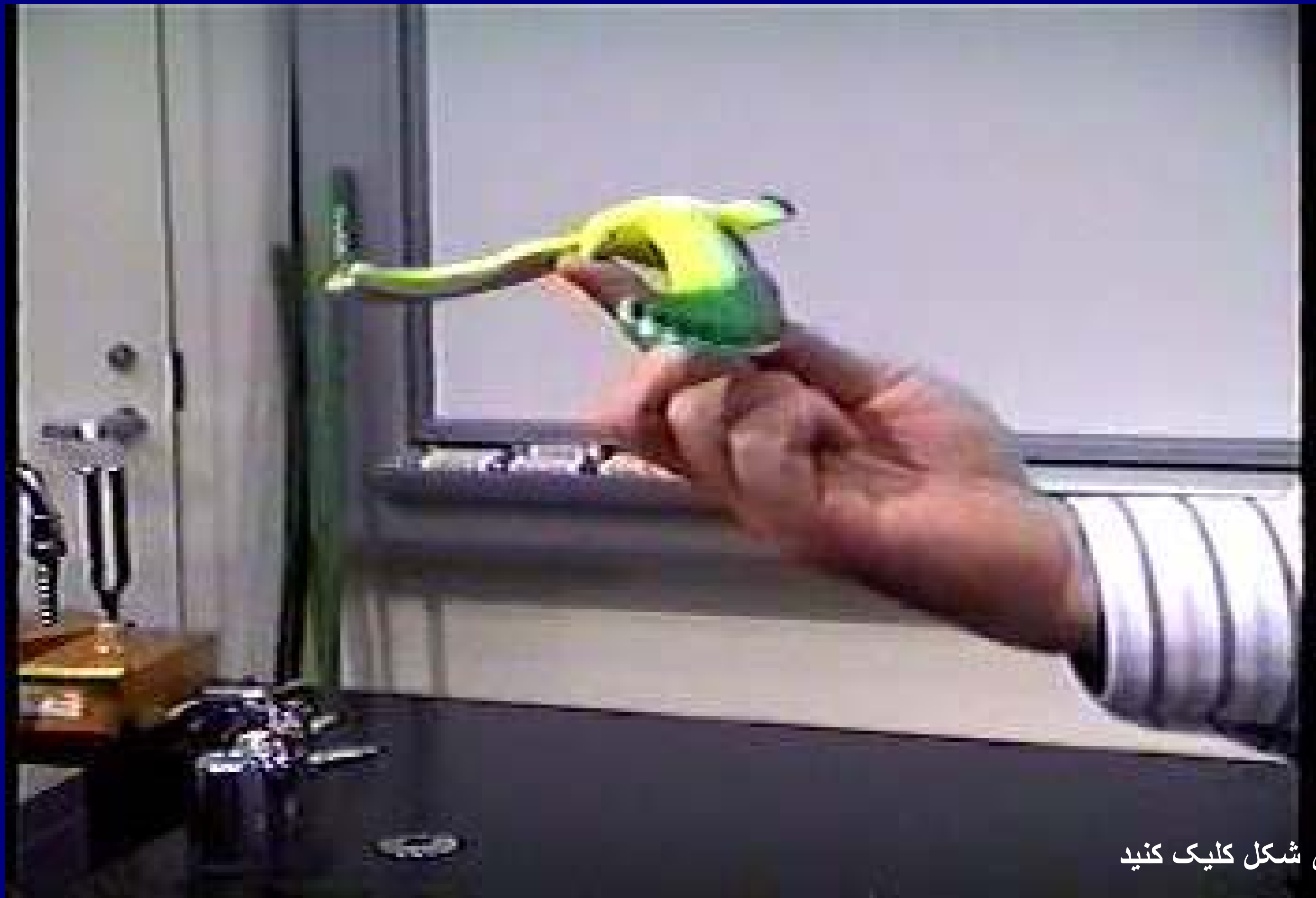
$$\sum F = 0$$

$$\sum \tau = 0$$

وبرای حل هر مسئله بکار می بریم!!.

- برای محاسبه گشتاورها محورمناسبی انتخاب کنید که به حل ساده تر مسئله منجر شود....

درمورد تعادل این پرنده روی نکش فکر کنید؟
این تعادل چگونه برقرار شده است؟



روی شکل کلیک کنید

ویا تعادل این اسب !!!!

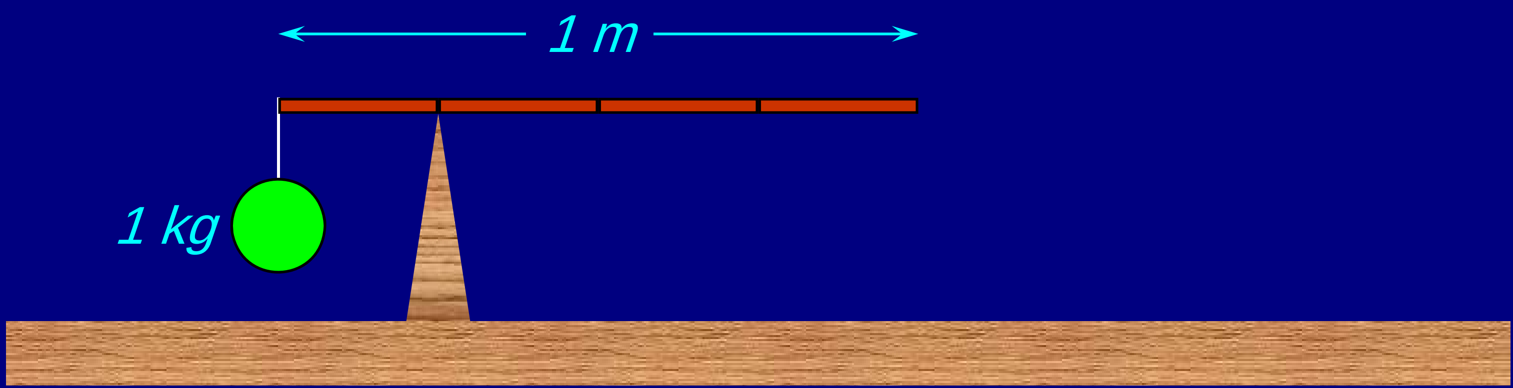
روی شکل کلیک کنید

ایستایی شناسی

- یک توپ به جرم $1\ kg$ به انتهای میله ای به طول $1\ m$ آویزان است. سیستم در نقطه ای به فاصله $0.25\ m$ از نقطه ای که جرم به آن آویزان شده است درتعادل است.

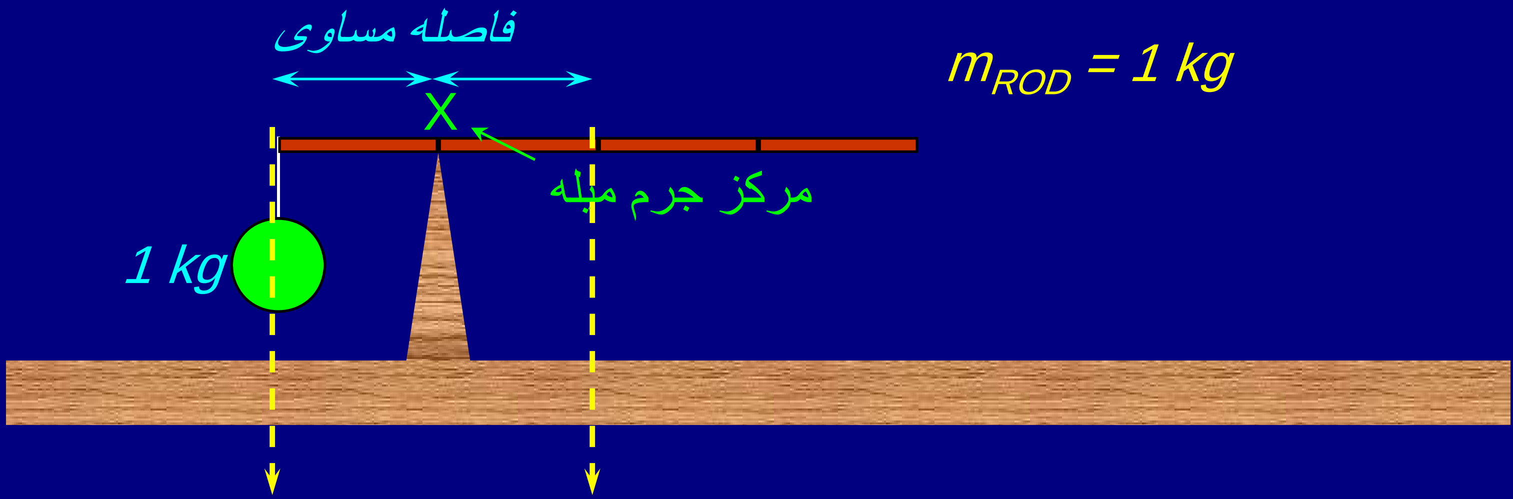
جرم میله چقدر است؟

(a) $0.5\ kg$ (b) $1\ kg$ (c) $2\ kg$



پاسخ:

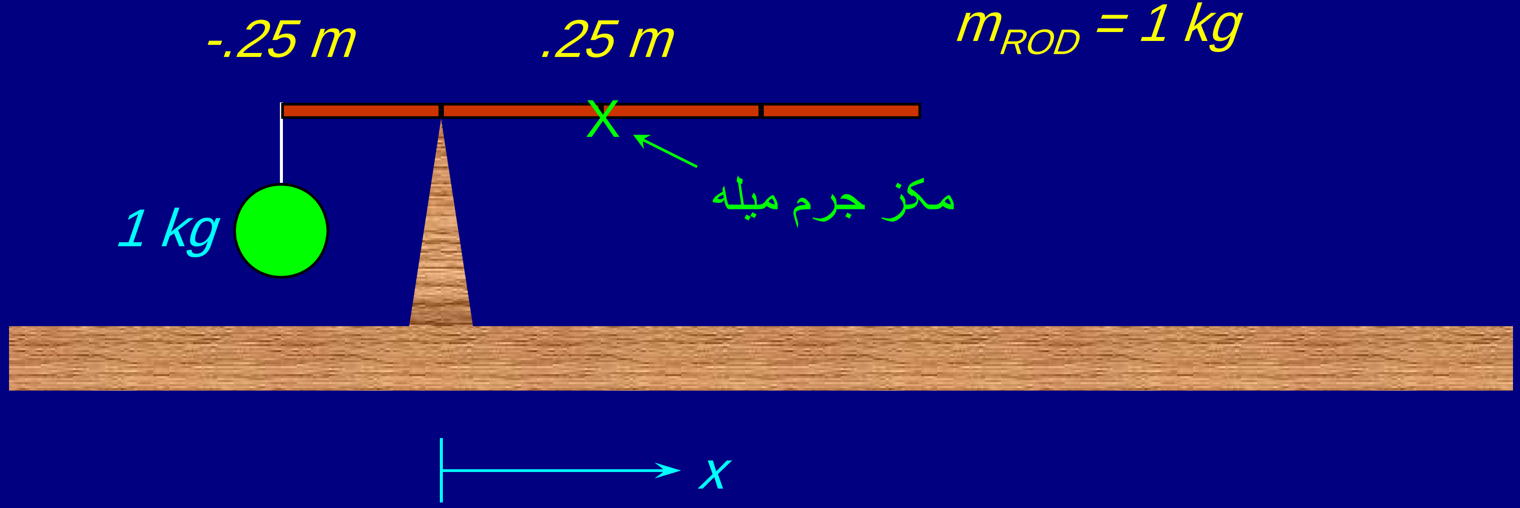
- گشتاور کل حول محور باید صفر باشد.
- مرکز جرم میله در مرکز آن $0.25\ m$, از راست محوراتکا قراردارد .
- برای تعادل با توپ که به همین فاصله سمت چپ محور قرارد ارد جرمها باید مساوی باشند !



پاسخ ۲:

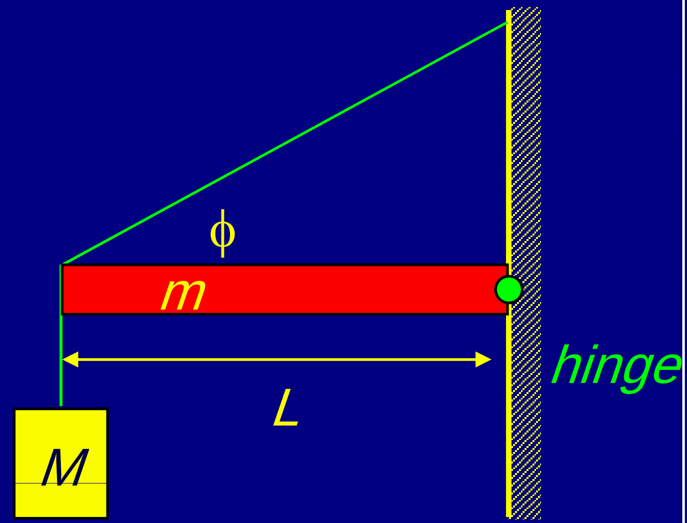
- چون سیستم نمی چرخد مختصه x مرکز جرم باید به یک فاصله از محور دوران قرار داشته باشد.
- مرکز جرم میله در مرکز آن بوده و به فاصله $0.25\ m$,راست محور قرارد ارد .
- چون مرکز جرم توپ در فاصله $0.25\ m$ سمت چپ محور قرار دارد, جرم میله باید $1\ kg$ باشد تا $x_{CM} = 0$ شود .

$m_{ROD} = 1\ kg$



مثال :لامپ آویزان

- لامپی به جرم M از انتهای میله ای به جرم m وطول L *آویزان شده است* .یک انتها ی میله به دیوار قائمی لولا شده است ,وانتهای دیگر آن به طناب بدون جرمی بسته شده است که زاویه ϕ میله می سازد . (لولا نیرویی برای نگهداشتن میله وارد می کند.)
  - کشش طناب چقدر است ؟
  - لولا چه نیروهایی به میله وارد می کند؟



مثال :لامپ آویزان

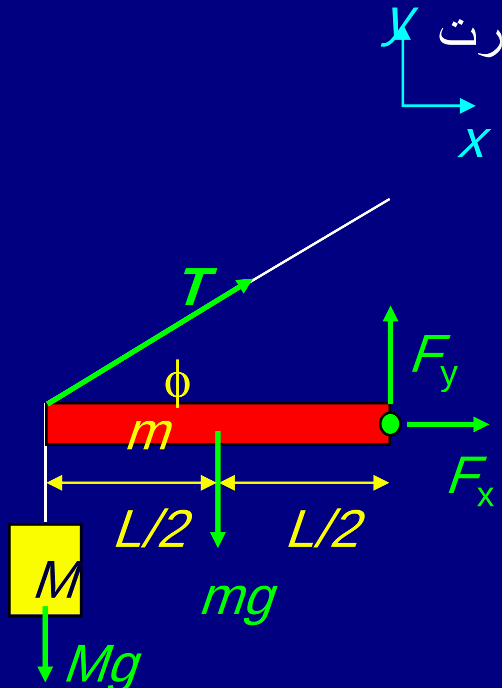
- رابطه $\sum F = 0$ را در راستای x و y بنویسید:

$$x: \quad T\cos\phi + F_x = 0$$

$$y: \quad T\sin\phi + F_y - Mg - mg = 0$$

- رابطه $\sum \tau = 0$ را درجهت z بنوبسید.

فرض می کنیم که محورچرخش از لولا می گذرددراین صورت F_x و F_y درمعادله گشتاور وارد نمی شوند:



$$LMg + \frac{L}{2}mg - LT\sin\phi = 0$$

مثال :لامپ آویزان

- لذا سه معادله و سه مجهول داریم :

$$T\cos\phi + F_x = 0$$

$$T\sin\phi + F_y - Mg - mg = 0$$

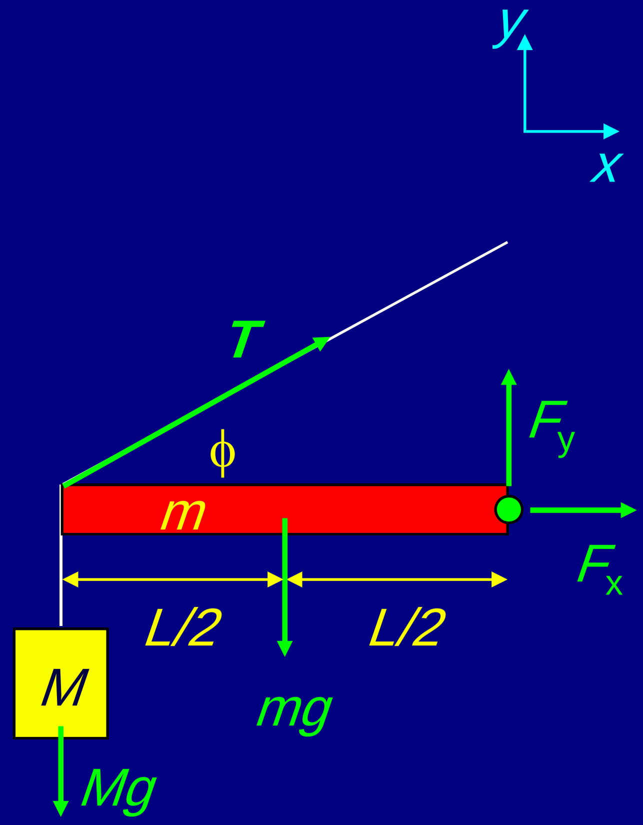
$$LMg + \frac{L}{2}mg - LT\sin\phi = 0$$

ازحل آنها داریم:

$$T = \frac{\left(M + {m}/{2}\right)g}{\sin\phi}$$

$$F_x = \frac{-\left(M + {m}/{2}\right)g}{\tan\phi}$$

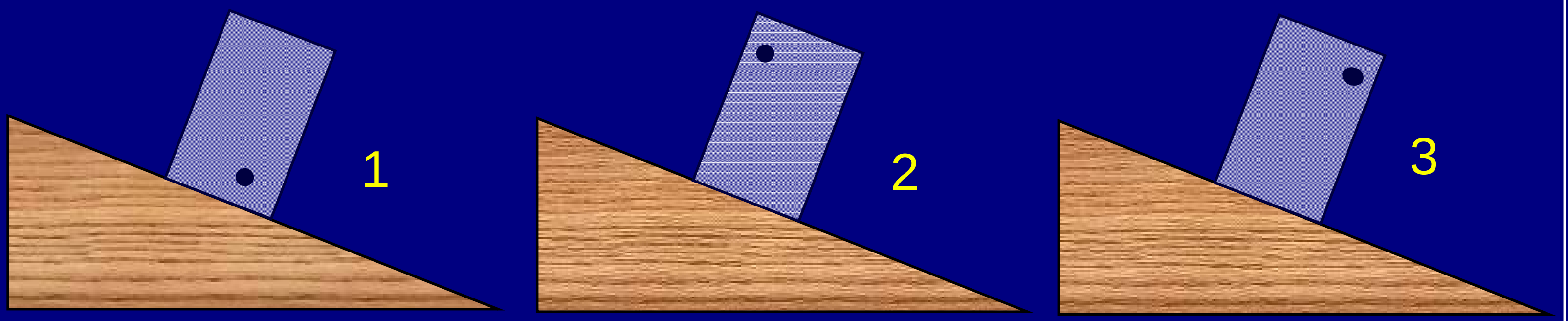
$$F_y = \frac{1}{2}mg$$



مسئله : ایستایی

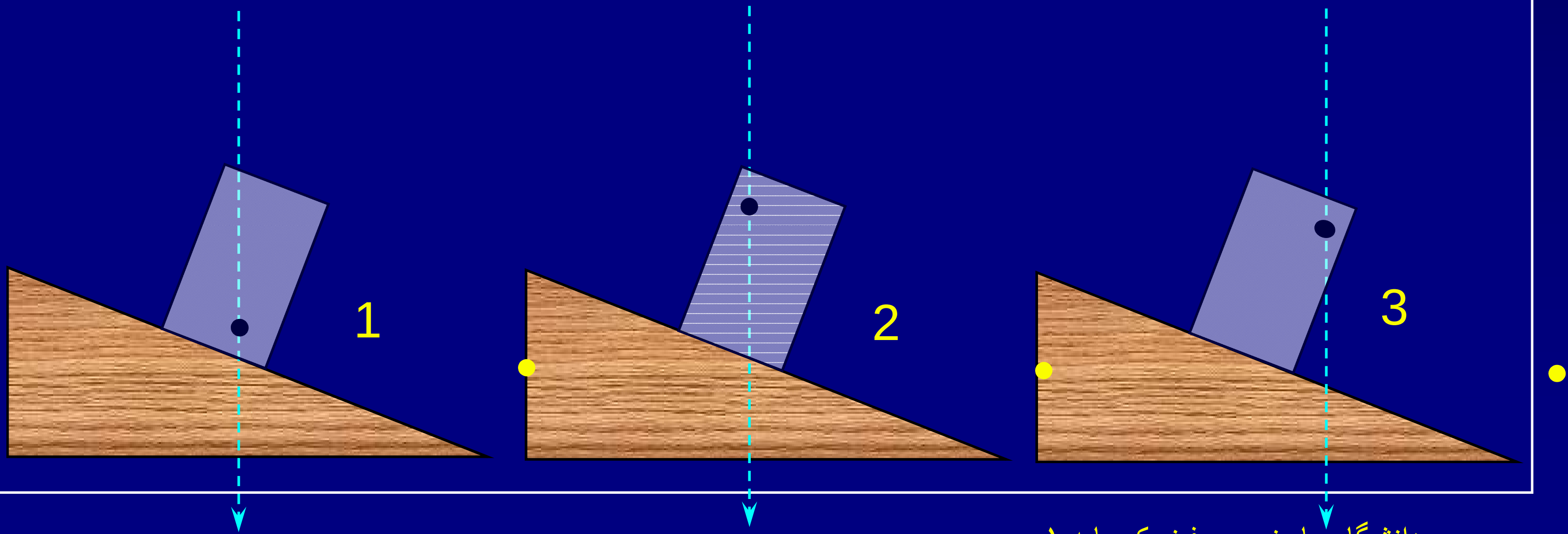
- جعبه ای مطابق شکل زیر روی یک سطح شیبدار قرار دارد و مرکز جرم آن به وسیله یک نقطه در شکل زیر مشخص شده است . نیروی اصطکاک سبب می شود که جعبه نلغزد.
  - درکدام حالت جعبه ممکن است واژگون شود؟

(a) all (b) 2 & 3 (c) 3 only



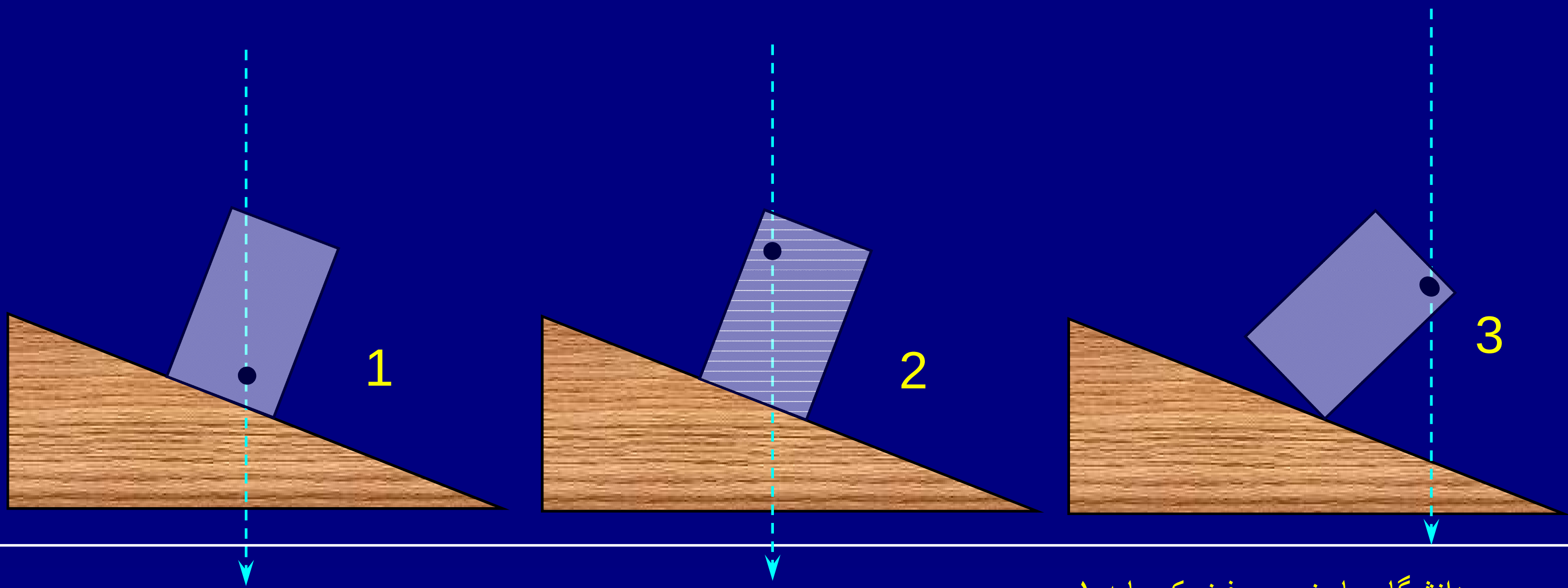
پاسخ:

- دیدیم گشتاور نیروی جاذبه چنان عمل می کند گویی که تمام جرم جسم در مرکز جرم آن قرار دارد .
- فرض کنید که گوشه سمت راست وپایین جعبه مانند یک محور عمل کند.
- اگر جعبه به تواند به گونه ای دوران کند که مرکز جرم آن پایین بیاید جعبه واژگون خواهد شد!



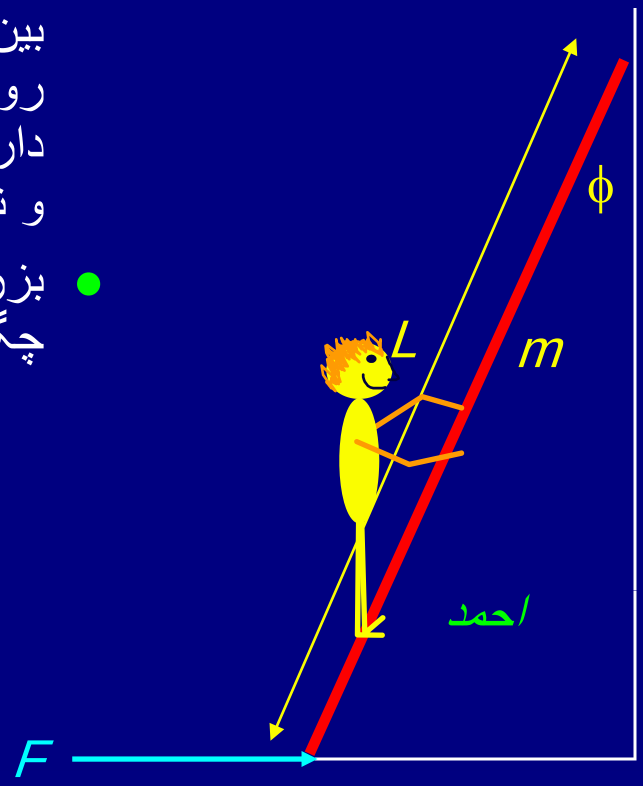
ادامه پاسخ:

- دیدیم گشتاور نیروی جاذبه چنان عمل می کند گویی که تمام جرم جسم در مرکز جرم آن قرار دارد .
- فرض کنید که گوشه سمت راست وپایین جعبه مانند یک محور عمل کند.
- اگر جعبه به تواند به گونه ای دوران کند که مرکز جرم آن پایین بیاید جعبه واژگون خواهد شد!



مثال : نردبان و دیوار صاف

- احمد به جرم M از نردبانی به طول L, وجرم m که به دیوارصافی تکیه داده شده است و بین دیوارو نردبان اصطکاکی وجود ندارد بالا می رود .نیروی اصطکاک F وکف زمین وجو د دارد و مانع لغزش آن می شود .زاویه بین دیوار و نردبان ϕ است .
- بزرگی F برحسب فاصله ای که احمد بالا می رود چگونه است؟

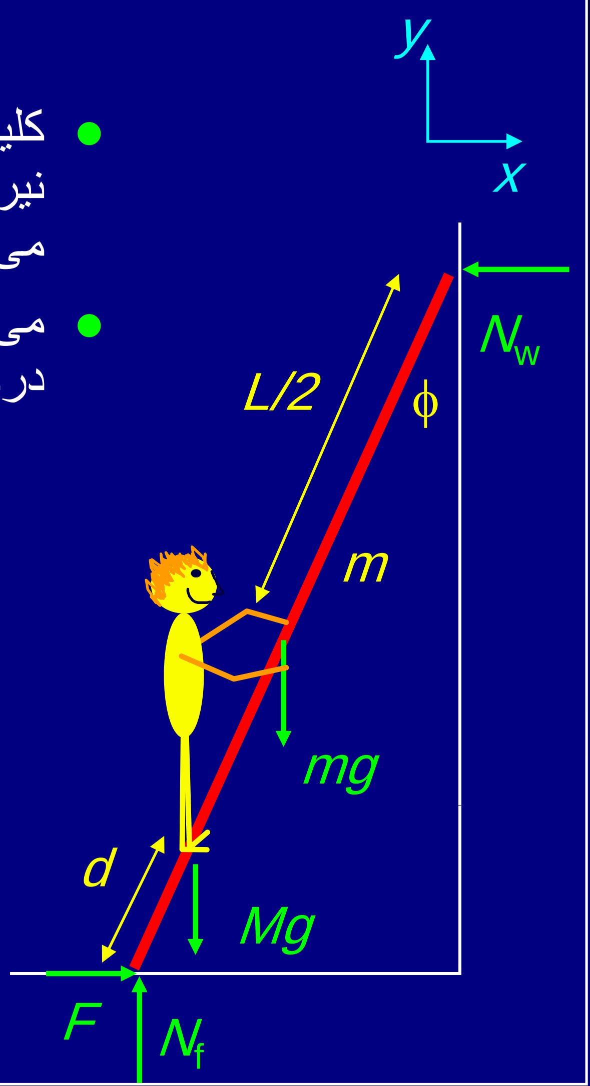


مثال : نردبان و دیوار صاف...

- کلیه نیروهای وارد را بکشید .گذشته از نیروی جاذبه نیروهای N_f و N_w که به ترتیب به وسیله کف و دیوار وارد می شوند وجود دارد .
- می دانیم که $F_{NET} = 0$ درجهت x و y صادق است:

x: $N_w = F$

y: $N_f = Mg + mg$



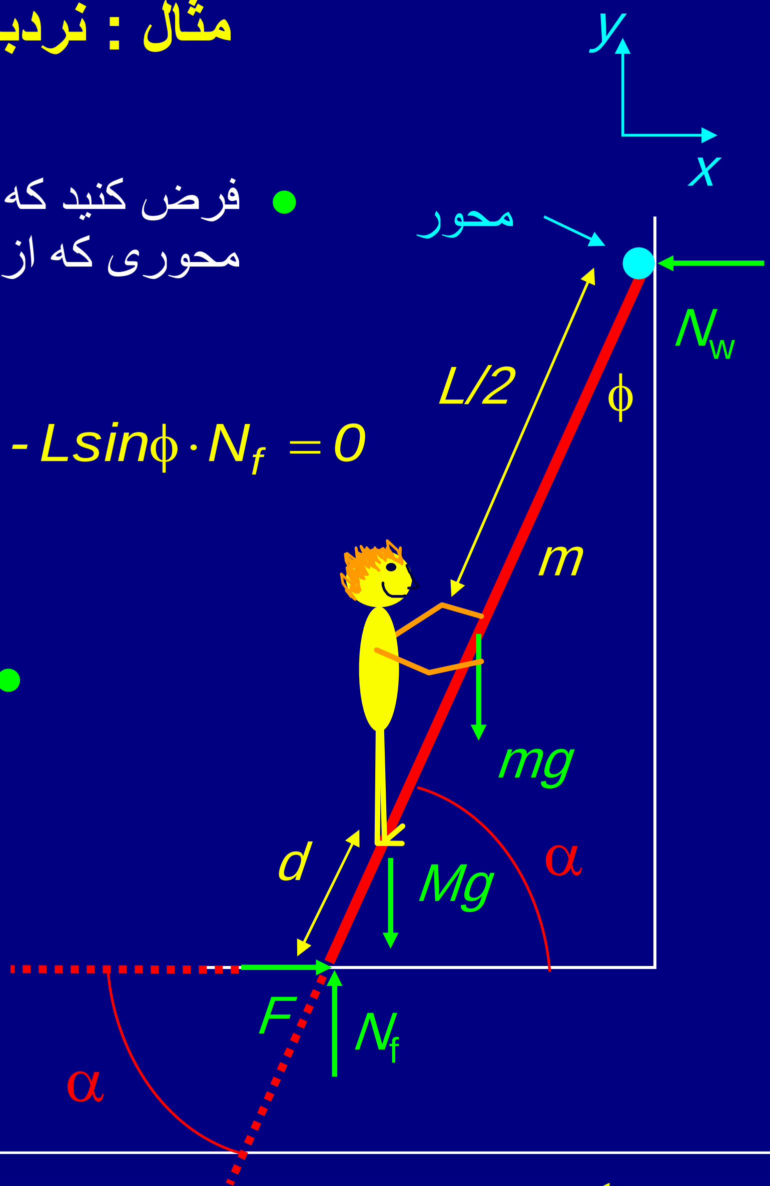
مثال : نردبان و دیوار صاف...

- فرض کنید که N_w مورد نظر مانباشد ,گشتاورها را حول محوری که از انتهای بالای نردبان ودر جهت z حساب کنید .

$$\frac{L}{2}\sin\phi\, mg + (L-d)\sin\phi \cdot Mg + L\underset{\cos\phi}{\underset{\parallel}{\sin\alpha}}\, F - L\sin\phi \cdot N_f = 0$$

- با جاگذاری در $N_f = Mg + mg$ وحل F داریم:

$$\boxed{F = Mg\tan\phi\left(\frac{d}{L}+\frac{m}{2M}\right)}$$



مثال : نردبان و دیوار صاف...

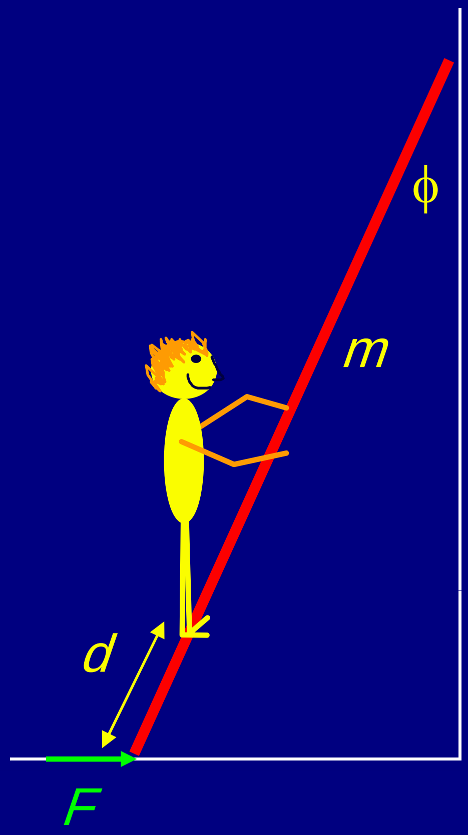
- اکنون حساب کردیم: $F = Mg \tan\phi \left(\frac{d}{L} + \frac{m}{2M}\right)$

- به ازای یک ضریب اصطکاک معین, μ_s
بیشینه نیروی اصطکاک F ایجادشده برابر است

- با: $\mu_s N_f = \mu_s g(M + m)$

- نردبان می لغزد اگر F ازاین مقدار تجاوزکند.

- احتیاط:
  - تـه نردبان را درصورت امکان ببندید!!
  - زاویه ϕ خیلی بزرگ نباشد!



یادآوری درس...

- گشتاور ناشی از جاذبه
- یادآوری دوران

- **ایستایی**
- اتومبیل روی تپه
- معادلات تعادل ایستایی
- چند مثال :

←مسئله تیر آویزان

←مسئله لامپ آویزان

←مسئله نردبان

- **مطالب کتاب درسی و مسائل آنرا مرور کنید!!**

ادامه فصل دوازدهم...

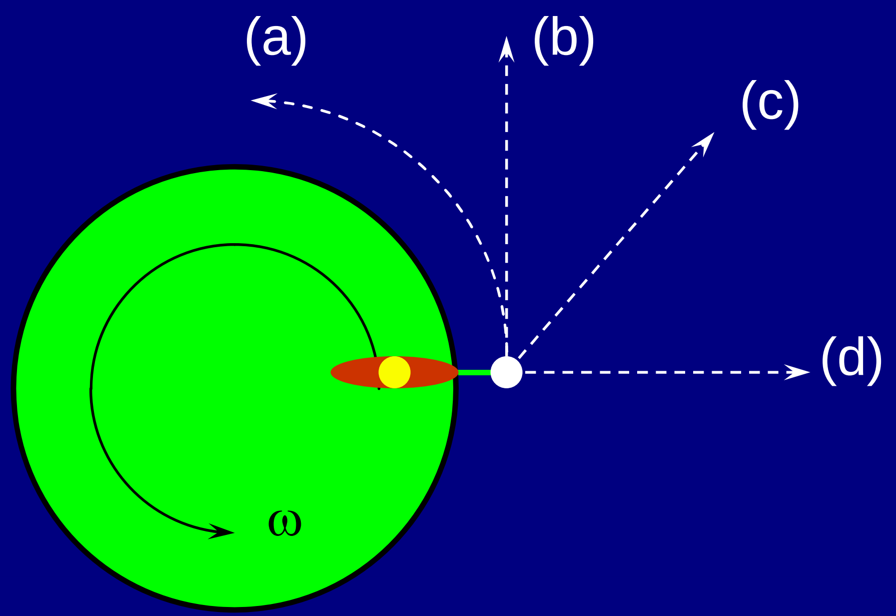
تکانه زاویه ای ، تعادل اجسام صلب

درس امروز ما...

- تکانه زاویه ای :
  - تعاریف
  - معنی تکانه زاویه ای چیست؟
- دوران حول یک محور ثابت
  - $L = I\omega$
  - مثال : دو دیسک
  - دانش آموز روی سکوی گردان
- تکانه زاویه ای یک ذره چرخان
  - برخورد گلوله و تخته
  - دانشجویی که گلوله ای پرتاب می کند

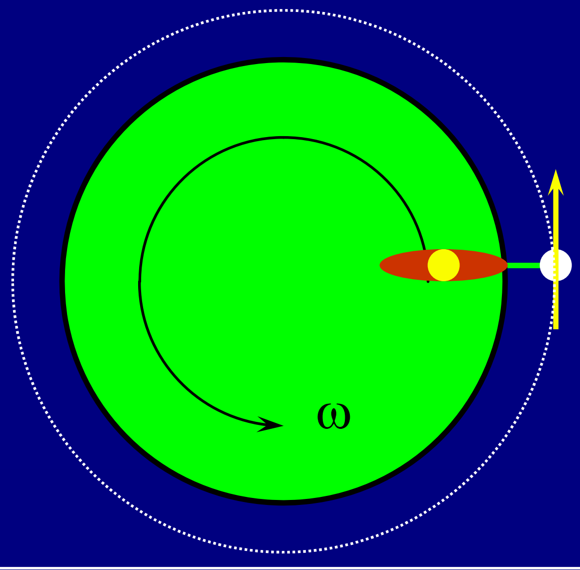
پیش آزمون دوران

- شخصی بر لبه خارجی سکویی که با سرعت زاویه ای ω می چرخد ایستاده است . اوتوپی در دست دارد و آنرا رها می کند .با نگاه از بالا کدام یک مسیر توپ رانشان می دهد؟



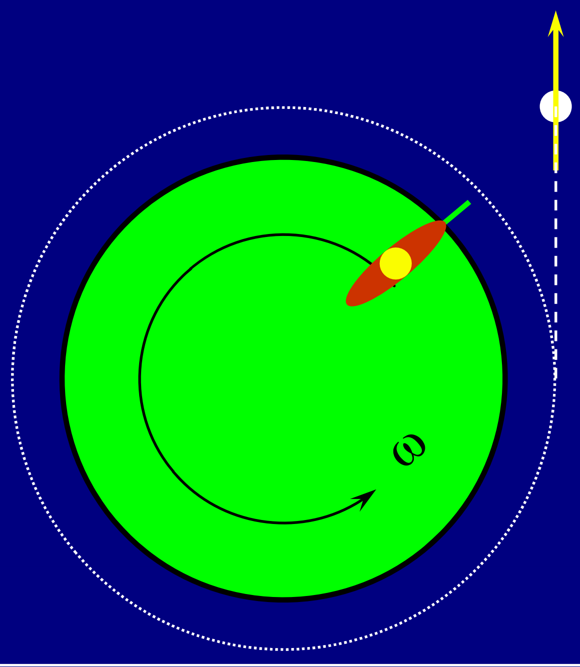
پاسخ:

- درست قبل از رها شدن مسیر توپ مماس بر دایره ای است که روی آن حرکت می کند.



ادامه...

- بعداز رها شدن در همان راستای مماس بر دایره به حرکت خود ادامه می دهد زیرا نیرویی وجود ندارد که مسیر آنرا تغییردهد.



$p = mv$

تکانه زاویه ای :تعریف

- برای یک سیستم ذره ای نشان دادیم :

$$\boxed{F_{EXT} = \frac{dp}{dt}} \Rightarrow \boxed{F_{EXT} = 0}$$

تکانه پایستار است اگر:

- مشابه زاویه ای این کمیت کدام است؟؟

- مشابه نیروی F گشتاور است

$$\tau = r \times F$$

- مشابه دورانی تکانه p که تکانه زاویه ای نامیده می شود چنین تعریف می کنیم

$$\boxed{L = r \times p}$$

تعاریف...

- آهنگ تغییر تکانه زاویه ای L ***را درنظر بگیرید*** : $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p})$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \underbrace{\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p}\right)}_{} + \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)$$

$$= (\mathbf{v} \times m\mathbf{v})$$

$$= 0$$

لذا:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

تعاریف...

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

- به خاطر بیاورید:

$$\mathbf{F}_{EXT} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \Rightarrow \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \underbrace{\mathbf{r} \times \mathbf{F}_{EXT}}_{\tau_{EXT}}$$

- سرانجام :

$$\boxed{\tau_{EXT} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}}$$

- که مشابه $\mathbf{F}_{EXT} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$ است. !!

معنای آن چیست؟

- $\boxed{\tau_{EXT} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}}$ که $\boxed{\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}}$ و $\boxed{\tau_{EXT} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_{EXT}}$

- در غیاب گشتاورهای خارجی

$$\tau_{EXT} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0$$

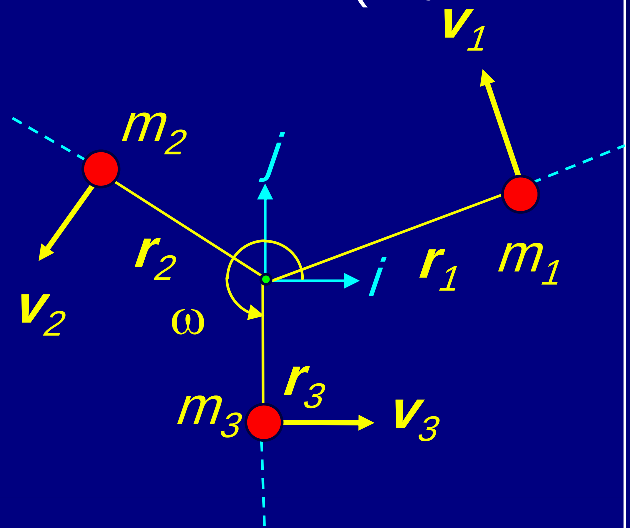
$\boxed{\text{تکانه زاویه ای کل پایستار است}}$

تکانه زاویه ای یک جسم صلب حول یک محورثابت

- توزیع صلبی از نقاط مادی که در صفحه x-y حول محور z می چرخند مطابق شکل زیر در نظر بگیرید .تکانه زاویه ای کل مجموع تکانه های زاویه ای ذرات تشکیل دهنده سیستم است:

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \sum_i m_i r_i v_i \hat{k}$$

(چون r_i و v_i بر هم عمودند)



مشاهده می کنیم که $\mathbf{L}$ درجهت z است.

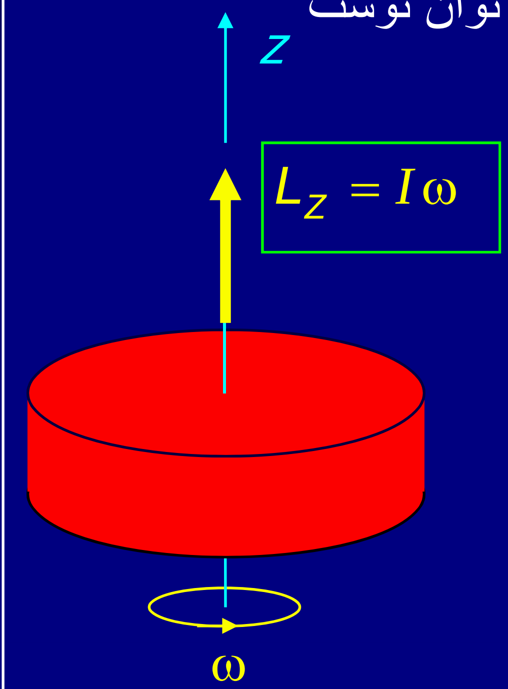
با استفاده از $v_i = \omega\, r_i$, داریم:

$$L = \sum_i m_i r_i^2 \omega\, \hat{k}$$

$$\boxed{\mathbf{L} = I\omega}$$

مشابه $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ *است* !!

تکانه زاویه ای یک جسم صلب حول یک محورثابت



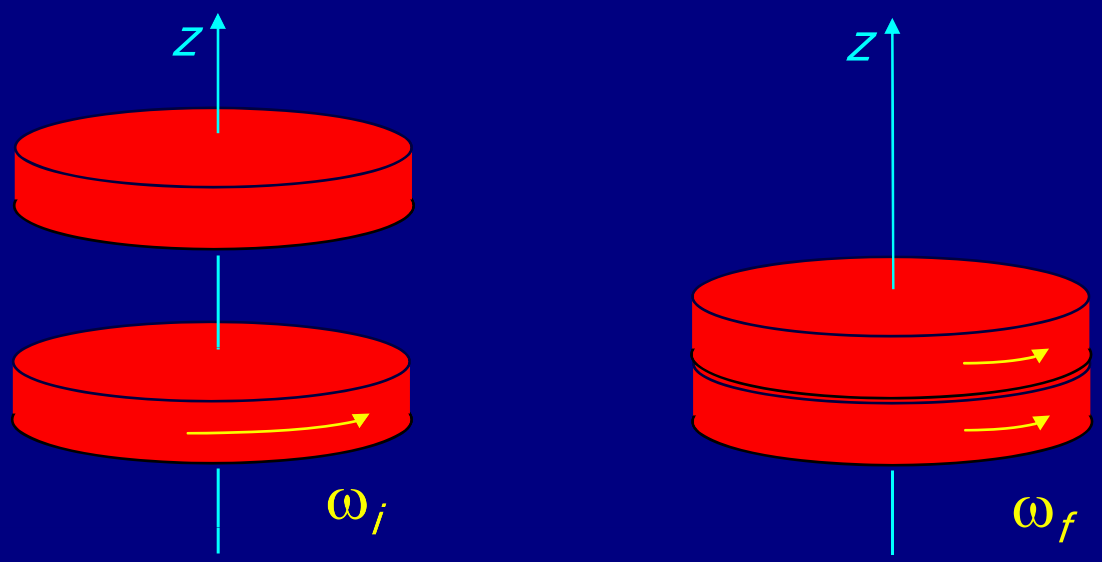
- به طور کلی برای جسمی که حول محور ثابت (z) می چرخد می توان نوشت

$$L_Z = I\omega$$

- جهت L_Z از قانون دست راست مشابه ω بدست می آید.
- از نظر سادگی اندیس Z حذف می کنیم,
ومی نویسیم : $L = I\omega$

مثال : دو دیسک

- یک دیسک به جرم M وشعاع R حول محور z با سرعت زاویه ای ω_i می چرخد. دیسک مشابه دیگری که نمیچرخد را روی آن قرار می دهیم. اصطکاکی بین این دو دیسک وجود داردو سرانجام با سرعت زاویه ای , ω_f می چرخند .

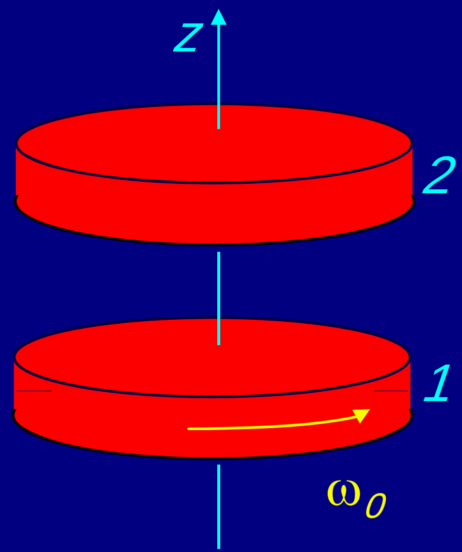


مثال : دو دیسک

- ابتدا فرض کنید که گشتاور خارجی براین دو دیسک وارد نمی شود.
  ←تکانه زاویه ای پایستار می ماند!

- درابتدا تکانه زاویه ای فقط مربوط به دیسک پایین است

$$L_i = I_1 \omega_1 = \frac{1}{2} MR^2 \omega_i$$

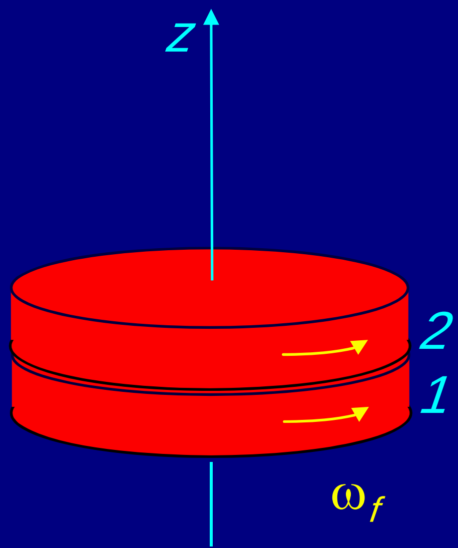


مثال : دو دیسک

- ابتدا فرض کنید که گشتاور خارجی براین دو دیسک وارد نمی شود.
  ←تکانه زاویه ای پایستار می ماند!

- سرانجام تکانه زاویه ای مربوط به هردو دیسک است

$$L_f = I_1 \omega_1 + I_2 \omega_2 = MR^2 \omega_f$$

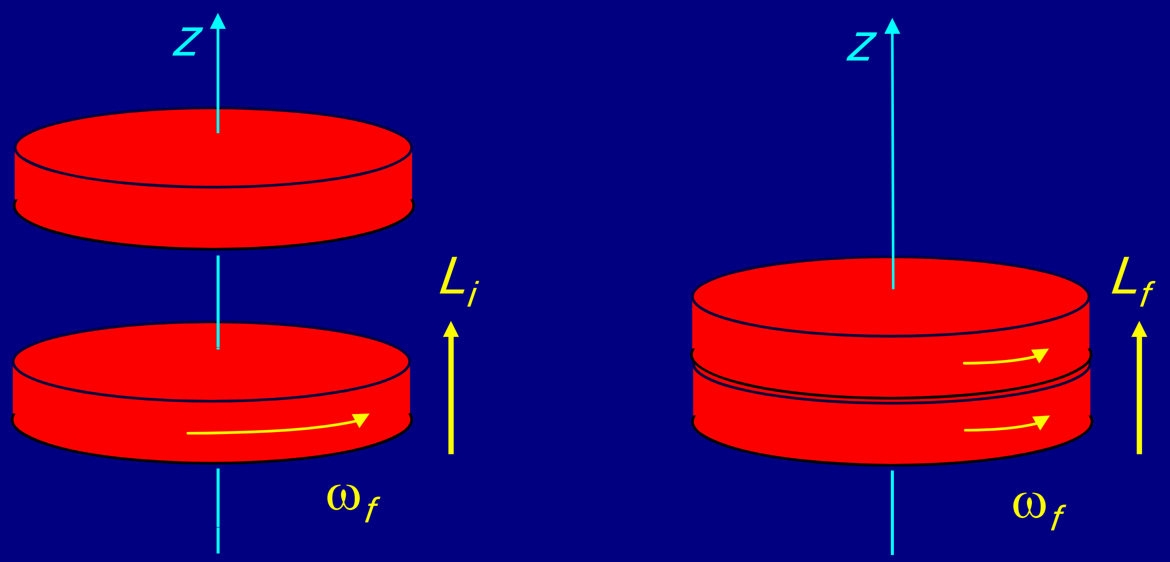


مثال : دو دیسک

- چو ن $L_i = L_f$ ← $\frac{1}{2}MR^2\omega_i = MR^2\omega_f$

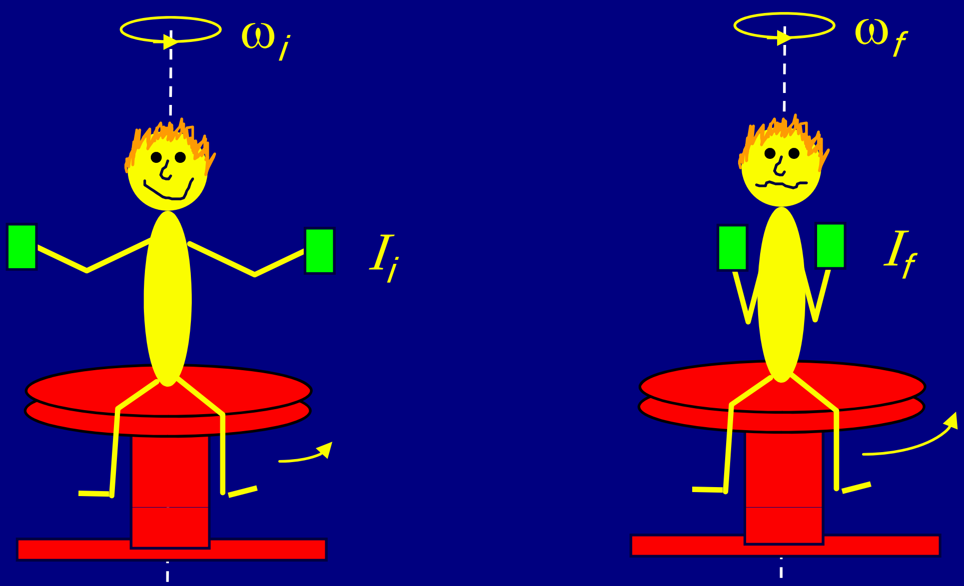
یک برخورد کشسان زیرا E پایستار نیست (اصطکاک)

→ $$\boxed{\omega_f = \frac{1}{2}\omega_i}$$



مثال : صندلی گردان

- دانشجویی روی یک صندلی گردان درحالیکه دستهایش راباز کرده و در هر دستش وزنه دردست دارد نشسته است .گشتاور لختی کل او I_i است وبا سرعت زاویه ای ω_i می چرخد .او سپس دستهایش را به طرف بدنش جمع می کندو گشتارلختی او I_f می‌شود .سرعت زاویه ای نهایی او ω_f چقدر است ؟



قانون پایستاری تکانه زاویه ای:

۱- شخصی که روی صندلی گردان نشسته است چرج درحال گردش
دوچرخه ای را در دست دارد و قتی چرخ را بر می گرداند جهت گردش
خودش نیز به منظور قابت ماندن تکانه زاویه ای کل عوض می شود
روی شکل کلیک کنید و دقیقا آنرا بررسی کنید.
۲- وقتی دمبل هار ا به بدنش نزدیک می کند سرعت چزخشش به
علت کم شدن لختی دورانیش طبق راطه

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

افزایش پیدا می کند.روی شکل کلیک کنید>

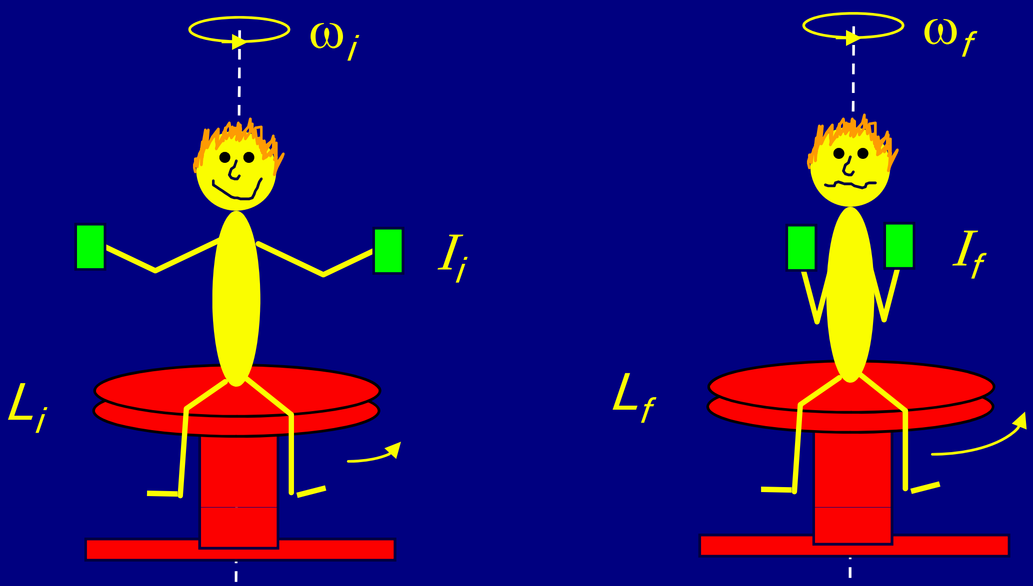
مثال : صندلی گردان...

- گشتاور خارجی بر سیستم دانشجو و صندلی وارد نمی شود ,لذا تکانه زاویه ای پایستار است.

در ابتدا $L_i = I_i\omega_i$

سراتجام $L_f = I_f\omega_f$

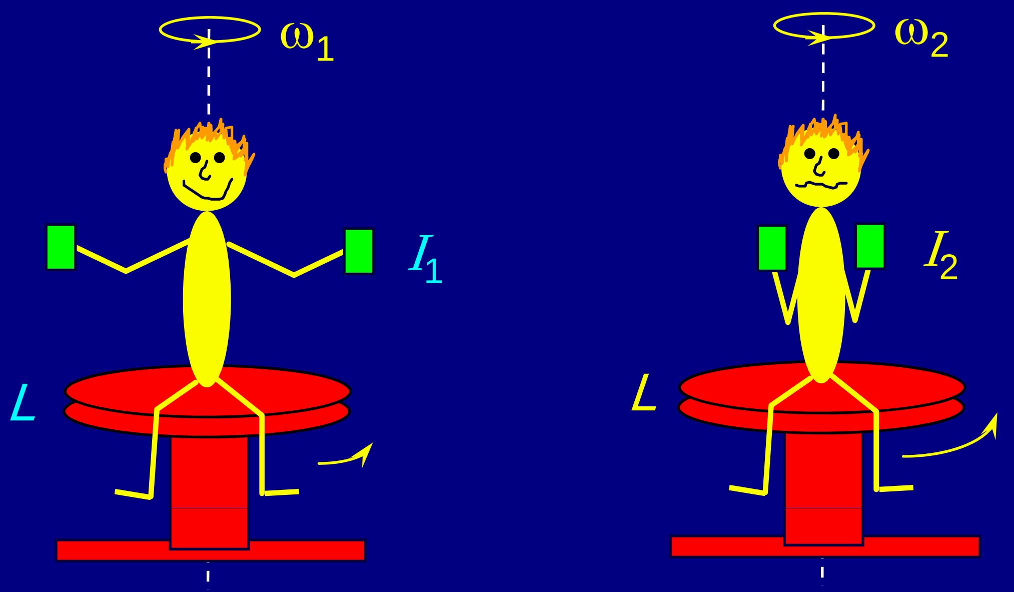
$$\frac{\omega_f}{\omega_i} = \frac{I_i}{I_f}$$



تکنه زاویه ای

- دانشجویی روی یک صندلی گردان نشسته است و با سرعت زاویه ای ω_1 می چرخد. در اثر این عمل او دستهایش را باز می کند و سرعت زاویه اش به ω_2 می رسد. انرژی جنبشی او:

(a) افزایش می یابد (b) کاهش می یابد (c) تغییر نمی کند

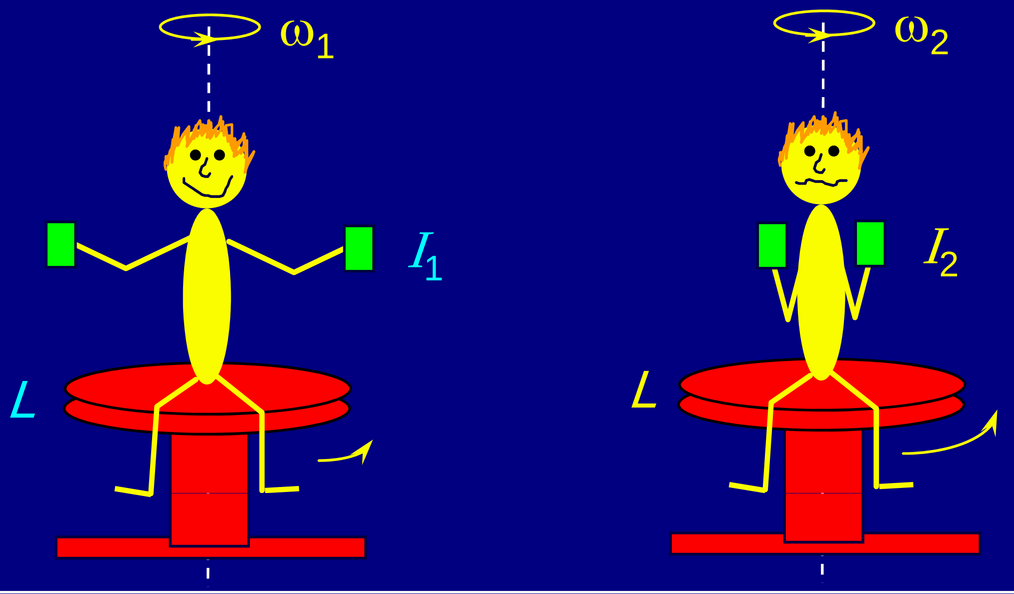


پاسخ:

- $K = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{L^2}{2I}$ (بااستفاده از $L = I\omega$)

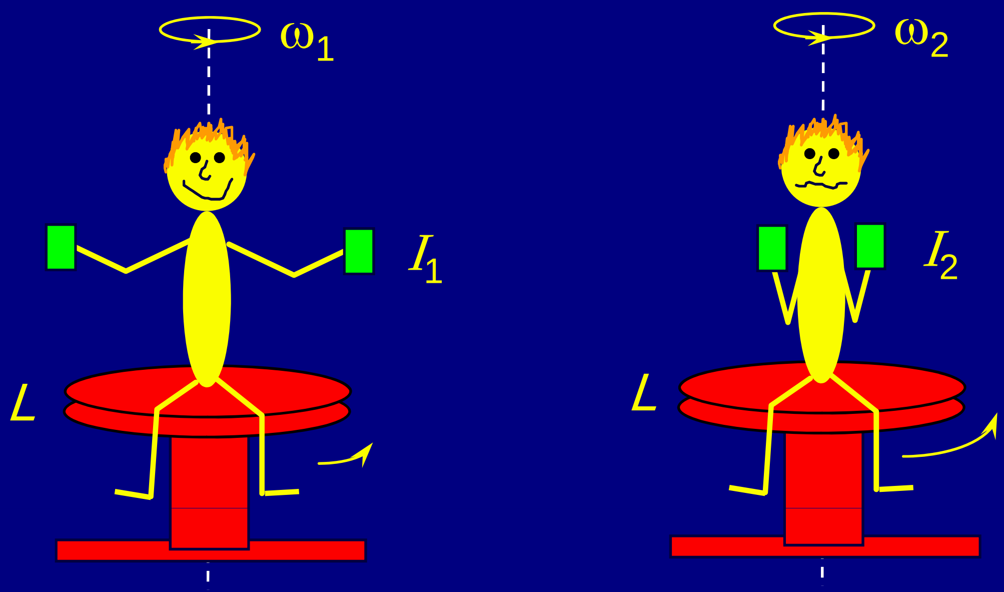
- L پایستار است:

$I_2 < I_1$ ➡ K افزایش می یابد! $K_2 > K_1$



پاسخ:

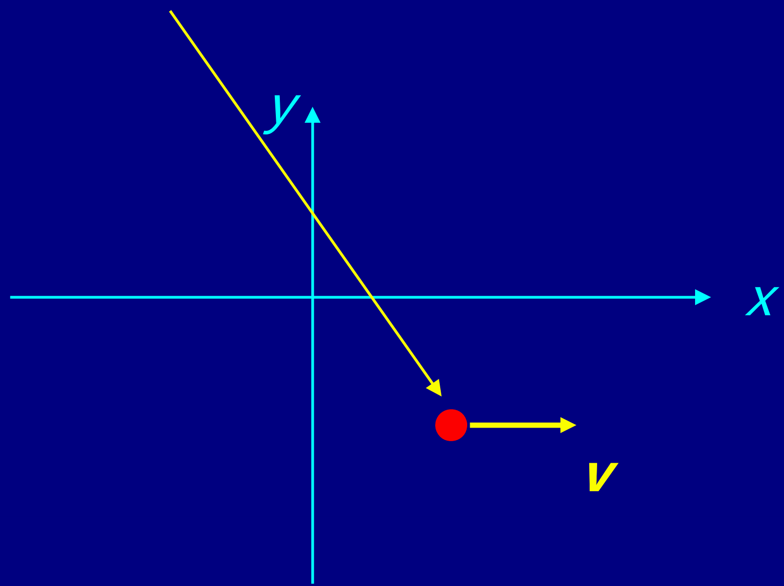
- او وقتی که دستهایش راجمع می کند مقداری کار انجام می دهد!
- قضیه کاروانرژی جنبشی می گوید که این عمل انرژی جنبشی سیستم را افزایش می دهد !



تکانه زاویه ای ذره ای که آزادانه حرکت می کند

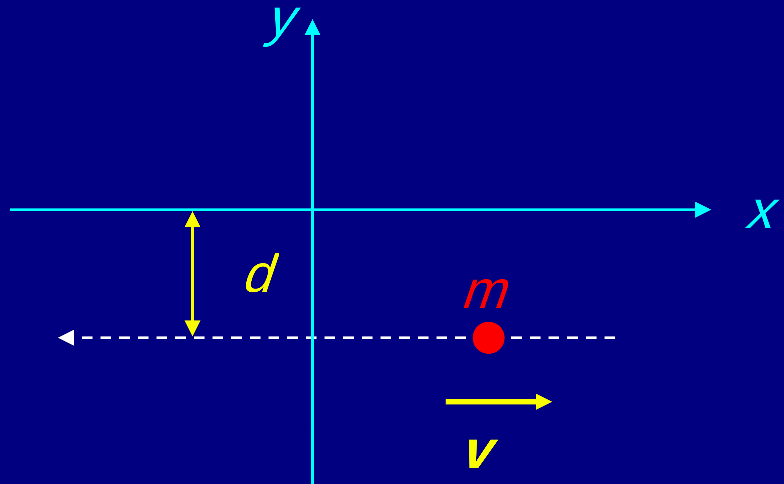
- تکانه زاویه ای یک ذره حول یک محور را اینگونه تعریف کردیم:
  $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$
- واین به معنای حرکت ذره روی یک دایره نیست !

نشان میدهیم که این ذره دارا ی تکانه زاویه ای ثابتی است !



تکانه زاویه ای ذره ای که آزادانه حرکت می کند

- ذره ای به جرم m که با تندی v در طول $y = -d$ حرکت می‌کند در نظر بگیرید. تکانه زاویه ای این ذره نسبت به مبدا $(0,0)$ چیست ؟



تکانه زاویه ای ذره ای که آزادانه حرکت می کند

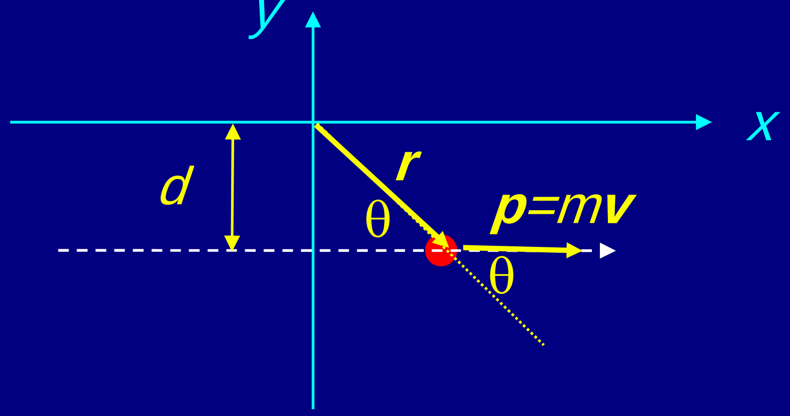
- لازم است که $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ را حساب کنیم
- بزرگی تکانه زاویه ای برابر است با :

$$|\mathbf{L}| = |\mathbf{r} \times \mathbf{p}| = rp\sin\theta = p[r\sin\theta] = pd =$$

$$p\,x\,(distance\ of\ closest\ approach)$$

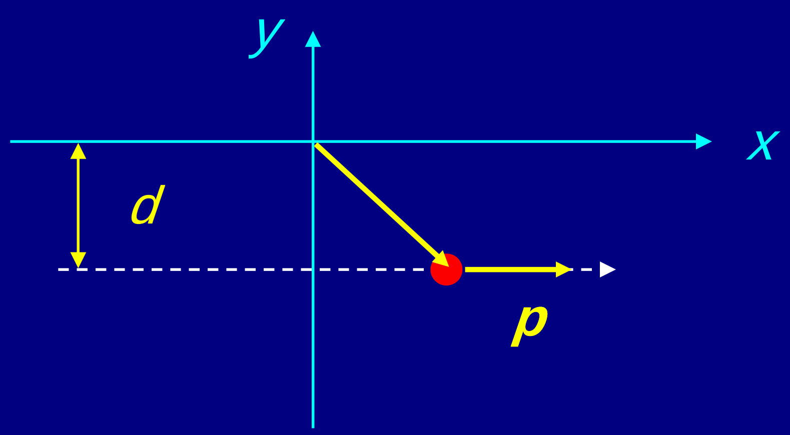
- چون $\mathbf{r}$ و $\mathbf{p}$ درصفحه x-y هستند $\mathbf{L}$, باید در جهت z باشد(قاعده دست راست) :

$$L_Z = pd$$



تکانه زاویه ای ذره ای که آزادانه حرکت می کند

- بنابراین جهت ***L*** درطول محور *z* است ,وبزرگی آن برابر است با
- $L_Z = pd = mvd$
- *L*ثابت است زیرا *d* ثابت است (کوتاهترین فاصله ذره از مبدا) و *p* نیز ثابت است (پایستاری تکانه) .



مثال : برخورد گلوله به تخته

- تخته یکنواختی به جرم M وطول D روی یک محور افقی سوار شده است .گلوله ای به جرم m به طرف ان پرتاب می شود و در وسط فاصله محور و یک انتهای آن به آن فرو می رود .تندی اولیه گلوله v_1, وتندی نهایی آن v_2 است .

بعداز برخورد سرعت زاویه ای ω_F تخته چقدراست(ا ز جاذبه صرفنظر کنید)؟

حالت ابتدایی   حالت نهایی

مثال : برخورد گلوله به تخته

- تکانه زاویه ای حول محور (z) ثابت می ماند!
- تکانه زاویه ای ابتدایی فقط ناشی از گلوله است(زیرا تخته هنوز حرکت دورانی ندارد):

$$L_i = p\,x\,(distance\ of\ closest\ approach) = mv_1 \frac{D}{4}$$

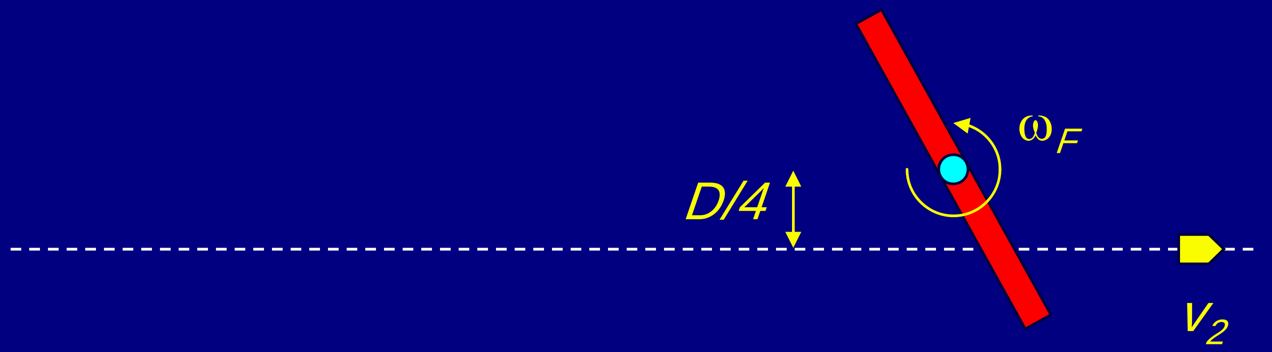
حالت ابتدایی

مثال : برخورد گلوله به تخته

- تکانه زاویه ای حول محور (z) ثابت می ماند!
- تکانه زاویه ای نهایی ناشی از گلوله و تخته هردو است .

که I گشتاور لختی تخته حول محورش است.

$$L_f = mv_2 \frac{D}{4} + I\omega_F$$

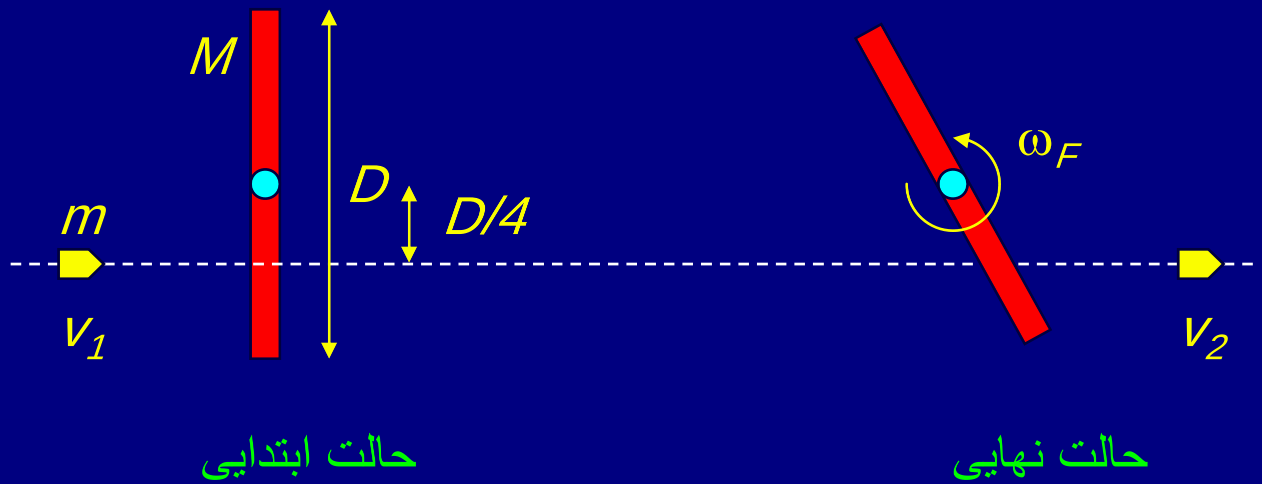


حالت نهایی

مثال : برخورد گلوله به تخته

- باتوجه به این که $L_i = L_f$ است و با استفاده از $I = \frac{1}{12} M D^2$

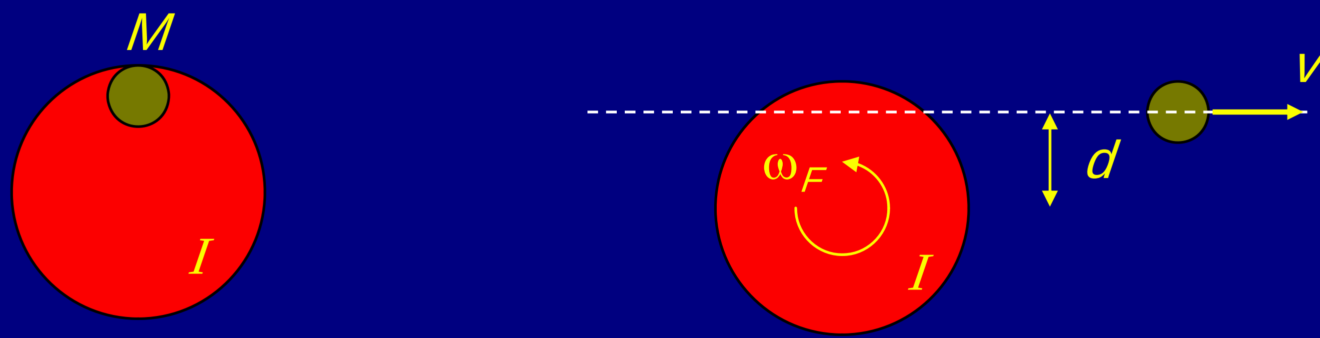
$$mv_1 \frac{D}{4} = mv_2 \frac{D}{4} + \frac{1}{12} M D^2 \omega_F \Rightarrow \boxed{\omega_F = \frac{3m}{MD}\left(v_1 - v_2\right)}$$



مثال : پرتاب گلوله از روی صندلی

- دانشجویی روی صندلی که می تواند آزادانه بچرخد نشسته است .گشتاور لختی او و صندلی I است. او تو پ سنگینی به جرم M را با سرعت v به طوری که بردار سرعت توپ به فاصله d از محور چرخش صندلی باشد پرتاب می کند .

← بعداز این پرتاب سرعت زاویه ای ω_F سیستم دانشجو و صندلی چقدر خواهد بود؟



نمای فوقانی – حالت ابتدایی

حالت نهایی

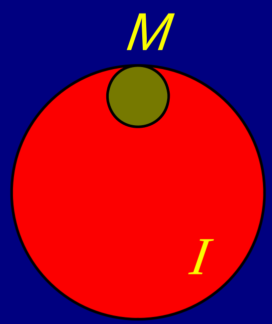
مثال : پرتاب گلوله از روی صندلی

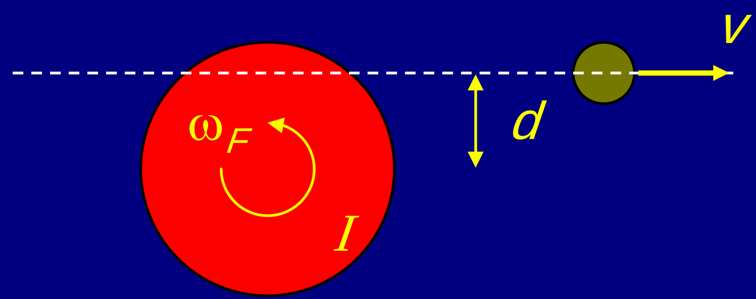
- چون گشتاور خارجی برسیستم وارد نمی شود لذا تکانه زاویه ای پایستار می ماند

$\Leftarrow L_i = 0$

$\Leftarrow L_f = 0 = I\omega_F - Mvd$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_F = \frac{Mvd}{I}}$$





نمای فوقانی – حالت ابتدایی

حالت نهایی

یادآوری نهایی درس...

- تکانه زاویه ای :
  - تعاریف
  - معنی تکانه زاویه ای چیست؟
- دوران حول یک محور ثابت
  - $L = I\omega$
  - مثال : دو دیسک
  - دانش آموز روی سکوی گردان
- تکانه زاویه ای یک ذره چرخان
  - برخورد گلوله و تخته
  - دانشجویی که گلوله ای پرتاب می کند
- **مطالب کتاب درسی و مسائل آنرا مرور کنید!!!**

ادامه فصل دوازدهم...

تکانه زاویه ای ، تعادل اجسام صلب

درس امروز ما...

- توضیحی در باره $\tau = I\alpha$ (این رابطه درست نیست اگر گشتاور لختی تغییر کند)
- تکانه زاویه ای بردار است!
- تمرین :دوران
- مرور : تکانه زاویه ای
- یک مثال در باره مرکز جرم
- چند مسئله دوران

پیش آزمون :تکانه زاویه ای

- دودیسک چرخان با تکانه زاویه ای یکسان داریم ولی دیسک ۱ دارای انرژی جنبشی بیش از دیسک ۲ است .
  - کدام یک گشتاور لختی بیشتری دارد؟

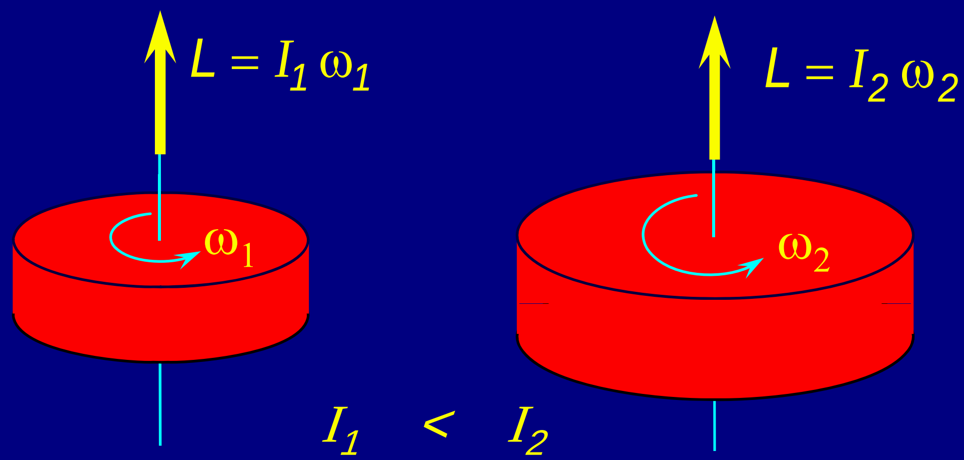
(a) دیسک ۱ (b) دیسک ۲ (c) اطلاعات کافی نیست

پاسخ:

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2I} I^2 \omega^2 = \frac{1}{2I} L^2$$

(با استفاده از $L = I\omega$)

اگر L مساوی داشته باشند دیسکی که I بزرگتری دارد <u>کمترین انرژی جنبشی را خواهد داشت</u>.



دیسک ۱ دیسک ۲

چه وقت $\tau = I\alpha$ درست نیست؟

- نشان دادیم که: $\tau_{EXT} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$
- واین مهمترین رابطه برای فهمیدن این موضوع است
- با استفاده از $L = I\omega$, دراین صورت

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d(I\omega)}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} + \omega\frac{dI}{dt} = I\alpha + \omega\frac{dI}{dt}$$

$$\boxed{\tau_{EXT} = I\alpha + \omega\frac{dI}{dt}}$$

بنابراین وقتی گشتاورلختی ثابت نباشد رابطه $\tau = I\alpha$ درست نخواهد بود

چه وقت $\tau = I\alpha$ درست نیست؟

$$\boxed{\tau_{EXT} = I\alpha + \omega\frac{dI}{dt}}$$

اکنون فرض کنید که: $\tau_{EXT} = 0$

$$I\alpha + \omega\frac{dI}{dt} = 0$$

$$\alpha = -\frac{\omega}{I}\frac{dI}{dt}$$

دراین حالت شتاب α را داریم بدون اینکه گشتاوری به سیستم وارد شده باشد!

مثال...

- یک دیسک در حرکت دورانی یکنواخت خود دارای شتاب زاویه ای خواهد بود اگر گشتاورلختی آن تغییر کند!!.

- درشکل زیر اگر با کشیدن نخ شعاع دوران جسم تغییر کند گشتاور لختی تغییرمی کند ولی گشتاوری ایجاد نمی شود زیرا نیروی نخ درامتدا د شعاع است و

$r X F = 0$ است.

$I_1 > I_2$

$\omega_2 > \omega_1$

دیسک بدون گشتاور خارجی شتاب پیدا می کند!!

مرور : تکانه زاویه ای

- $\boxed{\tau_{EXT} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}}$ که $\boxed{\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}}$ و $\boxed{\tau_{EXT} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_{EXT}}$

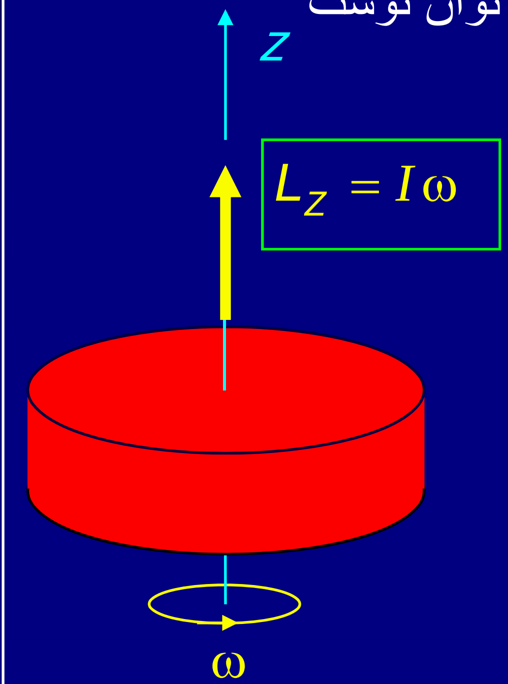
- درغیاب گشتاورهای خارجی

$$\tau_{EXT} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0$$

تکانه زاویه ای کل پایستار است

- واین یک معادله برداری است.
- وبرای هر ذره درست است.

تکانه زاویه ای یک جسم صلب حول یک محورثابت



- به طور کلی برای جسمی که حول محور ثابت (z) می چرخد می توان نوشت

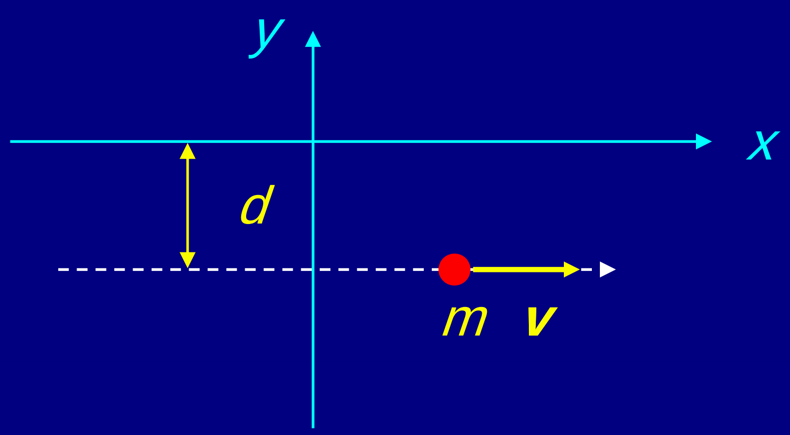
$$L_Z = I\omega$$

- جهت L_Z از قانون دست راست مشابه ω بدست می آید.

- از نظر سادگی اندیس Z حذف می کنیم,
ومی نویسیم : $L = I\omega$

مرور...

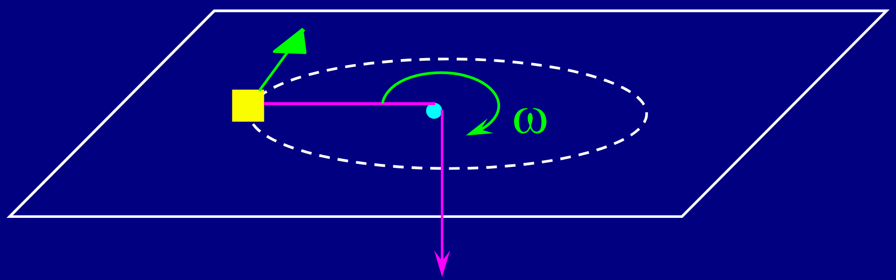
- ذره ای که آزادانه حرکت می کند دارای تکانه زاویه ای معینی حول یک محور است.
- اگر گشتاوری به این ذره وارد نشود تکانه زاویه ای آن ثابت می ماند.
- درشکل زیر L درطول محور z است ,وبزرگی آن برابر است
- با : $L_z = pd = mvd$



دوران:

- دیسکی روی یک مسیر دایره ای روی یک میز بدون اصطکاک می لغزد. شعاع مسیر را به وسیله طناب سبکی که از سوراخ وسط میز بدون اصطکا ک می گذرد می توانیم تغییر دهیم. اگر طناب را طوری بکشیم که شعاع نصف شود سرعت زاویه ای دیسک به چه نسبتی زیاد می شود؟

(a) 2 (b) 4 (c) 8



پاسخ:

- با کشیدن طناب گشتاوری ایجاد نشده و لذا تکانه زاویه ای ثابت می ماند

$$L_1 = I_1\omega_1 = mR^2\omega_1 \quad = \quad L_2 = I_2\omega_2 = m\left(\frac{R}{2}\right)^2\omega_2$$

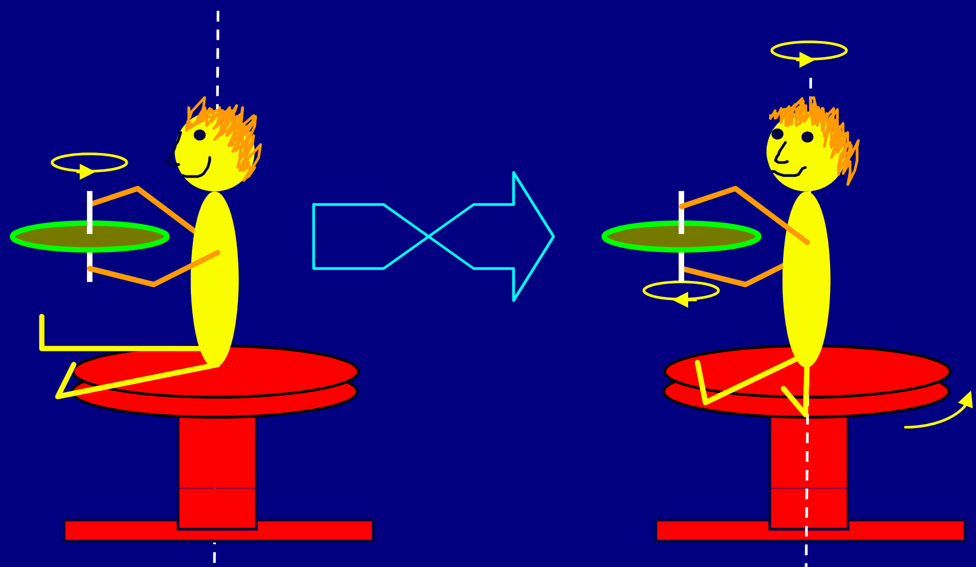
$$mR^2\omega_1 = m\frac{1}{4}R^2\omega_2$$

$$\omega_1 = \frac{1}{4}\omega_2 \Rightarrow \boxed{\omega_2 = 4\omega_1}$$

تکانه زاویه ای بردار است!
نمایش : چرخانیدن چرخ دوچرخه!

- دانشجویی روی یک صندلی گردان نشسته است و چرخ دوچرخه ای را در دست دارد که با سرعت در صفحه افقی می چرخد .او صفحه دوران چرخ را 180^o, را می چرخاند و مشاهده می کند که خودش نیز به چرخش درمی آید .

راستی با این عمل چه اتفاقی می افتد؟

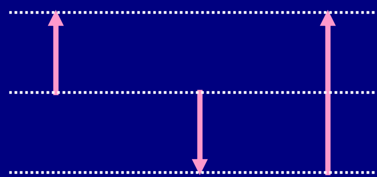


کمی فکرکنیم...

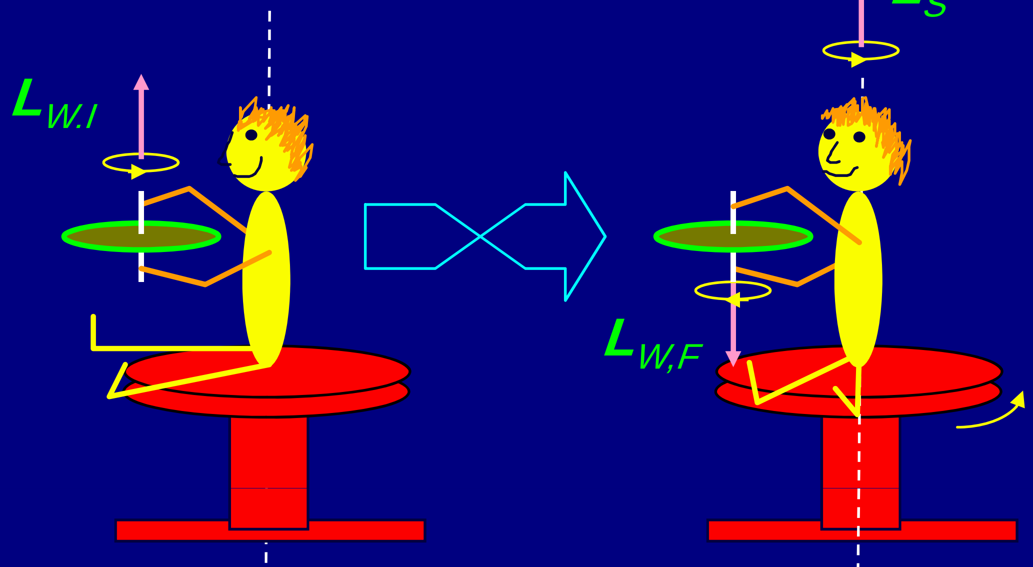
- چون گشتاور خارجی به چرخ + صندلی + دانشجو وارد نمی شود لذا تکانه زاویه ای این سیستم ثابت می ماند.

در ابتدا ← $L_{INI} = L_{W,I}$

و در پایان ← $L_{FIN} = L_{W,F} + L_S$



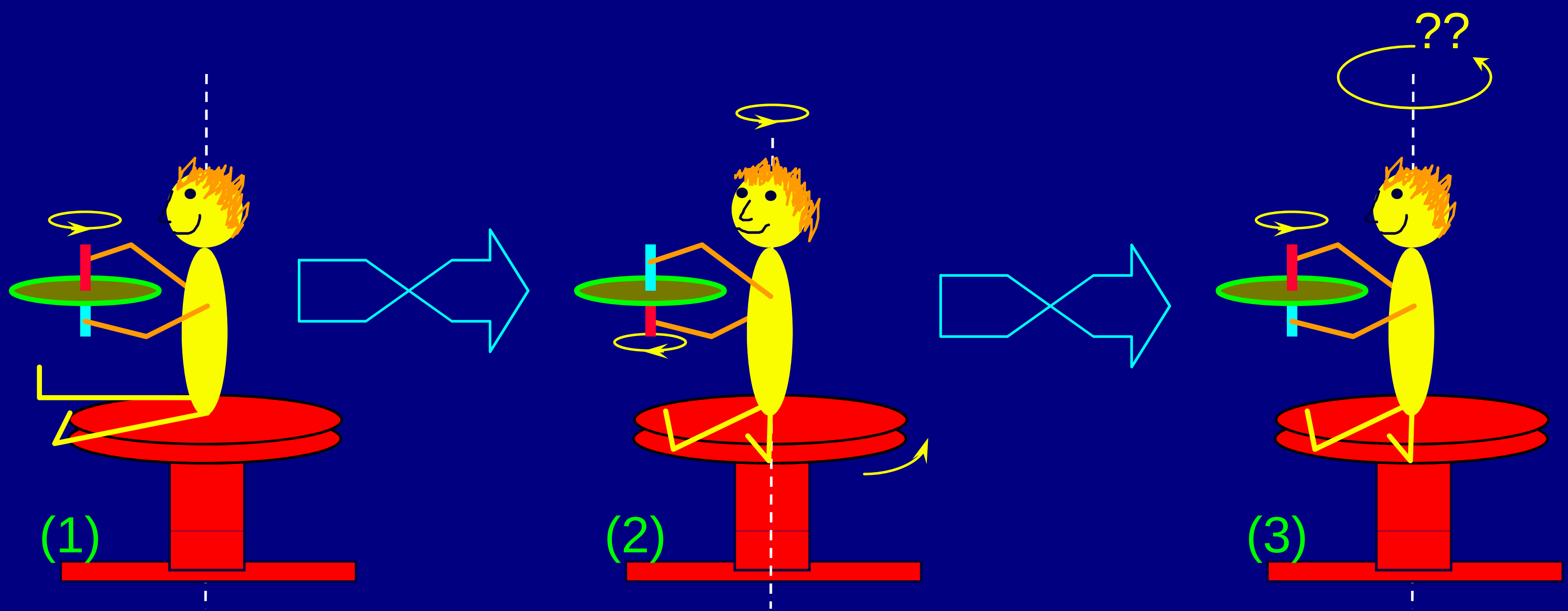
$L_{W,I} = L_{W,F} + L_S$



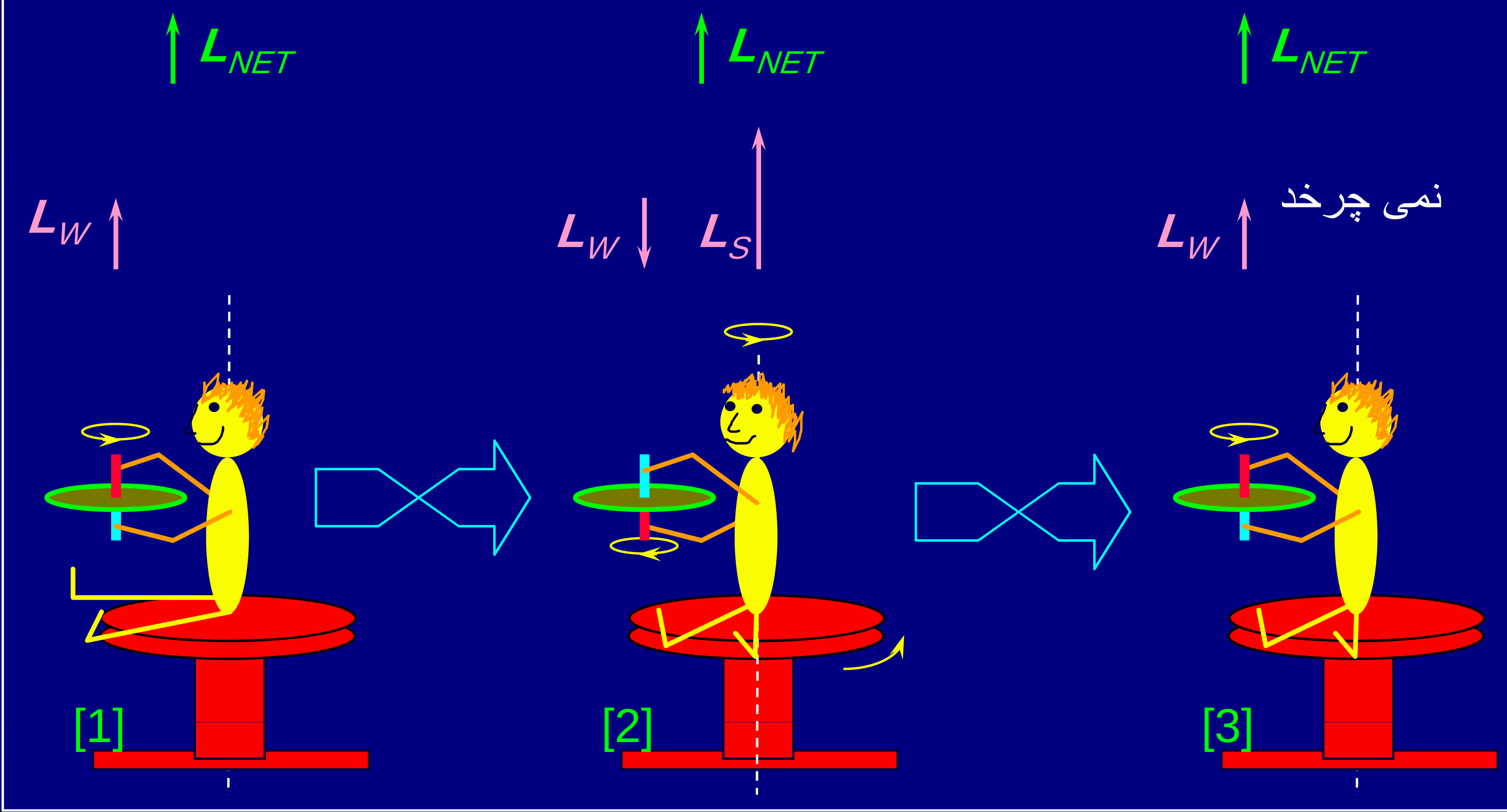
تمرین :دوران

- دانشجویی روی صندلی که می تواند به چرخد نشسته است و چرخ دوچرخه ای را مطابق شکل درحالی که می چرخد (1) در دست دارد. او مطابق شکل چرخ را ۱۸۰ درجه می چرخاند و ملاحظه میکند که خودش شروع به چرخش می کند (2). اگر او درحالی که میچرخد چرخ را یک بار دیگر برگرداند, (3) چرخش خودش چگونه خواهد شد؟:

(a) متوقف می شود (b) دوبرابر می شود (c) تغییر نمی کند

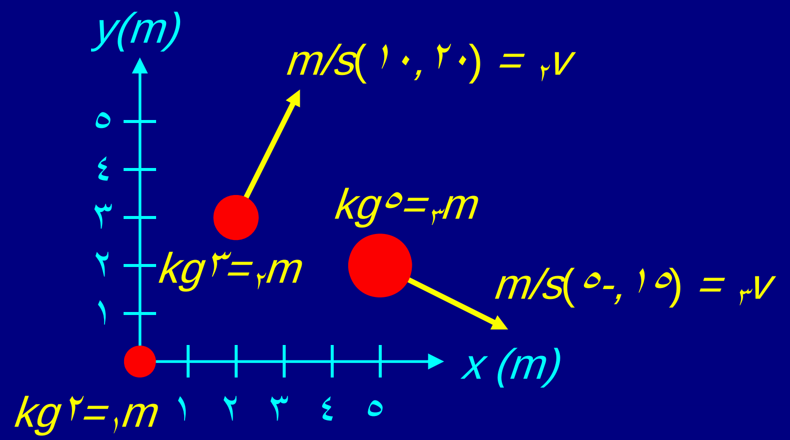


پاسخ:



مرکز جرم...

- سه جرم کروی همگن مطابق شکل مفروض است .دوتا از این جرم ها متحرک وسومی که در مبدا قرار دار ساکن است.
  - مکان و سرعت مرکز جرم را پیدا کنید
  - تکانه کل سیستم چقدر است؟



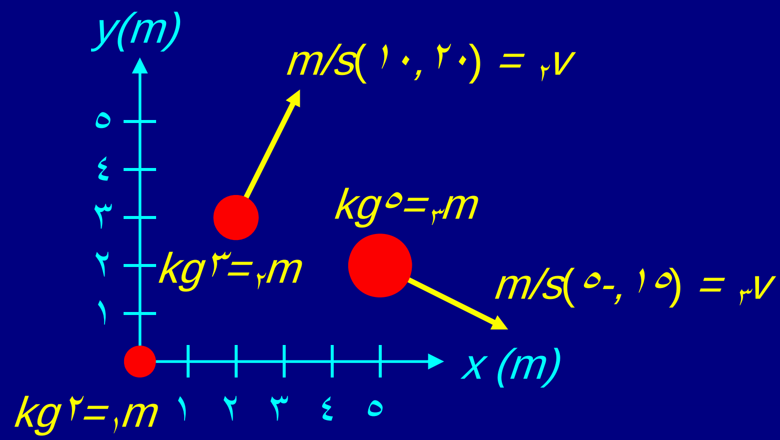
مرکز جرم...

مختصات مرکز جرم:

$$\mathbf{R}_{cm} = \frac{1}{M_{tot}} \sum_i m_i \mathbf{r}_i$$

$$X_{cm} = \frac{1}{M_{tot}} \sum_i m_i x_i = \frac{1}{10kg}(3kg \cdot 2m + 5kg \cdot 5m) = 3.1m$$

$$Y_{cm} = \frac{1}{M_{tot}} \sum_i m_i y_i = \frac{1}{10kg}(3kg \cdot 3m + 5kg \cdot 2m) = 1.9m$$



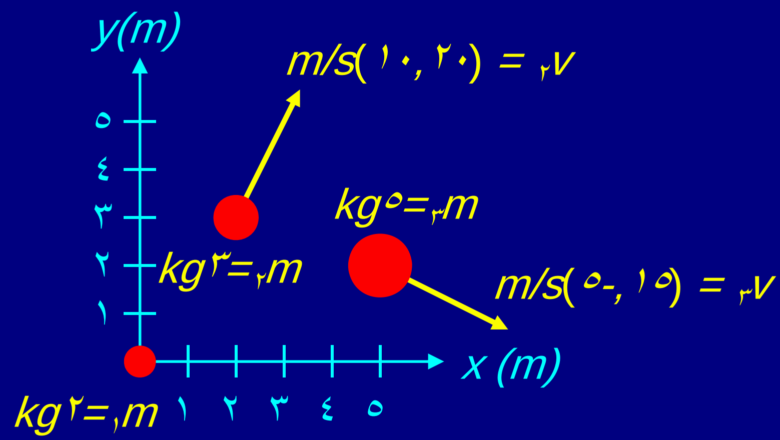
مرکز جرم...

سرعت مرکز جرم :

$$\mathbf{V}_{cm} = \frac{1}{M_{tot}} \sum_i m_i \mathbf{v}_i$$

$$V_{x,cm} = \frac{1}{M_{tot}} \sum_i m_i v_{x,i} = \frac{1}{10kg}(3kg \cdot 10\,m/s + 5kg \cdot 15\,m/s) = 10.5\,m/s$$

$$V_{y,cm} = \frac{1}{M_{tot}} \sum_i m_i v_{y,i} = \frac{1}{10kg}(3kg \cdot 20\,m/s - 5kg \cdot 5\,m/s) = 3.5\,m/s$$



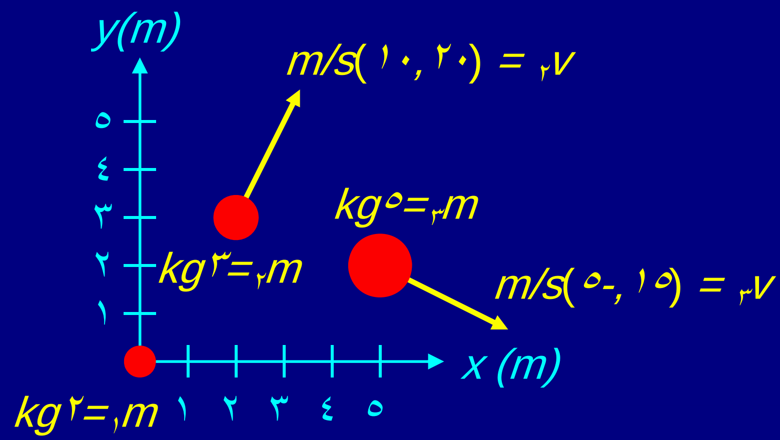
مرکز جرم...

تکانه مرکز جرم:

$$\mathbf{P}_{cm} = M_{tot}\,\mathbf{V}_{cm}$$

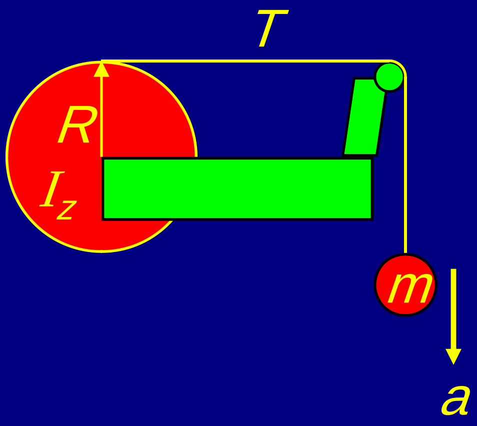
$$\mathbf{P}_{cm} = \left(M_{tot}V_{x,cm}\,,M_{tot}V_{y,cm}\right) = \left(10kg \cdot 10.5\, m/s\,, 10kg \cdot 3.5\, m/s\right)$$

$$\mathbf{P}_{cm} = \left(105,35\right) kg\; m/s$$



دینامیک دورانی :

- یک استوانه دایره ای به شعاع $R = .2m$, آزادانه حول یک محورافقی بدون اصطکاک می چرخدو طناب سبکی به دور آن پیچیده شده است. طناب از روی یک قرقره گذشته و یک جسم به جرم $m = 1kg$ *به آن آویزان شده است*. وقتی m سقوط می کند, طناب از استوانه که گشتاور لختی آن I_z نامشخص است باز می شود .جسم باشتاب $a = 0.4m/s^۲$ به پایین سقوط می کند.

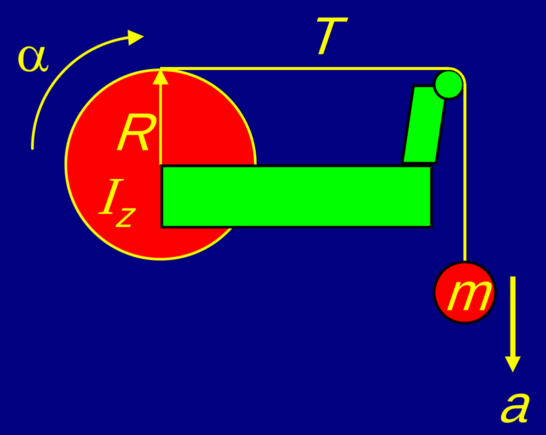


- شتاب زاویه ای استوانه α حول محورش چقدر است؟
- کشش طناب T چقدراست؟
- گشتاور لختی I_z استوانه چقدراست؟
- تندی استوانه بعداز اینکه جرم m به اندازه $d = 10m$ سقوط کرد چقدراست؟

دینامیک دورانی :

- شتاب زاویه ای استوانه α حول محورش چقدر است؟

- چون طناب روی استوانه نمی لغزد بزرگی شتاب یک نقطه روی لبه استوانه برابراست با: $a = R\alpha$



$$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{a}{R} = \frac{.4\,m/s^2}{.2\,m} = 2\,rad/s^2$$

دینامیک دورانی :

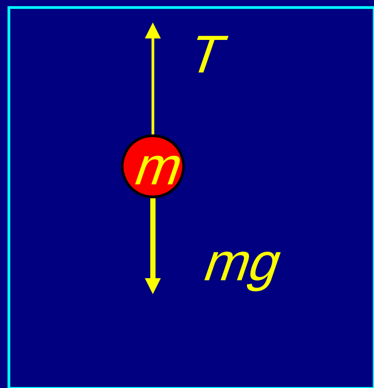
- کشش طناب T چقدراست؟
- با استفاده از $F = ma$ برای جسم آویزان داریم: :

$$mg - T = ma$$

- $T = m(g - a)$

  ۱ = kg ۹.۸) m/s۰.٤ - ۲ m/s(۲

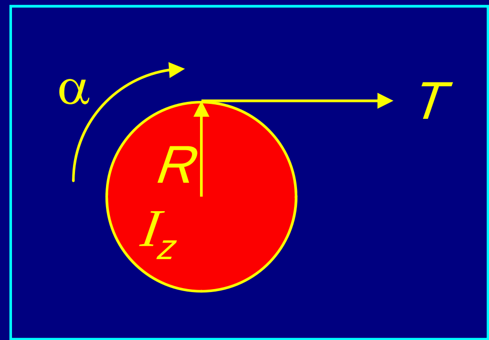
  ۹.٤ = N



دینامیک دورانی :

- گشتاور لختی I_z استوانه چقدراست؟

- با استفاده از $\tau = I_z\alpha$ برای استوانه:

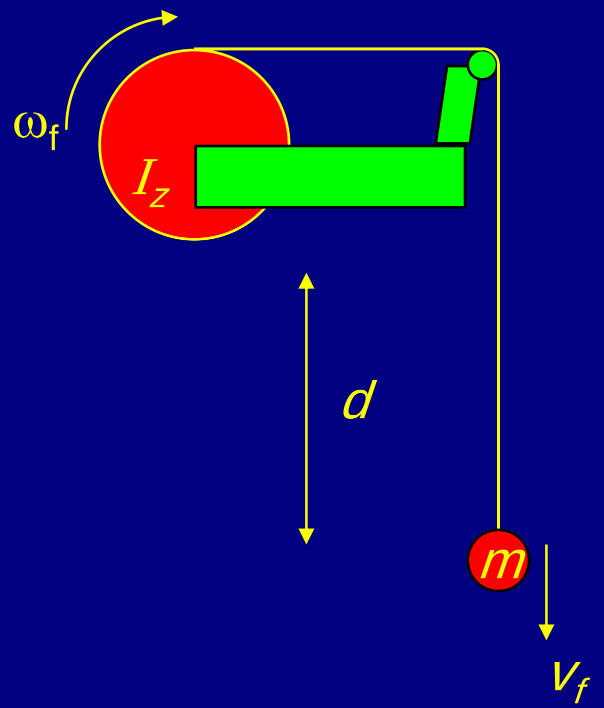


$$TR = I_z\,\alpha \;\Rightarrow\; I_z = \frac{TR}{\alpha}$$

$$\Rightarrow\; I_z = \frac{(9.4N)(.2m)}{2\,rad/s^2} = 0.94kgm^2$$

دینامیک دورانی :

- تندی استوانه بعداز اینکه جرم m به اندازه $d = 10m$ سقوط کرد چقدراست؟
- با استفاده از پایستاربودن انرژی : $\Delta K = -\Delta U$



$$\frac{1}{2} I_z \omega_f^2 + \frac{1}{2} m v_f^2 = mgd$$

ولی : $v_f = R\omega_f$

$$\frac{1}{2} I_z \omega_f^2 + \frac{1}{2} m R^2 \omega_f^2 = mgd$$

$$\omega_f = \sqrt{\frac{2mgd}{I_z + mR^2}} = 1414\ rad/s$$

مرور نهایی درس امروز...

- توضیحی در باره $\tau = I\alpha$ (این رابطه درست نیست اگر گشتاور لختی تغییر کند)
- تکانه زاویه ای بردار است!
- تمرین :دوران
- مرور : تکانه زاویه ای
- یک مثال در باره مرکز جرم
- چند مسئله دوران

www.salampnu.com