www.salampnu.com

سایت مرجع دانشجوی پیام نور

- ✓ نمونه سوالات پیام نور : بیش از ۱۱۰ هزار نمونه سوال همراه با پاسخنامه تستی و تشریحی
- ✓ کتاب ، جزوه و خلاصه دروس
- ✓ برنامه امتحانات
- ✓ منابع و لیست دروس هر ترم
- ✓ دانلود کاملا رایگان بیش از ۱۴۰ هزار فایل مختص دانشجویان پیام نور

www.salampnu.com

دانشگاه پیام نور

فیزیك پایه ۱ (مکانیك)

انتشارات دانشگاه پیام نور

بر اساس ***UNIVERSITY PHYSICS***

تالیف ***HARRIS BENSON***

ترجمه تدوین محمدرضا بهاري

تهیه کننده اسلایدها: محمدرضا بهاري

مباحث كلي درس

- مقدمات و تعاريف
- رياضيات برداري
- سينماتيك حركت يك بعدي و دوبعدي
- ديناميك ذره – قوانين نيوتون
- كار و انرژي
- پايستگي انرژي
- تكانه خطي
- ديناميك سيستم‌هاي ذرات و اجسام صلب
- سيستماتيك و ديناميك دوران جسم صلب حول محور ثابت
- تكانه زاويه‌اي، و تعادل جسم صلب

جايگاه و اهميت درس

ارتباط بنيادي علوم پايه با همديگر ايجاب مي‌كند كه دانشجويان هر علمي با كليات و مفاهيم اساسي علوم ديگر آشنا باشند.

دانشجويان علوم پايه با يادگيري فيزيك پايه نه فقط با قوانين بنيادي طبيعت بلكه با منطق و روشِ علمي مطالعه اين قوانين هم آشنا مي‌شوند.

مثلاً، دانشجويان رشته شيمي در بسياري از دروس اصلي اين رشته از مفاهيم و روابط فيزيك استفاده خواهند كرد، و دانشجويان رشته رياضي خواهند ديد كه بسياري از مفاهيم و روش‌هاي رياضي چه كاربردهاي مفيدي در بيان دقيقتر مفاهيم فيزيك و محاسبات مربوط به آنها دارند.

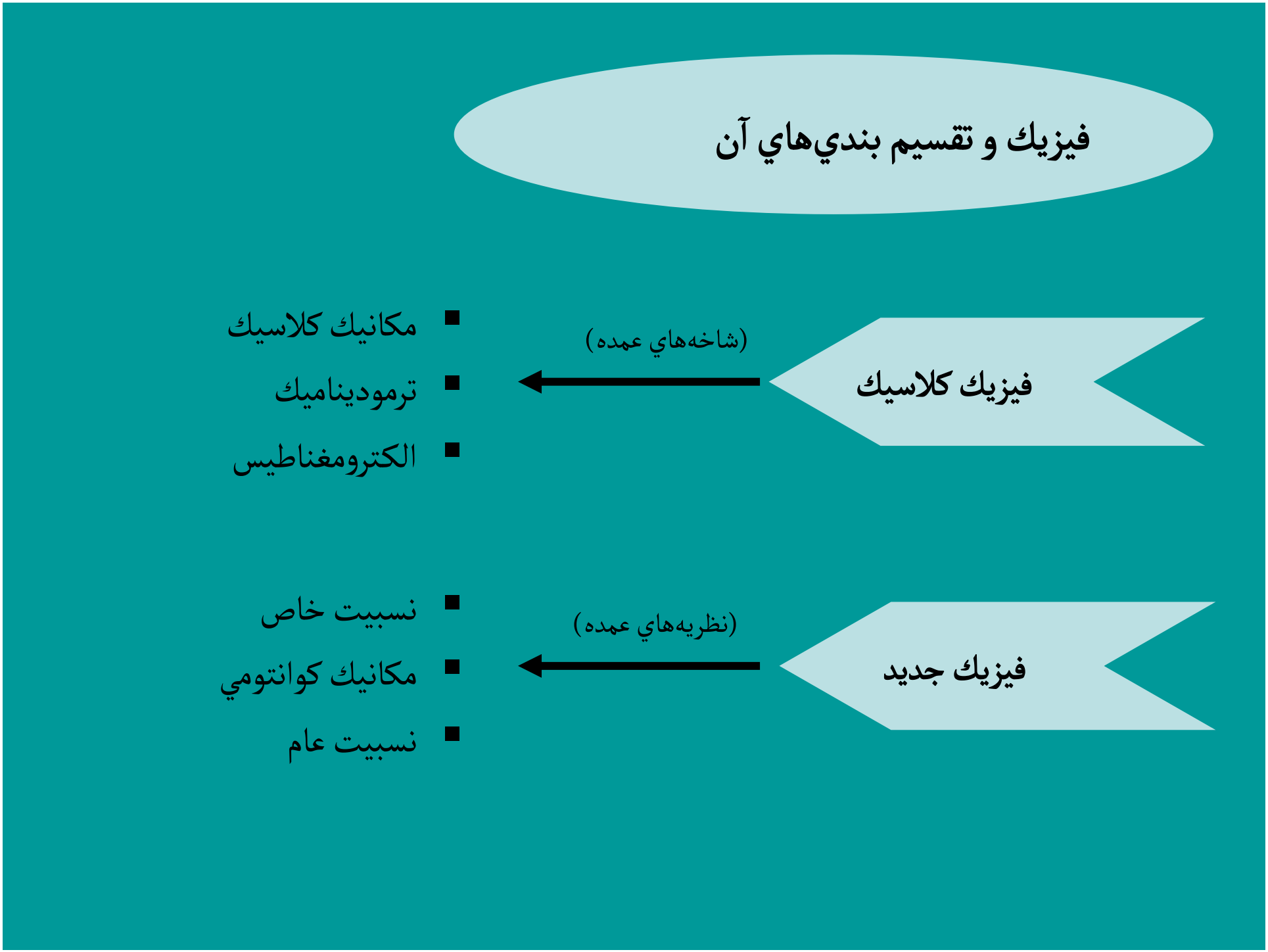
فصل اول: مقدمات

هدف كلي

آشنايي با بعضي تعاريف و اصطلاحات و مفاهيم لازم براي شروع مطالعه فيزيك

- فيزيك چيست ؟
- مفهوم ، مدل ، قانون ، اصل و نظريه
- يكاهاي اندازه‌گيري
- نمايش اعداد با توانهاي ده و ارقام با معني
- چارچوب‌هاي مرجع و دستگاه‌هاي مختصات

فيزيك و تقسيم بندي‌هاي آن



نكات قابل بحث:

- حوزه‌هاي كاربرد فيزيك كلاسيك و فيزيك جديد
- مفهوم ، قانون ، اصل ، مدل ، نظريه

يكاهاي اندازه‌گيري

- مكانيك كلاسيك
- ضرورت تعيين استانداردهاي مشترك
- خصوصيات مطلوب براي استانداردها

دستگاه يكاهاي بين المللي (SI)

- كميته‌ها و يكاهاي اصلي
- كميته‌ها و يكاهاي فرعي (مشتق)

يكاهاي اصلي مكانيك (در SI)

- كيلو گرم (يكاي جرم)
- ثانيه (يكاي زمان)
- متر (يكاي طول)

پيشوندهاي يکاهاي SI

پيشوند	نماد	ضريب	پيشوند	نماد	ضريب
اگزا	E	$۱۰^{۱۸}$	دسي	d	$۱۰^{-۱}$
پتا	P	$۱۰^{۱۵}$	سانتي	c	$۱۰^{-۲}$
ترا	T	$۱۰^{۱۲}$	ميلي	m	$۱۰^{-۳}$
گيگا	G	$۱۰^{۹}$	ميکرو	μ	$۱۰^{-۶}$
مگا	M	$۱۰^{۶}$	نانو	n	$۱۰^{-۹}$
کيلو	k	$۱۰^{۳}$	پيکو	p	$۱۰^{-۱۲}$
هکتو	h	$۱۰^{۲}$	فمتو	f	$۱۰^{-۱۵}$
دکا	da	$۱۰^{۱}$	آتو	a	$۱۰^{-۱۸}$

- **تبدیل یکاها به روش ضرب کردن در کسرهاي واحدِ مناسب ،**

مثلاً

$$30\,m/s=(\frac{30\,m}{1\,s})(\frac{1\,km}{1000\,m})(\frac{3600s}{1\,h})=\frac{30\times3600}{1000}\frac{km}{h}=108\frac{km}{h}$$

- **نمایش اعداد برحسب توانهاي ده ، مثلاً**

$$0/0000000002 = 2\times10^{-10}$$

$$926843200\cong9/3\times10^{8}$$

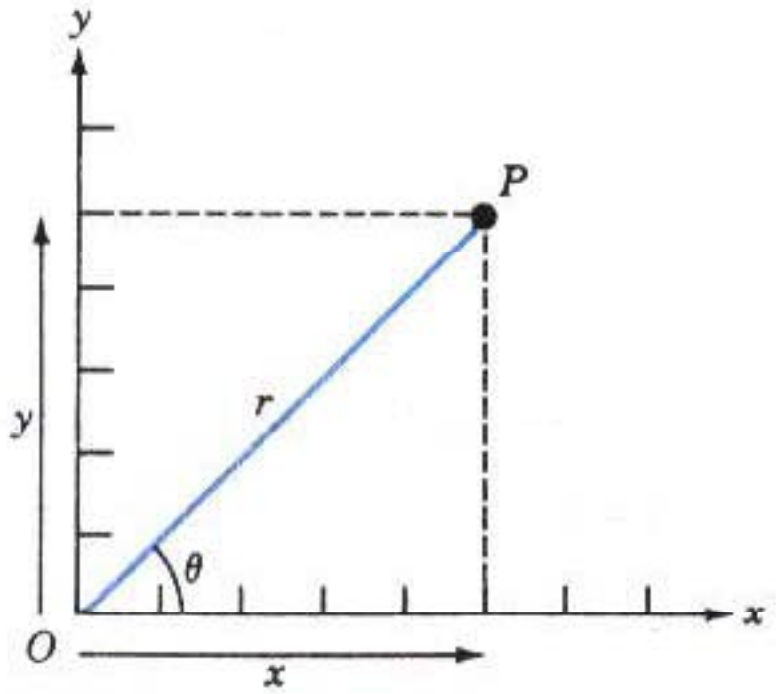
منظور از ارقام بامعني

- تعيين ارقام بامعني در عمليات جمع و تفريق
- تعيين ارقام بامعني در عمليات ضرب و تقسيم

$$١٧/٥٢٤ + ٢/٤ - ٣/٥٦ = (١٦/٣٦٤) = ١٦/٤$$

$$\frac{٣٦/٤٧٩ \times ٢/٦}{١٤/٥٨} = (٦/٣٨٧) = ٦/٤$$

چارچوب‌هاي مرجع و دستگاه‌هاي مختصات



(x, y) مختصات دکارتی و (r, θ) مختصات قطبی نقطهٔ P اند.

روابط ميان مختصات قطبي و مختصات دكارتي

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \tan^{-1} \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

مسائل فصل اول

۱. (الف) مسافتي كه نور آن را در يك سال مي پيمايد سال نوري ناميده مي‌شود. با استفاده از سرعت نور كه برابر با m/s ۱۰^۸ * ۳٫۰۰ است ، سال نوري را بر حسب كيلومتر بيان كنيد .

(ب) متوسط فاصله ميان زمين و خورشيد ، كه در حدود m/s ۱۰^۱۱ * ۱٫۵ است ، يكاي نجومي (AU) ناميده مي شود. سرعت نور را بر حسب AU/h حساب كنيد .

۲. اتومبيلي با مصرف ۱ گالن بنزين مي تواند مسافتي برابر با ۳۰ مايل را طي كند . ميزان مصرف اين اتومبيل را برحسب « ليتر در ۱۰۰ كيلومتر » (كه يكاي معمول براي مصرف اتومبيلهاي سواري است) چقدر است ؟ هر گالن امريكايي برابر با ۳٫۷۹ ليتر است

۳. عدد π را برابر با ۳٫۱۴۱۵۹ بگيريد و هريك از مقادير زير را حساب كنيد:

(الف) مساحت دايره اي به شعاع m ۴٫۲۰

(ب) مساحت سطح كره اي به شعاع m ۰٫۴۶

(ج) حجم كره اي به شعاع m ۲٫۳۱۸

فصل دوم: بردارها

هدف كلي

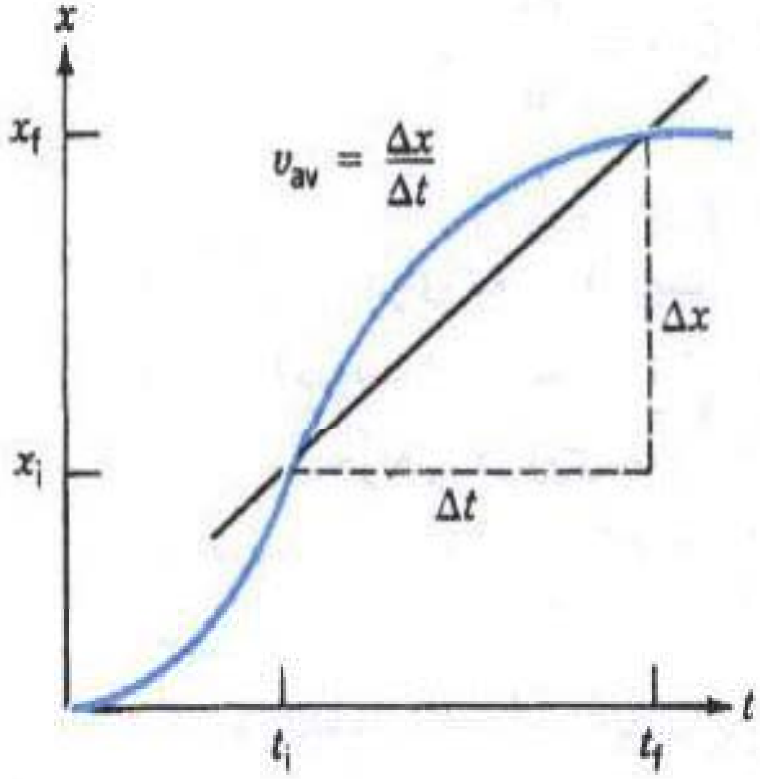
آشنايي با عمليات برداري (جبر برداري)

بردارها ابزار مفيدي براي بيان مختصر و دقيق بعضي مفاهيم و قوانين فيزيك‌اند.

مطالب اين فصل

- نمايش بردارها
- جمع بردارها
- مولفه‌ها و بردارهاي يكه
- ضرب اسكالر
- ضرب برداري

نمايش هندسي (ترسيمي)



نمودار x برحسب t برای ذره‌ای که سرعتش یکنواخت نیست. ضریب زاویهٔ خط واصل دو نقطه از منحنی برابر با سرعت متوسط در آن بازهٔ زمانی است.

نكات قابل بحث:

-كميات برداري و كميات اسكالر

- اندازه و جهت بردار

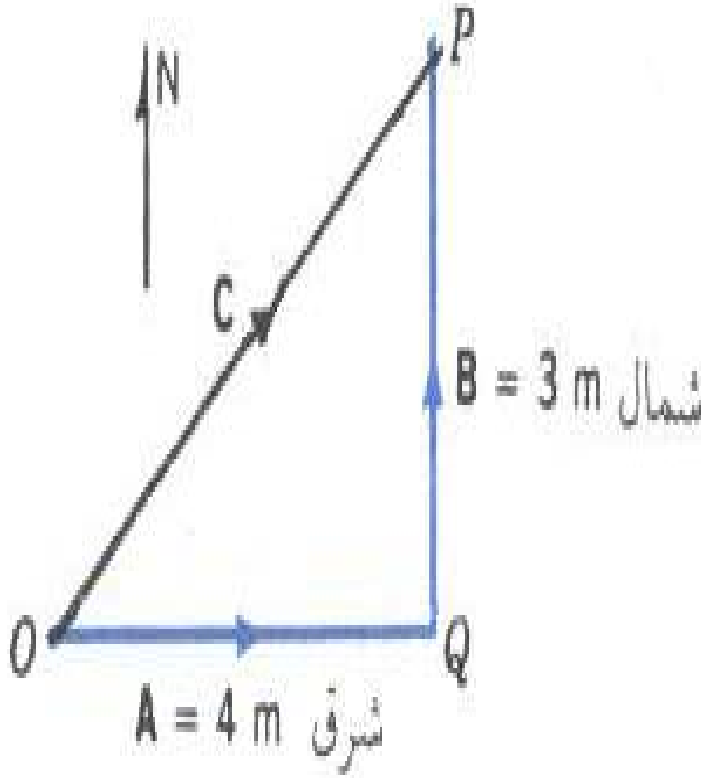
جمع بردارها

جمع هندسي

- روش دُم به سَر (براي بردارهاي متوالي)
- روش قطر متوازي الاضلاع (براي بردارهاي هم مبدأ)

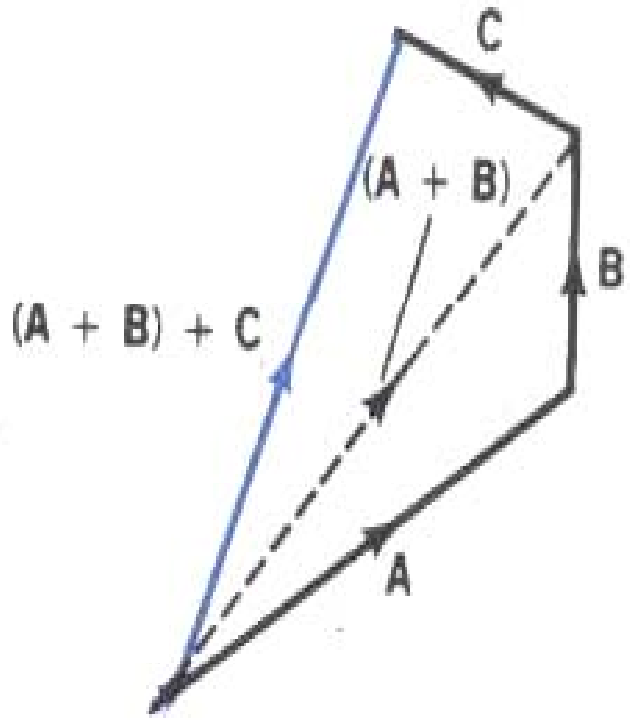
$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}$$

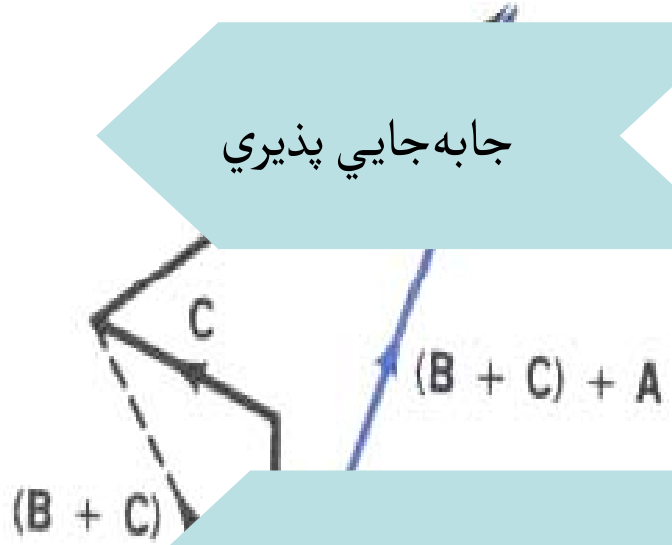


اثر کلی دو جابجایی $\vec{A}$ و $\vec{B}$، معادل است با یک جابجایی $\vec{C}$، که برایند $\vec{A}$ و $\vec{B}$ است.

خواص جمع برداري



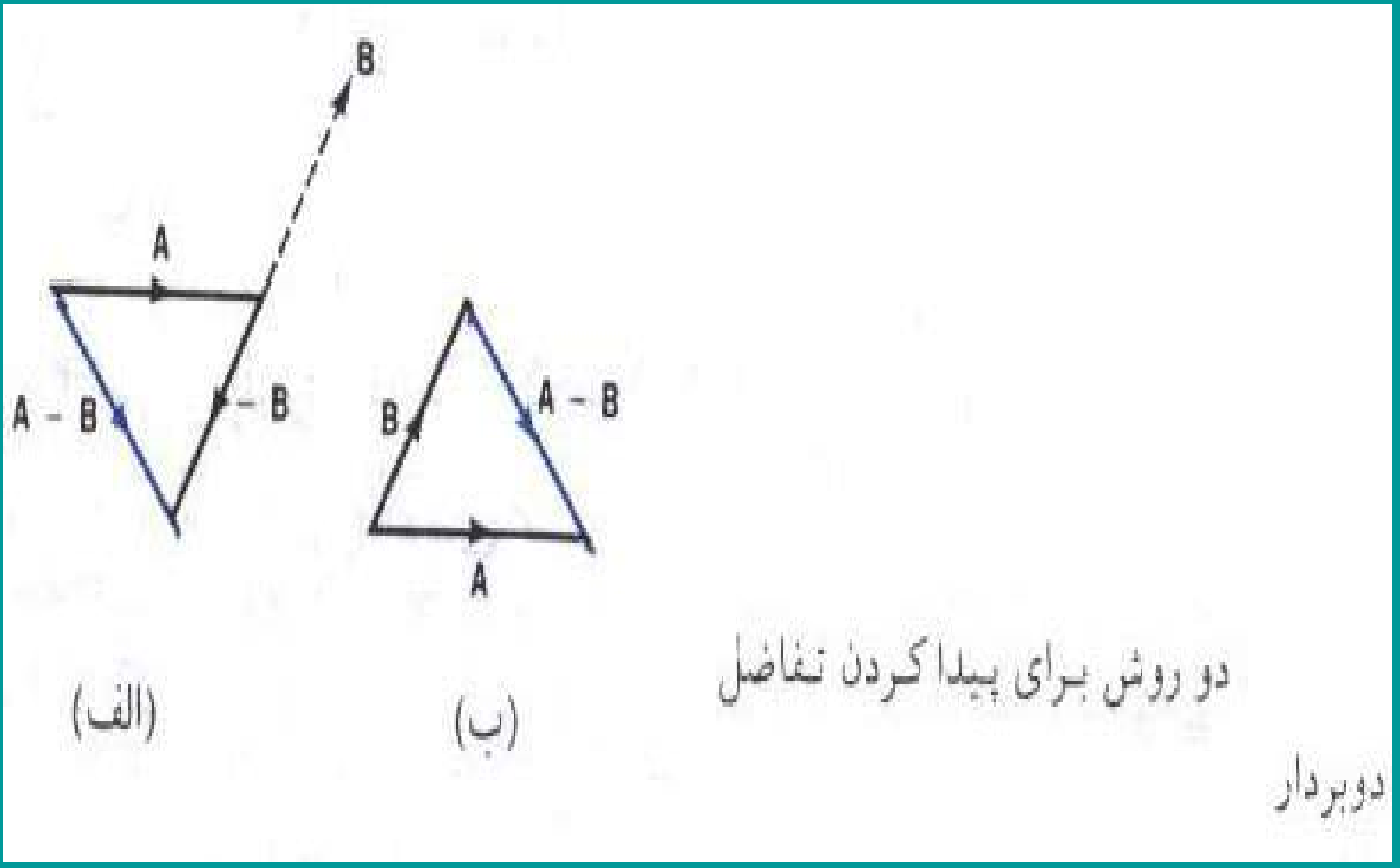
جابه‌جايي پذيري



انجمن پذيري

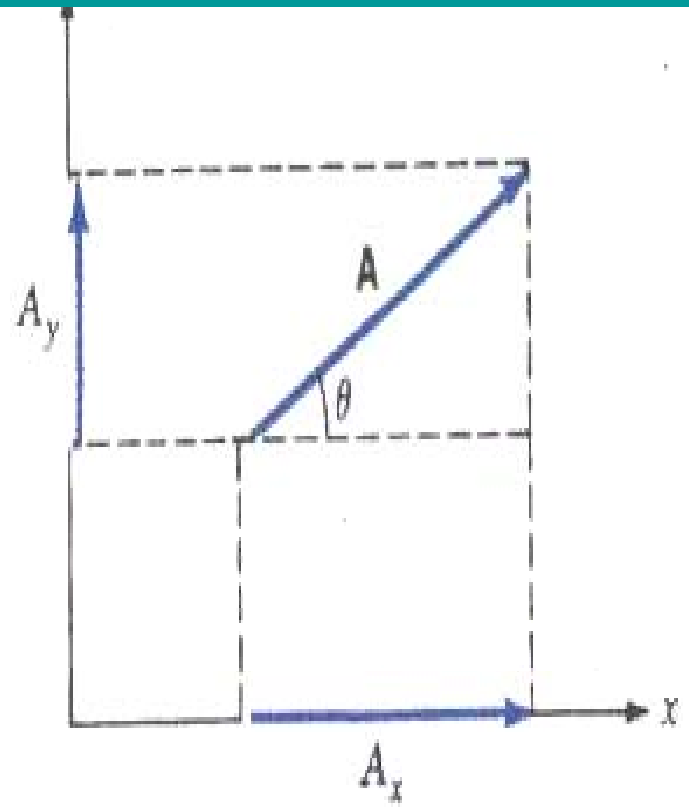
نمایش خاصیت انجمن پذیری در جمع بردارها

تفريق برداري



دو روش برای پیدا کردن تفاضل دوبردار

مؤلفه‌هاي برداري



A_x و A_y مؤلفه‌های بردار $\vec{A}$ در دستگاه مختصات دکارتی‌اند.

بردار دوبعدي با دو مؤلفه‌اش (Ay و

Ax)، يا اندازه و جهت‌اش (θ و A)

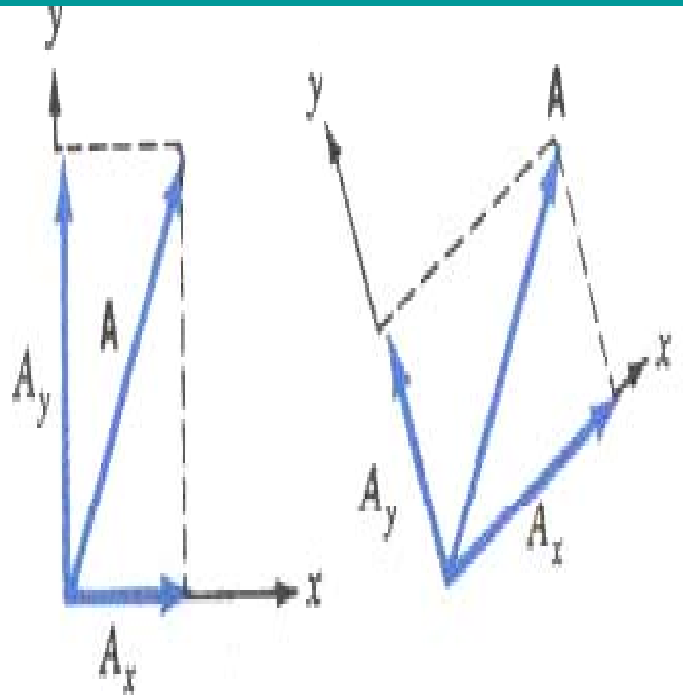
مشخص مي‌شود.

$$\begin{cases} A_x = A\cos\theta \\ A_{y=A}\sin\theta \end{cases}$$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

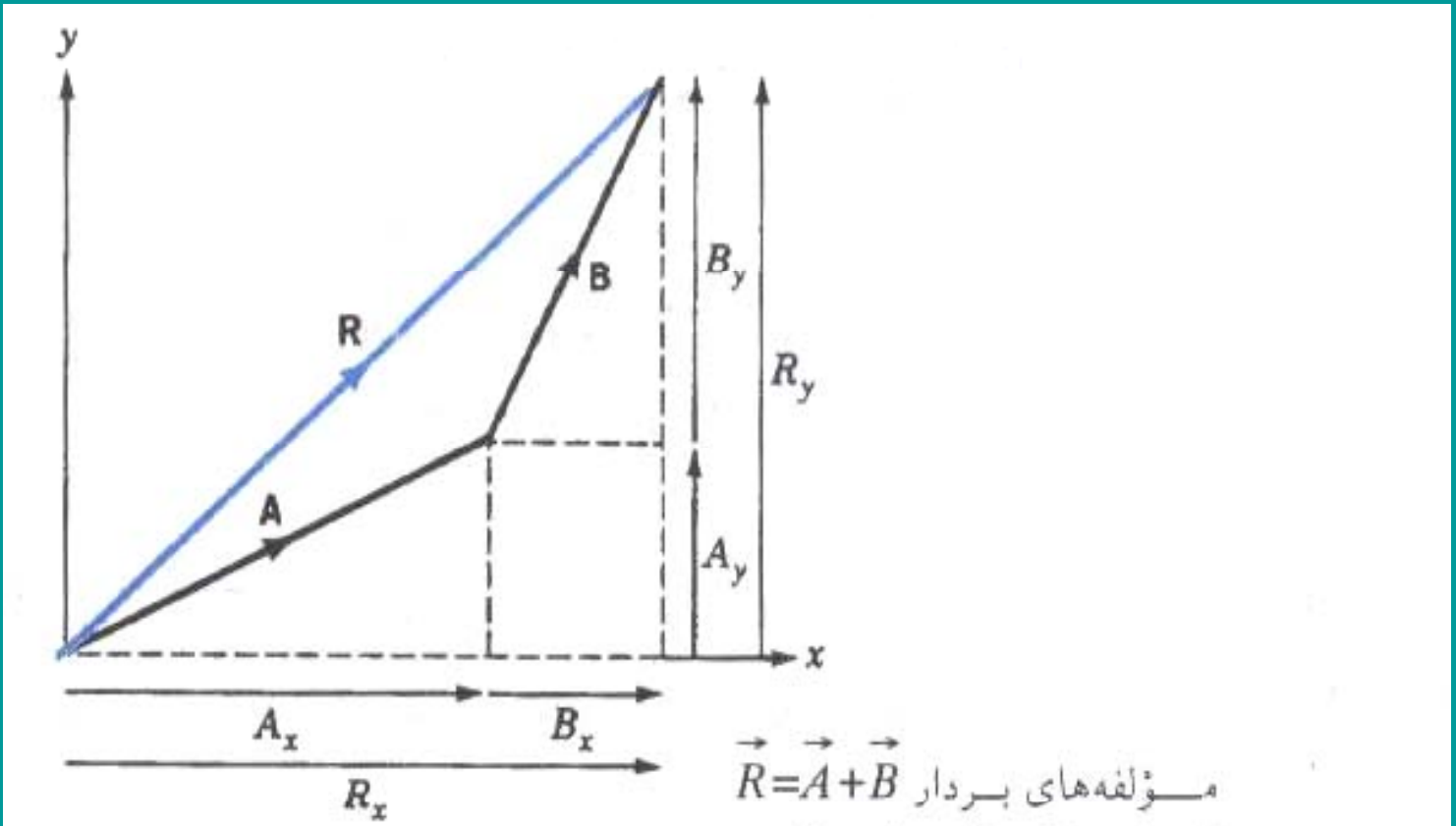
$$\tan\theta = \frac{Ay}{Ax}$$

دَوَران دستگاه مختصات



اگر محورهای مختصات تغییر کنند
مؤلفه‌ها هم تغییر می‌کنند ولی اندازهٔ بردار
تغییر نمی‌کند.

جمع بردارها به روش تحليلي
(با استفاده از مؤلفه‌ها)



مؤلفه‌های بردار $\vec{R}=\vec{A}+\vec{B}$

عبارت‌اند از $R_x=A_x+B_x$ و $R_y=A_y+B_y$

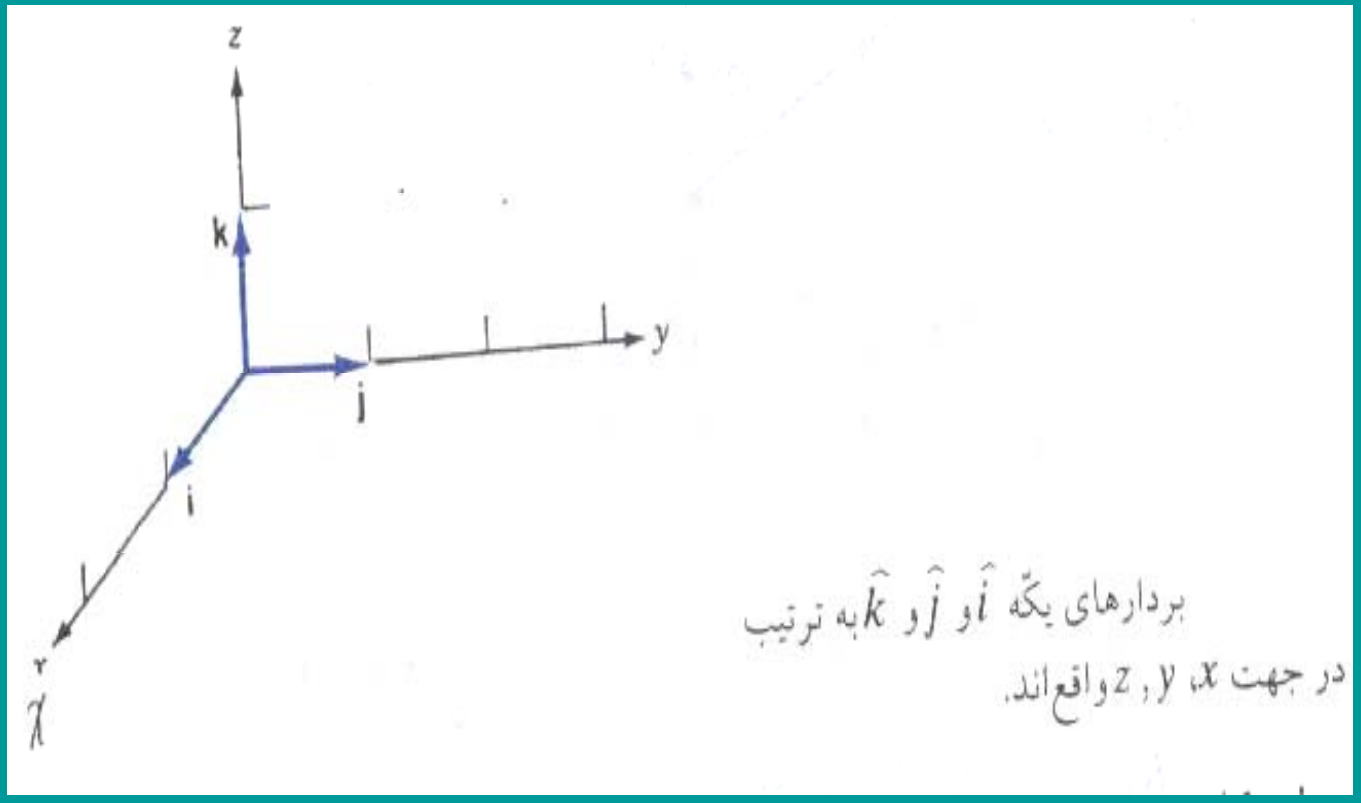
$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$$

$$\begin{cases} R_x = A_x + B_x \\ R_y = A_y + B_y \end{cases}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

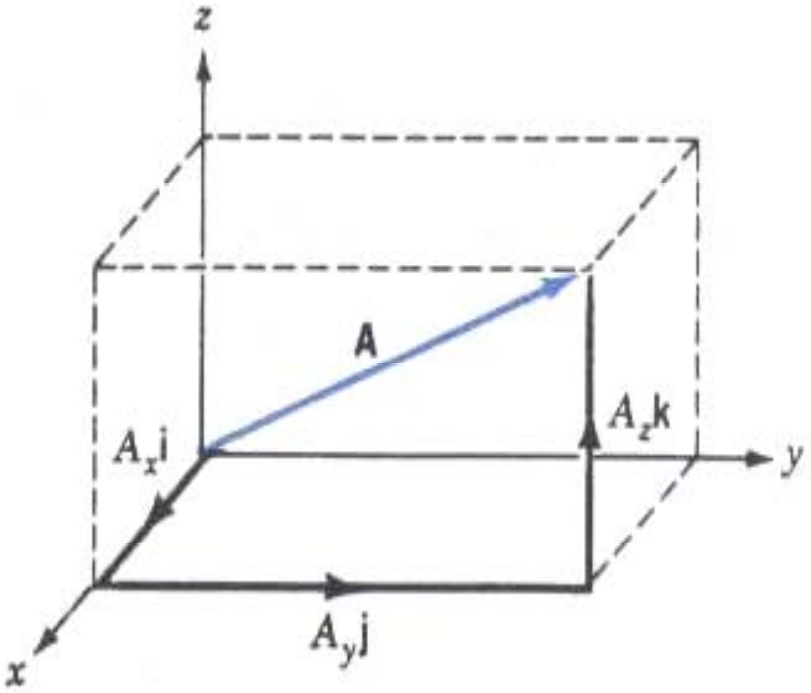
$$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x}$$

بردارهاي يكه



بردارهای یکّه $\hat{i}$ و $\hat{j}$ و $\hat{k}$ به ترتیب
در جهت x، y، z واقع‌اند.

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{i} + A_z \hat{k}$$



بردار $\vec{A}$ می‌توانیم، با استفاده از بردارهای یکه، برحسب مؤلفه‌هایش به صورت $A = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ نمایش بدهیم.

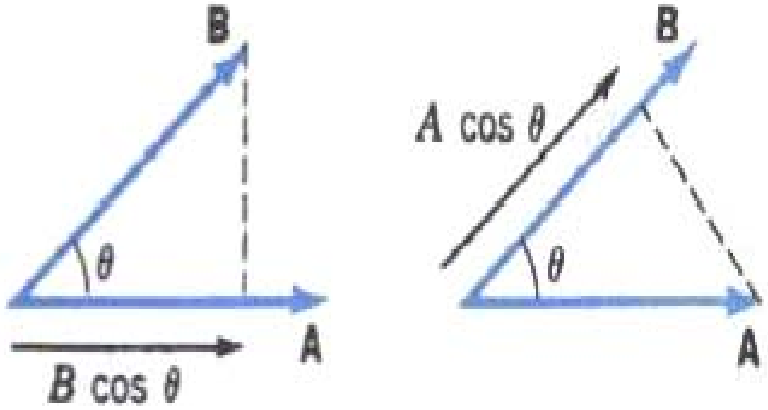
$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

عمليات برداري با استفاده از
مؤلفه‌ها و بردارهاي يكه

$$\vec{A}+\vec{B}=\left(A_x+B_x\right)\hat{i}+\left(A_y+B_y\right)\hat{j}+\left(A_z+B_z\right)\hat{k}$$

$$\vec{A}-\vec{B}=\left(A_x-B_x\right)\hat{i}+\left(A_y-B_y\right)\hat{j}+\left(A_z-B_z\right)\hat{k}$$

ضرب اسکالر



ضـــرب اسکـالر دو بـردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ در واقع عبارت است از $\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\alpha$ اندازهٔ یکی از بردارها ضـربدر تـصویر بـردار دیگر در امتداد بردار اول.

$$\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta$$

خواص ضرب اسکالر

$$\vec{B}\cdot\vec{A} = \vec{A}\cdot\vec{B}$$

جابجايي پذيري

$$\vec{A}\cdot\left(\vec{B}+\vec{C}\right) = \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C}$$

توزيع پذيري

$$\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = ۱$$

$$\hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{i} = ۰$$

ضرب اسکالر برحسب مولفه‌ها

$$\vec{A}.\vec{B} = \left(A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}\right).\left(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_y\hat{k}\right)$$

$$\vec{A}.\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_{Bz}$$

$$\vec{A}.\vec{A} = A\,A\cos o = A^2 = A_x^2\ A_y^2\ A_z^2$$

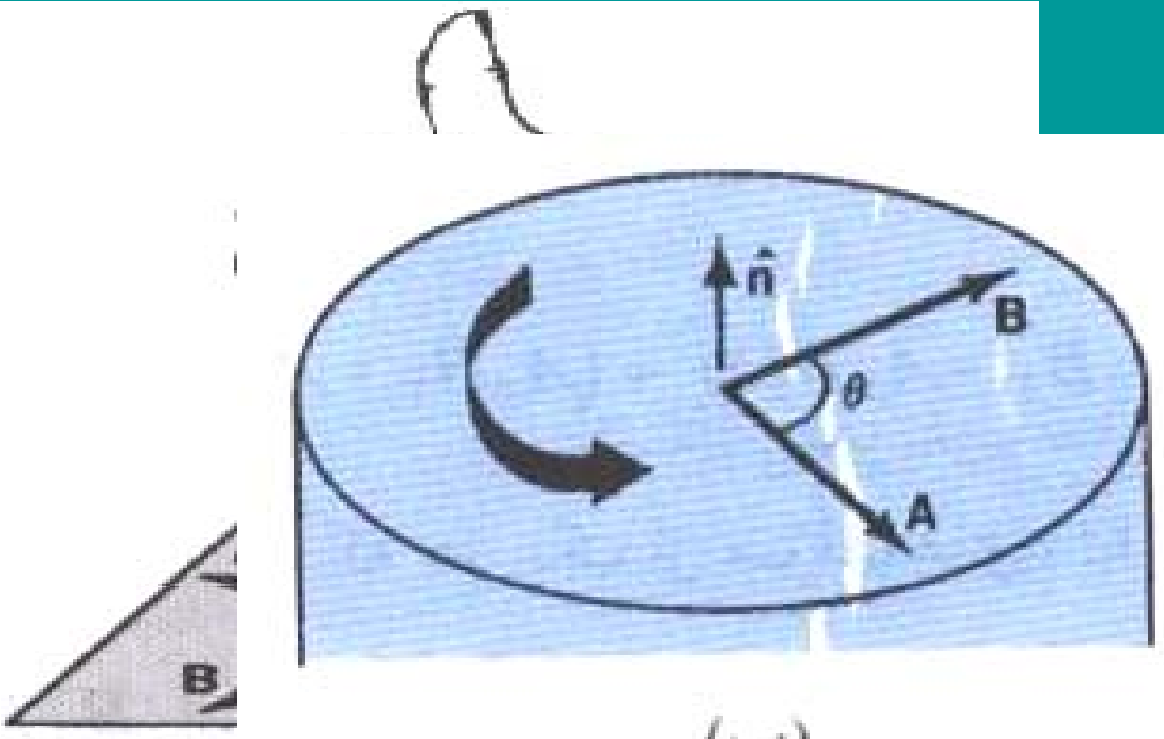
$$\left\{\begin{array}{c}\vec{A}=2\hat{i}+{}_{?}\hat{j}+2\hat{k}\\ \vec{B}=+4\hat{i}-3\hat{j}\end{array}\right\}$$

مثال : تعیین زاویه میان دو بردار

$$\cos\theta=\frac{\vec{A},\vec{b}}{AB}=\frac{A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z}{\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}\quad\sqrt{B_x^2+B_y^2+B_z^2}}$$

$$=\frac{2\times4-1\times3+\mathrm{o}}{3\times5}=\frac{1}{3}$$

ضرب برداري



(ب)

(الف) تـ (ب) با استفاده از قاعدهٔ درِ بطری.

بـــرداری $\vec{A}$ و $\vec{B}$ بـــا

راست

$$\vec{A} \times \vec{B} = AB \sin\theta \hat{n}$$

$$\vec{B} \times \vec{A} = -\vec{A} \times \vec{B}$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$$

ضرب برداري برحسب مولفه‌ها

$$\hat{i}\times\hat{i}=0 \qquad \hat{j}\times\hat{j}=0 \qquad \hat{k}\times\hat{k}=0$$

$$\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k} \qquad \hat{j}\times\hat{i}=-\hat{k} \qquad \hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}$$

$$\hat{i}\times\hat{k}=-\hat{j} \qquad \hat{j}\times\hat{k}=\hat{i} \qquad \hat{k}\times\hat{j}=-\hat{i}$$

$$\vec{C} = \left(A_x \hat{i} + A_y \hat{i} + A_z \hat{k}\right) \times \left(B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}\right)$$

$$= \left(A_x B_y \hat{k} - A_x B_z \hat{j}\right) + \left(A_y B_x \hat{k} + A_y B_z i\right) + \left(A_z B_z \hat{j} - A_z B_y \hat{i}\right)$$

$$\vec{C} = C_x \hat{i} + C_y \hat{j} + C_z \hat{k}$$

$$= \left(A_y B_z - A_z B_y\right)\hat{i} + \left(A_z B_x - A_x B_z\right)\hat{j}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B & & B_{z\,x} \end{vmatrix}$$

مسائل فصل دوم

$$\left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right)$$

۱. بردار یکه هم جهت با را تعیین کنید .

۲. دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ (با اندازه هاي غير صفر) بايد چه وضعيتي داشته باشند تا $\vec{A}.\vec{B}$ برابر با هر يك از كميتهاي زير باشد:

(الف) AB (ب) $-AB$ (ج) صفر (د) $\frac{AB}{۲}$ ؛

(هـ) $\frac{AB}{۲}$ پاسخ هاي خودتان رابا نمودار برداري نشان بدهيد .

۳. دو بردار $\vec{C} = 4\vec{i} + \vec{j}3\vec{k}(m)$ و $\vec{D} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}(m)$

را در نظر بگیرید .

(الف) $\vec{S} = \vec{C} - \vec{D}$ ، S (ب) ، و $\hat{S}$ (ج) را تعیین کنید.

۴. دو بردار $\vec{A} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ و $\vec{B} = -4\vec{i} + \vec{j} - 5\vec{k}$

را در نظر بگیرید . بردار $\vec{C}$ را چنان تعیین کنید که $\vec{A} - ۲\vec{B} + \frac{۱}{۳}\vec{C}$

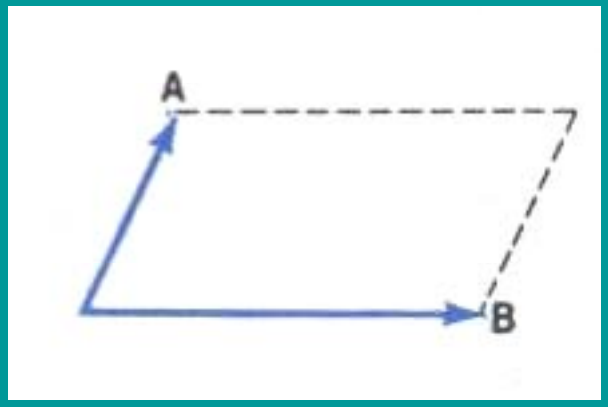
باشد.

۵. اگر زاویه میان بردار $\vec{A}$ و هریك از محورهاي x و y و z به ترتیب a و β و y باشد ، نشان بدهید که این زاویه ها از روابط زیر بدست مي آیند:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{A}.\vec{i}}{A}, \quad \cos\beta = \frac{\vec{A}.\vec{i}}{A}, \quad \cos y = \frac{\vec{A}.\vec{k}}{A}$$

اگر $\vec{A} = ۳\vec{i} + ۲\vec{j} + \vec{k}$ باشد ، اندازه هریك از این زوایا جقدر است ؟

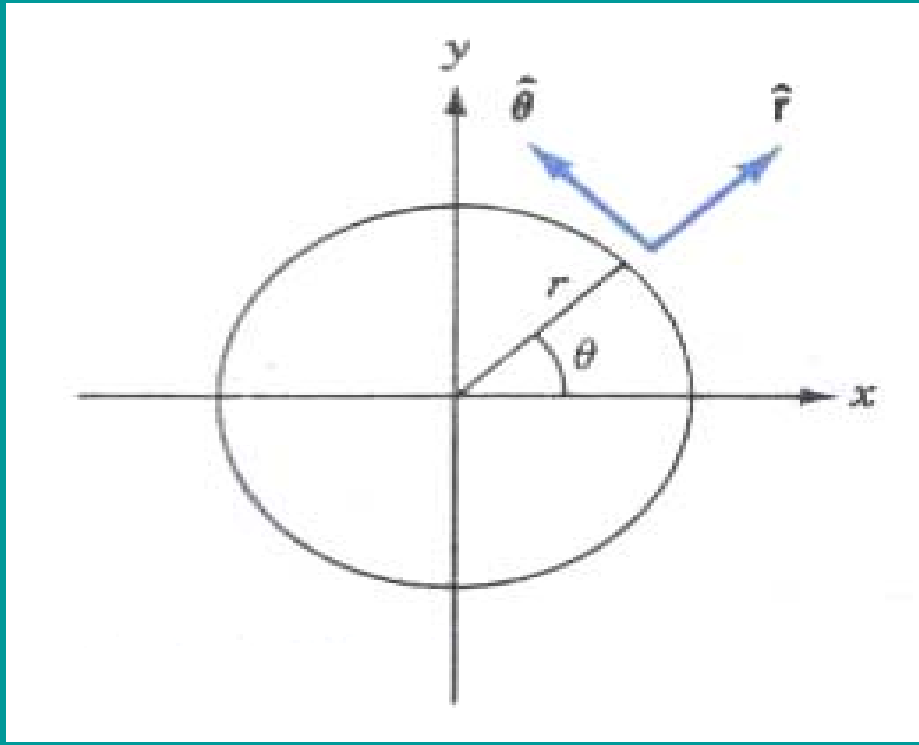
۶. نشان بدهید که مساحت متوازي الاضلاعي به اضلاع $\vec{A}$ و $\vec{B}$ (شکل زیر) برابر است با $\left|\vec{A}.\vec{B}\right|$



۷. در شکل زیر ، بردارهاي يكه دستگاه مختصات قطبي را با (درجهت r شعاع) و θ در جهت عمود بر شعاع) مشخص كرده ايم. نشان بدهيد كه

اين بردارها طبق روابط زير با بردارهاي يكه دكارتي مربوط مي شوند:

$$\hat{r} = \cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}\ ,\ \hat{\theta} = -\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}$$

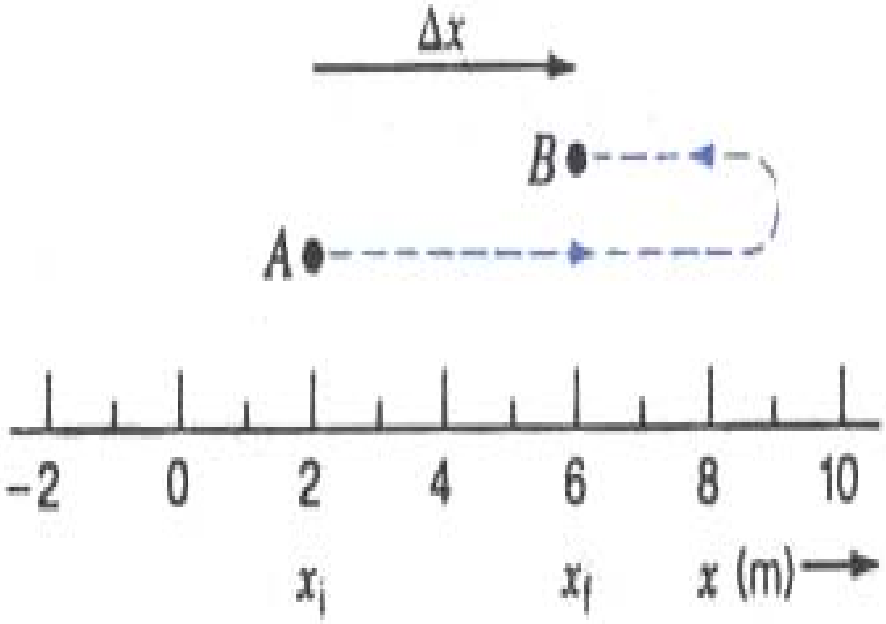


فصل سوم: حركت يك بعدي

مطالب اين فصل

- سينماتيك ذره
- جابه‌جايي و سرعت
- سرعت لحظه‌اي
- شتاب
- استفاده از مساحت‌ها
- معادلات حركت با شتاب ثابت
- سقوط آزاد در راستاي قائم
- سرعت حد

جابه‌جايي



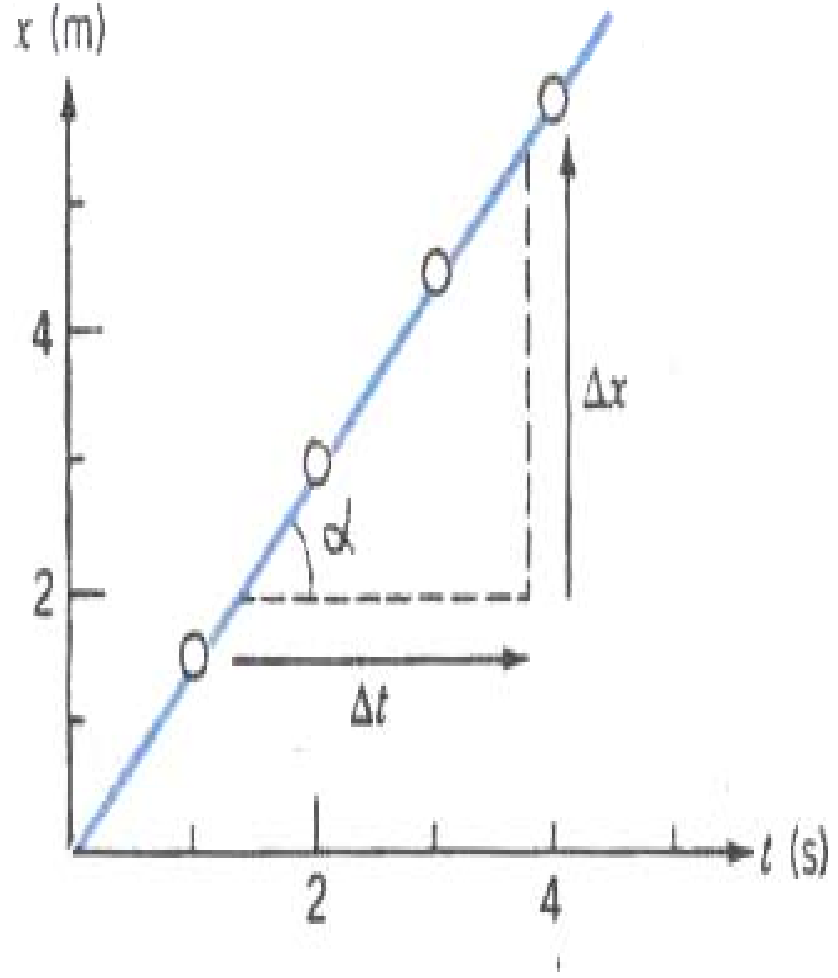
ذره برهر طریقی که از A به B برود، جابجایی‌اش برابر با $\Delta x = x_f - x_i$ است.

سرعت (آهنگ تغییر مسافت)

تندي متوسط = مسافت طي شده / زمان سپري شده

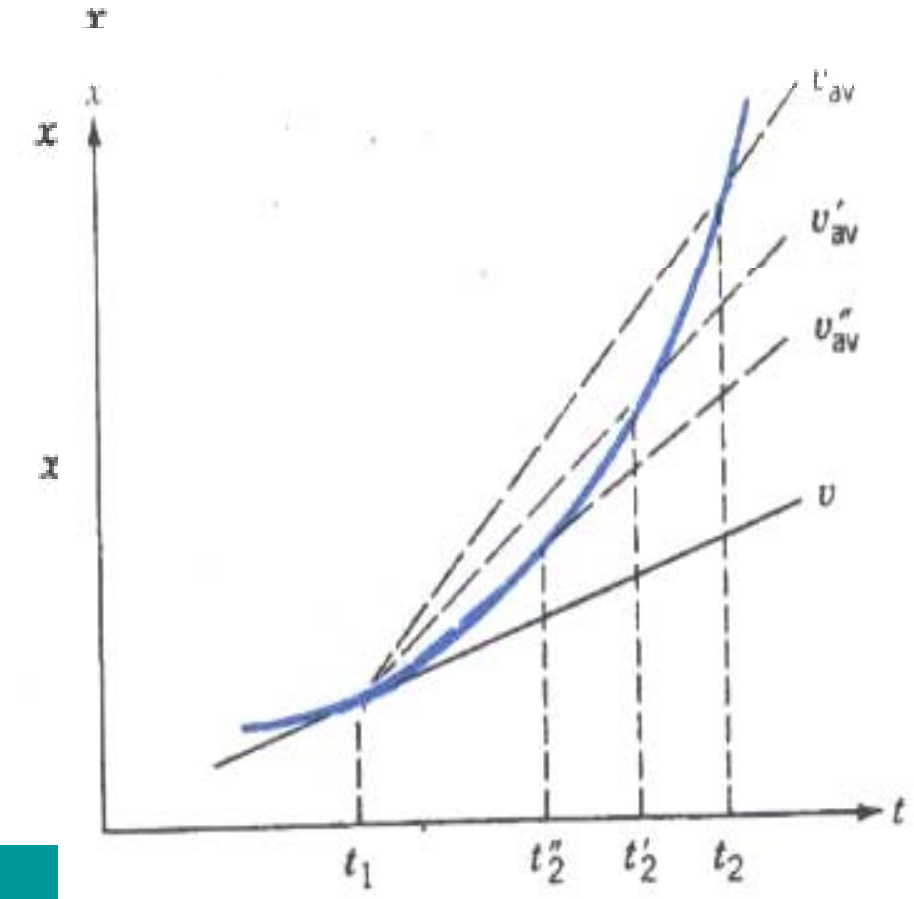
سرعت متوسط = جابه جايي / زمان سپري شده

$$\text{سرعت متوسط} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$



نمودار مکان ـ زمان برای ذره‌ای که با سرعت ثابت حرکت می‌کند خط راستی است که شیب یا ضریب زاویه‌اش برابر با مقدار سرعت است.

سرعت لحظه‌اي



سرعت لحظه‌ای در لحظهٔ t_1 برابر با ضریب زاویهٔ مماس برمنحنی در همین لحظه است.

شتاب (آهنگ تغییر سرعت)

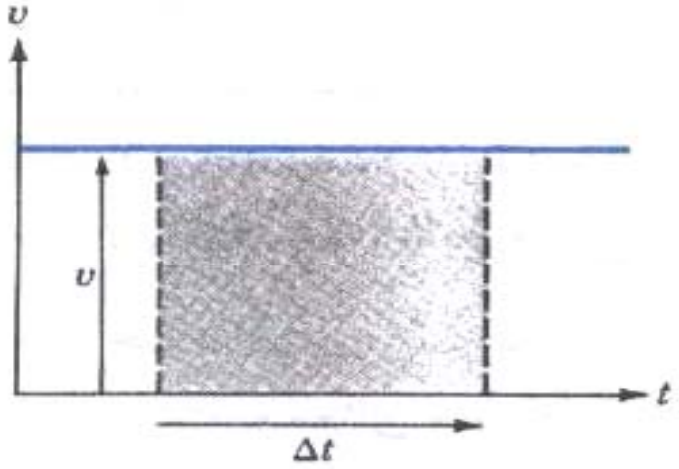
شتاب متوسط

$$\text{شتاب متوسط} = \frac{\text{تغییر سرعت}}{\text{مدت زمان}}$$

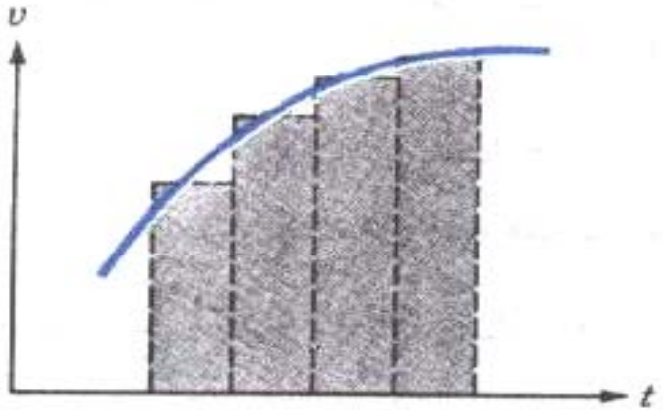
شتاب لحظه‌اي

$$a = \lim_{t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

استفاده از مساحت‌ها



(الف)



(ب)

(الف) در حرکت با سرعت ثابت، جابجایی در زمان Δt برابر با $v\Delta t$ است. این حاصل‌ضرب در واقع مساحت زیر منحنی سرعت ــ زمان در مدت Δt است. (ب) وقتی سرعت ثابت نباشد مساحت واقعی را می‌شود به تقریب برابر با جمع مساحتهای تعدادی مستطیل در نظر گرفت.

معادلات حرکت با شتاب ثابت

$$a = \frac{d\,v}{d\,t} \Rightarrow d\,v = a\,d\,t$$

$$\int_{v_o}^{v} d\,v = a\int_{o}^{t} d\,t$$

$$V = V_o + a\,t$$

به همین ترتیب :

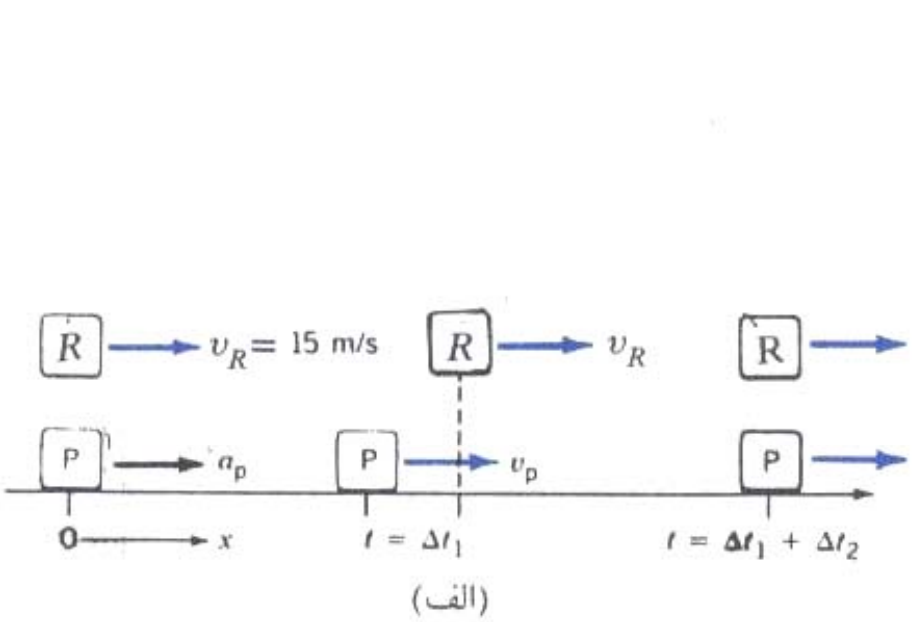
$$x = x_o + v_o t + \frac{1}{2} a t^2$$

با حذف **t** از معادلات بالا:

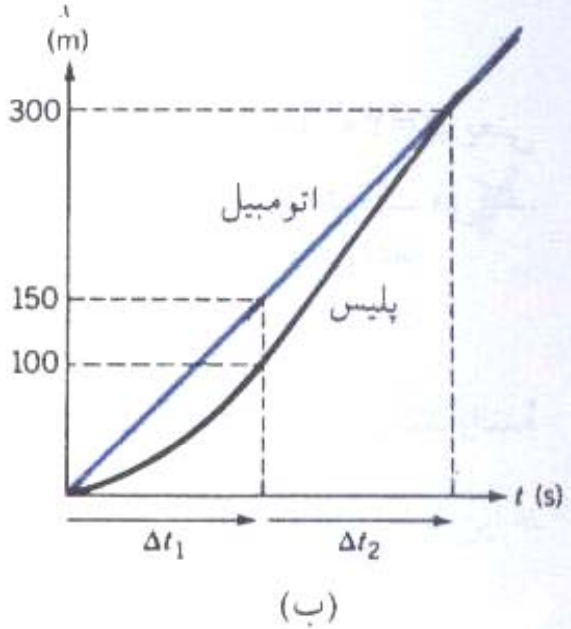
$$V^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

تمرين

اتومبيلي با سرعت ثابت $15\ m/s$ در حركت است و بي آنكه سرعتش را كم كند از محدوده مدرسه‌اي عبور مي‌كند . پليس موتور سواري كه كنار خيابان متوقف است درست در لحظه‌اي كه اتومبيل از جلوي او رد مي شود.شروع به تعقيب آن مي‌كند ؛ ابتدا با شتاب $2\ m/s^2$ سرعت موتور سيكلت را به $20\ m/s$ مي رساند و بعد با همين سرعت ثابت به تعقيب ادامه مي دهد. اگر راننده متخلف سرعتش را اصلا كم يا زياد نكند پس از طي چه مسافتي و در



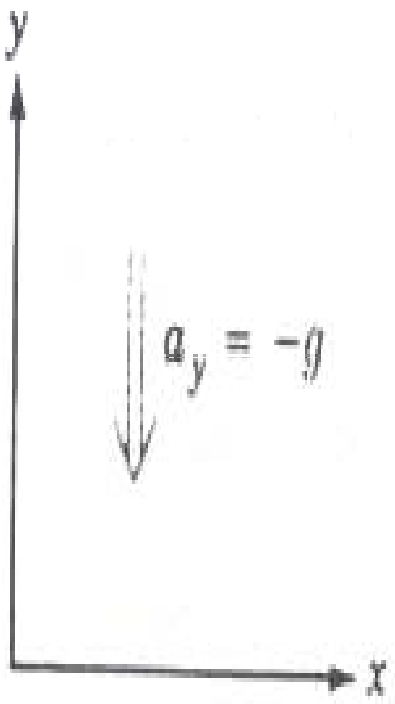
(الف)



(ب)

(الف) طرحی از وضعیتهای اتومبیل و موتورسیکلت در مراحل تعقیب شتابدار و بی‌شتاب.
(ب) حل نموداری. خط راست مربوط به حرکت اتومبیل و منحنی سهموی مربوط به حرکت موتورسیکلت است.

سقوط آزاد در راستاي قائم



اگر محور y را به طرف بالا بگیریم $a_y = -g$ است. (توجه کنید که انتخاب محل مبدأ و جهت محور y کاملاً اختیاری است.)

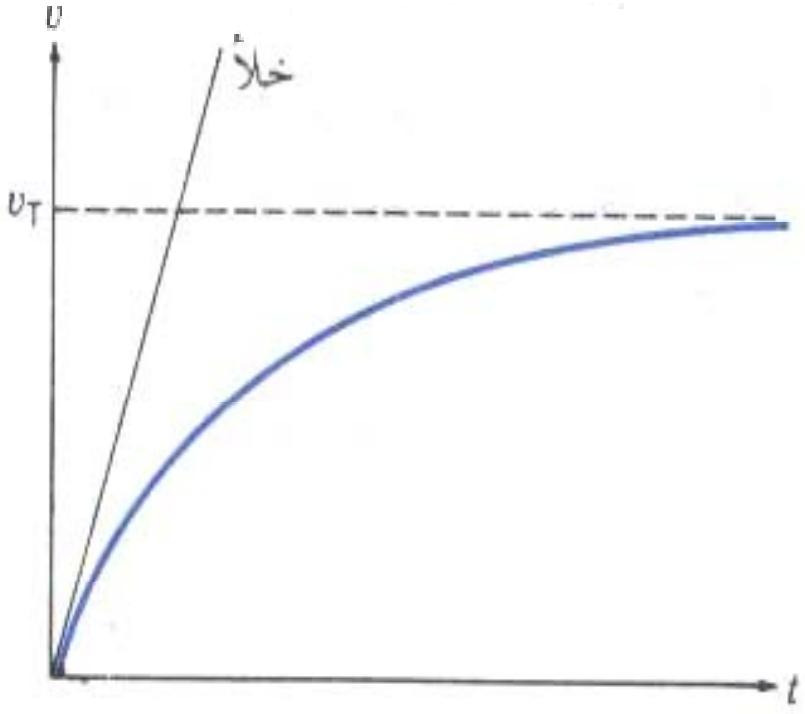
$$v = v_o - gt$$

$$y = y_o + \frac{1}{2}(v_o + v)t$$

$$y = y_o + v_o t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$v^2 = v_o^2 - 2g(y - y_o)$$

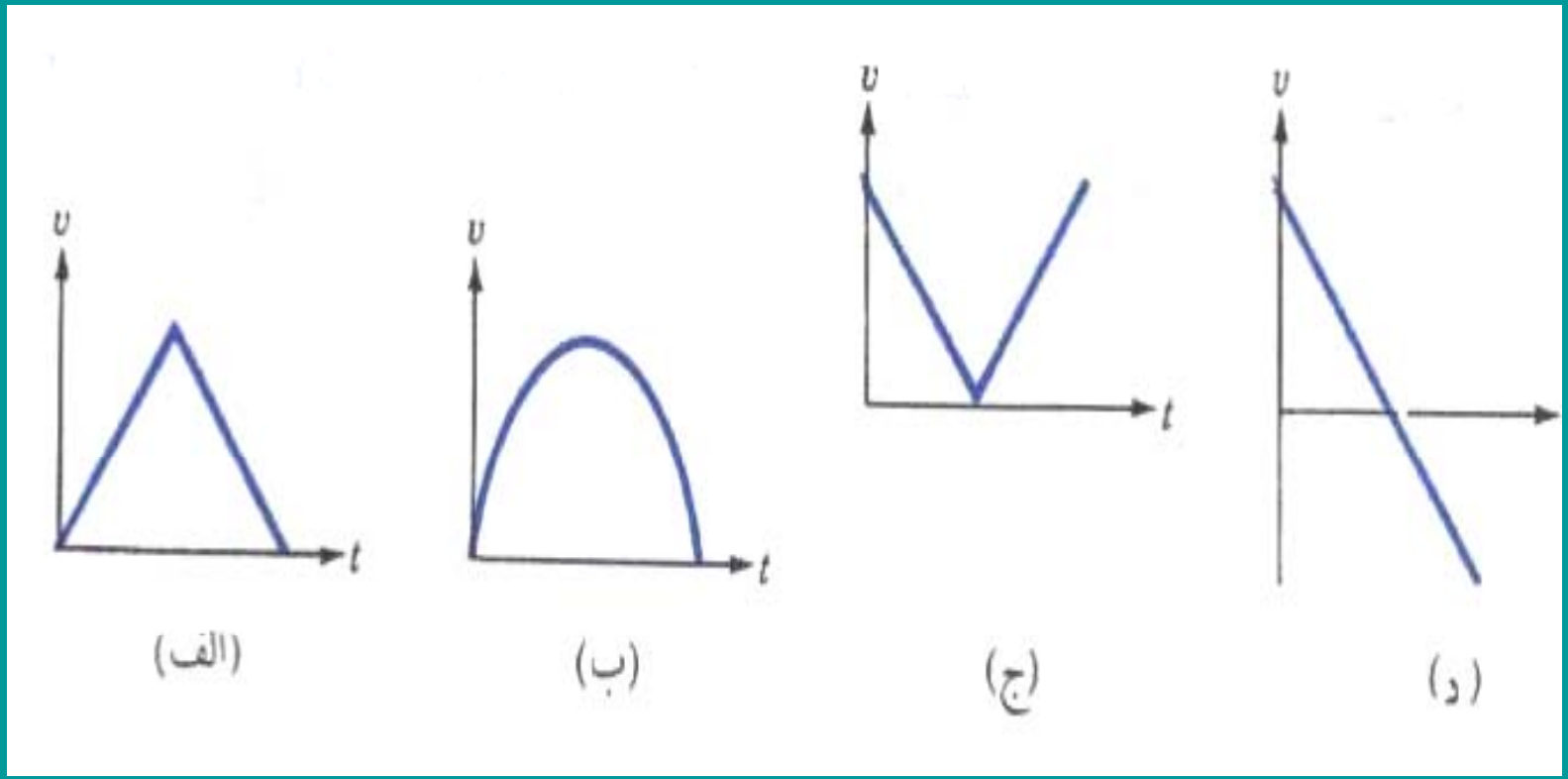
سرعت حد



در حضور مقاومت هوا، سرعت جسمی که در حال سقوط است به یک مقدار حدّی می‌رسد.

مسائل فصل سوم

۱. در غياب مقاومت هوا ، گلوله اي در راستاي قائم به بالا پرتاب مي شود و پس از رسيدن به نقطه اوج به زمين برمي‌گردد. كدام يك از نمودارهاي شكل زير سرعت اين حركت را بر حسب زمان بخوبي توصيف مي كند ؟



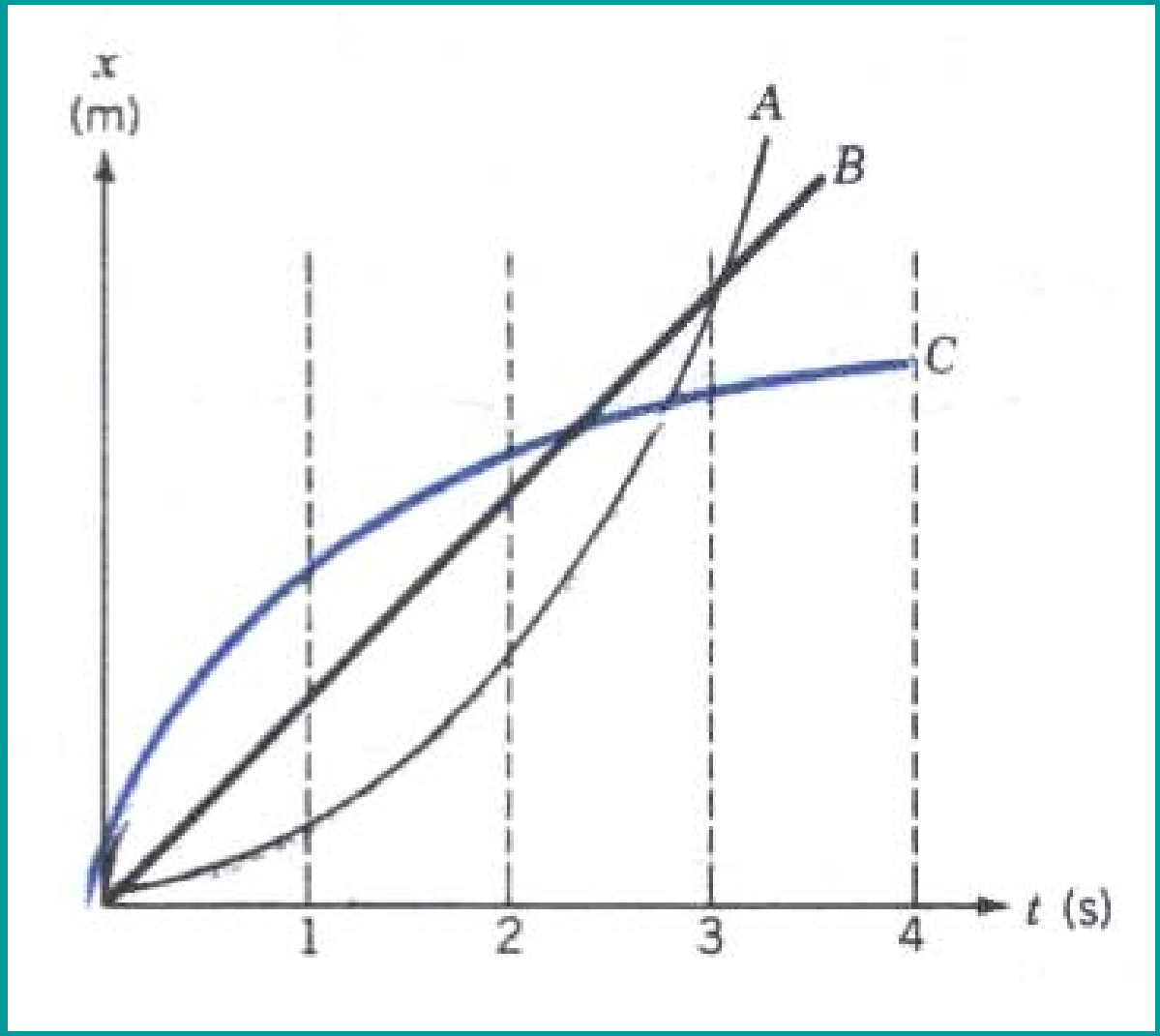
۲. شكل زير منحني حركت سه جسم را برحسب زمان نشان مي‌دهد (الف)

در لحظه $t = 1s$ سرعت كدامي يك بيشتر است ؟ (ب) تا آخر ثانيه دوم

كداميك مسافت بيشتري را طي كرده است ؟ (ج) وقتي A به C مي رسد ،

آيا سرعت B لبشتر از سرعت A است يا كمتر از ان ؟ (د) آيا در هيچ

زماني سرعت A برابر با سرعت B مي شود ؟ اگر مي شود در چه زماني ؟



۳. مکان ذره اي برحسب زمان با معادله $x = 4 - 5t + 3t^2$ بيان مي شود ، كه x برحسب m و t برحسب ثانيه است. (الف) سرعت لحظه‌اي و شتاب لحظه‌اي در $t=3s$ چقدر است ؟ (ب) در چه زماني اين ذره ساكن است ؟

۴. قطاري به طول ۴۴m در ايستگاه متوقف است و جلوي آن ۱۰۰m با چراغ راهنماي ايستگاه فاصله دارد. اگر اين قطار به حركت در بيايد و با آهنگ ثابت $0.5\ m/s^2$ شتاب بگيرد ، (الف) چقدر طول مي كشد تا به تمامي از جلو چراغ عبور كند ؟ (ب) سرو ته قطار هر يك با چه سرعتي از جلوي چراغ مي گذرند ؟

۵. يك موشك بازيچه‌اي با سرعت ثابت ۲۰ m/s در حال صعود است.

وقتي اين موشك به ارتفاع ۲۴m از سطح زمين رسيده است ، اتصال يك

از پيچهايش (كه قبلاً شل بوده) بكلي با آن قطع مي‌شود. (الف) اين

پيچ حداكثر تا چه ارتفاعي از زمين اوج مي‌گيرد؟ و (ب) با چه سرعتي به

زمين مي‌خورد؟

۶. قطار A به طول ۱ km با سرعت ثابت ۵۰ m/s در حرکت است . قطار B به طول ۰٫۵km که روي ريلها مجاور توقف کرده است ، به محض آنکه ته قطار A از سر آن عبور کرد شروع به حرکت مي‌کند و با شتاب $۳ m/s^2$ سرعتش را زياد مي‌کند . سرعت B حداکثر مي تواند به $۶۰ m/s$ برسد.

(الف)چقدر طول مي کشد تا قطار B از قطار A جلو بزند. (يعني انتهاي B از ابتداي A بگذرد) ؟ (ب) در اين مدت A چه مسافتي را طي کرده است ؟

فصل چهارم: لختي و حركت دوبعدي

مطالب اين فصل:

- قانون اول نيوتون
- حركت دوبعدي
- حركت پرتابه‌ها
- حركت دايره‌اي يكنواخت
- چارچوب‌هاي مرجع لخت
- سرعت نسبي
- تبديل گاليله‌اي
- حركت دايره‌اي غيريكنواخت

قانون اول نيوتون

- تعريف لختي
- بيان قانون اول
- منظور از " هيچ نيرو "

جسمي كه هيچ **نيروي خالصي** به آن وارد نشود يا ساكن مي‌ماند
يا با **سرعت** ثابت حركت مي‌كند. (در هر صورت شتابش صفر است)

حرکت با شتاب ثابت در دو یا سه بعد

$$\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{a}t$$

$$\vec{r} = \vec{r}_o + \frac{1}{2}(\vec{v}_o + \vec{v})t$$

$$\vec{r} = \vec{r}_o + \frac{1}{2}(\vec{v}_o + \vec{v})t$$

$$v^2 - v_o^2 = 2\vec{a}.(\vec{r} - \vec{r}_o)$$

در مورد حرکت دوبعدي ، معادلات برداري

بالا معادل با ۸ معادله جبري‌اند:

$$v_x = v_{\mathrm{o}}\, x + a_{xt}$$

$$v_y = v_{\mathrm{o}y} + a_{yt}$$

$$x = x_{\mathrm{o}} + \frac{1}{2}(v_{\mathrm{o}x} + v_x)t$$

$$y = y_{\mathrm{o}} + \frac{1}{2}(v_{\mathrm{o}y} + v_y)t$$

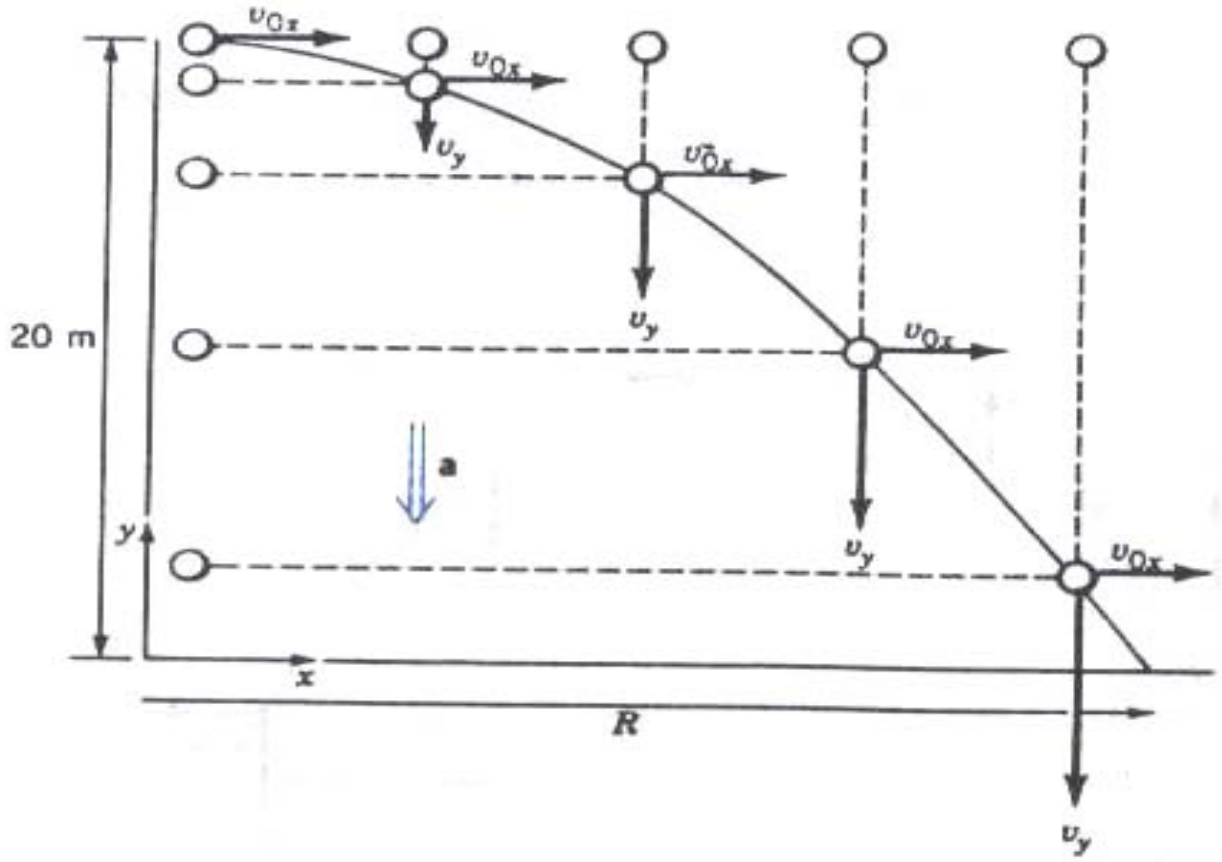
$$x = x_o + v_{ox} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$y = y_o + v_{oy} t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

$$v_x^2 = v_{ox}^2 + 2 a_x (x - x_o)$$

$$v_y^2 = v_{oy}^2 + 2 a_y (y - y_o)$$

حرکت پرتابه



حرکت افقی پرتابه با سرعت ثابت، و حرکت قائم آن (به شرط ناچیز بودن مقاومت هوا) با شتاب ثابت صورت می‌گیرد.

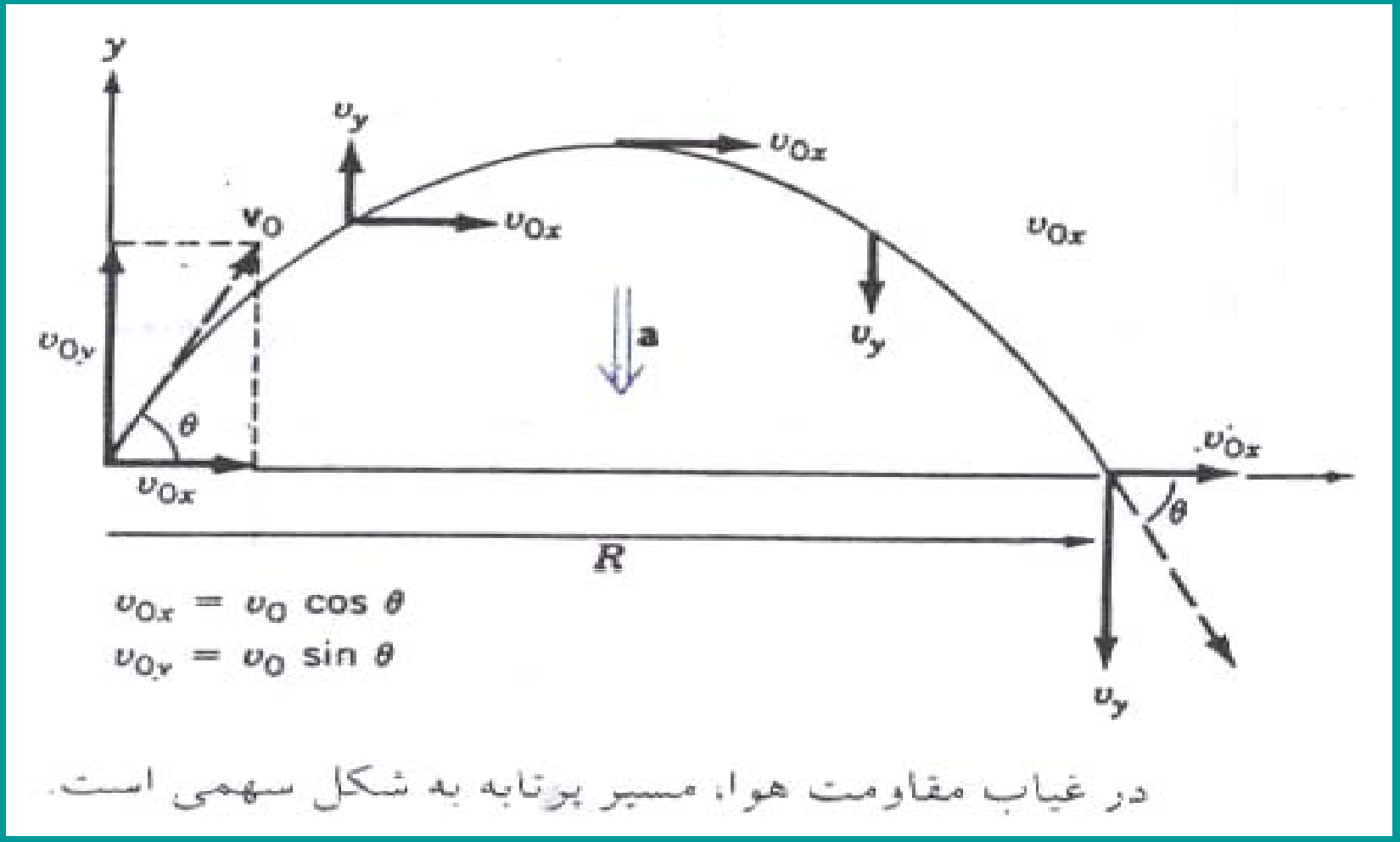
حرکت در راستاي افقي

$$\begin{cases} v_x = v_{ox} \\ x = v_{ox} t \end{cases}$$

حرکت در راستاي قائم

$$\begin{cases} u_y = v_{oy} - g\,t \\ y = y_o + v_{oy}\,t - \frac{1}{2} g\,t^2 \\ v_y^2 = v_{oy}^2 - 2\,g\,(y - y_o) \end{cases}$$

محاسبه برد پرتابه



در غیاب مقاومت هوا، مسیر پرتابه به شکل سهمی است.

$$x = (v_o \cos\theta)t$$

$$y = (v_o \sin\theta)t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$t_{(\text{پرواز})} = T = \frac{2 v_o \sin\theta}{g}$$

$$R = \frac{(v_o \cos\theta)(2 v_o \sin\theta)}{g} = \frac{v_o^2 \sin 2\theta}{g}$$

معادله مسیر پرتابه

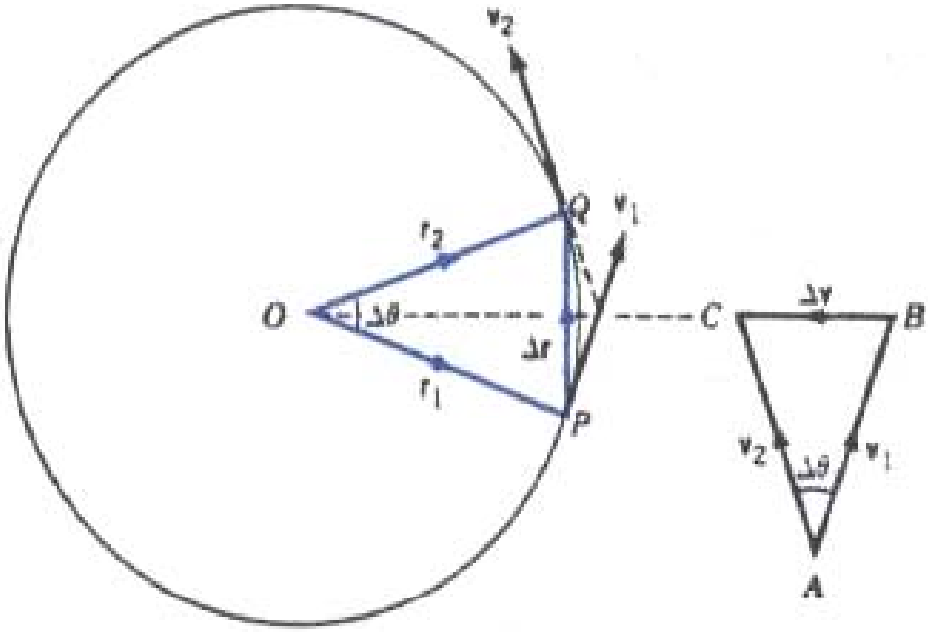
$$x = (v_o \cos\theta)t$$

$$y = (v_o \sin\theta)t - \frac{1}{2} g t^2$$

با حذف **t** از معادلات بالا:

$$y = (\tan\theta)x - \frac{g}{2(v_o \cos\theta)^2} x^2$$

حرکت دایره‌اي يکنواخت



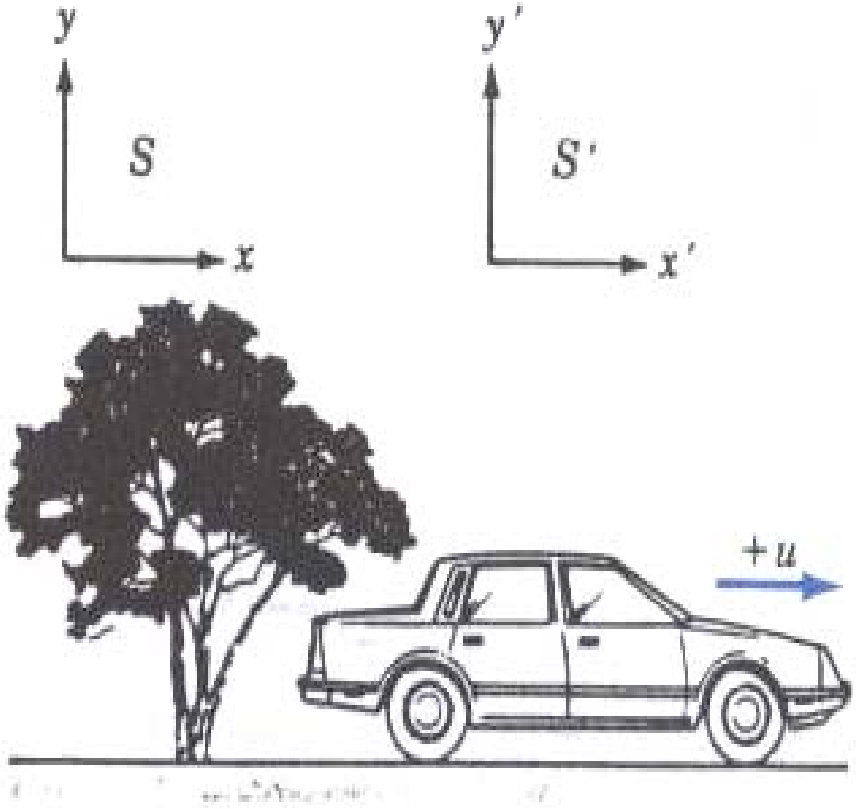
حرکت دایره‌ای یکنواخت. دو مثلثی که از بردارهای مکان ($\vec{r}$) و بردارهای سرعت($\vec{v}$) ساخته می‌شوند متشابه‌اند.

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta v}{v} \Rightarrow \Delta v = \frac{v}{r}\Delta r$$

$$a = \lim_{\Delta t \to o} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v^2 / r$$

$$a_r = \frac{v^{۲}}{r}$$

چارچوب‌هاي مرجع لُخت



جاده و اتومبیل را می‌شود به عنوان
دو چارچوب مرجع، S و S′، در نظر گرفت.

چارچوب مرجعي که در ان قانون اول نيوتون

صادق باشد ، مثل همين S يا S′ ، **چارچوب**

مرجع لخت ناميده مي‌شود. چنين چارچوبي

در واقع با استفاده از قانون اول تعريف مي‌شود:

در چارچوب مرجع لخت ، جسمي که تحت اثر

هيچ نيروي برايندي نباشد يا ساکن مي‌ماند يا

با سرعت ثابت حرکت مي‌کند.

هر چارچوبي كه نسبت به يك

چارچوب لخت با سرعت ثابت در حركت باشد ،

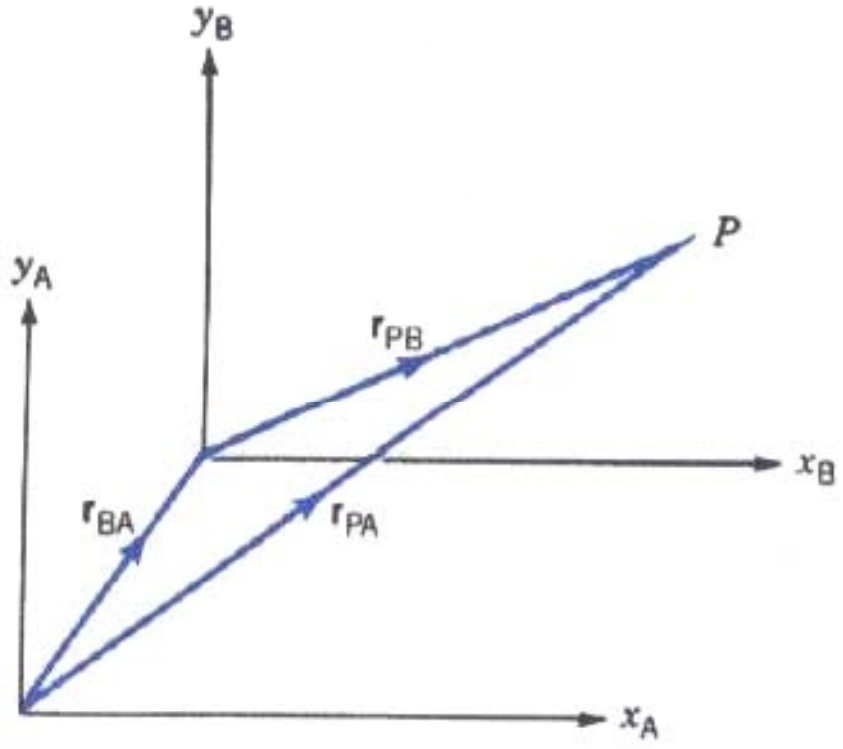
خودش هم يك چارچوب لخت است. اگر

شتاب ذره اي در يك چارچوب لخت صفر

باشد ، در تمام چارچوب‌هاي لخت ديگر هم

صفر است.

سرعت نسبي



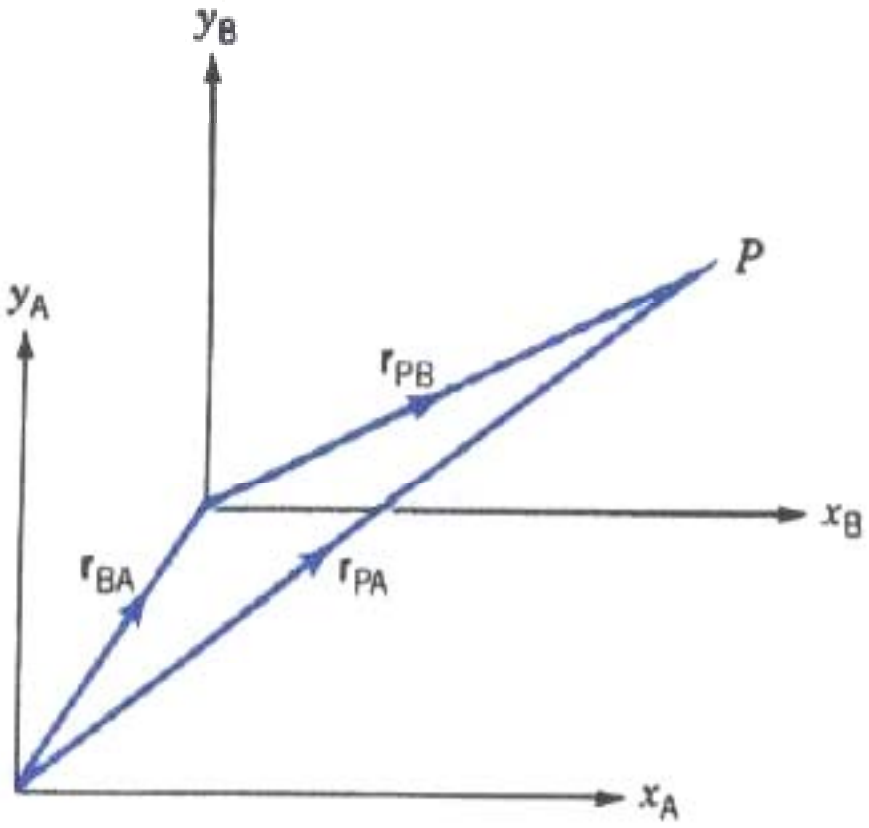
بردارهای مکان ذرهٔ P در دو چارچوب A و B با رابطهٔ $\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{PB} + \vec{r}_{BA}$ به هم مربوط‌اند که در آن $\vec{r}_{BA}$ بردار مکان B نسبت به A است.

$$\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{PB} + \vec{r}_{BA}$$

$$\vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PB} + \vec{v}_{BA}$$

$$\vec{v}_{AB} = -\vec{v}_{BA}$$

تبدیل گالیله‌اي



بـردارهـای مکـان ذرهٔ P در دو چارچوب A و B با رابطهٔ $\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{PB} + \vec{r}_{BA}$ به هم مربوط‌اند که در آن $\vec{r}_{BA}$ بردار مکـان B نسبت به Aاست.

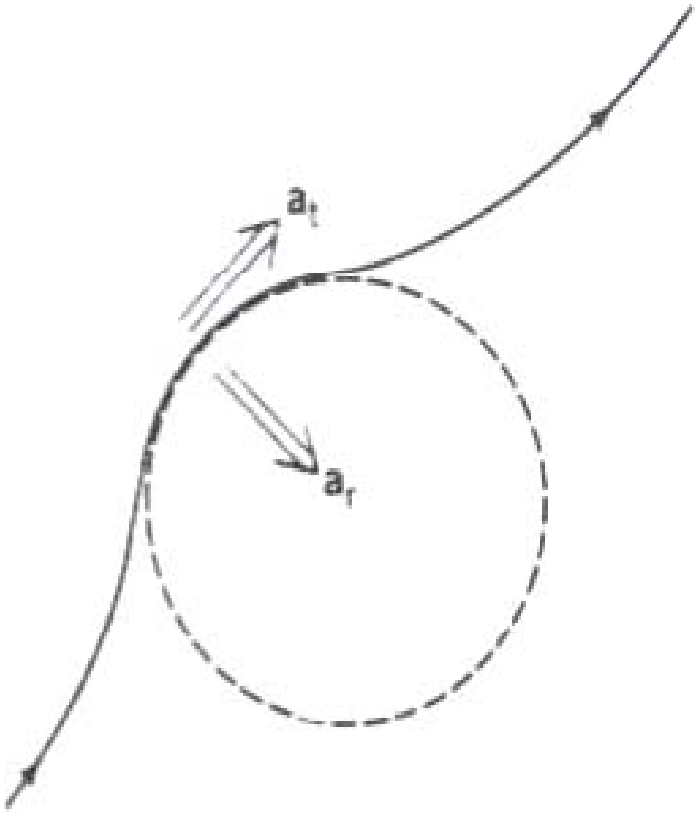
$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{u}t$$

$$x' = x - ut \qquad y' = y \;\; z' = z \;\; t' = t$$

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}$$

$$\vec{a} = \vec{a}'$$

حرکت دایره‌اي غیر یکنواخت



وقتی ذره‌ای در یک مسیر منحنی
با سرعت غیرثابت حرکت می‌کند، شتاب آن
شامل مؤلفهٔ شعاعی و مؤلفهٔ مماسی است.

$$a_r = \frac{v^2}{r}$$

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_t$$

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_t^2}$$

مسائل فصل چهارم

$$\vec{r} = (3t^2 - 2t)\vec{i} - t^3\vec{j}$$

۱. مکان ذره اي برحسب زمان به صورت

بيان مي شود (r برحسب متر و t برحسب ثانيه است) . (الف) سرعت

ذره را در $t=2s$ ، (ب) شتاب ذره را در $t=4s$ و (ج) شتاب متوسط ذره را

بين لحظات $t = 1s$ و $t = 3s$ پيدا کنيد.

۲. هواپيمايي تحت زاويه ۳۷° زير افق به طرف زمين شيرجه مي‌رود و وقتي ارتفاع ان از سطح زمين به m ۲۰۰ مي‌رسد بسته‌اي را رها مي‌كند . اگر اين بسته s ۴ در هوا باشد ، (الف) سرعت هواپيما و (ب) برد افقي بسته را پيدا كنيد .

۳. آب با سرعت m/s ۱۸ از دهانه يك لوله آتش نشاني خارج مي‌شود. ماموري كه روي نردباني به فاصله افقي m ۳۰ از ساختمان محل حريق ايستاده است بايد لوله را تحت چه زوايايي نسبت به افق بگيرد تا آب به پنجره‌اي كه در همان ارتفاع سر لوله واقع شده است برسد؟

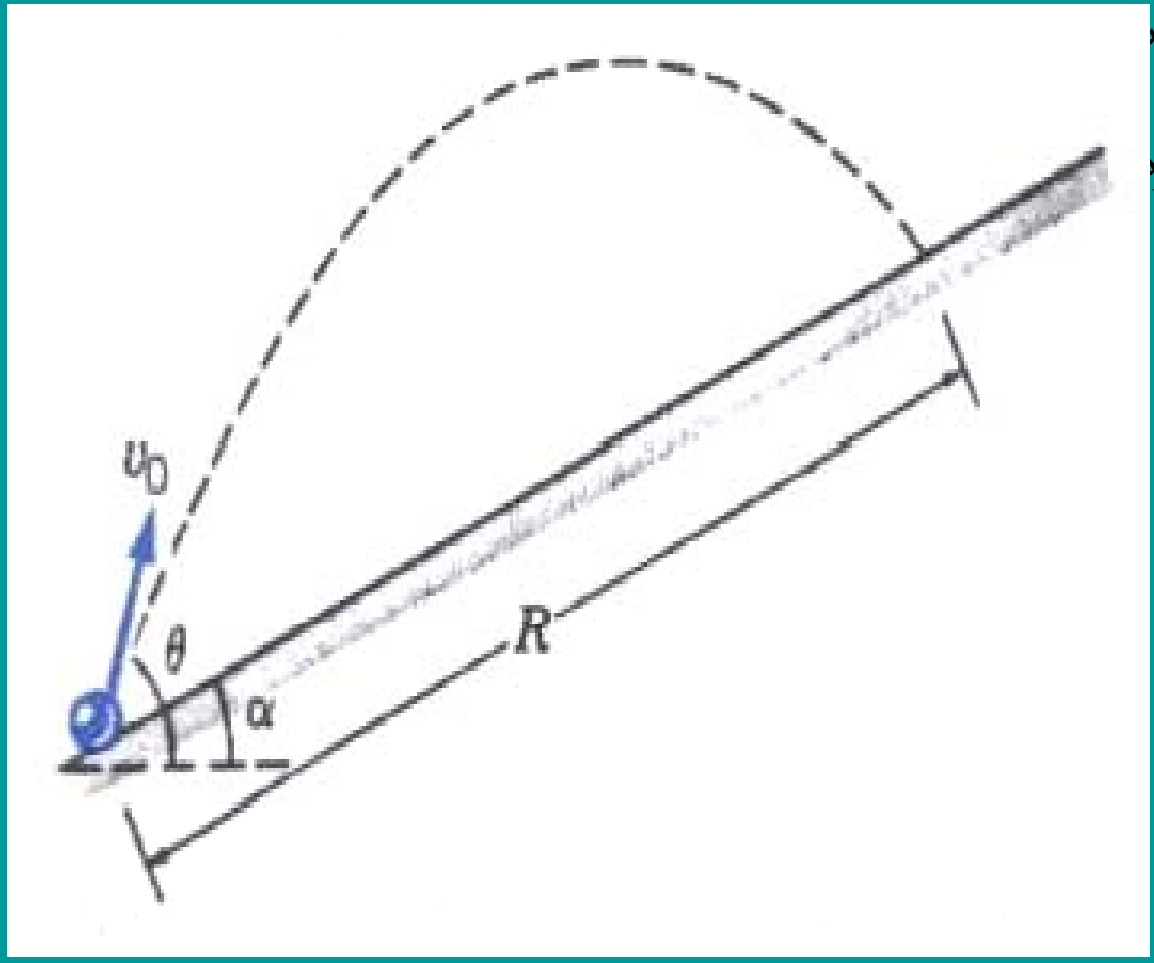
۴. فرض کنید سرعت چرخش زمین به دور خودش انقدر زیاد شود که شتاب نقطه اي واقع بر استواي ان به مقدار g برسد. در این صورت مدت یك «روز » چقدر خواهد شد ؟

۵. باران با سرعت ثابت $۱۰ m/s$ در جهت قائم مي بارد. اتوبوسي با سرعت $۲۰ m/s$ در حرکت است. قطره‌هاي باران با چه سرعتي و با چه زاویه اي (نسبت به افق) به شیشه جلوي اتوبوس برخورد مي‌کنند ؟

۶. پرتابه‌اي يا سرعت اوليه V_0 و تحت زاويه θ نسبت به افق ، روي سطح

شيبداري به زاويه

نشان بدهيد كه بر



۷. صحت این گفته گالیله را که « برد افقي پرتابه به ازاي زواياي پرتاب

يكي است » اثبات كنيد .

و

$$\theta_1 = 45 - \alpha \qquad \theta_2 = 45 + \alpha$$

فصل پنجم: ديناميك ذره

هدف كلي

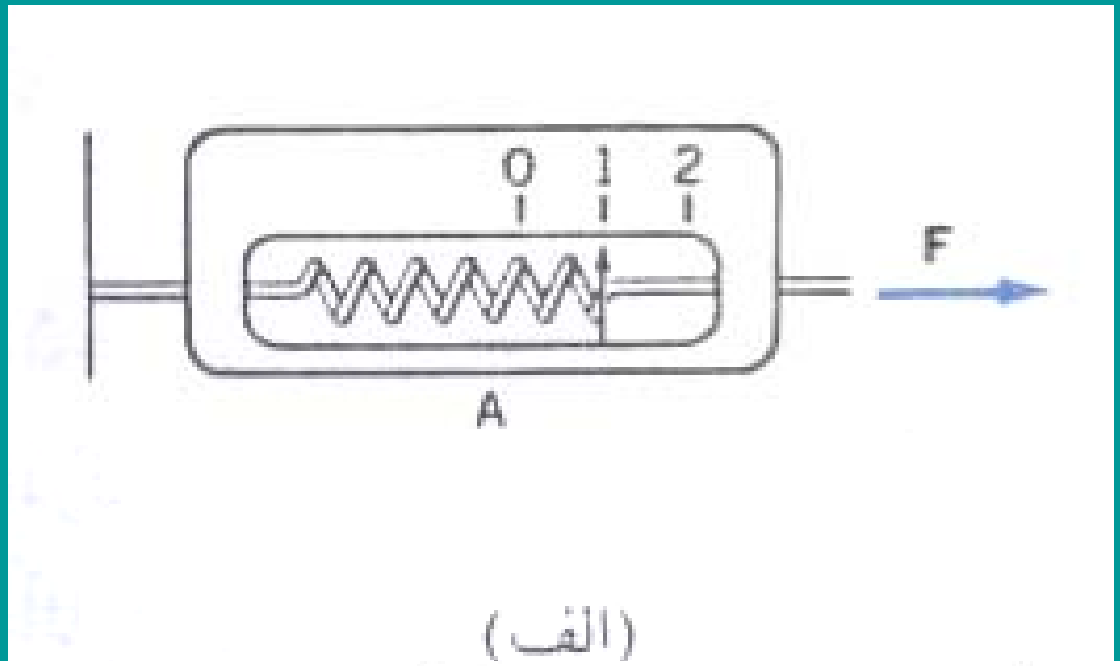
- توصيف رابطه نيرو با حركت (شتاب)

مطالب اين فصل:

- نيرو و جرم
- قانون دوم نيوتون
- وزن
- قانون سوم نيوتون
- كاربردهاي قوانين نيوتون
- وزن ظاهري

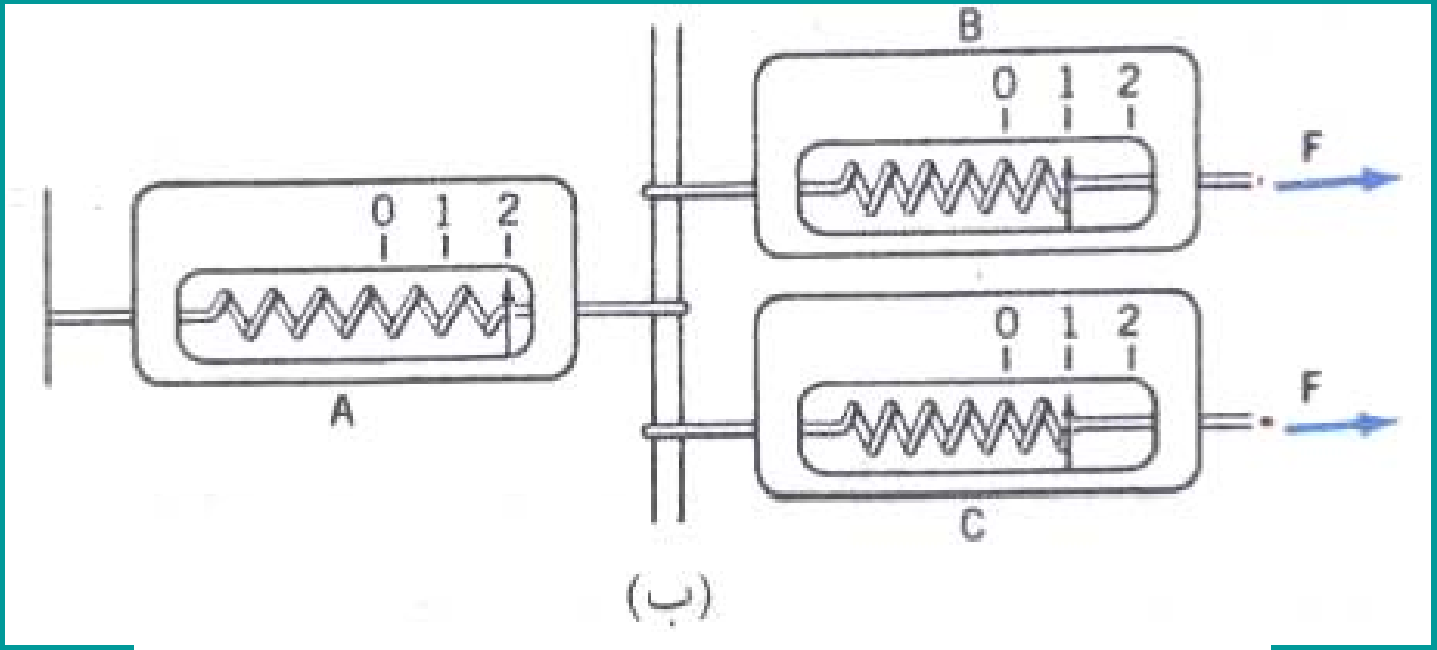
نیرو

نیرو عامل تغییر شکل یا تغییر حرکت (سرعت) جسم است.



(الف)

(الف) نیرو را می‌شود برحسب انبساط یک فنر «استاندارد» تعریف کرد



(ب) روشي براي درجه‌بندي فنر استاندارد.

نيرو ماهيتا بردار است چون از جمع برداري تبعيت مي‌كند.

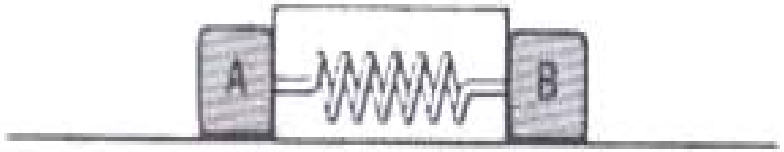
يكاي نيرو در SI Kg.m/s2 است (از قانون دوم) كه نيوتون (N) ناميده مي‌شود.

جرم

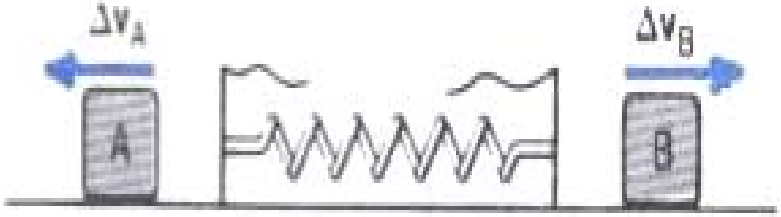
جرم يك جسم ، معياري از لختي يا مقاومت آن در برابر تغيير سرعت است.

جرم كميتي اسكالر و خاصيت ذاتي جسم است ، و به مكان جسم بستگي ندارد.

يكاي جرم در SI كيلوگرم است.



(الف)



(ب)

آزمایشی برای مقایسهٔ جرمهای دو

جسم

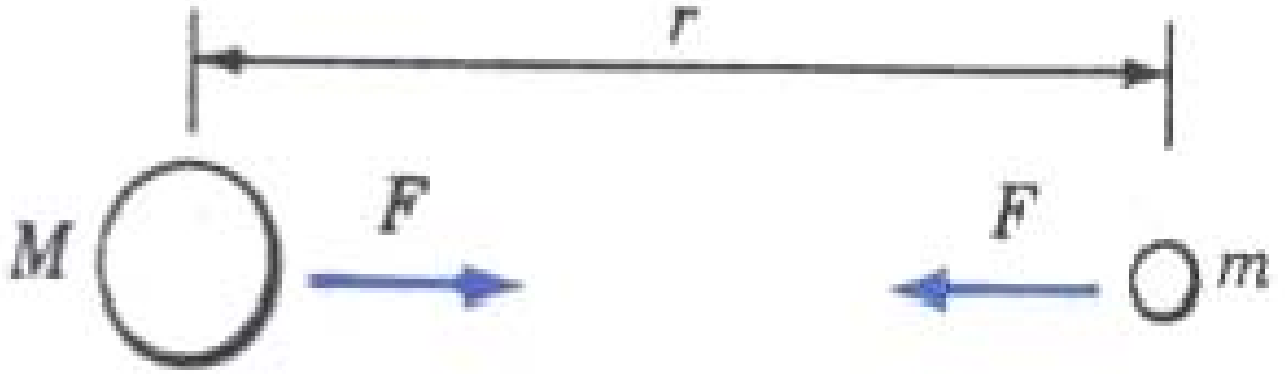
تبديل گاليله‌اي

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

هر معادله برداري معادل با سه معادله
جبري برحسب مولفه‌هاست:

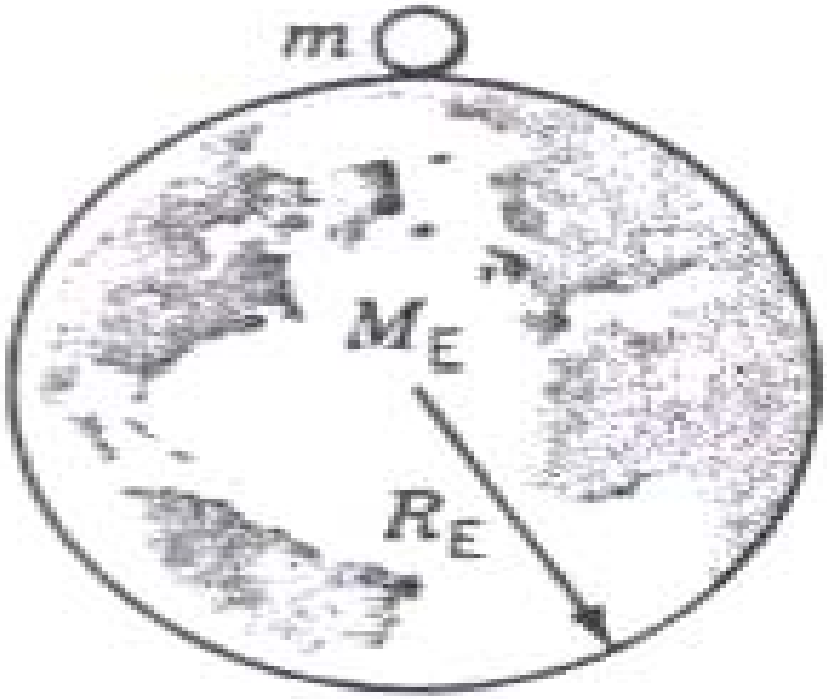
$$\sum F_x = ma_x \ , \ \sum F_y = ma_y \ , \sum F_z = ma_z$$

وزن



(الف)

مقدار نیروی گرانشی‌ای که دو ذره به هم وارد می‌کنند برابر $F = \frac{GmM}{r^2}$ است.



(ب)

(ب) اگر زمین را کرهٔ یکنواختی در نظر بگیریم می‌توانیم قانون گرانش نیوتون را در مورد آن به کار ببریم، یعنی در واقع می‌توانیم فرض کنیم که تمام جرم زمین در مرکزش متراکم شده است (و مثل ذره رفتار می‌کند).

نيرويي كه كره زمين (ME) به جسمي (m) واقع در سطحش

واردمي كند ، يعني وزن جسمي به جرم m ، برابر است با

$$W = \frac{GmM_E}{R_E^2}$$

كه در ان RE شعاع زمين است

G = ۶۷/۶ .۱۰-۱۱ $N.m2/kg2$ است و

ثابت جهاني گرانش ناميده مي شود.

$$g_o = G M_E / R_E^2$$

مقدار نيروي گرانشي وارد بر واحد جرم

در سطح زمين است

$$W = m g_o$$

نکات قابل بحث در مورد جرم و وزن:

- کیلوگرم به عنوان واحد وزن ؟
- ذاتي بودن جرم و استقلال آن از مکان
- وابستگي وزن به مکان

نکات قابل بحث درباره رابطه وزن و جرم به صورت

$$W=mg_0 \text{ و } W=mg$$

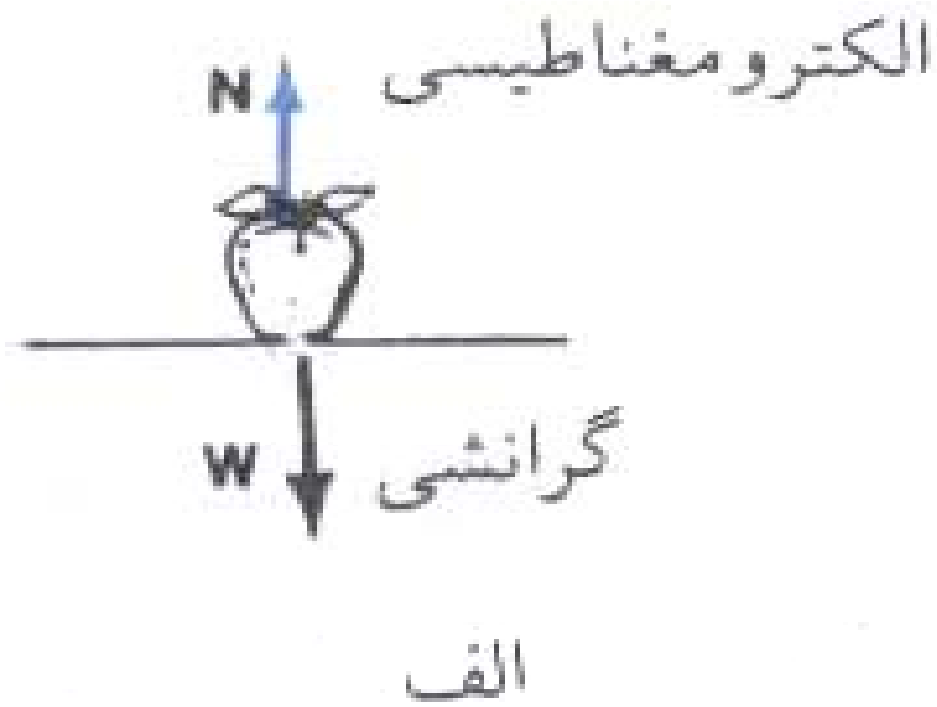
- تفاوت کیفي g_0 (شدت میدان گرانش) با g (شتاب ثقل)
- تفاوت کمي g_0 با g به علت دوران زمین
- یکي بودن $g_0 (N/kg)$ با $g (m/s^2)$

قانون سوم نیوتون

نیروي وارد بر A از B ، مقدارش مساوي و جهتش مخالف با نیروي است که A بر B وارد مي کند .

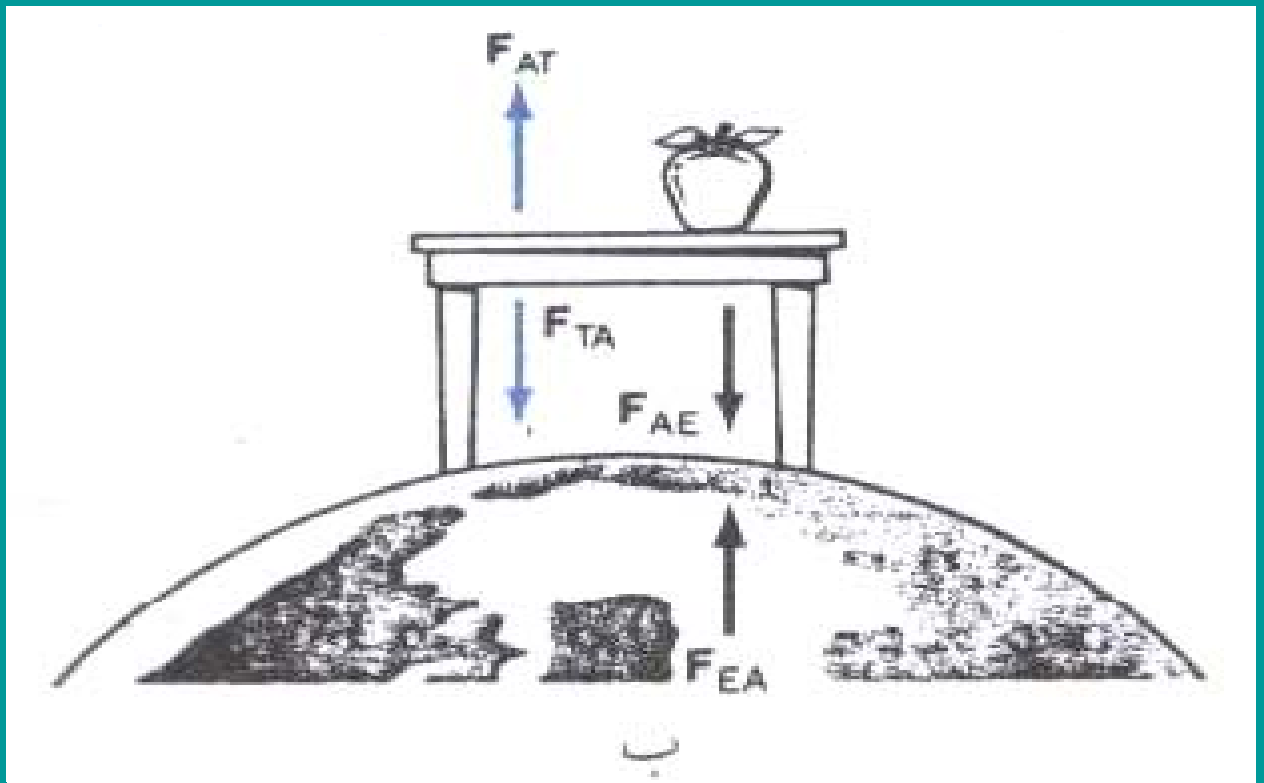
سیب، زمین را با همان نیرویی
جذب می‌کند که زمین سیب را

زوج نيروهاي عمل – عکس العمل



الف

(الف) نيروهاي «مساوي و مخالف» وارد بر سيبي که روي ميز در حال سکون است ، زوج عمل – عکس العمل نيستند.



(ب) نمايش زوجهاي عمل – عكس العمل.

راهنماي حل مسائل ديناميك

۱. نموداري از وضعيت كلي مسئله بكشيد. سيستمي

را كه بررسي ديناميك آن مورد نظر است (و ممكن

است متشكل از يك جسم يا بيشتر باشد)

مشخص كنيد.

۲. نيروهاي خارجي وارد بر هر « ذره » را ترسيم

كنيد ، يعني ببينيد كه به هر جسمي چه نيروهايي از

محيط اطرافش وارد مي‌شود. (منظور نيروهاي واقعي

است ، يعني نيروهايي كه بشود آنها را به عواملي در

محيط — مثل زمين ، طناب ، ميز ، و غيره — نسبت داد.

۳. يك چارچوب مرجع لخت انتخاب كنيد. هر ذره‌اي مي‌تواند محورهاي مختصات مربوط به خودش را داشته باشد. اغلب راحت‌تر است كه يكي از محورها را در امتداد شتاب ذره بگيريم.

۴. براي هر ذره يك نمودار جسم آزاد بكشيد: يعني

ذره را در مبدأ مختصات بگذاريد و تمام نيروهاي وارد

برآن را به مولفه‌هايش روي محورها تجزيه كنيد.

۵. با استفاده از نمودار جسم آزاد ، قانون دوم را در شكل مولفه‌اش

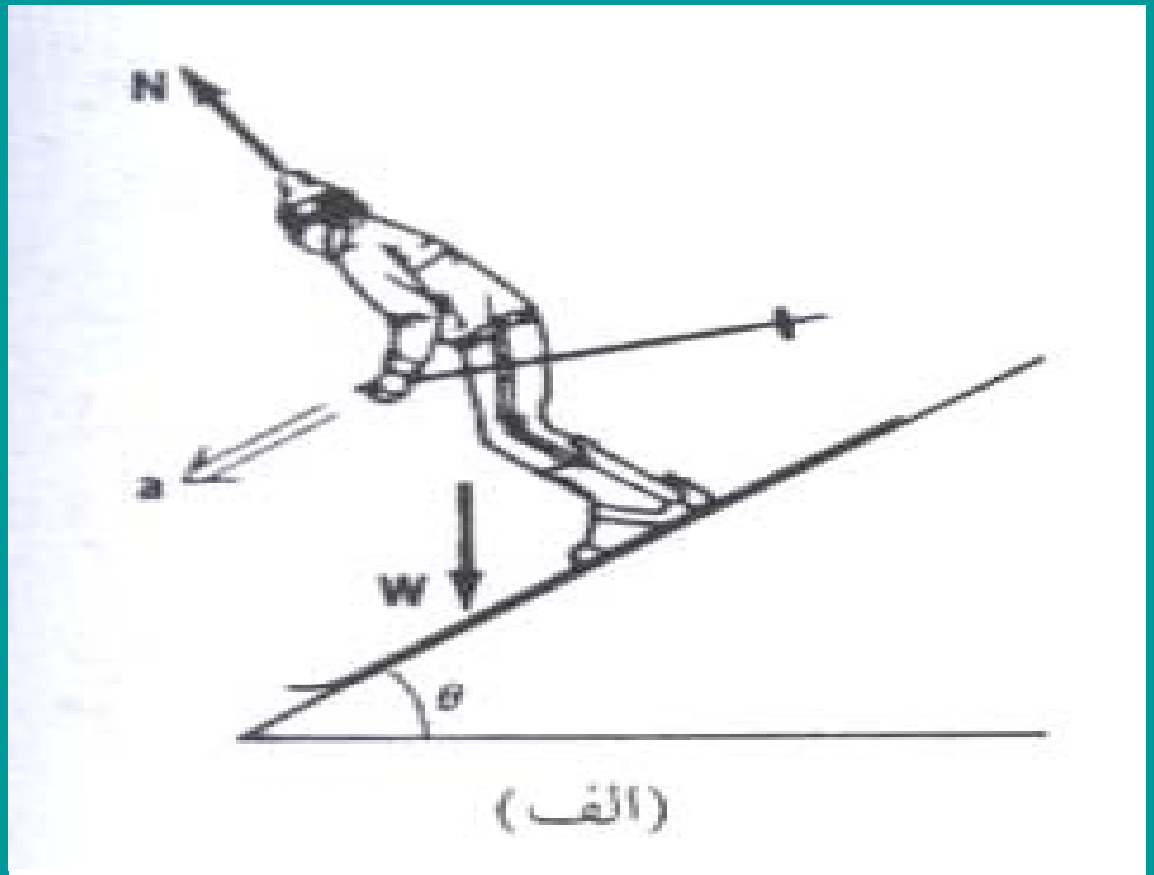
بنويسيد:

$$\sum F_x = ma_x$$

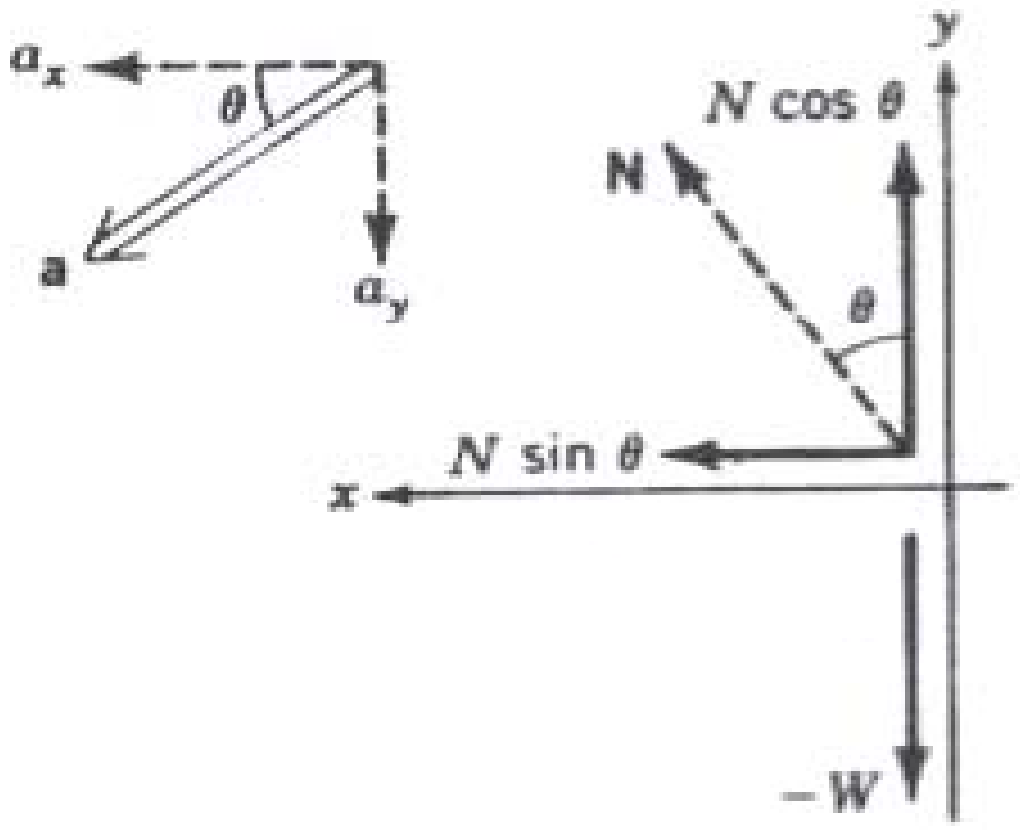
$$\sum F_y = ma_y$$

و مجهولات مسئله را از حل اين معادلات به دست بياوريد.

نمودار جسم آزاد - مثال

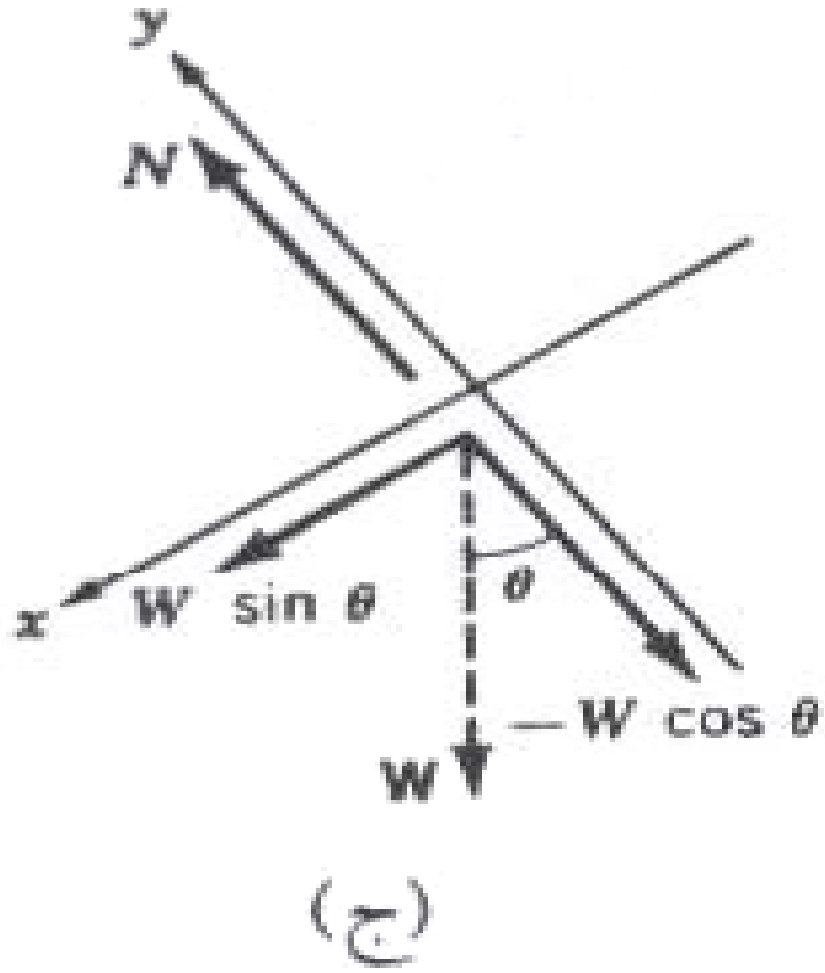


(الف) نيروهاي وارد بر اسكي باز.



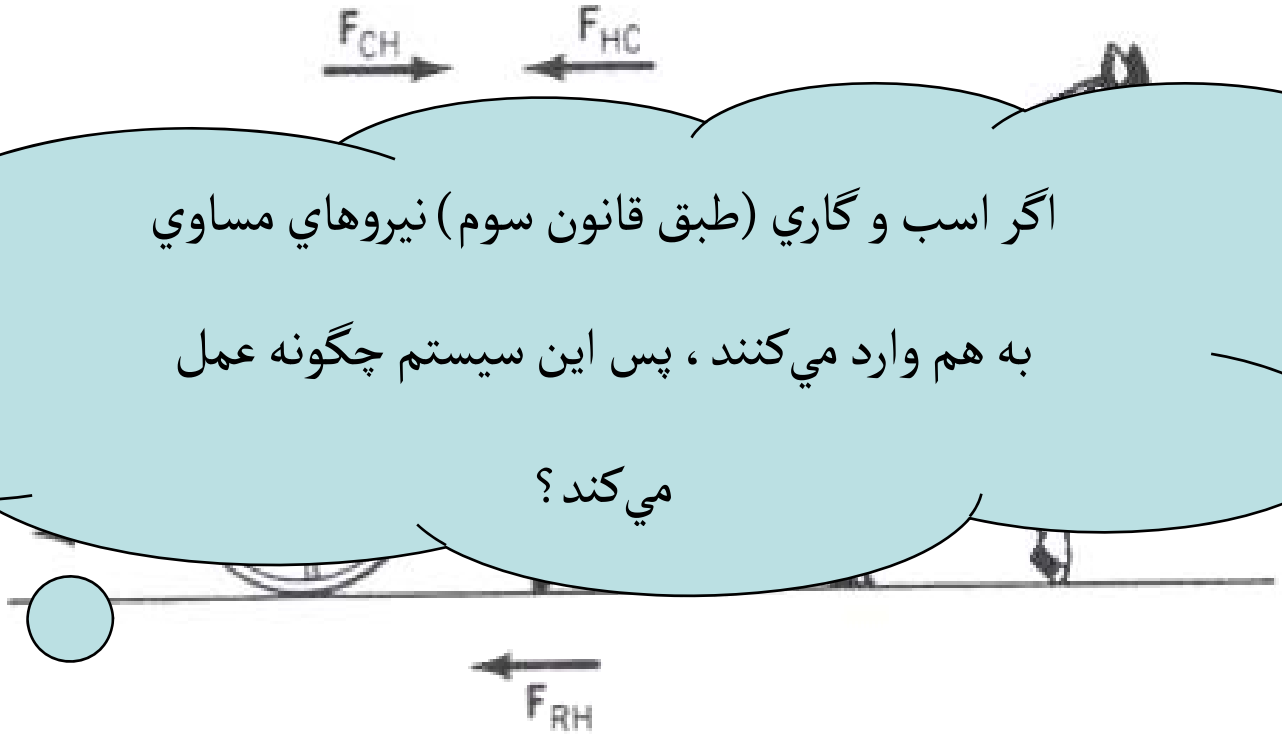
(ب)

(ب) انتخاب نامناسب دستگاه مختصات.



(ج) دستگاه مختصات مناسب که در آن a فقط روي يكي از محورها مولفه دارد.

پارادوکس اسب و گاري



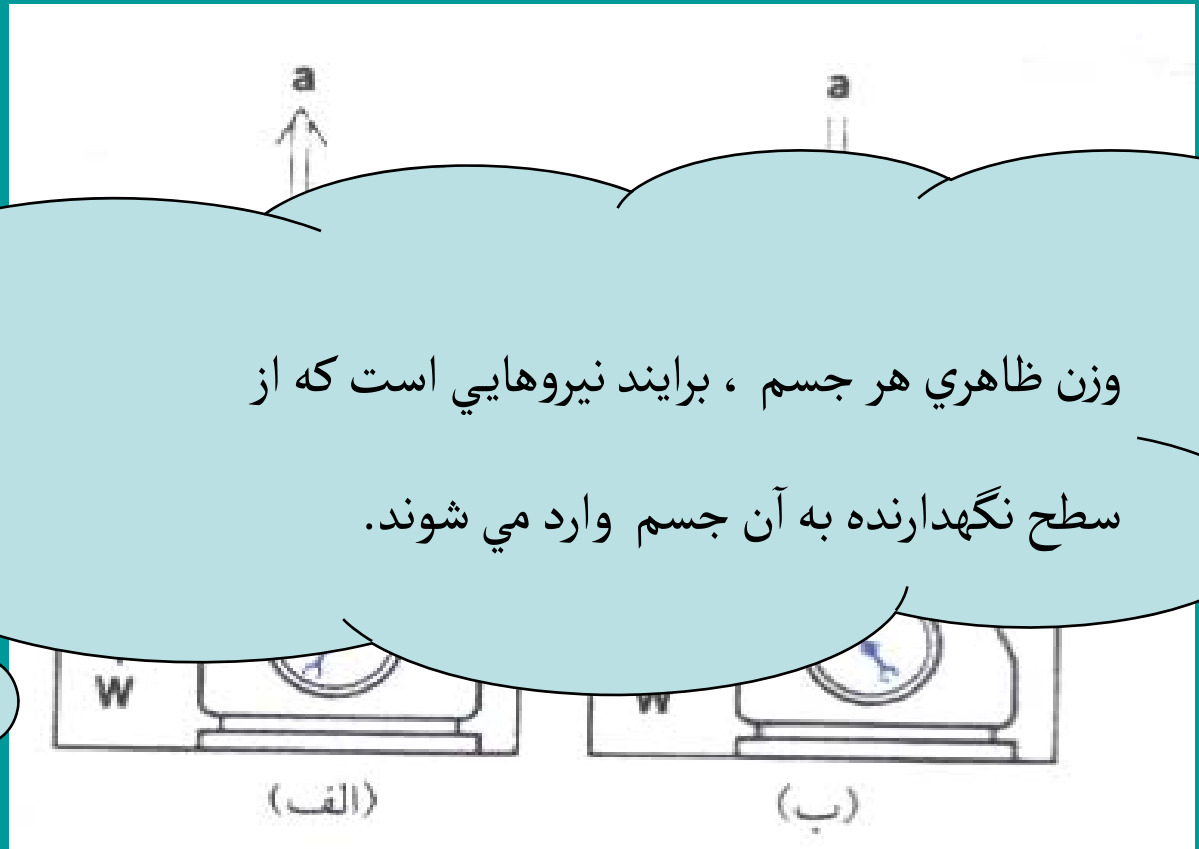
اگر اسب و گاري (طبق قانون سوم) نيروهاي مساوي به هم وارد مي‌كنند ، پس اين سيستم چگونه عمل مي‌كند؟

بررسی «پارادوکس اسب و گاری». این سیستم به این علت به جلو حرکت می‌کند که نیروی وارد از زمین به اسب، بزرگتر از نیروی وارد از زمین به گاری است.

وزن ظاهري

وزن ظاهري هر جسم ، برايند نيروهايي است كه از

سطح نگهدارنده به آن جسم وارد مي شوند.



(الف) وقتی آسانسور با شتاب بالا می‌رود، $N>mg$ است، یعنی وزن ظاهری از وزن واقعی بیشتر است. (ب) وقتی آسانسور، با شتاب پایین می‌آید $N<mg$ است.

$$N - mg = ma \Rightarrow N = m(g + a)$$

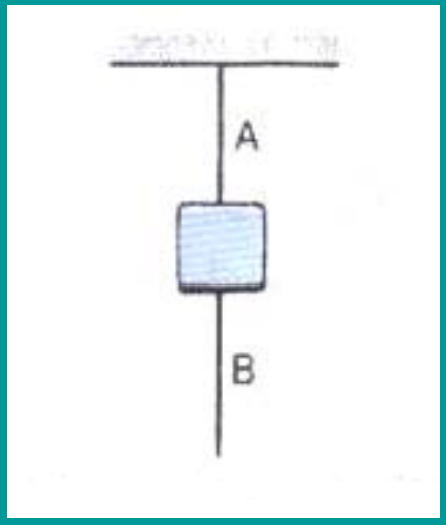
$$mg - N = ma \Rightarrow N = M(g - a)$$

نکات قابل بحث :

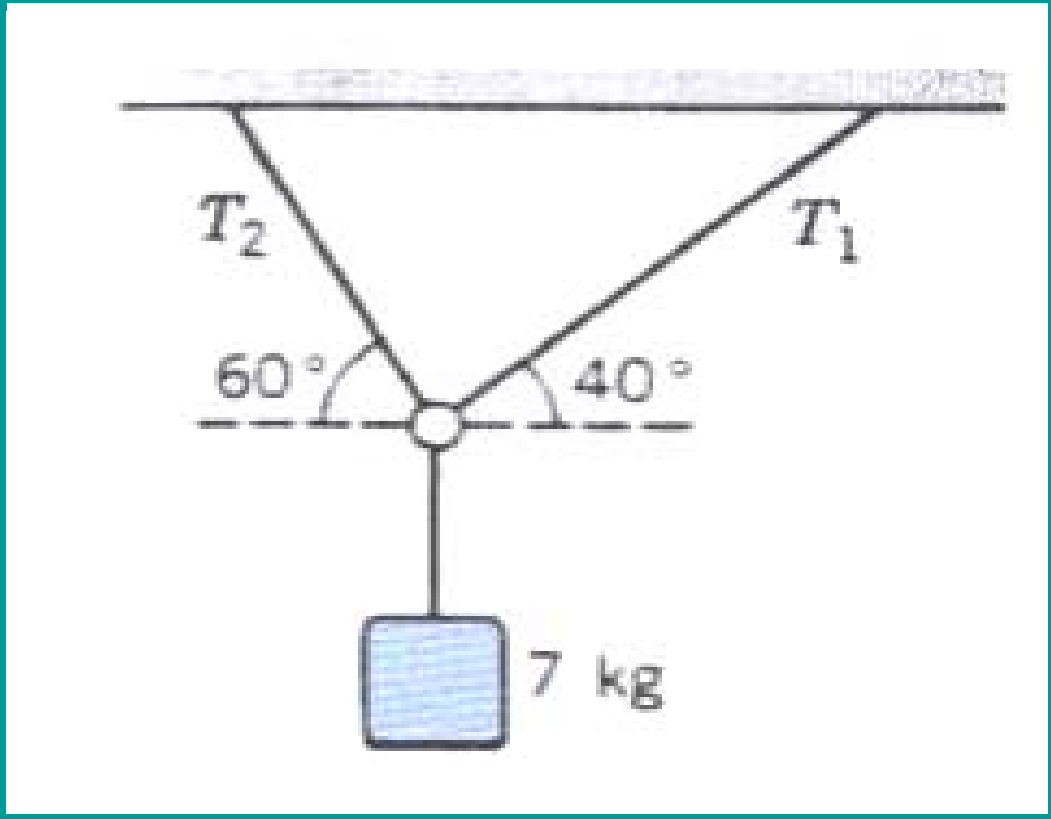
- اگر سرعت آسانسور ثابت باشد $N=mg$ است.
- اگر $a=g$ باشد (در حالت ب) $n=0$ است.

مسائل فصل پنجم

۱. وزنه‌اي توسط نخ A از سقف آويزان است و نخ B (كه از همان جنس A است) به زير وزنه بسته شده است (شكل زير). اگر B را در دست بگيريم و كشش آن را به تدريج زياد كنيم ، A پاره مي‌شود ، اما اگر B را با يك ضربه ناگهاني بكشيم ، B پاره مي‌شود. توضيح بدهيد كه چرا ؟



۲. جسمي به جرم ۷ kg توسط دو رشته نخ ، مطابق شکل زير ، آويزان است. نيروي کشش در هر رشته نخ چقدر است ؟

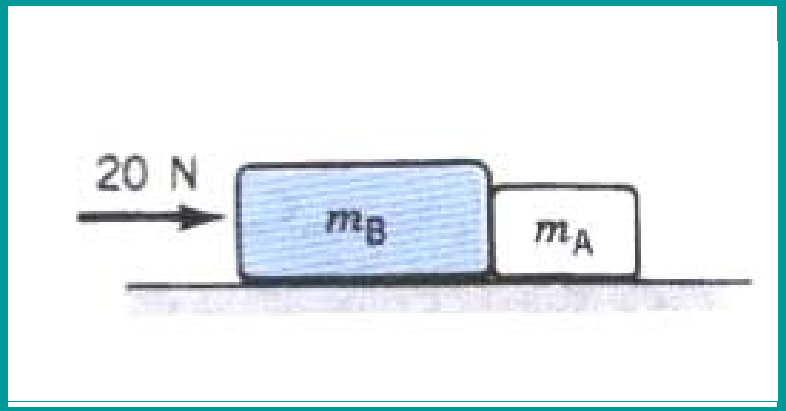


۳. جرم يك موشك پولاريس $۱٫۴ \cdot ۱۰^{۴}$ kg و نيروي پيشران موتورهاي آن $۲ \cdot ۱۰^{۵}$ N است. اگر اين موشك تا ۱ دقيقه بعد از بلند شدن از زمين موتورهايش روشن باشد و در طي اين مدت در راستاي قائم هدايت شود ، حداكثر تا چه ارتفاعي از زمين اوج خواهد گرفت ؟ (فرض كنيد مقاومت هوا ناچيز است.)

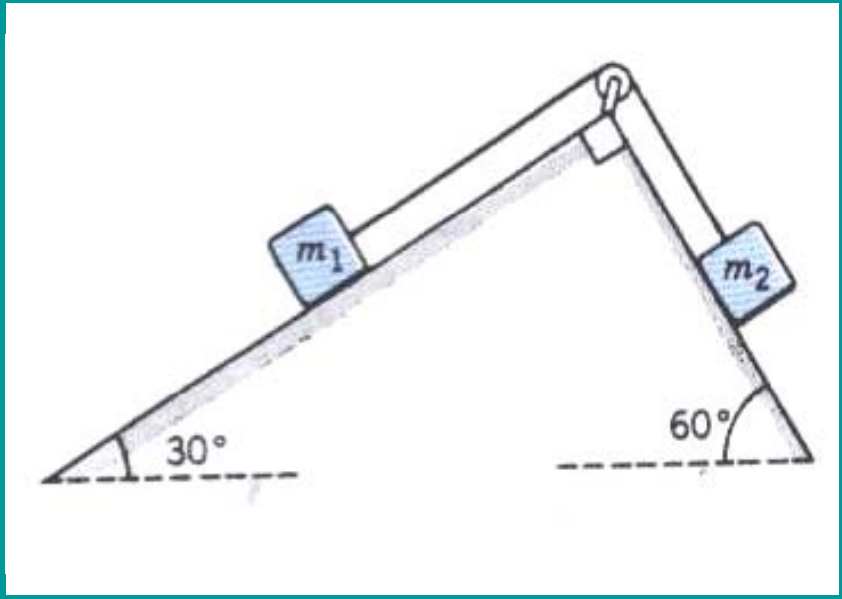
۴. يك طناب ظريف حداكثر مي‌تواند ۶۰۰ N كشش را تحمل كند. كارگري مي‌خواهد سطلي به جرم ۷۵ kg را با استفاده از اين طناب از بام ساختماني به زمين بفرستد. حداقل شتاب سطل بايد چقدر باشد تا طناب پاره نشود ؟

۵. در شكل زير ، دو جسم A و B روي سطح افقي بدون اصطكاكي با هم در تماس‌اند و يك نيروي افقي برابر با N ۲۰ به جسم B اثر مي كند . اگر m_A =۲kg و m_B = ۳kg باشد ، كميات زير را تعيين كنيد :

(الف) شتاب دو جسم ؛ (ب) نيرويي كه A به B وارد مي كند ؛ (ج) نيروي خالص (برايند) وارد بر B ؛ (د) اگرجاي دو جسم رابا هم عوض كنيم ، نيرويي كه از A به B وارد مي شود چقدر است ؟



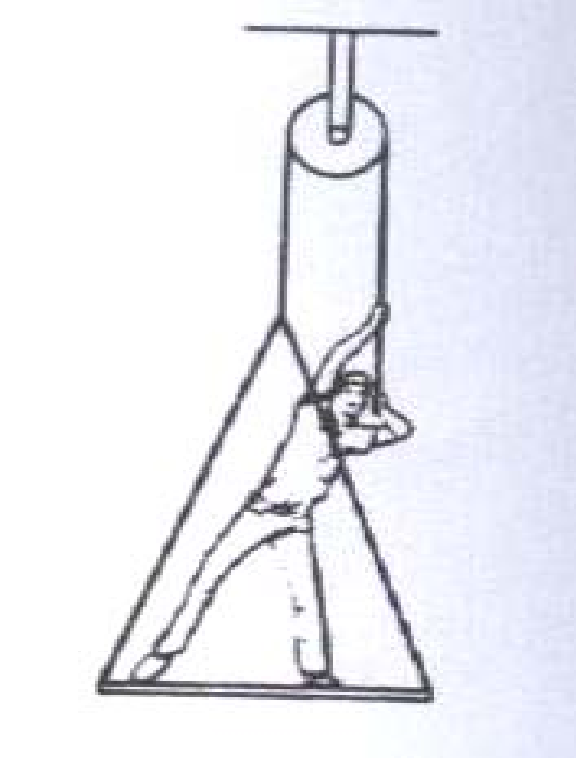
۶. دو قالب چوبي به جرمهاي m_1=۵kg و m_2=۶kg ، كه به وسيله نخي به هم وصل شده اند ، در دو طرف گوه‌اي كه در شكل زير مي بينيد قرار داده مي‌شوند. شتاب حركت سيستم و كشش نخ چقدر است ؟ (اصطكاك سطوح و جرم قرقره ناچيز است).



۷. يك وزنه ۵ كيلوگرمي به وسيله قطعه طنابي به جرم kg ۲ به يك وزنه ۳ كيلوگرمي متصل شده است. نيروي خارجي F_0 مطابق شكل زير به وزنه بزرگتر وارد مي‌شود و كل سيستم را با شتاب m/s^2 ۲ به بالا مي‌كشد.

(الف) F_0 چقدر است؟ (ب)چه نيروي خالصي به طناب اثر مي‌كند؟

(ج)كشش در وسط طناب چقدر است؟



۸. گلوله‌اي به جرم $3\,kg$ با يك قطعه نخ بسيار سبك از سقف آسانسوري آويزان است. كشش نخ در هر يك از حالتهاي زير چقدر است ؟

الف) وقتي آسانسور در حال بالا رفتن ، حركتش را با شتاب $4\,m/s^2$ كند مي‌كند ؛ ب) وقتي آسانسور در حال پايين آمدن ، حركتش را با شتاب $2\,m/s^2$ تند مي‌كند.

۹. يك كارگر ساختمان ، كه جرمش kg ۷۵ است ، روي تخته‌اي به جرم $m=۱۵\ kg$ قرار گرفته و دارد با استفاده از يك سيستم طناب و قرقره ، مطابق شكل زير ، خودش را بالا مي‌كشد. كشش طناب را در هر يك از حالت‌هاي زير پيدا كنيد. الف) سيستم (در هوا) ساكن است ؛ ب)كارگر با شتاب به طرف بالا حركت مي‌كند ؛ ج) اگر حداكثر كششي كه طناب مي‌تواند تحمل كند N ۷۰۰ باشد ، و كارگر در وسط راه طناب را به قلابي در روي ديوار ببندد ، چه اتفاق مي‌افتد؟

۱۰. دو وزنه به جرم‌هاي $۳kg$ و $۵kg$ مطابق شکل زير از دو طرف قرقره‌اي آويزان‌اند. وزنه ۵ کيلوگرمي را ابتدا $۴m$ بالاتر از کف زمين نگه مي‌داريم و بعد رها مي‌کنيم. وزنه ۳ کيلوگرمي (که ابتدا در سطح زمين بوده است) حداکثر تا چه ارتفاعي از سطح زمين بالا مي‌رود؟

فصل ششم: ديناميك ذره ۲

هدف كلي

- آشنايي با كاربردهاي قانون دوم نيوتون با حضور اصطكاك و در مورد حركت دايره‌اي

مطالب اين فصل:

- اصطكاك
- ديناميك حركت دايره‌اي
- مدارهاي ماهواره‌اي
- چارچوب‌هاي نالخت

اصطكاك

- نيروي اصطكاك متناسب با نيرويي است كه دو جسم را به هم مي‌فشارد.
- نيروي اصطكاك بستگي محسوسي به مساحت سطح تماس دو جسم ندارد.
- نيروي اصطكاك (در سرعت‌هاي نسبتاً كم) مستقل از سرعت است.

اصطكاك جنبشي (يا لغزشي):

$$f_k = \mu_k N$$

اصطكاك ايستايي:

$$f_{s(\max)} = \mu_s N$$

يا

$$f_s \leq \mu_s N$$

نكات قابل بحث در مورد اصطكاك غلتشي :

- كوچك بودن اصطكاك غلتشي در مقايسه با اصطكاك لغزشي
- علت ايجاد اصطكاك غلتشي
- جهت اصطكاك غلتشي در غلتش آزاد و غلتش واداشته

دینامیك حركت دایره‌اي

ذره‌ای که حرکت دایره‌ای یکنواخت دارد مدام با یک نیروی مرکزگرا از مسیر لحظی خود (خط‌چین) به طرف مرکز کشیده می‌شود. یعنی جهت سرعتش دائماً تغییر می‌کند و در نتیجه شتابدار است. نیروی جذب به مرکز در این مورد توسط طناب تأمین می‌شود که جهتش به طرف مرکز مسیر است.

مقدار نيرويي كه جسم را در مسير

دايره‌اي نگه مي‌دارد:

$$F = \frac{mv^2}{r}$$

اين نيرو در جهت شتاب مركزگراست و نيروي مركزگرا ناميده مي‌شود.

نكات قابل بحث درباره نيروي مركزگرا :

- اين نيرو نوع جديد و مستقلي از نيرو نيست.
- از ميان نيروهاي موجود در سيستم تامين مي‌شود.
- پس نبايد به نيروهاي " نمودار جسم آزاد " اضافه شود.

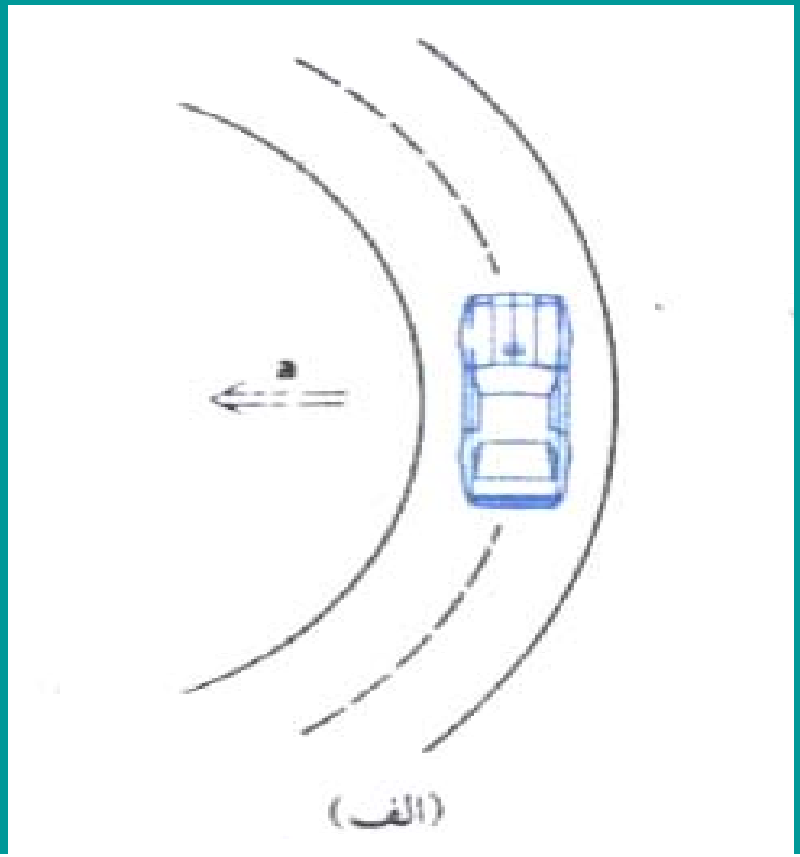
در چارچوب‌هاي مرجع لخت ،

نيازي به نيروهاي ناشي از لختي

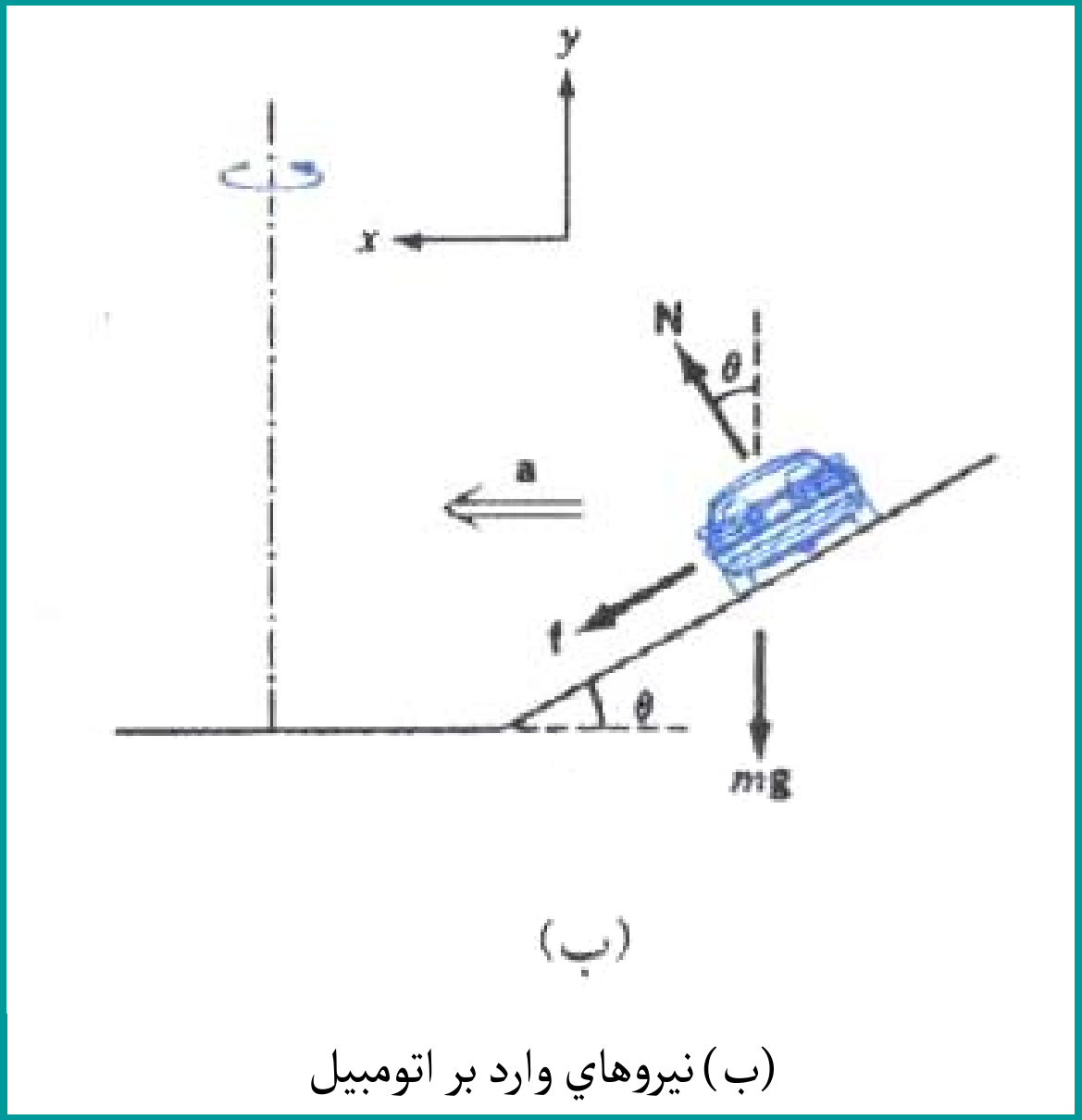
(نيروهاي كاذب و غير نيوتوني)

از قبيل " گريز از مركز " نداريم.

تامين نيروي مركزگرا در پيچ جاده



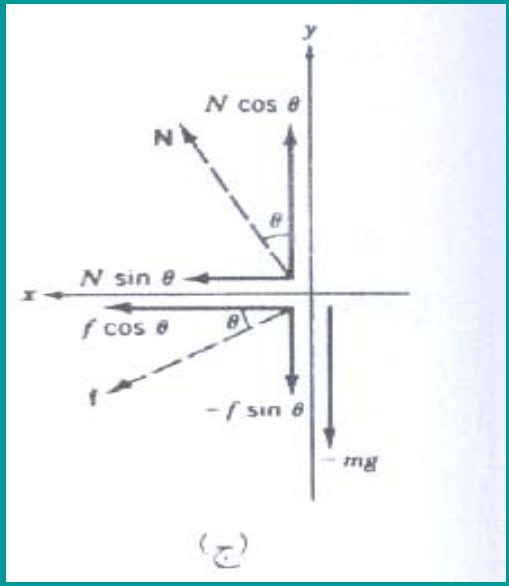
(الف) اتومبيل از نماي بالا



(ب)

(ب) نيروهاي وارد بر اتومبيل

$$\begin{cases} \sum F_x = f = m\dfrac{v^2}{r} \\ \sum F_y = N - mg = 0 \Rightarrow V = mg \end{cases}$$



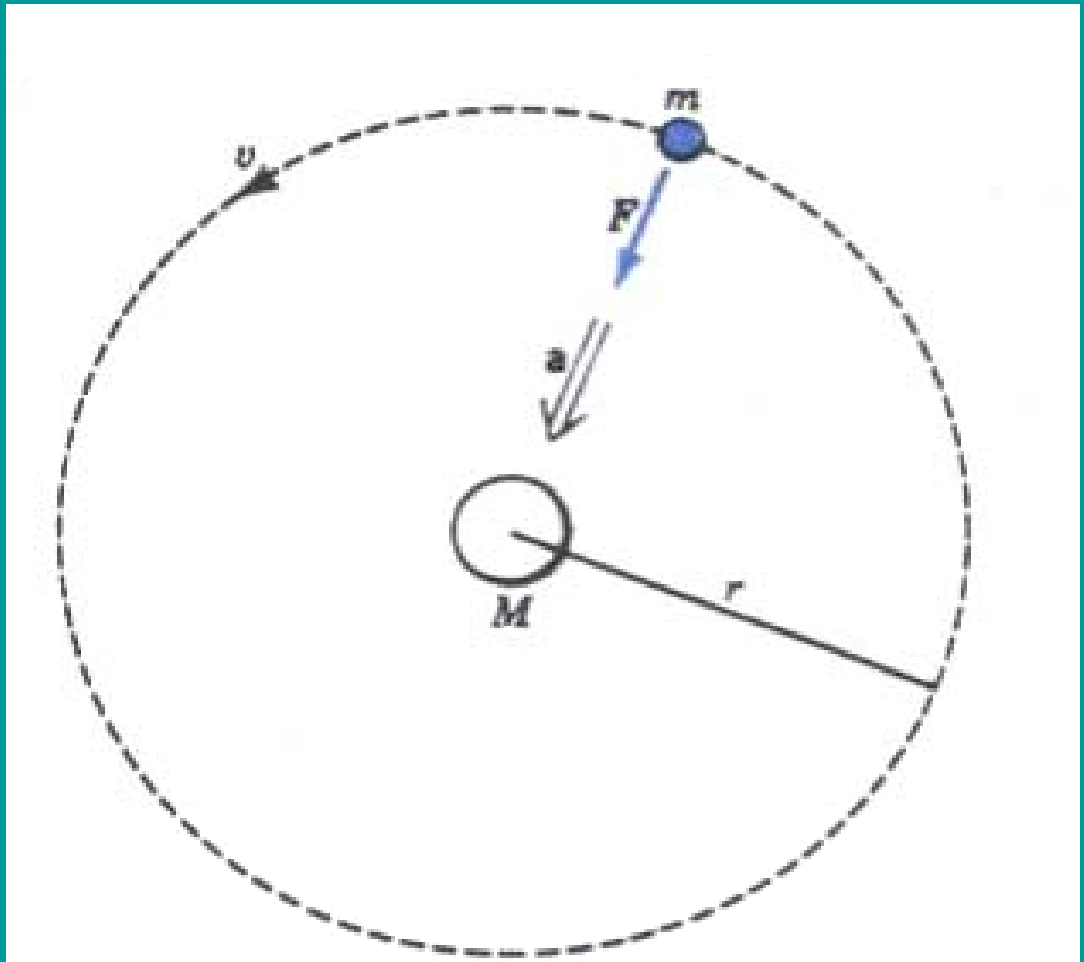
(ج) نمودار جسم آزاد

مدارهاي ماهوارهاي

$$F = ma \quad \Rightarrow \quad \frac{GmM}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

مداري



ماهواره‌ای به جرم m در مداری به دور جسم مرکزی M، نیروی مرکزگرا از جاذبهٔ گرانشی تأمین می‌شود.

ماهواره‌اي در مدار زمين

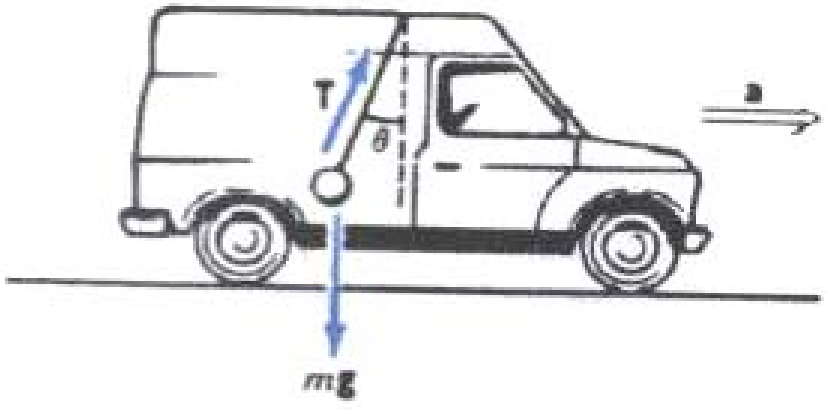
شکلی که خود نیوتون برای آزمایش ذهنی‌اش کشیده است. گلوله‌ای که از بالای کوهی به موازات زمین پرتاب شود اگر سرعت اولیه‌اش کم باشد به زمین فرود می‌آید، ولی اگر سرعت اولیه پرتاب به قدر کافی بزرگ باشد گلوله درمدار زمین قرار می‌گیرد.

چارچوب‌هاي نالخت

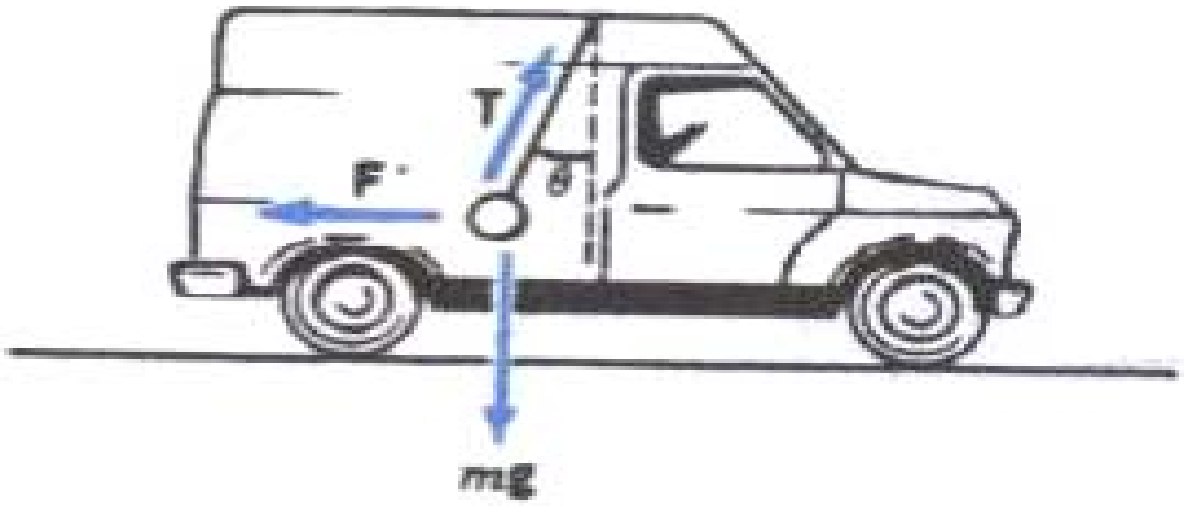
- اتومبيلي با شتاب a در حركت است. نخ

آونگي كه از سقف آن آويزان است چه

زاويه‌اي با راستاي قائم مي‌سازد ؟



(الف) تحليل مسئله در چارچوب لخت.



$$T + mg + F' = 0$$

(ب)

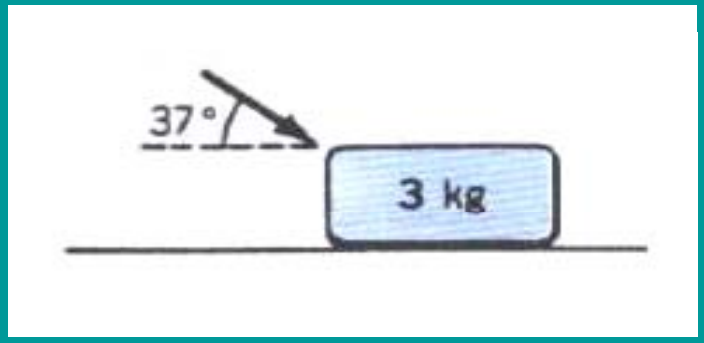
(ب) تحلیل مسئله در چارچوب نالخت

- **تحلیل مسئله در چارچوب لخت (الف) و نالخت (ب) به نتیجه یکساني منجر مي‌شود.**

مسائل فصل ششم

۱. در اتومبيل‌هاي معمولي (ديفرانسيل عقب) فقط چرخ‌هاي عقب توسط نيروي موتور چرخانده مي‌شوند. اگر ضريب اصطكاك ايستايي چرخ‌ها و جاده ۰/۸ باشد ، بيشترين شتابي كه اتومبيل مي‌تواند با آن : الف) به حركت در بيايد و ب) متوقف شود ، چقدر است ؟

۲. در شكل زير نيروي وارد به جسم N ۲۵ است. فرض كنيد μ_k = ۰ر۲ و μ_s = ۰ر۵ است. الف) اگر جسم در ابتدا ساكن باشد آيا در اثر اين نيرو به حركت در مي‌آيد؟ ب) اگر جسم به طرف راست حركت كند، شتاب آن چقدر است؟



۳. يك تريلي كه صندوقي را حمل مي‌كند با شتاب $6\ m/s^2$ در جاده افقي سرعتش را زياد مي‌كند. حداقل ضريب اصطكاك ميان جعبه و كف تريلي بايد چقدر باشد تا جعبه در حين اين حركت از جاي خودش تكان نخورد؟

۴. در شكل زير ، m_A=۲ kg و m_B=۵ kg است. جسم B با سطحي كه در روي آن واقع شده است اصطكاك ندارد ولي بين جسم A و B اصطكاكي با ضريب μ_s=۰ر۲۵ وجود دارد. الف) اگر هر دو جسم با سرعت ثابت در حركت باشند نيروي اصطكاك ميان آنها چقدر است ؟ ب)حداكثر چه نيروي افقي‌اي مي‌شود به B وارد كرد ، بي آنكه A روي آن بلغزد ؟

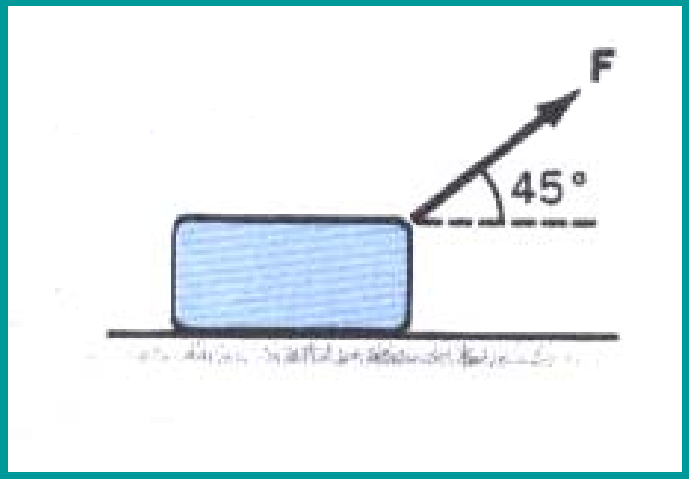
۵. در شکل زیر، m_A = ۲ kg و m_B = ۳ kg است است. نیرویي برابر با N ۶۰ مطابق شکل به B وارد مي‌شود. ضریب اصطکاك میان دو جسم حداقل باید چقدر باشد تا A به پایین نلغزد؟

۶. در يك جاده افقي ، اتومبيلي مي‌خواهد با سرعت V از پيچي به شعاع r عبور كند. نشان بدهيد كه زاويه مناسب براي شيب عرضي جاده در اين پيچ از رابطه $tag\ \theta = v^2 /rg$ بدست مي‌آيد. (فرض كنيد اصطكاك آنقدر كم است كه براي عبور بي‌خطر فقط بايد به شيب عرضي جاده متكي بود).

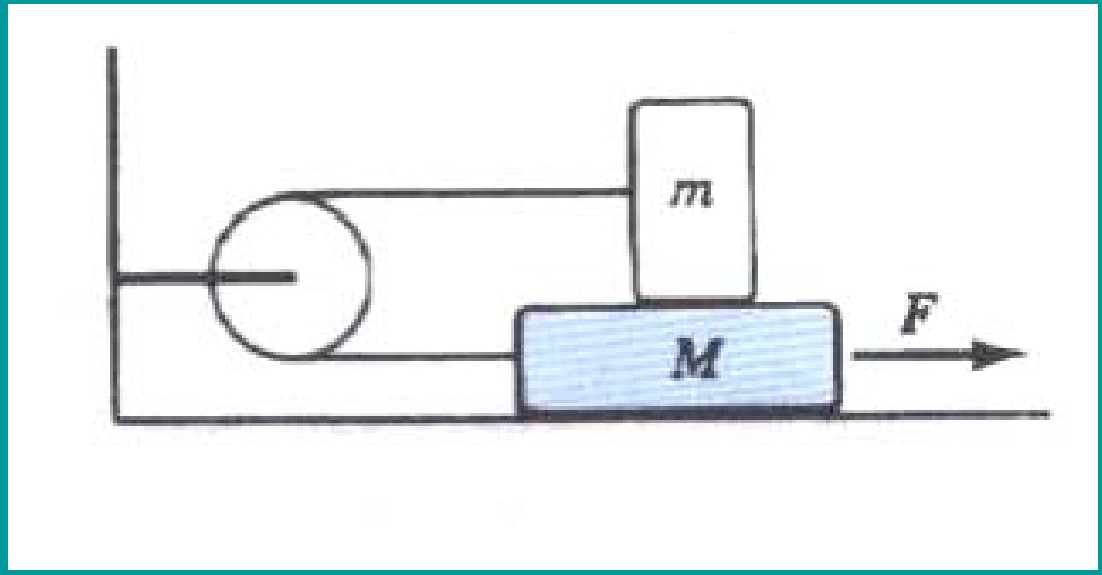
۷. اتومبيلي كه با سرعت V در حركت است ، ناگهان با تنه درختي كه عمود بر مسير در جاده افتاده و آن را بسته است مواجه مي‌شود. ضريب اصطكاك ايستايي چرخ‌ها با جاده μ_s است. براي اجتناب از برخورد ، راننده در هر يك از شرايط زير بايد حداقل در چه فاصله‌اي از مانع دست به كار شود؟ الف)اگر بخواهد در خط مستقيم ترمز كند ، ب)اگر بخواهد (بدون ترمز كردن) فرمان را در يك مسير دايره‌اي بپيچاند.

۸. اتوبوسي در جاده مستقيم حركت مي‌كند. نخ آونگي كه از سقف اتوبوس آويزان است با امتداد قائم زاويه 8° درجه مي‌سازد. شتاب اتوبوس چقدر است ؟

۹. در شكل زير ، ضريب اصطكاك ايستايي μ_s است. الف) نشان بدهيد كه نيروي F لازم براي به حركت در آوردن جسم به ازاي $tag\ \theta = \mu_s$ به حداقل مي‌رسد. ب) نشان بدهيد كه مقدار اين نيروي حداقل برابر با $mg \sin \theta$ است.



۱۰. در سیستم شکل زیر ، $m=۲kg$ و $M=٤kg$ است. ضریب اصطکاك لغزشي براي همه سطوح $\mu_k=۰ر۲$ است. (جرم قرقره و نخ را ناچیز فرض کنید). این دو جسم به ازاي چه مقداري از نیروي افقي F الف) با سرعت ثابت حرکت خواهند کرد؟ ب) با شتاب حرکت خواهند کرد؟



فصل هفتم: كارو انرژي

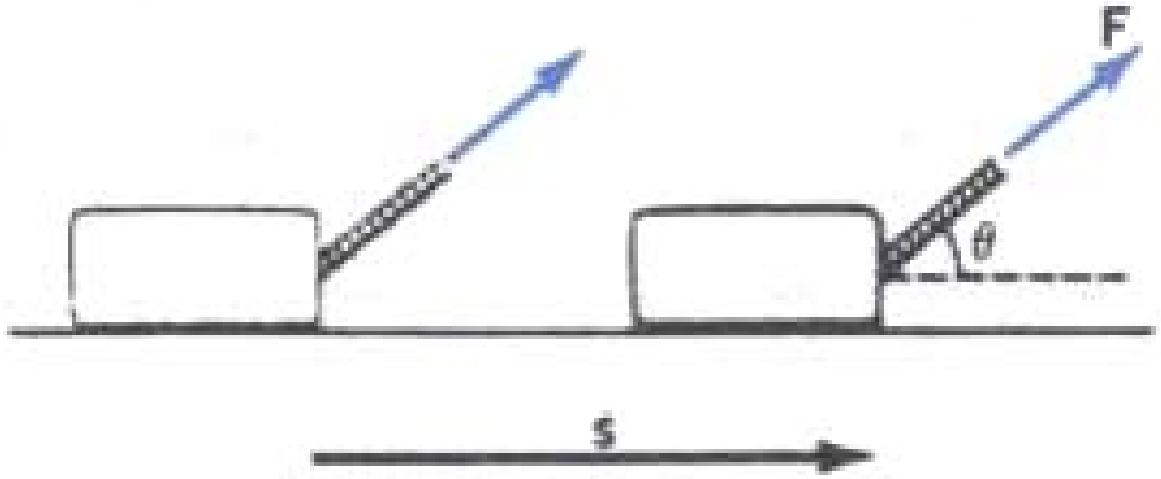
هدف كلي

- آشنايي با مفهوم كار در فيزيك و رابطه آن با انرژي مكانيكي

مطالب اين فصل:

- كار نيروي ثابت
- كار نيروي متغير در يك بعد
- قضيه كار – انرژي در يك بعد
- توان
- كار و انرژي در سه بعد

کار نیروي ثابت



کار نیروی $\vec{F}$، وقتی که نقطهٔ اثر آن به اندازهٔ $\vec{s}$ جابه‌جا می‌شود، عبارت است از

$$W = FS\cos\theta = \vec{F}.\vec{S}$$

$$W = FS\cos\theta$$

$$W = \vec{F} \cdot \vec{S}$$

$$W = F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z$$

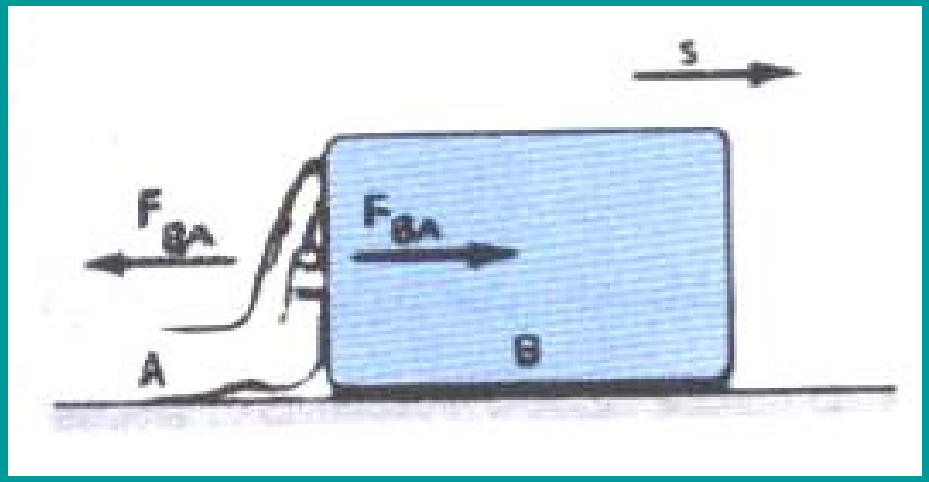
کار خالص چندین نیرو

$$W = W_1 + W_2 + \ldots + W_n$$

$$W_{(\text{خالص})} = \vec{F}_1 . \vec{S} + \vec{F}_2 . \vec{S} + \ldots + \vec{F}_3 . \vec{S} = \left(\sum \vec{F} . \vec{S}\right)$$

$$W_{(\text{خالص})} = \vec{F}_{(\text{خالص})} . \vec{S}$$

کار منفي



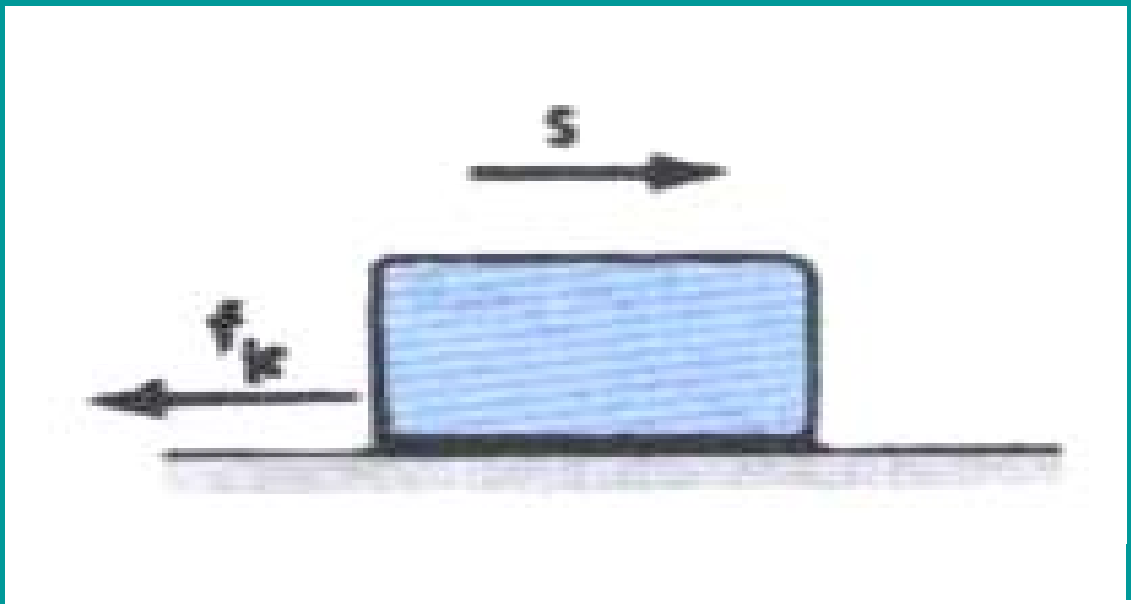
$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

$$W_{AB} = -W_{AB}$$

دست روی جسم کار مثبت انجام می‌دهد. همزمان جسم هم به همان مقدار کارمنفی روی دست انجام می‌دهد.

كار نيروي اصطكاك

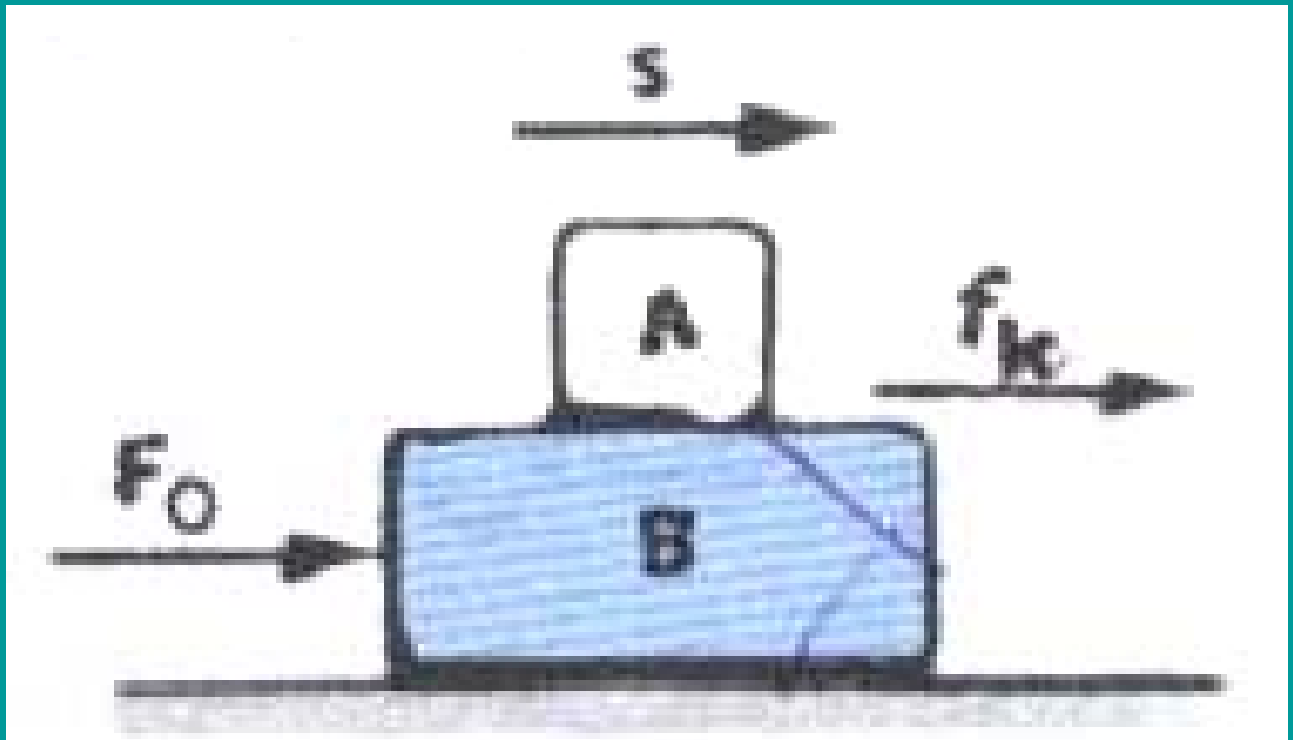
$$W_f = f_k \, s \cos 180^\circ = -f_k s$$



وقتي جسمي روي سطح ساكني مي‌لغزد ،

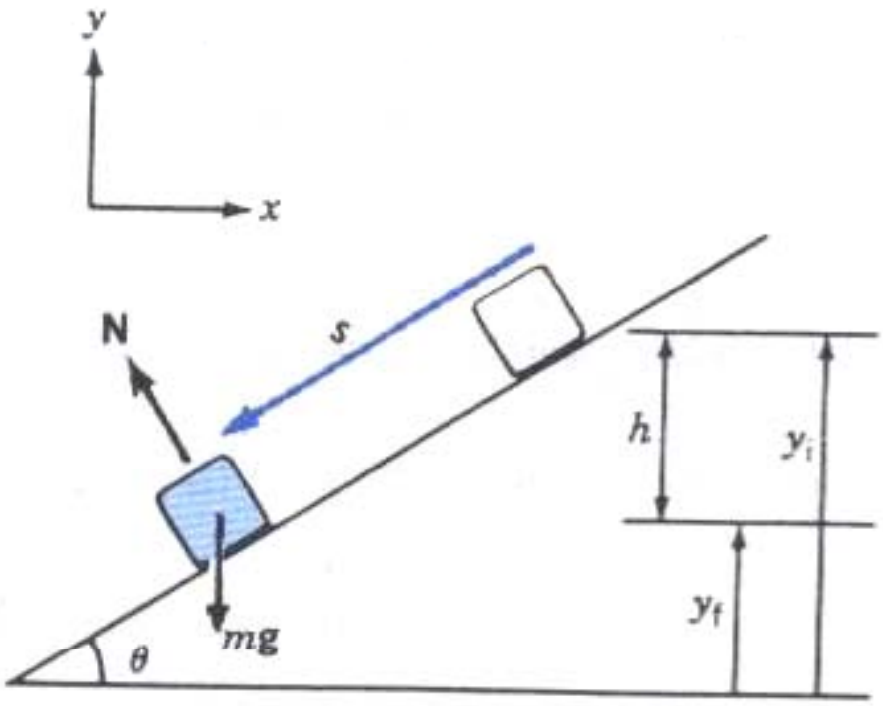
كار نيروي اصطكاك لغزشي منفي است.

کار نیروي اصطکاك همیشه هم منفي نیست!



B در اثر نیروی F_0 جلو می‌رود و A نسبت به آن به عقب می‌لغزد. جابجایی A نسبت به میز و نیروی f_k هر دو به طرف جلو هستند و در نتیجه f_k روی A کار مثبت انجام می‌دهد.

کار نیروي ثقل



کاری که نیروی ثقل (که در محدودهٔ مسئله ثابت فرض می‌شود) روی جسم انجام می‌دهد برابر است با $W_g = -mg(y_f - y_i) = +mgh$.

$$W_g = m\vec{g} \cdot \vec{s} = (-mg\,\vec{j}).(\Delta x\,\vec{i} + \Delta y\,\vec{j})$$

$$W_g = -mg(y_f - y_i)$$

در این مثال $y_f - y_I = -h$ و بنابراین $W_g = +mgh$

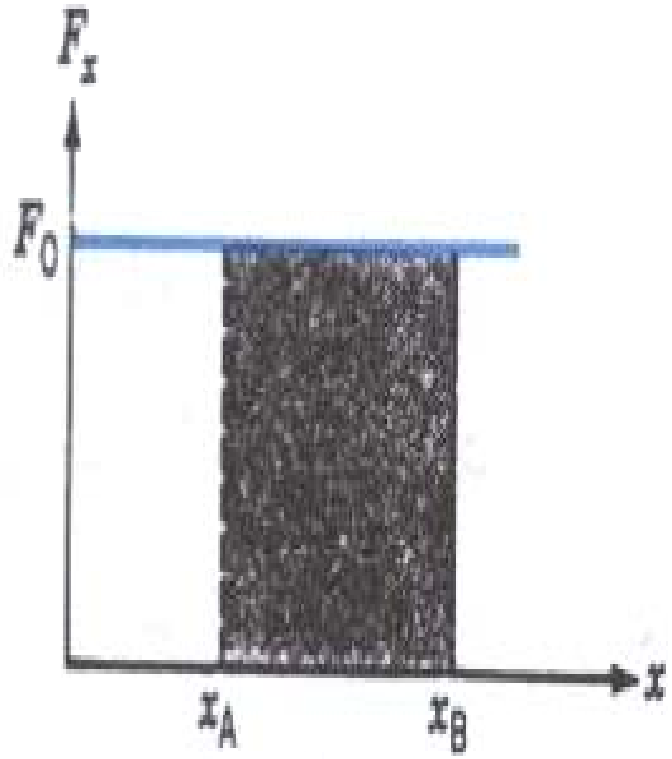
است.

نكات قابل بحث درباره كار نيروي ثقل :

$$W_g = -mg(y_f - y_i)$$

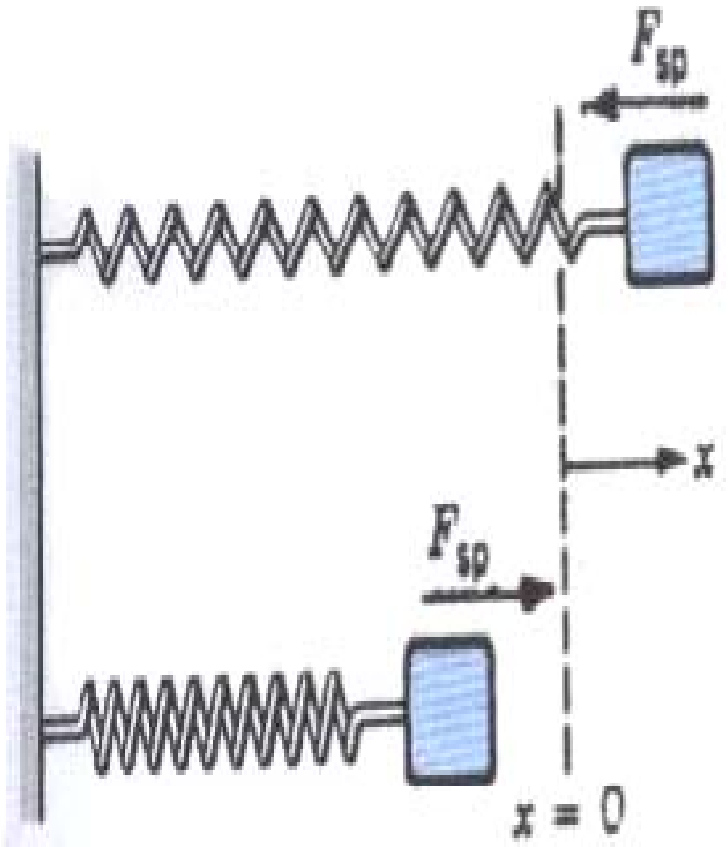
- كار نيروي ثقل مستقل از مسير است و فقط به مختصات قائم اوليه و نهايي بستگي دارد.
- كار نيروي ثقل در مسير بسته (رفت و برگشت) صفر است.
- چندين نيروهايي پايستاراند (فصل بعدي)

محاسبه کار از مساحت زیر منحني F برحسب X



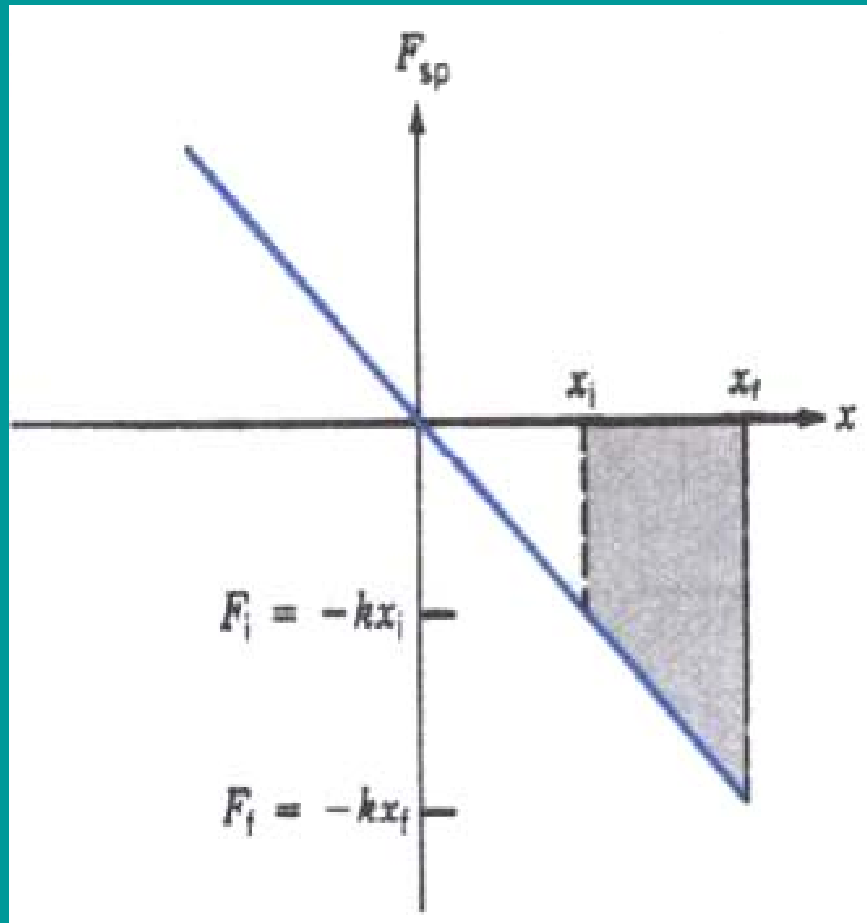
کار نیروی ثابت F_0 در جابجایی از x_A به x_B برابر است با $W=F_0(x_B-x_A)$ که همان مساحت ناحیهٔ هاشور خورده است.

نیروي فنر



اگر فنر به اندازهٔ x منبسط یا متراکم شود، نیروی بازگرداننده‌ای که فنر اعمال می‌کند برابر با $F_s = -kx$ است.

کار نیروی فنر



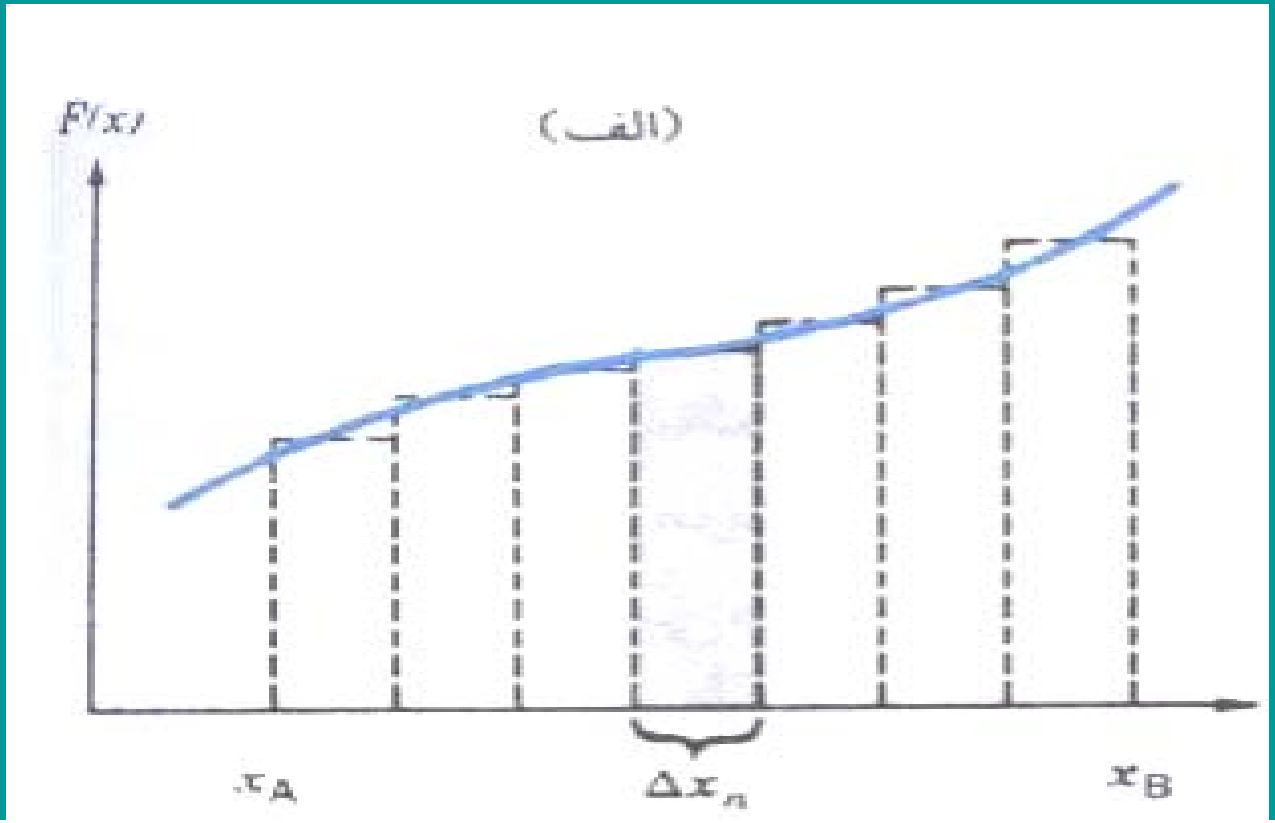
کار انجام شده توسط فنر در جابجایی انتهای آزاد آن از x_i به x_f برابر است با مساحت ذوذنقهٔ هاشور خورده.

$$W_s = \frac{1}{2} F_f \, x_f - \frac{1}{2} F_i \, x_i$$

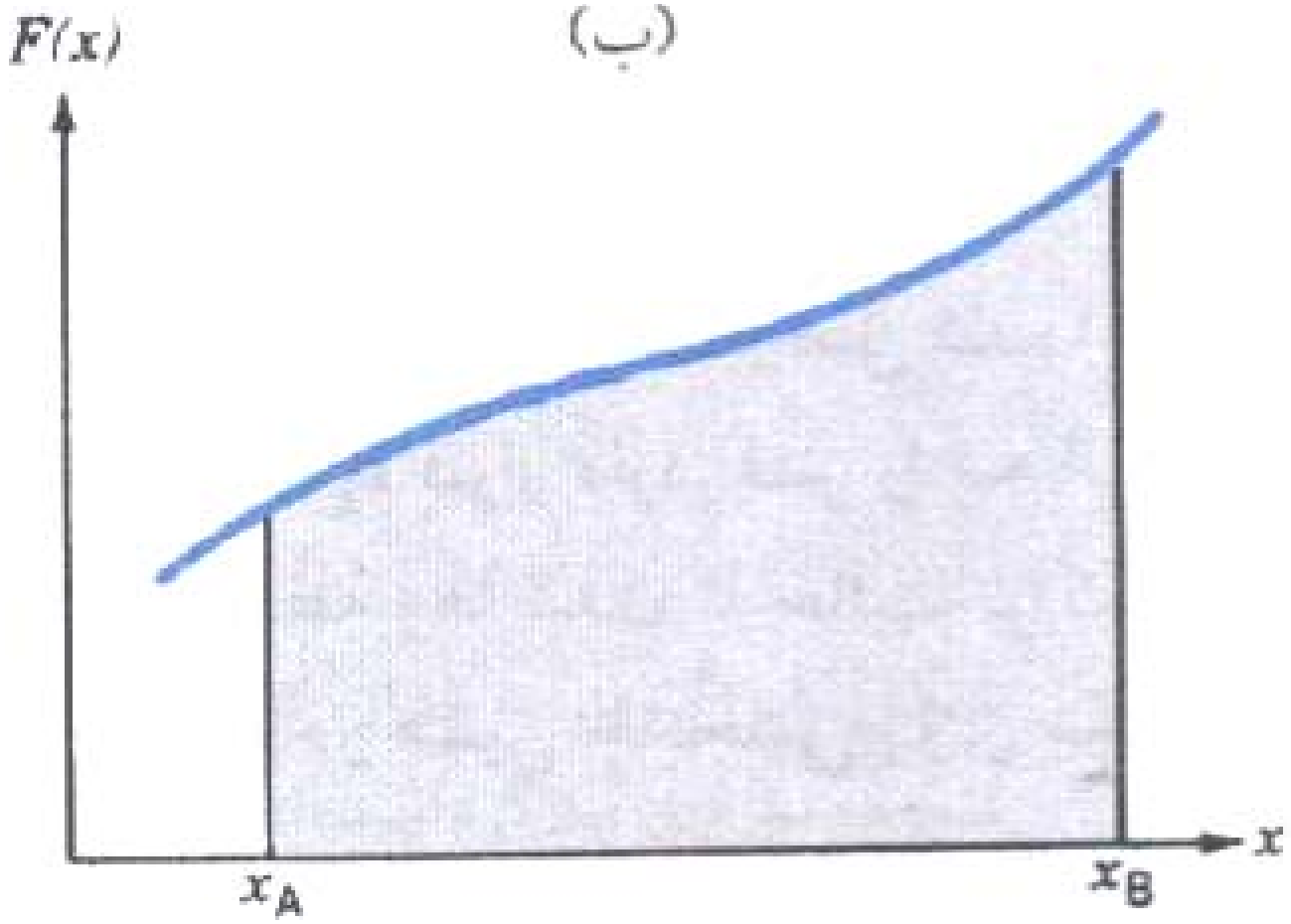
$$W_s = -\frac{1}{2} k (x_f^2 - x_i^2)$$

- نيروي فنر هم خصوصيات نيروهاي پايستار را دارد.

كار نيروي متغير در يك بعد



(الف) كار نيروى متغير تقريباً برابر با حاصل جمع مساحتهاى مستطيلهاست.



(ب) مساحت کلی زیر منحنی از $\int F_x dx$ به دست می‌آید.

$$W \approx \sum F_n \Delta x_m$$

$$\lim_{\Delta x \to o} \left(\sum F_n \Delta x_n \right) = \int F_x \, d_x$$

$$W_{A \to B} = \int_{x_A}^{B} F_x \, d_x$$

قضيه ***كار – انرژي جنبشي*** در يك بعد

$$W = F\Delta x = ma\Delta x$$

$$v_f^2 - v_i^2 = 2a\Delta x$$

$$W = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

$$W_{\text{خالص}} = \Delta K$$

توان (آهنگ انجام کار)

$$\overline{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

توان متوسط

$$P = \frac{dW}{dt}$$

توان لحظه‌اي

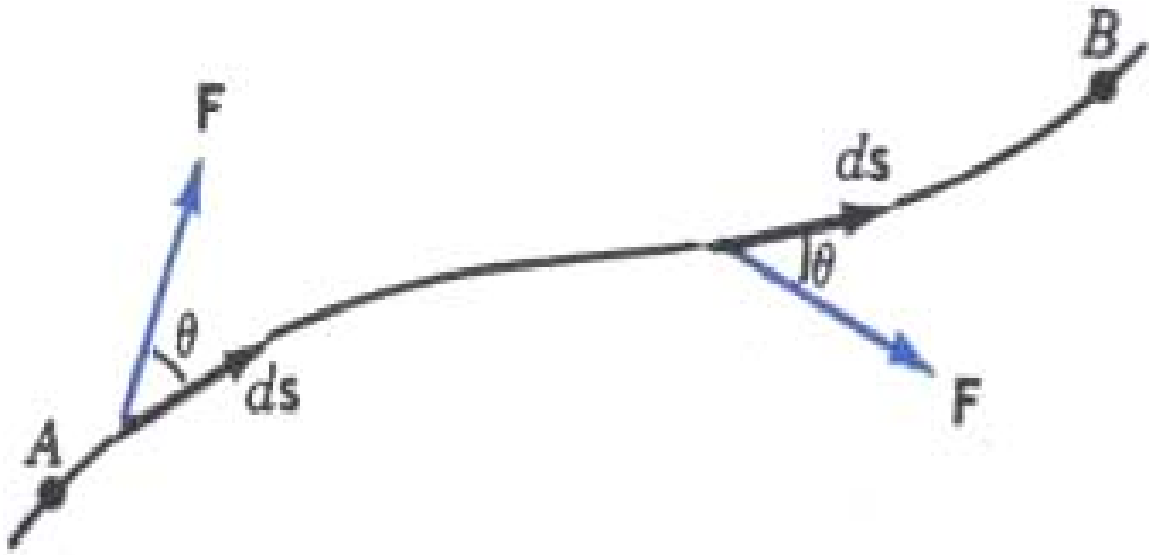
$$\frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{\vec{ds}}{dt}$$

$$P = \vec{F} \cdot \vec{V}$$

- يكاي **SI** توان **J/S** است كه (به افتخار جيمز وات) وات (**W**) ناميده مي‌شود.

$$(۱hp = ۷۴۶W)$$

کار و انرژي در سه بعد



ذره‌ای تحت اثر یک نیروی غیرثابت روی مسیر منحنی حرکت می‌کند.

$$dW = \vec{F}.d\vec{s}$$

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}.\overrightarrow{ds} = \int_A^B F\cos\theta\, ds$$

$$d\vec{s} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k},\quad \vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}$$

$$W_{A\to B} = \int_A^B F_x dx + \int_A^B F_y dy + \int_A^B F_z dz$$

مسائل فصل هفتم

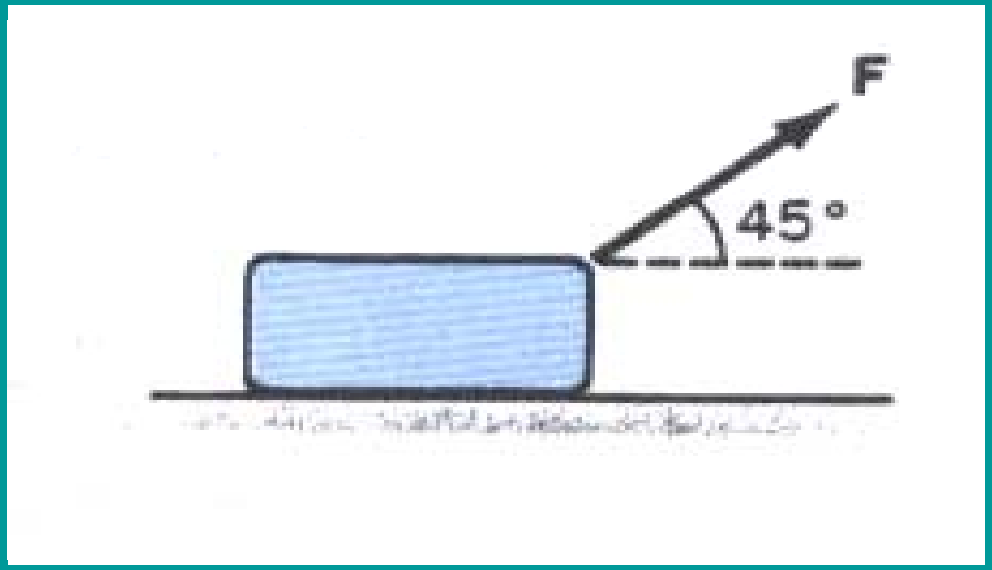
۱. ذره‌اي به جرم $0.3\,kg$ تحت اثر نيروي $\vec{F} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$

مكان اولية $\vec{r}_1 = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$

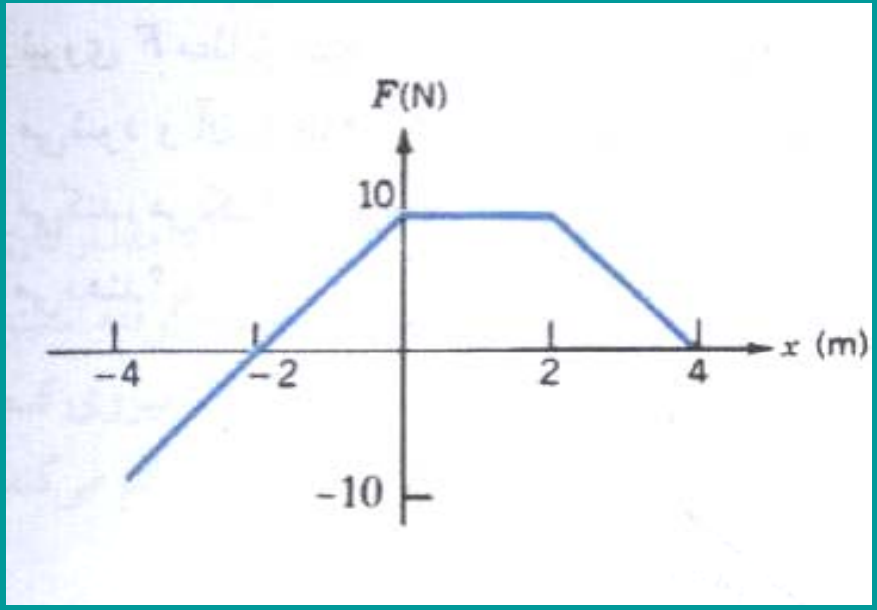
به مكان نهايي $\vec{r}_2 = 4\hat{i} - 3\hat{j} - k$

برده مي‌شود. كار اين نيرو روي ذره ، چقدر است ؟

۲. نیروي F مطابق شکل زیر تحت زاویهٔ 45° بالاي افق به جسمي به جرم $1.8kg$ وارد مي‌شود و آن را $2m$ روي يك سطح افقي كه ضريب اصطكاكش $\mu = 0.25$ است جابجا مي‌كند، هر يك از نيروهاي (الف) F، (ب) اصطكاك، و (ج) ثقل چقدر كار روي جسم انجام مي‌دهند؟



۳. نیرویي طبق نمودار شکل زیر با مکان تغییر مي‌کند. کاري که این نیرو (الف) از X=-۴ تا X=+۴m و (ب) از X=۰ تا X=-۲m انجام مي‌دهد چقدر است؟



۴. گلوله‌اي به جرم $۱۰g$ با سرعت $۴۰۰m/s$ به تنة درختي برخورد مي‌كند، به اندازة $۲٫۵cm$ در آن فرو مي‌رود و متوقف مي‌شود. نيروي متوسطي كه در حين فرو رفتن به گلوله وارد مي‌شود چقدر است؟

۵. با استفاده از قضية كار – انرژي، نشان بدهيد كه كمترين مسافت توقف (از ترمز تا ايست كامل) براي اتومبيلي كه با سرعت V در حركت است از رابطة به دست مي‌آيد كه در آن ضريب اصطكاك لغزشي چرخها با جاده است.

۶. اتومبيلي به جرم $۱۰۵۰\,kg$ براي حركت با سرعت ثابت $۸۰\,km/h$ به تواني برابر $۱۲\,hp$ نياز دارد. (الف) كل نيرويي كه در مقابل حركت اتومبيل مقاومت مي‌كند چقدر است؟ (ب) تواني كه بايد موتور به چرخها (ي عقب) بدهد تا اتومبيل بتواند با همين سرعت از يك شيب ۱۵° بالا برود چقدر است؟

۷. نيروي خارجي لازم براي آنكه فنري را به اندازهٔ X منبسط كند به صورت $F(X)=۱۶X+۰ر۵X^۳\,N$ است. براي انبساط اين فنر از $X=۱\,m$ تا $X=۲\,m$ چقدر كار لازم است؟

۸. قضية كار-انرژي را در مورد حركت سه بعدي ، تحت اثر نيروي متغير ، اثبات كنيد.

فصل هشتم: پايستگي انرژي

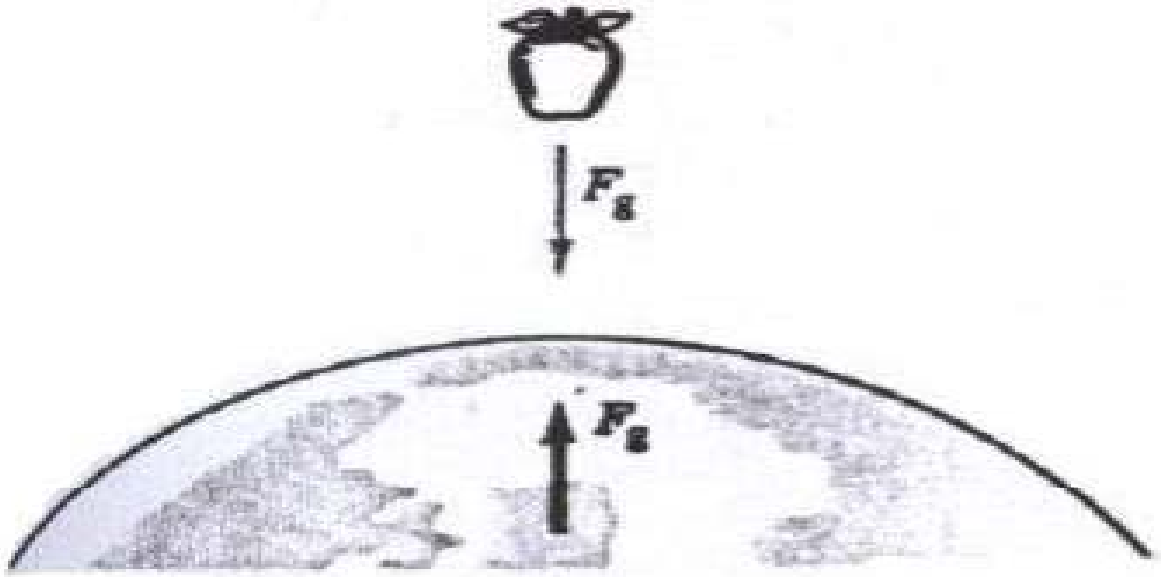
هدف كلي

- آشنايي با مفهوم انرژي پتانسيل و قانون پايستگي انرژي مكانيكي

مطالب اين فصل:

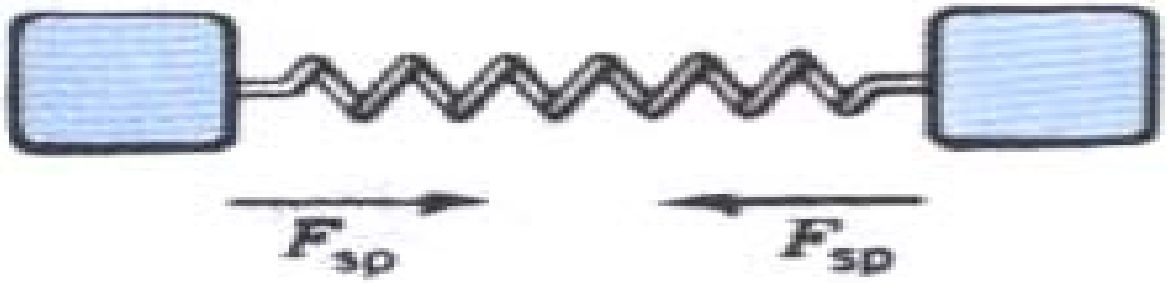
- انرژي پتانسيل
- نيروهاي پايستار
- انرژي پتانسيل در نيروي پايستار
- تابع انرژي مكانيكي
- انرژي مكانيكي در نيروهاي ناپايستار
- نيروي پايستار و تابع انرژي پتانسيل

انرژي پتانسيل



(الف)

انرژی پتانسیل متعلق به هر دو جسمی است که با یکدیگر بر هم کنش دارند. در (الف) این انرژی متعلق به سیستم سیب – زمین است.

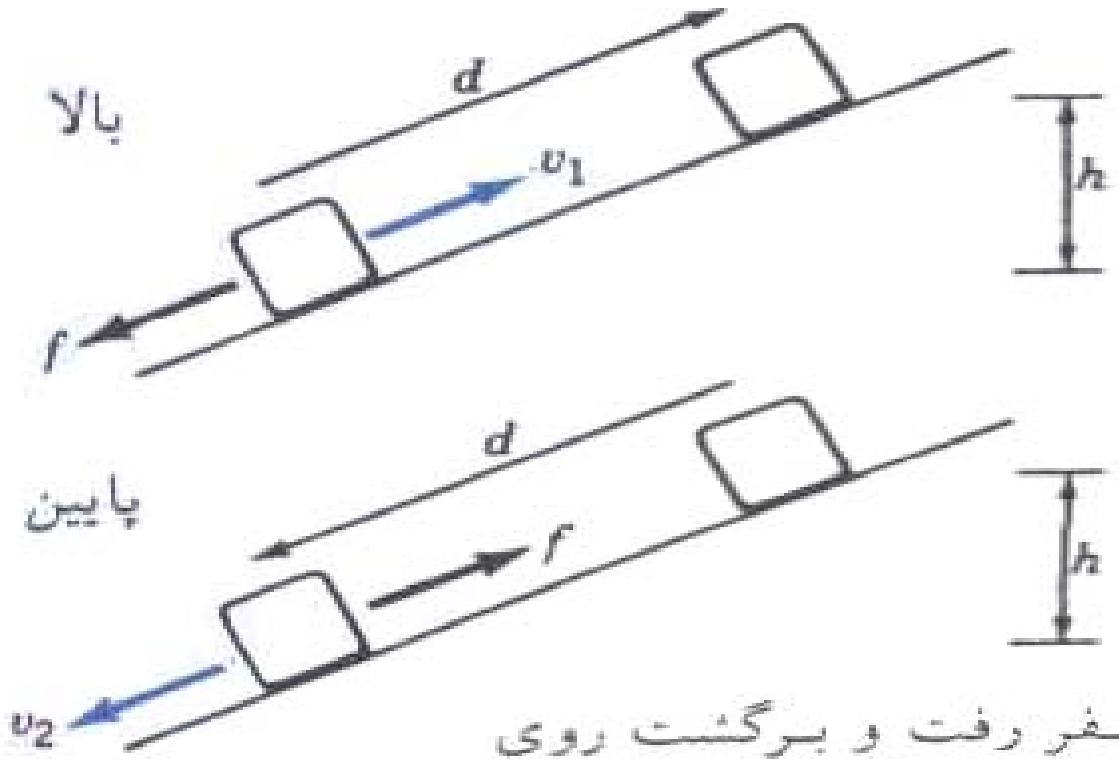


(ب)

در (ب) انرژی پتانسیل در فنر ذخیره می‌شود.

- انرژي پتانسيل يك سيستم عبارت است از كار خارجي لازم براي آنكه اجزاي سيستم را با سرعت ثابت از وضعيت $U=0$ به وضعيت مشخص ديگري در بياورد.

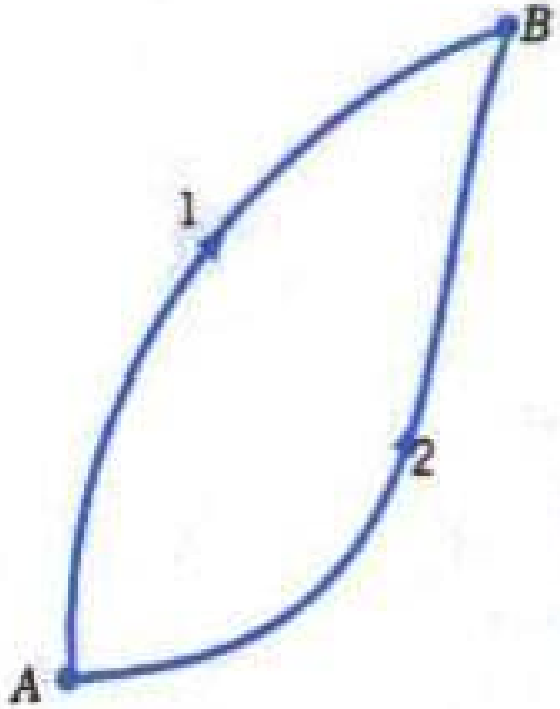
نيروهاي پايستار



در یک سفر رفت و برگشت روی سطح شیبدار، کار نیروی ثقل صفر است ولی کار نیروی اصطکاک مقداری منفی است.

- ثقل نيرويي پايستار است ولي اصطكاك ناپايستار.
- فقط به نيروهاي پايستار مي‌شود انرژي پتانسيل وابسته كرد.

خواص نیروهاي پایستار



کار نیروی پایستار از نقطهٔ A تا نقطهٔ B برای هر دو مسیری مثل مسیرهای ۱ و ۲ یکسان است.

$$W^{(1)}_{A\to B} = W^{(2)}_{B\to A}$$

$$\cdot\ W^{(2)}_{A\to B} = -\ W^{(2)}_{B\to A}$$

$$W^{(1)}_{A\to B} + W^{(2)}_{B\to A} = o$$

➢ يعني كار نيروي پايستار در طي هر مسير بسته‌اي صفر است.

انرژي پتانسيل در نيروهاي پايستار

انرژي پتانسيل برحسب كار نيروي پايستار

$$W_c = -\Delta U = -(U_f - U_i)$$

براي نيروي متغير در سه بعد

$$dU = -dW_c = -\vec{F}_c.d\vec{s}$$

$$U_B - U_A = -\int_A^B \vec{F}_c.d\vec{s}$$

تابع انرژي پتانسيل

در مورد نيروي ثقل

$$W_g = -mg(y_f - y_i)$$

از طرفي

$$W_g = -\Delta U_g = -(U_f - U_i)$$

بنابراين (اگر مرجع پتانسيل در $y = 0$ و انرژي

پتانسيل در اين نقطه $U_g = 0$ باشد:

$$U_g = mgy$$

به همين ترتيب براي نيروي فنر هم خواهيم داشت:

$$U_s = \frac{1}{2} k x^2$$

پايستگي انرژي مكانيكي

اگر ذره‌اي فقط تحت تاثير نيروهاي پايستار باشد:

$$\begin{cases} W_c = \Delta k \\ W_c = -\Delta U \end{cases}$$

قضية كار – انرژي

تعريف انرژي پتانسيل

بنابراين:

$$\Delta k = -\Delta U$$

يا

$$\Delta k + \Delta U = o$$

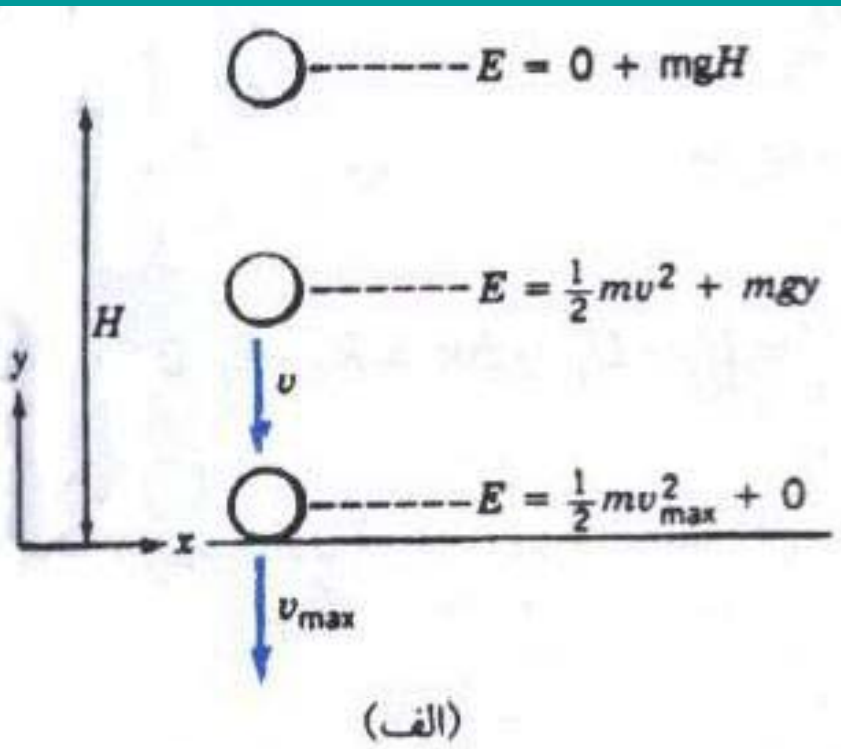
$$k_f + U_f = k_i + U_i$$

برحسب انرژيهاي اوليه و نهايي

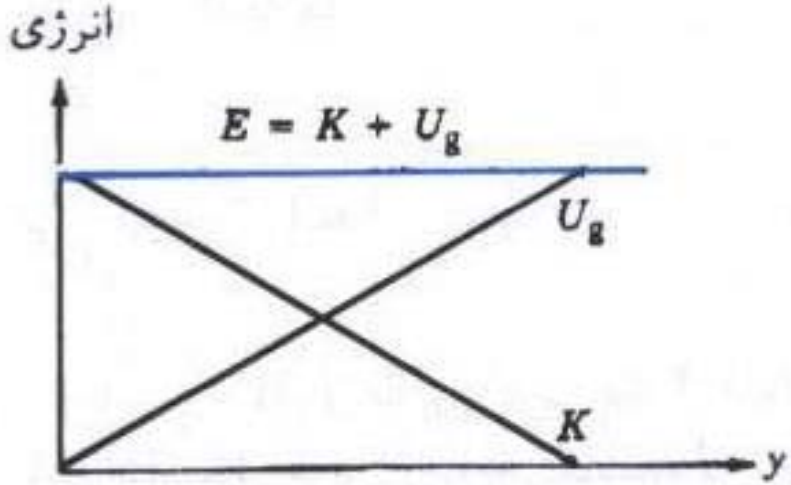
$$E_f = E_i \text{ يا } \Delta E = o$$

برحسب انرژيهاي مكانيكي

پایستگي انرژي مکانيکي در سقوط آزاد



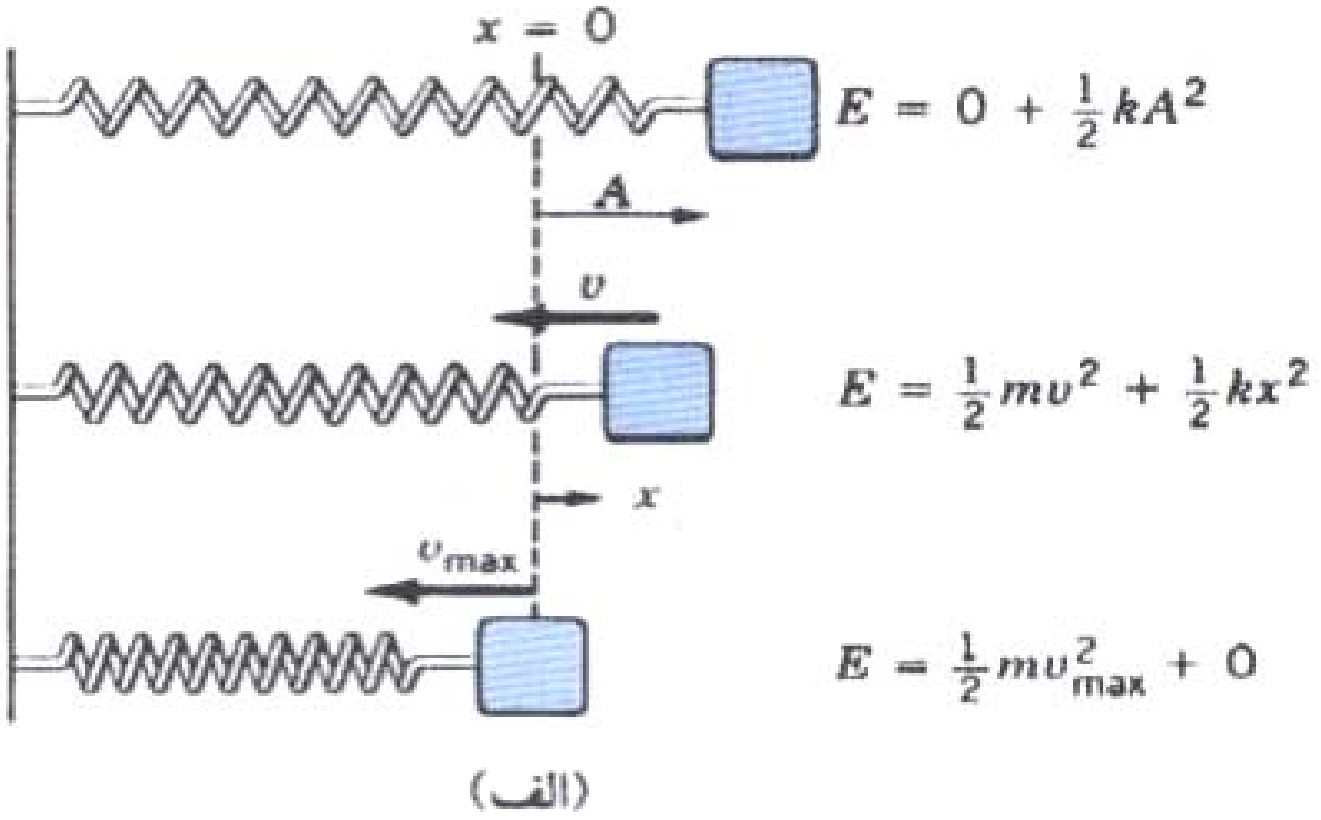
(الف)



(ب)

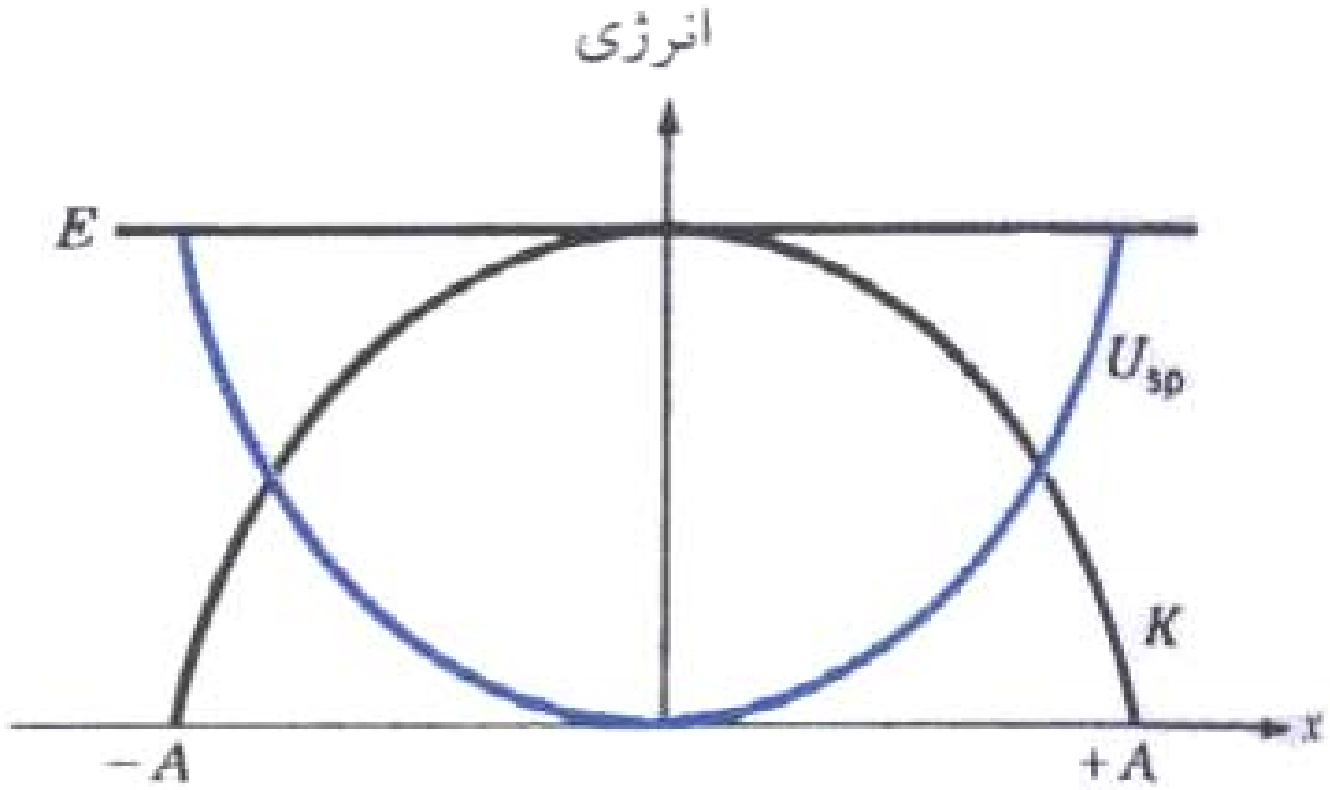
(الف) جسمی از ارتفاع H سقوط می‌کند و در حین حرکت انرژی پتانسیل آن به انرژی جنبشی تبدیل می‌شود. (ب) انرژیهای پتانسیل و جنبشی بر حسب ارتفاع y به صورت خطی تغییر می‌کنند اما مجموع این انرژیها در تمام لحظات ثابت می‌ماند.

پایستگي انرژي مکانيکي در سيستم وزنه و فنر



(الف)

(الف) در حداکثر انبساط فنر یعنی در $x=A$، انرژی سیستم برابر $E=\frac{۱}{۲}kA^{۲}$ است. در $x=۰$، انرژی سیستم $E=\frac{۱}{۲}mv_{max}^{۲}$ است.



(ب)

(ب تغییرات k و U با x انرژی

سیستم وزنه ـ فنر درحین حرکت ($E=\frac{۱}{۲}mv^{۲}+\frac{۱}{۲}kx^{۲}$) مقدار ثابتی است.

نكاتي درباره كاربرد پايستگي انرژي در حل مسائل:

۱. درحالت كلي ممكن است بيش از يك ذره در انرژي جنبشي سيستم سهيم باشد ، و امكان دارد بيش از يك نوع انرژي پتانسيل (مثلاً هم پتانسيل گرانشي و هم پتانسيل فنر) در كار باشد.

۲. اگر اصل پايستگي انرژي مكانيكي را به صورت

$$Kf+Uf=ki+Ui$$

به كار مي‌برید ، باید سطح مرجع پتانسیل ، (یعني U=°) را مشخص کنید. در مورد فنر همیشه مکان مرجع (Us=°) را در X=° بگیرید. در مورد پتانسیل ثقلي ، هر سطح مناسب مثلاً سطح زمین یا سطح میز را مي‌توانید به عنوان سطح مرجع (Ug=°) انتخاب کنید ،

اما اگر این مرجع در پایین‌ترین سطح مطرح شده در مسئله انتخاب شود، خوبي‌اش این خواهدبود که همة مقادیر پتانسیل نسبت به آن مثبت خواهند بود. اگر هم با Us و هم با Ug سر و کار داشته باشیم، لزومي ندارد که سطح مرجع آنها یکي باشد.

اگر از شکل $\Delta K+\Delta U=0$ استفاده مي‌کنيد، نيازي نيست که براي انرژي پتانسيل سطح مرجع در نظر بگيريد، چون در اين شکل فقط تغييرات اين انرژي مطرح است، اما بايد مواظب باشيد که علامت اين تغييرات را درست تعيين کنيد.

انرژي مكانيكي و نيروي ناپايستار

وقتي هم نيروي پايستار و هم نيروي ناپايستار
در سيستم داشته باشيم:

$$W_{\text{كل}} = W_c + W_{Nc} = \Delta k$$

$$W_c = -\Delta U$$

$$W_{Nc} = \Delta K + \Delta U$$

يا

$$\Delta E = E_f - E_i = W_{Nc}$$

نيروي پايستار و تابع انرژي پتانسيل

در يك بعد:

$$dU = -F_c\, dx$$

$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

به طور كلي ، هر مؤلفة يك نيروي

پايستار برابر با منفي مشتق تابع

انرژي پتانسيل در جهت همان محور است.

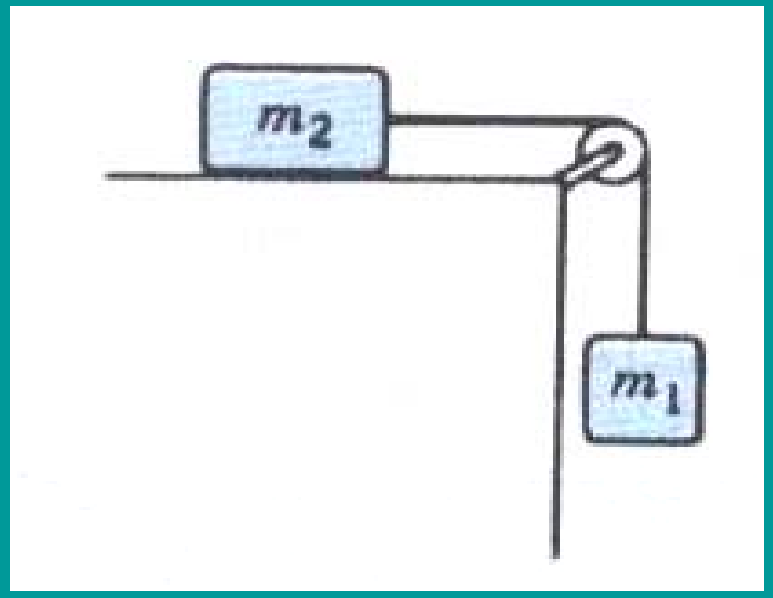
علامت منفي متضمن اين معني است

كه نيرو در جهت كاهش انرژي پتانسيل است.

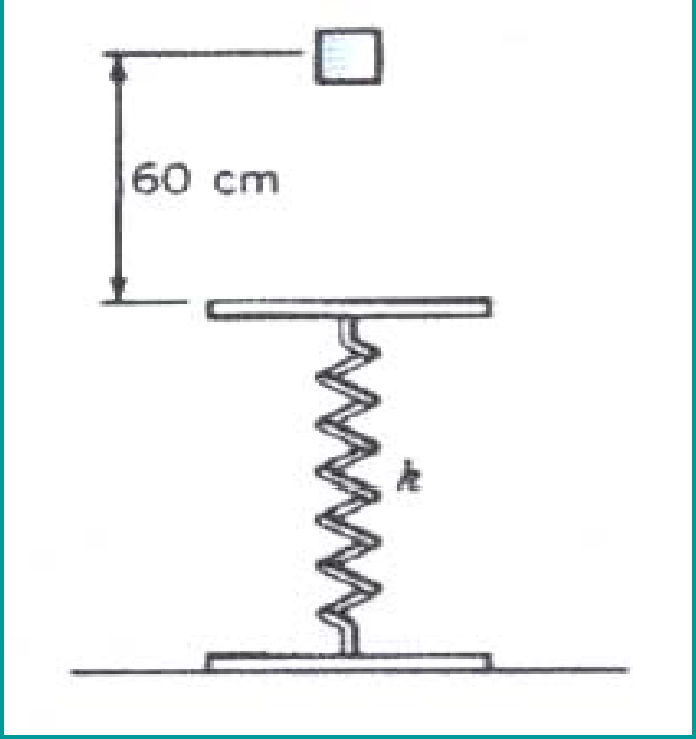
مسائل فصل هشتم

۱. در سيستمي كه در شكل زير نشان داده شده، $m_۱$=۰٫۵kg و $m_۲$=۱٫۵ kg است. سطح افقي اصطكاك ندارد و جرم قرقره ناچيز است.

اگر جرمها در ابتدا بي‌حركت باشند، سرعت $m_۱$ در لحظه‌اي كه به اندازة ۶۰ cm سقوط كرده چقدر است؟



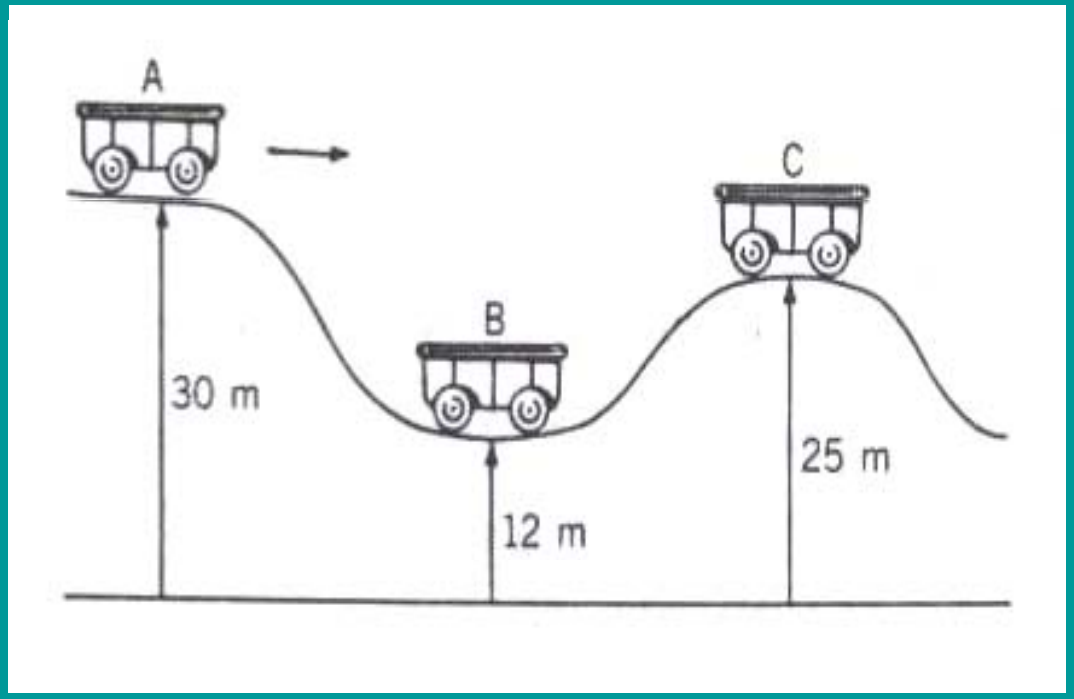
۲. قطعه‌اي به جرم g ۵۰۰ از ارتفاع cm ۶۰ روي فنر قائمي با ثابت N/m ۱۲۰ سقوط مي‌كند (شكل زير). حداكثر انقباض اين فنر چقدر خواهد بود؟ (پيدا كردن جواب مستلزم حل يك معادله درجه دو است).



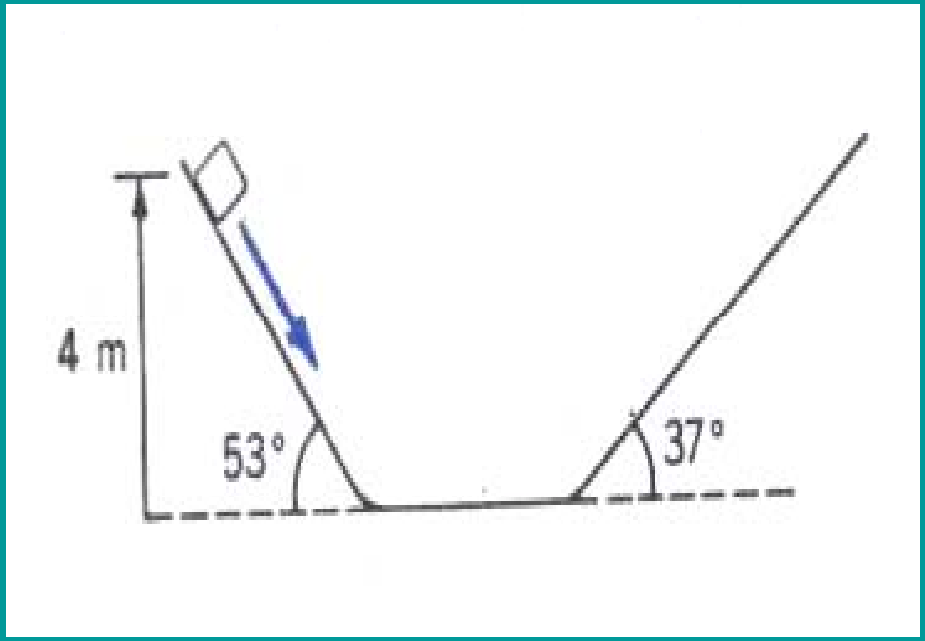
۳. در يك پارك تفريحي ارابه‌اي روي مسيري كه در شكل زير نشان داده شده است حركت مي‌كند. جرم ارابه و مسافران آن $۶۰۰\ kg$ است. سرعت ارابه در نقطة A برابر با $۱۲\ m/s$ است.

فرض كنيد اصطكاك ناچيز است ، و سرعت اين ارابه را در نقاط B و C پيدا.

كنيد ارتفاع نقاط A و B و C از سطح زمين به ترتيب $۳۰\ m$ ، $۱۲\ m$ ، و $۲۵\ m$ است.

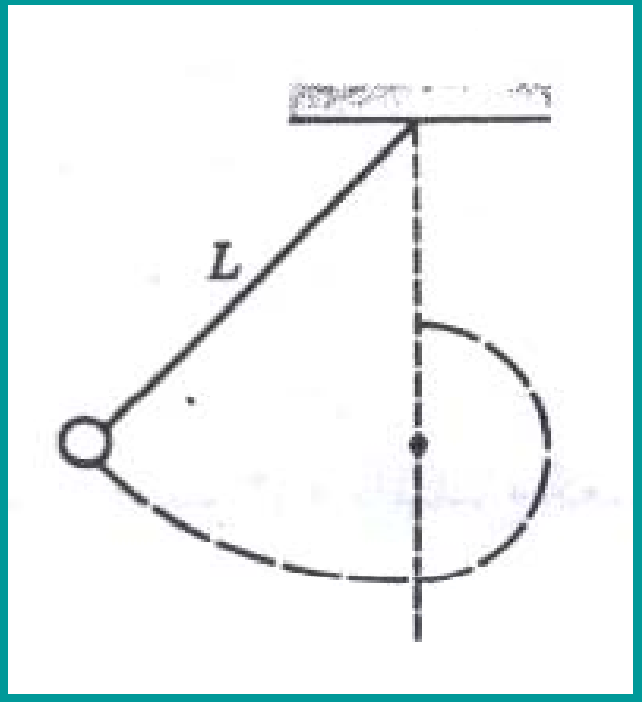


۴. در شكل زير ، مكعبي به جرم kg ۱ در ارتفاع m ۴ از سطح زمين روي سطح شيبداري به زاوية $^\circ$ ۵۳ با سرعت m/s ۲ در حال پايين آمدن است. اين مكعب در پايين شيب يك مسير افقي به طول m ۳ را مي‌پيمايد و سپس از شيب $^\circ$ ۳۷ بالا مي‌رود. اگر ضريب اصطكاك جنبشي براي تمام قسمتهاي مسير ۴ر ۰ باشد ، مكعب تا چه ارتفاعي مي‌تواند خودش را از شيب $^\circ$ ۳۷ بالا بكشد؟

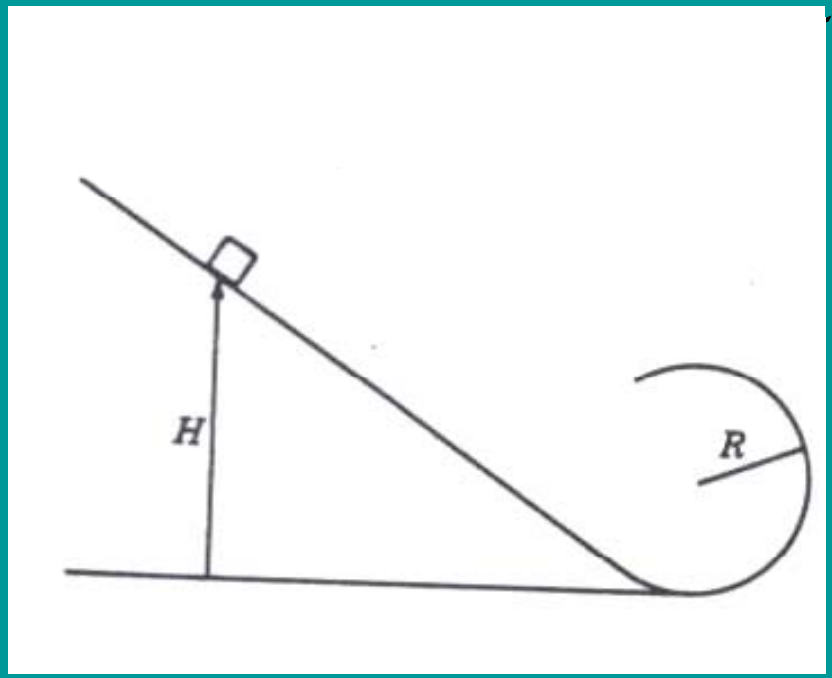


۵. ذره‌اي تحت اثر نيروي ثابت $\vec{F} = ۲\mathbf{i} - ۵\mathbf{j}$ از نقطهٔ $۳\mathbf{i} + ۵\mathbf{j}$ به نقطهٔ $-۱۲\mathbf{i} + ۱۵\mathbf{j}$ تغيير مکان مي‌دهد. کار انجام يافته توسط اين نيرو را محاسبه کنيد.

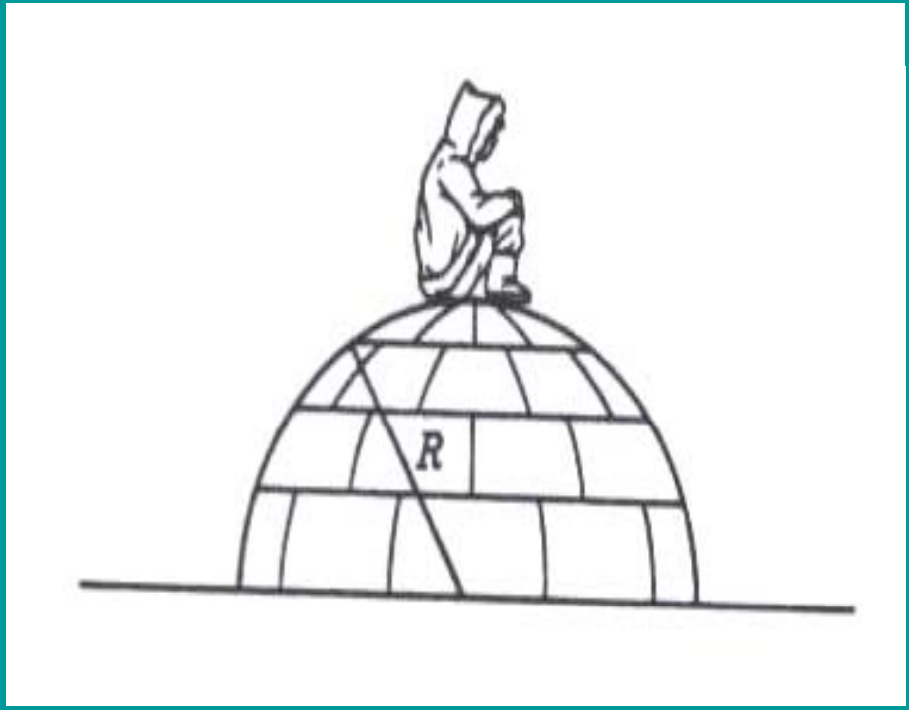
۶. گلولهٔ آونگي به طول L را از وضعي که نخ آن افقي است رها مي‌کنيم. ميخي در پايين‌تر از نقطهٔ آويز واقع شده است (نيروي آويز نخ در هر لحظه بر راستاي حرکت گلوله عمود است). تغيير انرژي پتانسيل گلوله را در اين حرکت بيابيد. ميخ در کدام فاصله از نقطهٔ آويز واقع شده است؟ نشان بدهيد که کمترين مقدار V براي آنکه گلولهٔ آونگ بتواند دايرهٔ کاملي را به دور ميخ طي کند برابر با $۳L/۵$ است.



۷. در شکل زیر ، قطعه‌اي به جرم m از ارتفاع H روي مسير شيبدار بدون اصطكاكي مي‌لغزد. اين مسير در انتهايش به صورت دايرة قائمي به شعاع R در مي‌آيد. (الف) حداقل H بايد چقدر باشد تا قطعه در بالاترين نقطة دايره از مسير جدا نشود ؟ (ب) اگر قطعه از ارتفاعي برابر با دو برابر اين ارتفاع حداقل ، شروع به حركت كند ، نيرويي طرف مسير به آن وارد مي‌شود چقدر است ؟



۸. كودكي در آلاسكا از بالاي يك كومة يخي به شكل نيمكره‌اي به شعاع R ، از حالت سكون شروع به لغزش مي‌كند. فرض كنيد اصطكاك ناچيز است. (الف) در چه زاويه‌اي ، نسبت به خط قائم ، تماس كودك با سطح قطع مي‌شود. (يعني از سطح جدا مي‌شود ؟) (ب) اگر اصطكاك وجود داشت آيا اين قطع تماس در ارتفاع بيشتري اتفاق مي‌افتاد يا در ارتفاع كمتري ؟

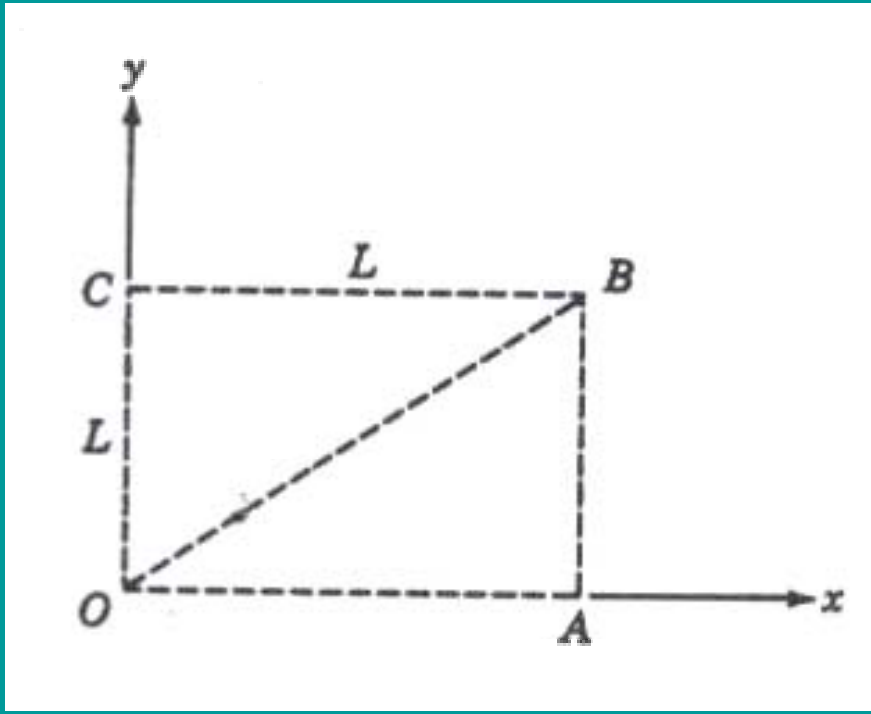


۹. نیرویي به صورت $\vec{F}=(2xy,x^2)$ تغییر می‌کند. با توجه به شکل زیر ،

حاصل را از نقطهٔ O تا نقطه B از طریق مسیرهای زیر محاسبه کنید:

(الف) OA و سپس AB ؛ (ب) OC و سپس CB ، آیا این نیرو پایستار

است ؟



فصل نهم: تكانه خطي

هدف كلي

- آشنايي بامفهوم تكانه خطي و اصل پايستگي تكانه خطي

مطالب اين فصل:

- تكانه خطي
- پايستگي تكانه خطي
- برخورد الاستيك در يك بعد
- ضربه
- مقايسه تكانه خطي با انرژي جنبشي

تكانه خطي

$$\vec{P} = m\vec{v}$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

صورت كلي قانون دوم

پايستگي تكانه خطي يك ذره در غياب نيرو

$$\vec{F} = o \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = o \Rightarrow \vec{p} =$$ ثابت

پايستگي تكانه خطي دربرخورد

در برخورد دو ذره:

$$\vec{F}_{21} = \frac{d\vec{p}_2}{dt} \quad , \vec{F}_{12} = \frac{d\vec{p}_1}{dt}$$

$$\Delta\vec{P}_1 = \int_t \vec{F}_{12}\, dt = \vec{F}_{12}\Delta t$$

$$\Delta \vec{P}_2 = \int_t \overrightarrow{F}_{21} dr = \vec{F}_{21} \Delta t$$

$$\overrightarrow{\vec{F}}_{12} = -\overrightarrow{\vec{F}}_{21}$$

$$\Delta \vec{P}_1 = -\Delta \vec{P}_2$$

$$\Delta \vec{P}_1 + \Delta \vec{P}_2 = \text{o}$$

پايستگي تكانه خطي در غياب نيروي خارجي

در برخورد دو ذره ، در حضور نيروهاي خارجي **Fe**:

$$\vec{F}_{1e} + \vec{F}_{12} = \frac{d\vec{p}_1}{dt}$$ (براي m_1)

$$\vec{F}_{2e} + \vec{F}_{21} = \frac{d\vec{p}_2}{dt}$$ (براي m_2)

اگر این معادلات را جمع کنیم:

$$(\vec{F}_{1e} + \vec{F}_{2e}) = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{P}_1 + \vec{P}_2)$$

$$\sum \vec{F}_{iE} = \frac{d}{dt} \sum \vec{P}\, i$$

يعني

يا (براي هر سيستمي با هر تعداد ذره)

$$\vec{F}_{Ext} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

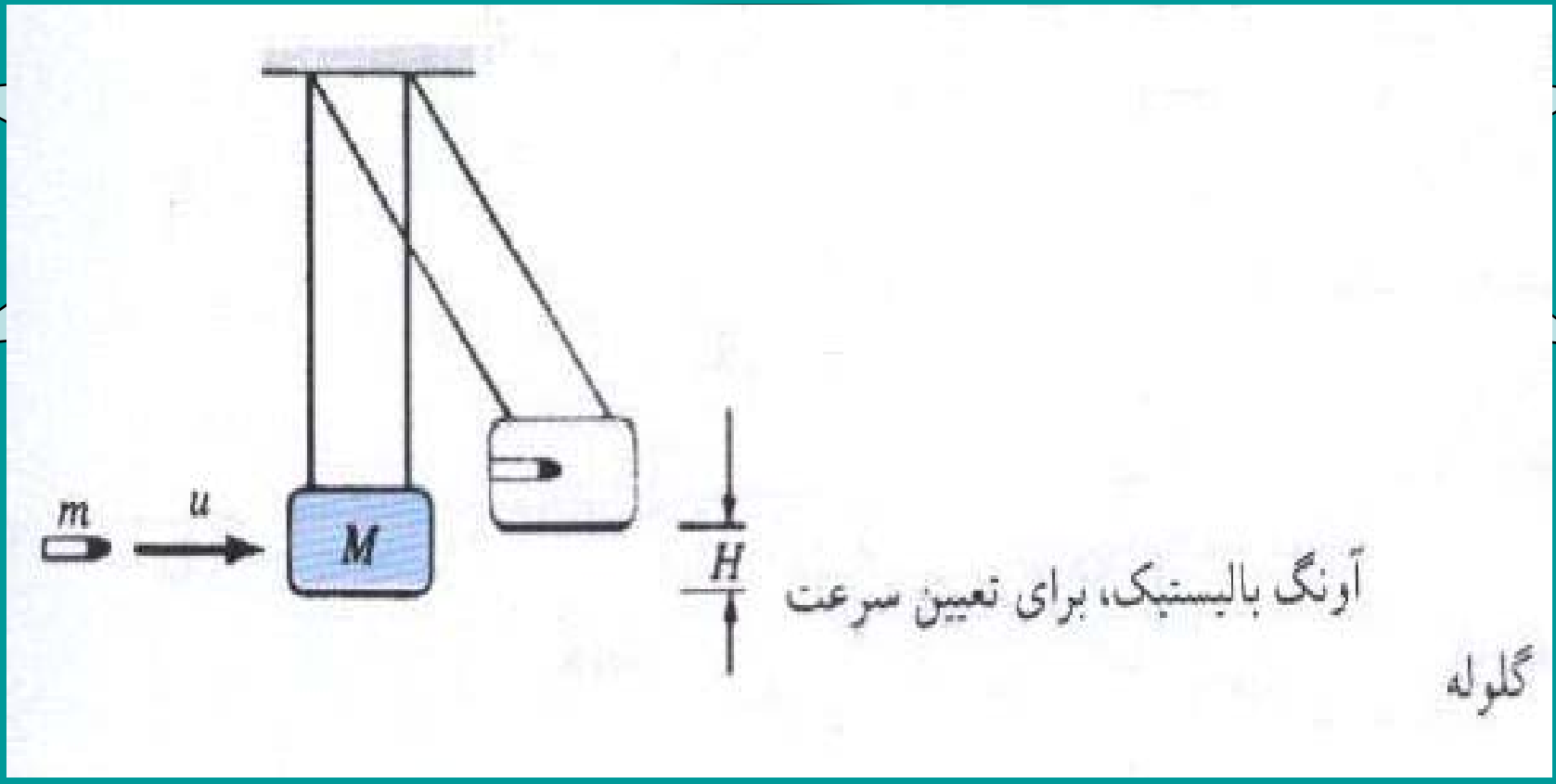
انواع برخورد

الاستيك تكانه خطي و انرژي جنبشي سيستم ثابت مي‌ماند.

غير الاستيك فقط تكانه خطي سيستم ثابت مي‌ماند.

- در برخورد غيرالاستيك ، انرژي جنبشي كل ذرات تغيير مي‌كند. مقداري از انرژي جنبشي صرف تغيير شكل يا ساختار داخلي مي‌شود
- در برخورد كاملاً غيرالاستيك دو جسم كاملاً به هم جفت مي‌شوند يا مي‌چسبند.

آونگ بالستیك



آونگ بالیستیک، برای تعیین سرعت گلوله

مرحله اول : برخورد کاملاً غیر الاستیک

$$mu=(m+M)V$$

مرحله دوم: تبدیل انرژي جنبشي به پتانسیل

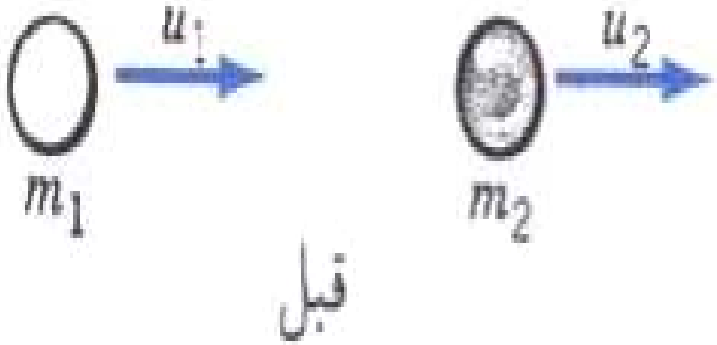
$$\frac{1}{2}(m+M)V^2=(m+M)gH$$

$$u=\frac{(m+M)}{m}\sqrt{2gH}$$

از این روابط

نتیجه مي‌شود

برخورد الاستيك در يك بعد



برخورد الاستیک دو گلوله در یک بعد. همهٔ سرعتها را در یک راستا گرفته‌ایم تا تحلیل مسئله ساده‌تر شود.

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2$$

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

$$m_1(u_1 - u_1) = m_2(v_2 - u_2)$$

$$m_1(u_1^2 - u_1^2) = m_2(v_2^2 - u_2^2)$$

$$v_2 - v_1 = -(u_2 - u_1)$$

از روابط فوق

نتيجه مي‌شود

در برخورد الاستيك يك بعدي ، سرعت نسبي ذرات (قبل و بعد از برخورد) از لحاظ مقدار تغييري نمي‌كند ولي از لحاظ جهت معكوس مي‌شود.

حالت خاص: جرمهاي برابر $m_1 = m_2 = m$

$$\begin{cases} u_1 + u_2 = v_1 + v_2 \\ u_1 - u_2 = -v_1 + v_2 \end{cases}$$

(تكانه)

(سرعت نسبي)

و نتيجه مي‌شود كه

$$v_1 = u_2 \text{ و } v_2 = u_1$$

در واقع دو جسم در برخورد سرعتهايشان را با هم عوض مي‌كنند.

جرم‌هاي نامساوي و هدف ساكن $(u = 0)$

در اين صورت داريم:

$$\begin{cases} m_1 u_1 = m_2 v_1 + m_2 v_2 & \text{(تكانه)} \\ v_2 - v_1 = u_1 & \text{(سرعت نسبي)} \end{cases}$$

با استفاده از اين معادلات مي‌توانيم سرعتهاي نهايي را بر حسب u_1 پيدا كنيم.

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1$$

$$v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1$$

ضربه

ضربة وارد بر يك ذره ، طبق تعريف ، برابر با تغيير تكانة خطي آن ذره است:

$$\vec{I} = \Delta \vec{P} = \vec{P}_f - \vec{P}_i$$

بنابراين ، ضربه (I) هم يك كميت برداري است و با همان يكاي تكانة خطي ، يعني kg.m/s اندازه‌گيري مي‌شود. توجه كنيد كه ضربه هميشه در جهت تغيير تكانه است.

و چون $\frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t}$ است. $\vec{F}$

پس

$$\vec{I} = \Delta \vec{P} = \vec{F}\, \Delta t$$

يعني در يك ضربه هر چه زمان برخورد كوتاهتر باشد نيروي بيشتري به جسم اثر مي‌كند.

تكانه خطي و انرژي جنبشي

$$\Delta \vec{P} = \vec{F} \Delta t$$

$$\Delta k = F \Delta x$$

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} \quad \text{و} \quad F = \frac{\Delta k}{\Delta x}$$

يعني نيرو به عبارتي آهنگ تغيير تكانة خطي نسبت به زمان است و ، به عبارتي ديگر ، آهنگ تغيير انرژي جنبشي نسبت به مكان ، اگر نيرو ثابت نباشد ، از اين دو عبارت مقادير متفاوتي براي «متوسط» نيرو به دست مي‌آيد ، چون يكي ميانگين زماني است و ديگري ميانگين مكاني.

مسائل فصل نهم

۱. يك گلوله ۲۰ گرمي و يك دوندة ۶۰ كيلوگرمي را در نظر بگيريد.

(الف) اگر تكانة آنها مساوي باشد ، نسبت انرژيهاي جنبشي‌شان چقدر است ؟

(ب) اگر انرژي جنبشي آنها برابر باشد ، نسبت تكانه‌هايشان چقدر است ؟

۲. يك جسم ۱۰ كيلوگرمي كه سرعت m/s ۶ در حركت است $\vec{i}$

ناگهان منفجر و به دو قطعة مساوي تقسيم مي‌شود. يكي از قطعه‌ها با

سرعت m/s پرتاب مي‌شود $\vec{j}$. سرعت قطعة دوم چقدر است ؟

۳. جسمي به جرم m_1=۲ kg كه با سرعت u_1 در حركت است با جسم ساكني به جرم m_2=۳ kg به طور كاملاً غيرالاستيك برخورد مي‌كند ؛ اين برخورد يك بعدي است. اگر ۶۰ J انرژي جنبشي در اين برخورد تلف شده باشد ، u_1 چقدر است ؟

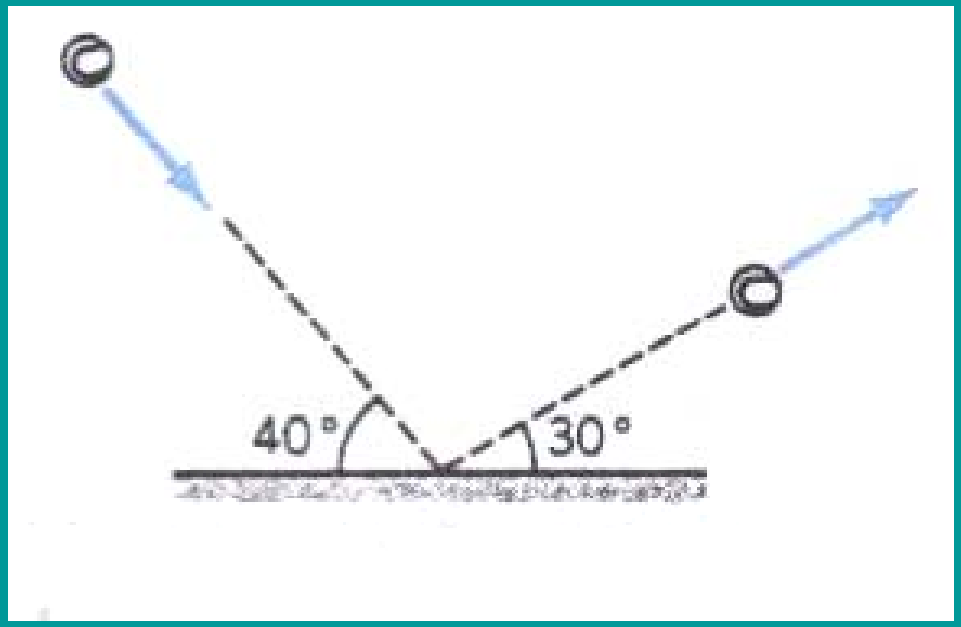
۴. يك وانت به جرم ۱۵۰۰ kg كه با سرعت ۲۰ m/s در حركت است از عقب به يك سواري به جرم ۱۰۰۰ kg كه پشت چراغ قرمز متوقف شده است مي‌زند. اتومبيل‌ها درهم گير مي‌كنند. اگر ضريب اصطكاك جنبشي ميان لاستيك و آسفالت ۰٫۵ μ_k= باشد تعيين كنيد كه اين مجموعه (با چرخهاي قفل شده) چقدر روي زمين كشيده مي‌شود ؟ فرض كنيد سرعت مجموعه در همان امتداد سرعت اولية وانت است.

۵. گلوله‌اي به جرم g ۱۵ به طور افقي به يك مكعب چوبي به جرم kg ۲ كه در انتهاي سيمي به طور m ۱٫۲ آويزان شده است شليك مي‌شود و در آن فرو مي‌رود. پس از برخورد ، مكعب به حركت در مي‌آيد و سيم تا $^{\circ}$ ۲۰ از امتداد قائم منحرف مي‌شود. (الف) سرعت اولية گلوله ، و (ب) درصد اتلاف انرژي جنبشي را حساب كنيد.

۶. گلولهٔ آونگي به جرم m از ارتفاع H ، نسبت به پايين‌ترين وضعيتش ، رها مي‌شود و در پايين‌ترين نقطهٔ مسير با گلولهٔ ساكن آونگ ديگري به جرم m۲ برخورد مي‌كند. طول نخ آونگها مساوي است. (الف) اگر برخورد كاملاً غيرالاستيك باشد ، مجموعهٔ گلوله‌ها تا چه ارتفاعي بالا مي‌رود ؟ (ب) اگر برخورد صددرصد الاستيك فرض شود ، هر يك از گلوله‌ها تا چه ارتفاعي بالا مي‌رود ؟

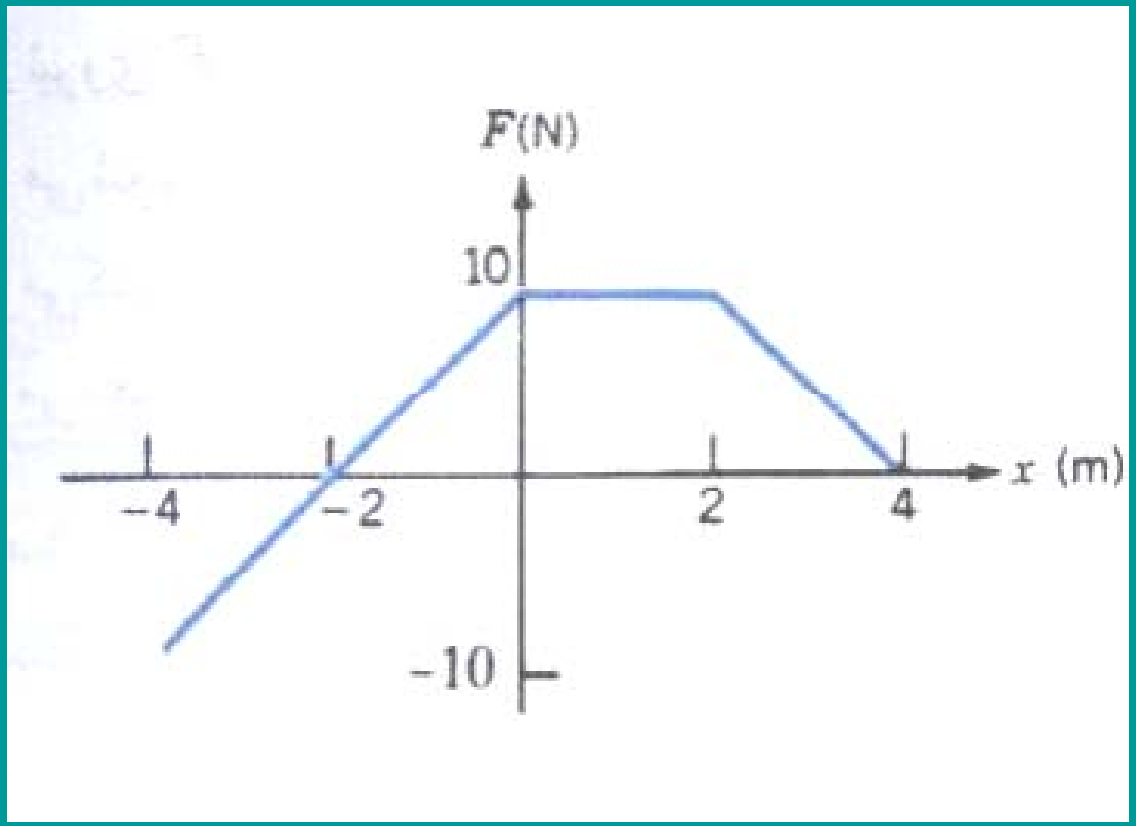
۷. يك گلولة ۱۰ گرمي با سرعت $۴۰۰\ m/s$ به يك قالب چوبي شليك مي‌شود و با سرعت $۱۰۰\ m/s$ از طرف ديگر قالب بيرون مي‌آيد. اگر گلوله به مدت $۰٫۱\ s$ در قالب در حركت بوده باشد ، چه نيروي متوسطي به آن وارد كرده است ؟

۸. يك توپ تنيس به جرم $۶۰\ g$ با سرعت $۲۵\ m/s$ تحت زاوية ۴۰° نسبت به افق به زمين مي‌خورد و با سرعت $۲۰\ m/s$ تحت زاويه ۳۰° نسبت به افق وامي‌جهد (نگاه كنيد به شكل زير). (الف) ضربة وارد بر توپ را پيدا كنيد. (ب) به فرض انكه اين برخورد $۵\ ms$ طول كشيده باشد ، نيروي متوسط وارد بر توپ را پيدا كنيد.



۹. از منحني F برحسب t در شكل زير ، كميتهاي زير را حساب كنيد:

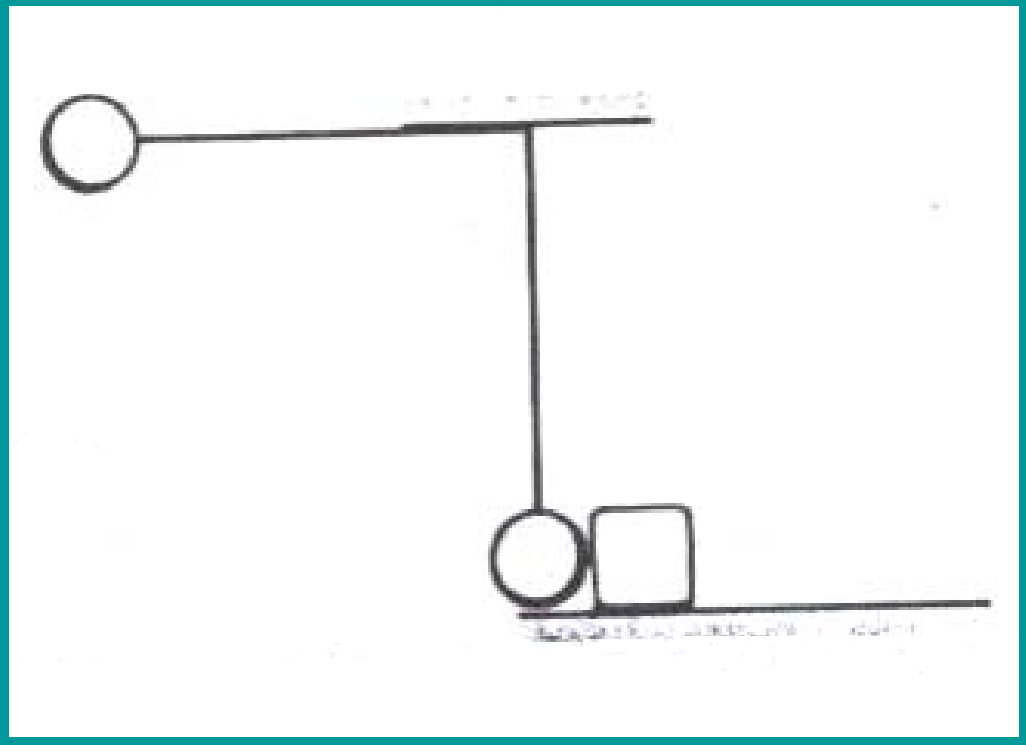
(الف) ضربه ، و (ب) نيروي متوسط.



۱۰. دو ذره به جرمهاي $m_۱$ و $m_۲$ با سرعتهاي $u_۱$ و $u_۲$ از روبرو باهم برخورد مي‌كنند و به هم مي‌چسبند. نشان بدهيد كه اتلاف انرژي در اين برخورد برابر است با

$$\frac{m_1 m_2 (u_1 + u_2)^2}{2(m_1 + m_2)}$$

۱۱. آونگي كه جرم گلوله‌اش $۵۰۰g$ و طول نخ آن $۱m$ است از وضعيت افقي رها مي‌شود (شكل زير) و با مكعبي به جرم M كه روي سطح بدون اصطكاكي قرار گرفته است به طور الاستيك برخورد مي‌كند. گلولة آونگ پس از برخورد تا چه ارتفاعي بالا مي‌رود ، در صورتي كه (الف) $M=۲ر۵kg$ و (ب) $M=۲۰۰g$ باشد؟



فصل دهم: سيستم ذرات

هدف كلي

- آشنايي با مفهوم مركز جرم و كاربرد معادلات حركت در مورد سيستم‌هاي ذرات و اجسام صلب.

مطالب اين فصل:

- مركز جرم
- مركز جرم اجسام
- حركت مركز جرم
- انرژي جنبشي سيستم ذرات

مرکز جرم (سیستم متشکل از ذرات)

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \ldots + m_N \vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N}$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}$$

که در آن $M = \Sigma\, m_i$ جرم کل سیستم است. مؤلفه‌هاي رابطة بالا عبارتند از

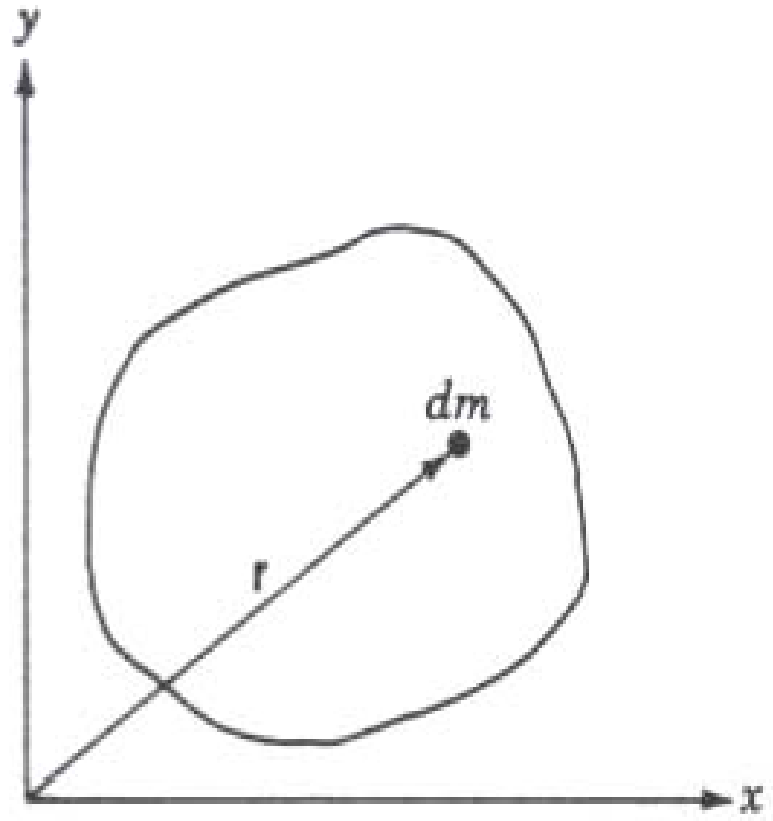
$$x_{CM} = \frac{\sum m_i x_i}{M} \quad ,$$

$$y_{CM} = \frac{\sum m_i y_i}{M} \quad ,$$

$$z_{CM} = \frac{\sum m_i z_i}{M}$$

مرکز جرم در واقع نوعي «مکان ميانگين» اجزاي سيستم است.

مرکز جرم اجسام جامد



شکل ۷. برای پیدا کردن مرکز جرم یک سیستم پیوسته باید سهم همهٔ عناصر dm را که تعدادشان بینهایت زیاد است به حساب بیاوریم. یعنی باید از این سهمها روی تمام جسم انتگرال بگیریم.

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\, dm$$

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\, dm \quad ,$$

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\int y\, dm \quad ,$$

$$z_{CM} = \frac{1}{M}\int z\, dm$$

حرکت مرکز جرم

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}$$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{M}$$

$$M\vec{v}_{CM} = \sum m_i \vec{v}_i = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \Lambda + m_N\vec{v}_N$$

$$\vec{P} = M \vec{v}_{CM}$$

يعني تكانة كل سيستم معادل است با تكانة تك ذره‌اي

(فرضي) به جرم M كه با سرعت $\vec{v}_{CM}$ در حركت باشد.

$$\frac{d}{dt}(M \vec{v}_{CM}) = \frac{d}{dt} \sum m_i \vec{v}_i$$

$$M \vec{a}_{CM} = \sum m_i \vec{a}_i = \sum \vec{F}_i$$

$$\sum \vec{F}_i = \vec{F}_{Ext}$$

$$\vec{F}_{Ext} = M \vec{a}_{CM}$$

يعني مركز جرم سيستم طوري شتاب مي‌گيرد كه انگار تك ذره‌اي

(فرضي) به جرم M در مركز جرم قرار گرفته است و برايند نيروهاي

خارجي در همين نقطه به آن اثر مي‌كند.

$$\vec{F}_{Ext} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{F}_{Ext} = 0 \Rightarrow \vec{v}_{CM} = \text{ثابت}$$

يعني اگر برايند نيروهاي خارجي وارد بر سيستم صفر باشد ،

سرعت مركز جرم آن سيستم ثابت مي‌ماند. اين همان قانون

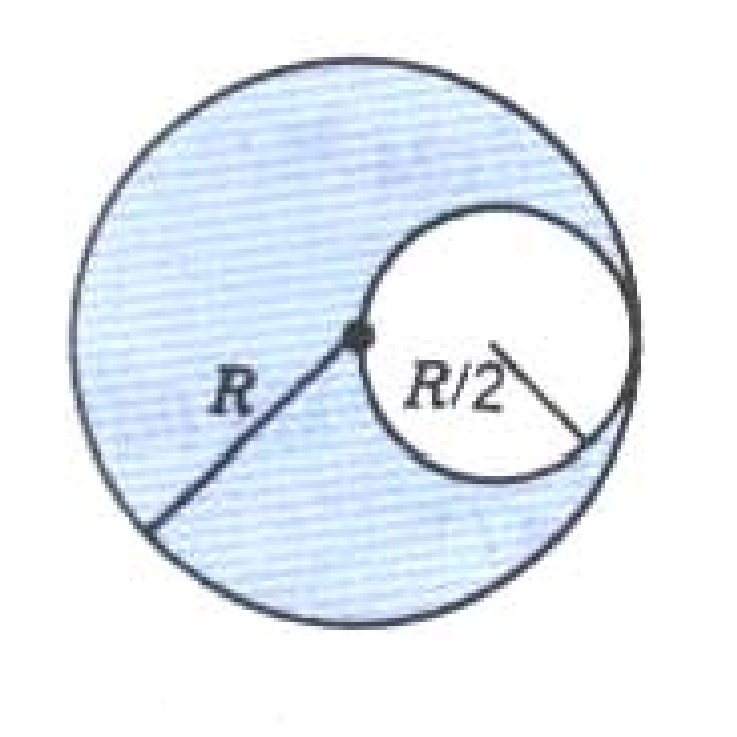
اول نيوتون در مورد سيستمي از ذرات است.

مسائل فصل دهم

۱. يك چوب ماهيگيري از اتصال سه ميلة يكنواخت، هر يك به طول ۸۰ cm ساخته شده است .جرم ميله‌ها به ترتيب ۳۰ g، ۲۰ g، و ۱۰ g است. مركز جرم چوب را نسبت به انتهاي ميلة ۳۰ گرمي پيدا كنيد.

۲. قرص يكنواختي به شعاع R ، سوراخي به شعاع $R/۲$ (مطابق شكل زير) دارد. مركز جرم اين جسم را نسبت به مركز قرص اصلي پيدا كنيد.

(راهنمايي: سوراخ را مي‌توانيد مثل شيئي با جرم منفي در نظر بگيريد).



۳. در يك سيستم دو جسمي ، $m_1=2kg$ و $m_2=6kg$ است. سرعتهاي اين اجسام عبارت‌اند $\vec{U}_1 = 5\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ و $\vec{U}_2 = -3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

ازكه يكاي آنها m/s است. (الف) سرعت مركز جرم سيستم ،

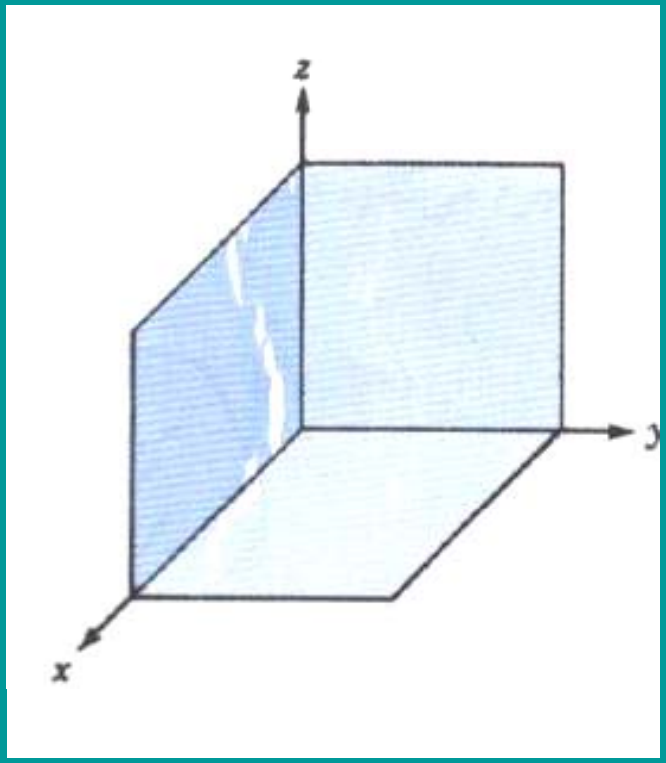
و (ب) تكانة خطي كل سيستم را به دست بياوريد.

۴. از بالاي صخره‌اي به ارتفاع $۱۰۰\,m$ ، گلوله‌اي به جرم $۶\,kg$ با سرعت اولية $۵۰\,m/s$ تحت زاوية ۵۳° بالاي افق پرتاب مي‌شود. اين گلوله در نقطه‌اي از مسيرش منفجر و دو تكه مي‌شود. تكة ۴ كيلوگرمي به فاصلة $۲۰۰\,m$ از پاي صخره به زمين اصابت مي‌كند. با اين فرض كه هر دو تكه همزمان به زمين مي‌رسند ، محل فرود تكة دوم را پيدا كنيد. (g برابر با $۱۰\,m/s^۲$ بگيريد).

۵. ذره‌اي به جرم $m_1 = 0.8\,kg$ با سرعت $3\ m/s$ ، و ذره‌ي ديگري به جرم $m_2 = 1.2\,kg$ با سرعت $5\ m/s$ در حركت است. (الف) سرعت مركز جرم را پيدا كنيد. (ب) سرعت هر يك از ذرات را نسبت به مركز جرم تعيين كنيد. (ج) انرژي جنبشي كل سيستم چقدر است ؟ (د) انرژي جنبشي حركت مركز جرم را حساب كنيد (هـ) انرژي جنبشي سيستم نسبت به مركز جرم چقدر است ؟

۶. دو نفر ، هر يك به جرم ۵۰ kg ، در دو انتهاي سكوي يكنواختي به جرم ۲۵ kg و به طول ۲ m كه با سرعت ۲ m/s در حركت است قرار گرفته‌اند. آنكه (نسبت به جهت حركت سكو) در عقب است گلوله‌اي به جرم ۵ kg را با سرعت ۴ m/s نسبت به خودش ، به طرف جلو مي‌غلتاند. (الف) سرعت سكو در حين غلتش گلوله چقدراست ؟ (ب) تا وقتي كه نفر جلويي گلوله را بگيرد سكو چقدر حركت كرده است ؟ (ج) در همين مدت ، مركز جرم كل سيستم چقدر حركت كرده است ؟

۷. از جعبهٔ مکعب شکلي به ضلع L، سه وجه‌اش را برداشته‌ایم. وجوه باقي مانده به ترتیب در صفحات XY، YZ و ZX واقع‌اند. (نگاه کنید به شکل زیر). محل مرکز جرم این جسم را پیدا کنید.



فصل يازدهم: دوران جسم صلب حول محور ثابت

هدف كلي

- آشنايي با سينماتيك و ديناميك حركت دوراني حول محور ثابت

مطالب اين فصل:

- سينماتيك دوران
- انرژي جنبشي دوراني و لختي دوراني
- لختي دوراني اجسام پيوسته
- پايستگي انرژي مكانيكي (شامل انرژي دوراني)
- گشتاور
- ديناميك دوراني جسم صلب (محور ثابت)
- كار و توان

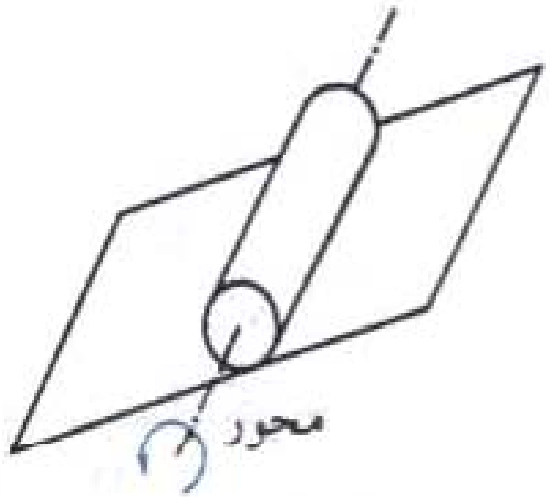
منظور از "محور ثابت" به طور كلي محوري است كه نسبت به جسم ثابت و جهتش هم نسبت به يك چارچوب لخت در فضا ثابت باشد.

چنين محوري ممكن است:

الف) مكانش در يك چارچوب لخت ثابت باشد ، كه در اين صورت جسم حركت دوراني خالص خواهد داشت (مثل چرخش قرقرة ثابت).

ب) به موازات خودش در فضا حركت كند ، كه در اين صورت جسم تواماً حركت دوراني و انتقالي خواهد داشت (مثل غلتش چرخ).

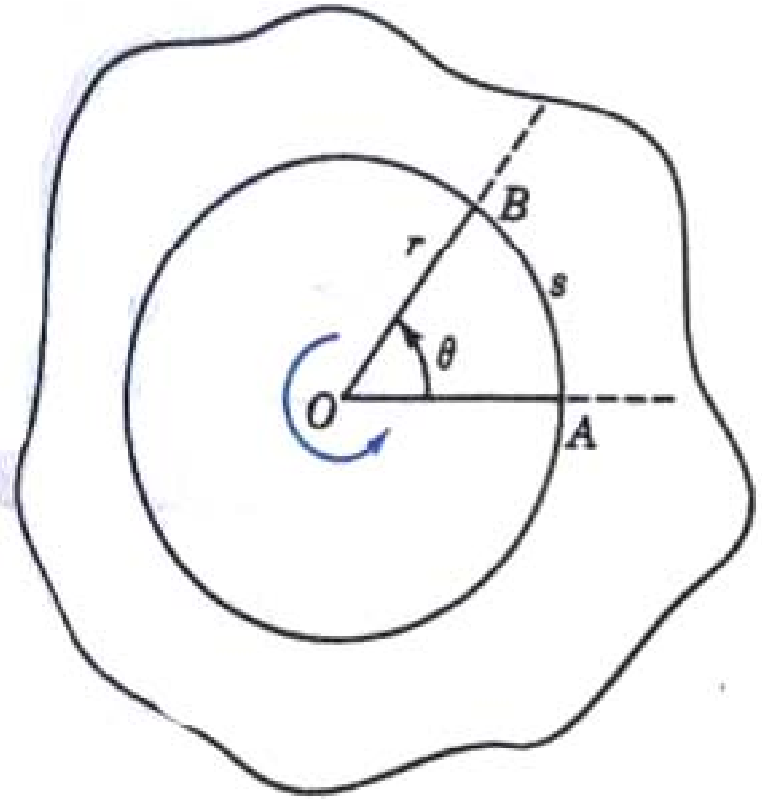
(الف)



(ب)

(الف) مکان و راستای محور دوران ثابت است (ب) فقط راستای محور ثابت است.

سینماتیک دوران



وقتی جسم حول محور ثابت گذرنده از O دوران می‌کند، مسیر هر ذره‌اش دایره است.

$$\theta = s / r$$

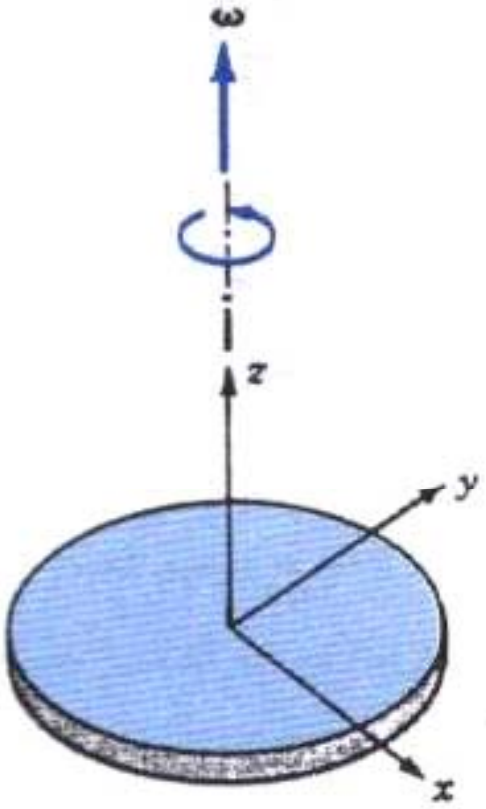
جابجايي زاويه‌اي

$$\overline{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_f - \theta_i}{t_f - t_i}$$

سرعت زاويه‌اي متوسط

$$\omega = \lim_{\Delta t \to o} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

سرعت زاويه‌اي لحظه‌اي



یسکی در صفحهٔ xy حول محور z در جهت پادساعتگرد می‌چرخد. جهت $\vec{\omega}$ نشان داده شده است.

بسامد

$$f = \frac{1}{T}$$

بسامد زاويه‌اي

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

حرکت دوراني

شتاب زاويه‌اي متوسط

$$\overline{\alpha} = \frac{\Delta \omega}{\Delta f}$$

شتاب زاويه‌اي لحظه‌اي

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to o} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

دوران با شتاب زاويه‌اي ثابت

$$\int_{\omega_o}^{\omega} d\omega = \int_{o}^{t} \alpha \, dt$$

$$\omega - \omega_o = \alpha \, t$$

$$\int_{\theta_o}^{\theta} d\theta = \int_{o}^{t} \omega \, dt$$

$$\theta - \theta_o = \omega_o t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$\omega^2 = \omega_o^2 + 2\alpha(\theta - \theta_o)$$

معادلات سينماتيك

خطي	دوراني
$v = v_o + at$	$\omega = \omega_o + a\,t$
$x = x_o + v_o t + \frac{1}{2} a t^2$	$\theta = \theta_o + \omega_o t + \frac{1}{2} a\,t^2$
$v^2 = v_o^2 + 2\alpha(x - x_o)$	$\omega^2 = \omega_o^2 + 2\,\alpha(\theta - \theta_o)$

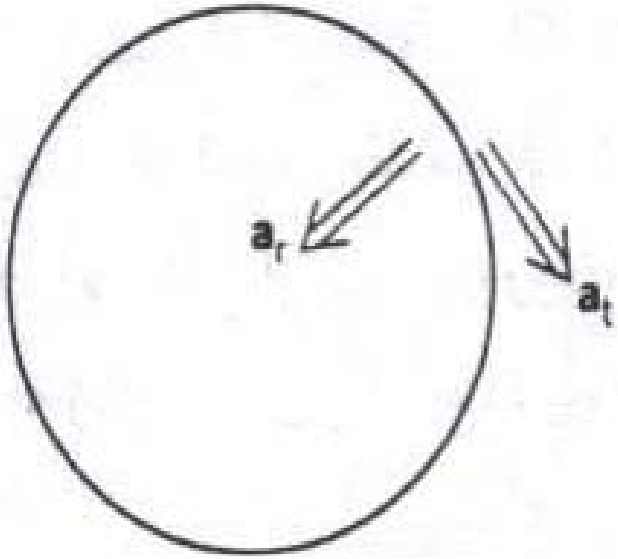
رابطة كميت‌هاي سينماتيكي خطي و دوراني

$$s = r\,\theta$$

$$v = r\,\omega$$

$$a = r\,\alpha$$

حرکت دوراني نايکنواخت



وقتی ذره‌ای شتاب زاویه‌ای داشته باشد، شتاب خطی‌اش دو مؤلفهٔ شعاعی و مماسی دارد.

$$a_t = r\alpha$$

شتاب مماسي (خطي)

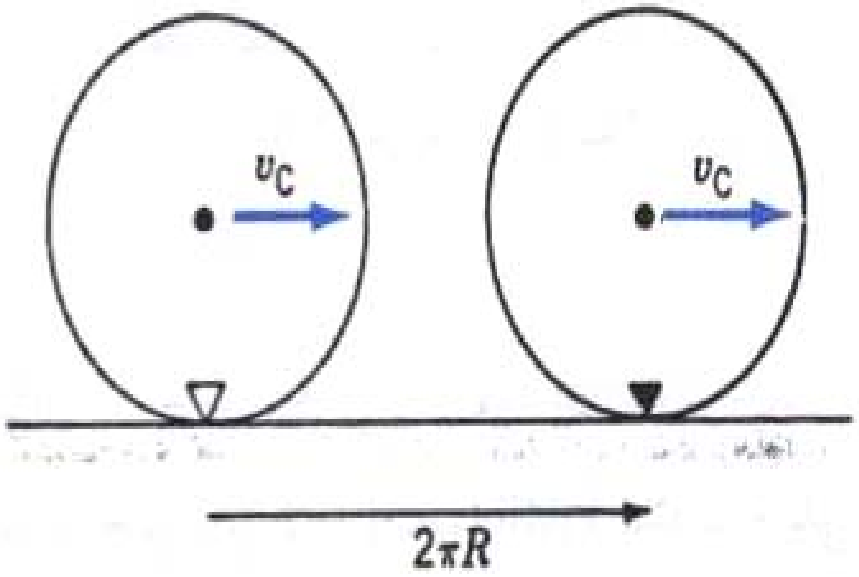
$$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

شتاب مرکزگرا

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_t$$

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_t^2}$$

غلتش



وقتی چرخی به شعاع R بدون لغزش می‌غلتد، سرعت مرکز چرخ از $V_c=\omega R$ به دست می‌آید که در آن ω سرعت زاویه‌ای است.

$$\begin{cases} V_c = \dfrac{2\pi R}{T} = \omega R \\ V_t = \omega R \end{cases}$$

سرعت مرکز چرخ

سرعت لبه نسبت به مرکز

$$\Rightarrow V_c = V_t = \omega R$$

غلتش ترکیبي است از انتقال مرکز چرخ و دوران حول مرکز چرخ. پس حرکت به نتقطه واقع بر لبة عبارت است از

$$\vec{V} = \vec{V}_c + \vec{V}_T$$

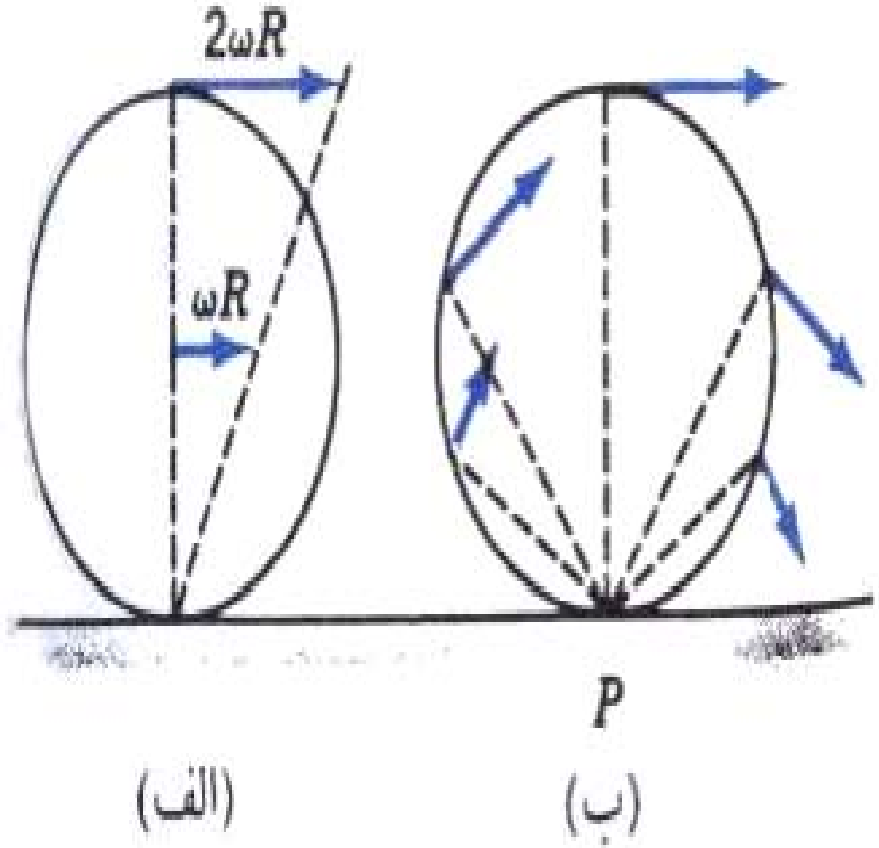
$$v = \omega R = +\omega R = 2\omega R$$

سرعت مرکز چرخ

$$v = \omega R + 0 = \omega R$$

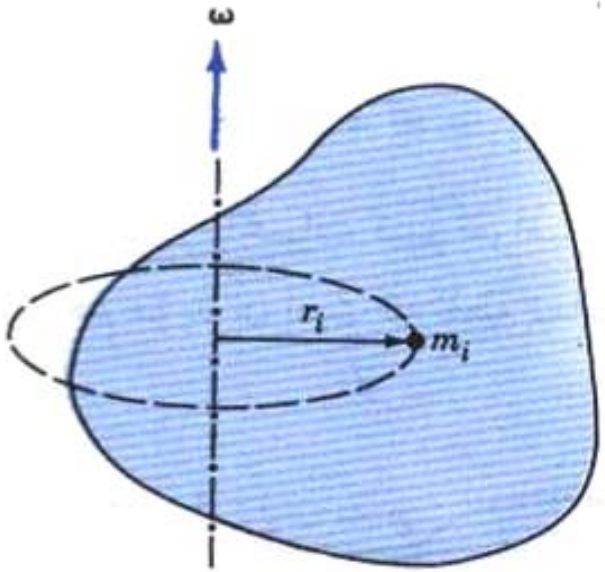
سرعت نقطة تماس با زمین

$$v = \omega R - \omega R = 0$$



وقتی چرخی بدون لغزش می‌غلتد، نقطهٔ تماس با زمین به طور لحظه‌ای ساکن است و مثل یک مرکز لحظه‌ای دوران عمل می‌کند.

انرژي جنبشي دوراني و لختي دوراني



دوران جسم صلب حول محور ثابت. انرژی جنبش ذرهٔ iام برابر است با

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$$

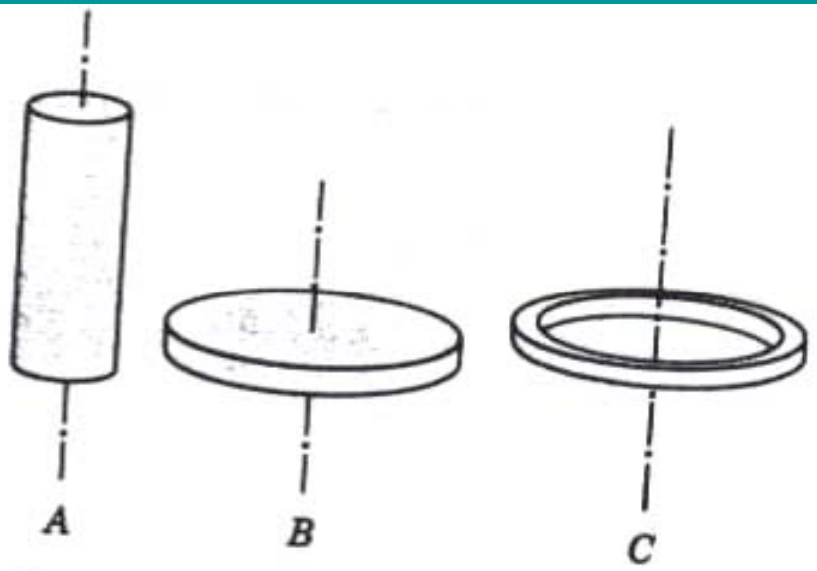
$$K = \sum k_i = \frac{1}{2} \sum m_i r_i^2 \omega^2$$

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$I = \sum m_i r_i^2$$

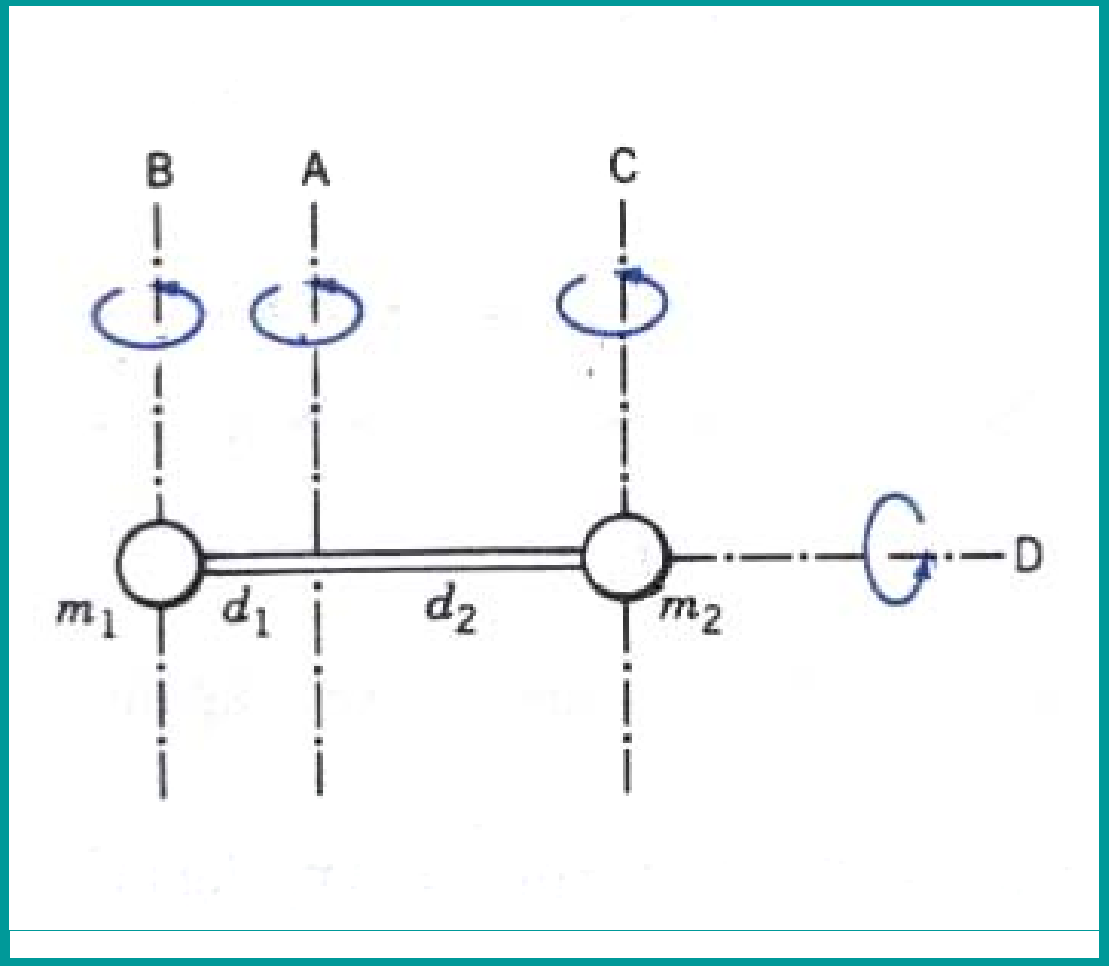
لختي دوراني

لختي دوراني



استوانه و قرص و حلقه جرم یکسان دارند. لختی دورانی بستگی به توزیع جرم حول محور مرکزی دارد، و در این مورد $I_A < I_B < I_C$ است.

مثال



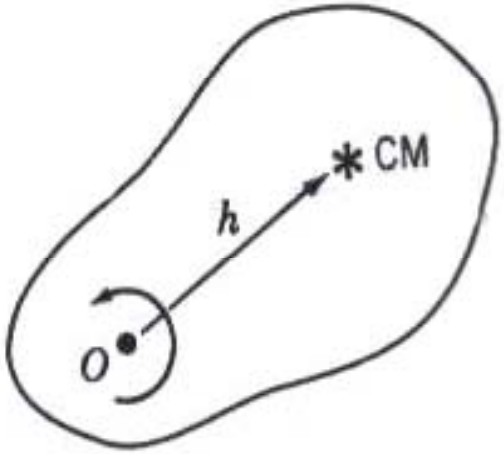
$$m_2 = 5\,kg \quad , \quad m_1 = 3\,kg$$

$$d_2 = 2m \quad , \; d_1 = 1m$$

است.

لختي دوراني اين ساختار حول هر چهار محور **A** و **B** و **C** و **D** چقدر است؟

قضیه محورهای موازی

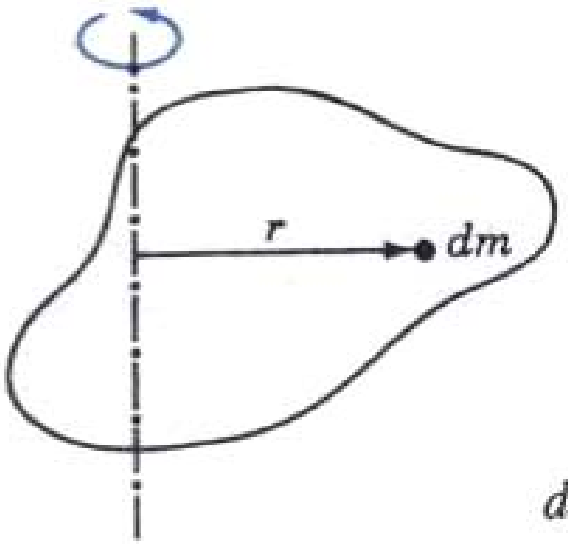


لختی دورانی حول محور گذرنده از O و لختی دورانی حول محور موازی گذرنده از مرکز جرم با رابطهٔ $I=I_{cm}+mh^2$ به هم مربوط می‌شوند، که در آن h فاصلهٔ میان دو محور موازی است.

$$K = \frac{1}{2} M v_{CM}^{2} + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^{2}$$

$$I = I_{CM} + Mh^{2}$$

لختي دوراني اجسام پيوسته

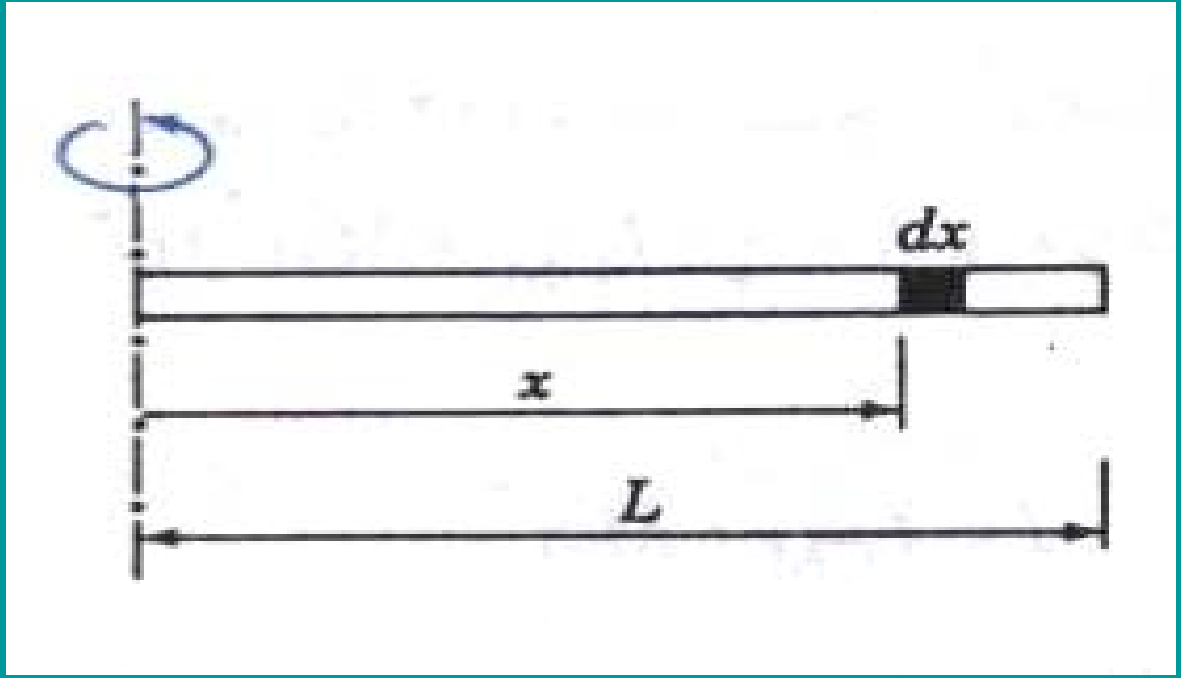


گشتاور لختی مربوط به عنصر dm برابر است با $dI=r^2dm$.

$$I = \int r^2 dm$$

مثال

لختي دوراني ميله نازك حول محور عمود بر ميله در انتهاي ميله چقدر است ؟



$$dI = r^2 dm = x^2(\lambda\, dx)$$

$$I = \int_o^L \lambda\, x^2 dx = \frac{1}{3}\lambda\, L^3$$

$$I = \frac{1}{3}\ M\ \ L^2$$

پايستگي انرژي مكانيكي

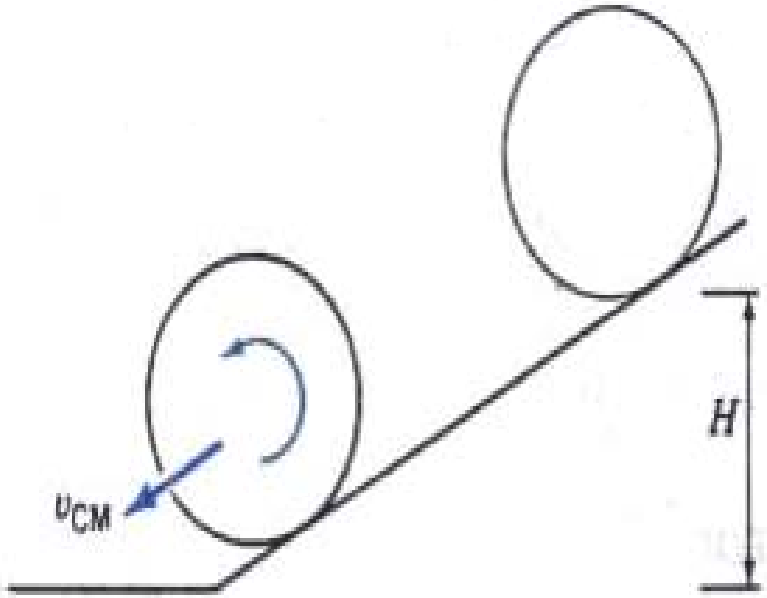
انرژي جنبشي كل براي دوران حول محوري
با جهت ثابت عبارت است از

$$K = \frac{1}{2} M v_{CM}^{2} \quad \frac{1}{2} I_{CM} \omega^{2}$$

براي جسمي كه بدون لغزش مي‌غلتد:

$$v_{CM} = \omega R$$

مثال



جسم غلتان، هم انرژی جنبشی انتقالی و هم انرژی جنبشی دورانی دارد.

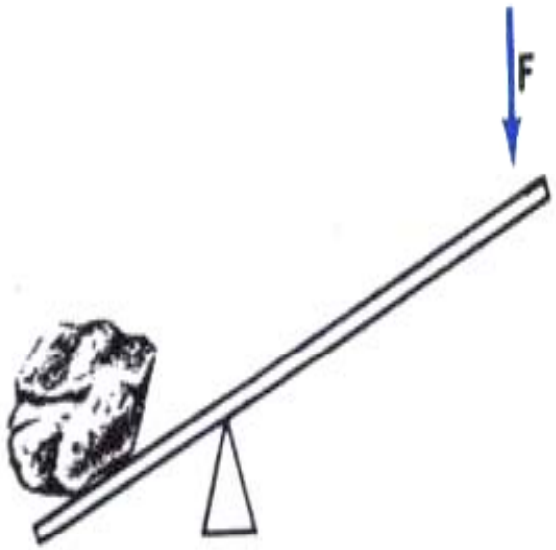
$$E_i = MgH$$

$$E_f = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$$

با قرار دادن $E_f = E_i$ و استفاده از $V_{CM} = \omega R$ خواهیم داشت

$$v_{CM}^2 = \frac{2MgH}{M + I_{CM}/R^2}$$

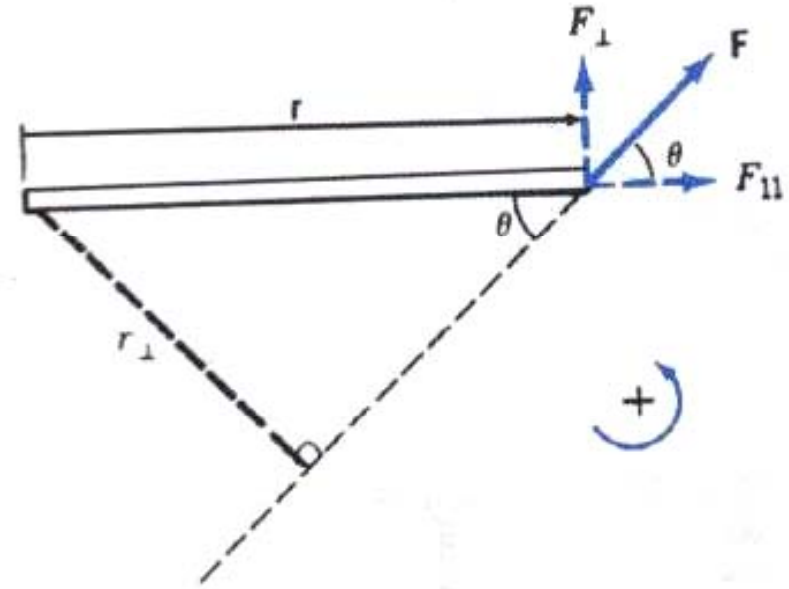
گشتاور



کارایی F در بلند کردن سنگ
بسنگی به جهت و نقطهٔ اثر آن دارد.

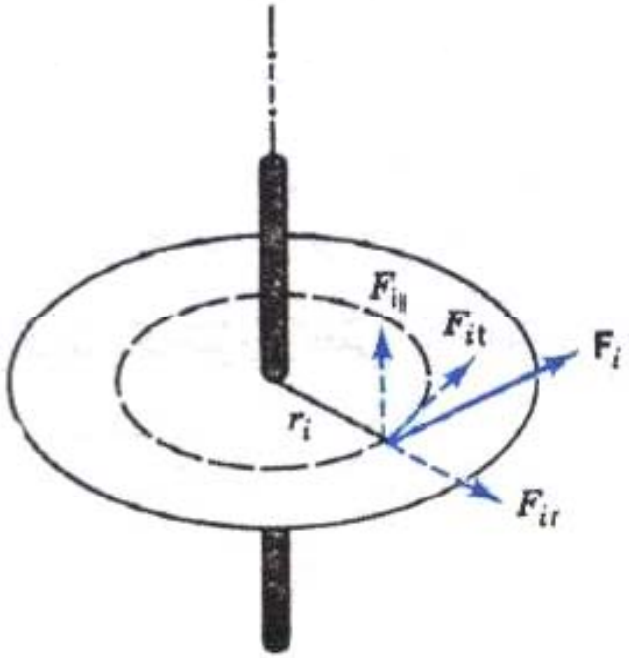
$$\tau = r_{\perp} F = r F_{\perp}$$

$$\tau = rF \sin\theta$$



اندازهٔ گشتاور برابر است با $\tau = rF\sin\theta$ که در آن θ زاویهٔ میان بردارهای $\vec{r}$ و $\vec{F}$ است. τ را می‌شود به دو صورت دیگر هم نشان داد: یکی $\tau = r_\perp F$ که در آن $r_\perp$ بازوی اهرم است و دیگری $\tau = rF_\perp$ که در آن $F_\perp$ مولفهٔ $\vec{F}$ در راستای عمود بر $\vec{r}$ است.

ديناميك دوراني (محور ثابت)



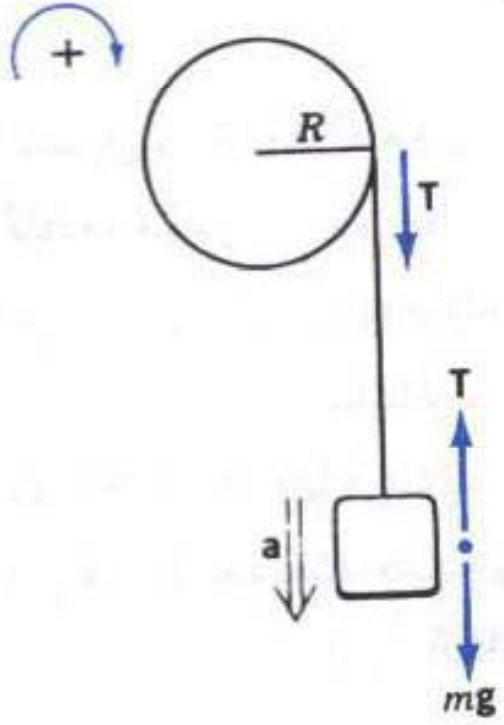
جسم صلبی حول محور ثابتی می‌چرخد. ذره i تحت تأثیر نیروی $\vec{F}_i$ است. مؤلفه‌های موازی با محور و عمود بر محور این نیرو با عکس‌العمل تکیه‌گاههای محور خنثی می‌شوند. فقط مؤلفهٔ مماس بر مسیر (F_{it}) است که به ذره شتاب می‌دهد.

$$F_{it} = m_i a_i = m_i r_i \alpha$$

$$\tau_i = r_i F_{it} = m_i r_i^2 \alpha$$

$$\tau = I\alpha$$

مثال



شتاب مکعب از $F=ma$ و شتاب زاویه‌ای قرقره از $\tau=I\alpha$ به دست می‌آید.

شتاب سقوط مکعب در اثر باز شدن نخ از
قرقره چقدر است ؟

جرم مکعب m ، جرم قرقره M و شعاع آن R است.

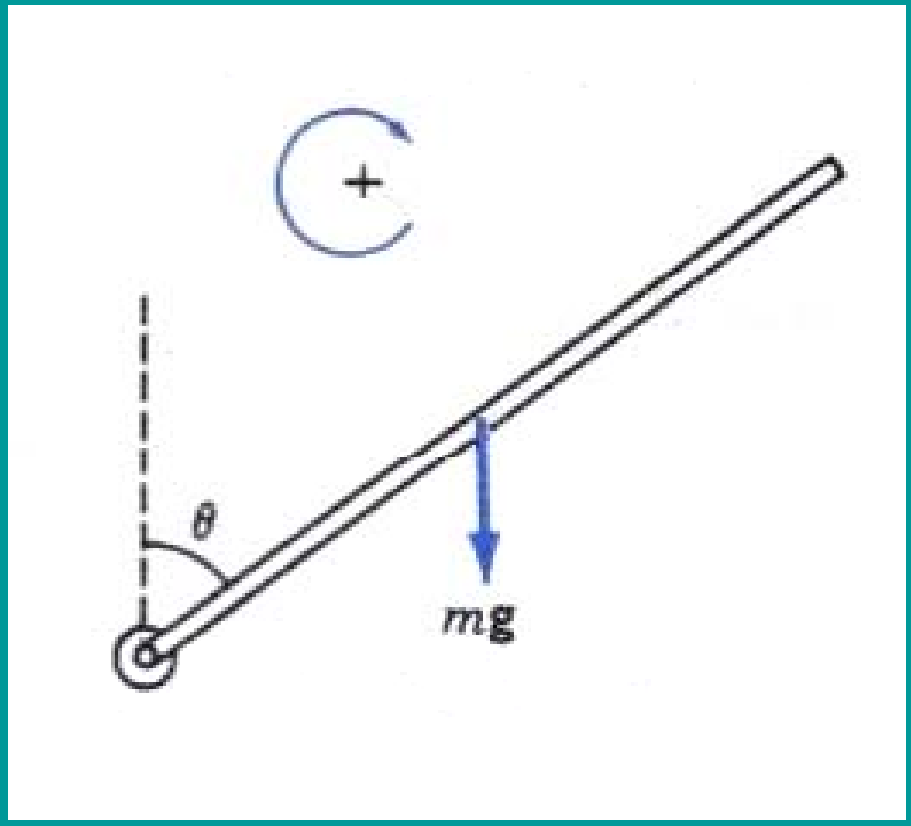
$$F = ma \Rightarrow mg - T = ma$$

$$\tau = I\alpha \Rightarrow TR = \left(\frac{1}{2}MR^2\right)\alpha$$

$$T = \frac{1}{2}Ma$$

$$a = \frac{mg}{m + M/2}$$

مثال



ميله از وضعيت قائم رها مي‌شود.

الف) شتاب زاويه‌اي ميله در وضعيت θ چقدر است؟

ب) شتاب خطي سر آزاد ميله در وضعيت افقي چقدر است؟

$$mg\ \frac{L}{2}\sin\ \theta\ =\ \frac{ML^{2}}{3}\alpha$$

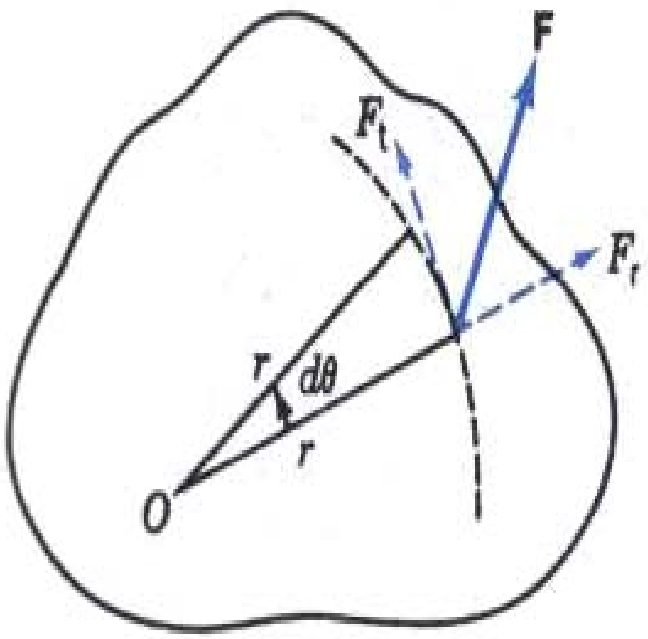
$$\alpha = \frac{3g\sin\theta}{2L}$$

در $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\alpha = \frac{3g}{2L}$ است. پس

$$a_t = \alpha L = \frac{3}{2}g$$

يعني از شتاب سقوط آزاد بيشتر است !

کار و توان در دوران



نیروی $\vec{F}$ به جسم صلب وارد می‌شود و گشتاور $\tau = rF_t$ حول محور ثابتی که در O بر صفحه عمود است ایجاد می‌کند.

$$dW = (F_t)(r\,d\theta) = \tau\,d\theta \qquad P = \frac{dW}{dt} = \tau\omega$$

قضية كار – انرژي (در دوران)

$$\tau = I\alpha = I\frac{d\omega}{dt} = I\frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = I\frac{d\omega}{d\theta}\omega$$

$$dW = \tau d\theta = I\frac{d\omega}{d\theta}\omega d\theta = I\omega d\omega$$

$$\int dW = I\int_i^f \omega d\omega$$

$$W = \frac{1}{2}I\omega_f^2 - \frac{1}{2}I\omega_i^2$$

مسائل فصل یازدهم

۱. مکان زاویه‌اي علامتي در روي صفحة چرخاني به شعاع $r=۶cm$ ، با رابطة $\theta=۱۰-۵t+۴t^{۲}rad$ بیان مي‌شود.

الف) سرعت زاویه‌اي متوسط این علامت بین ۱s و ۳s چقدر است؟

ب) سرعت خطي نقطه‌اي روي لبة صفحه در $t=۲s$ چقدر است؟

ج) شتاب خطي و شتاب زاویه‌اي نقطه‌اي روي لبه در $t=۲s$ چقدر است؟

۲. اتومبيلي كه شعاع چرخهايش ۲۵cm است در مدت ۱۰s از حالت سكون به سرعت ۳۰m/s مي‌رسد. در لحظه‌اي كه سرعت اتومبيل ۲m/s است شتاب خطي بالاترين نقطة چرخ را

(الف) نسبت به مركز چرخ و

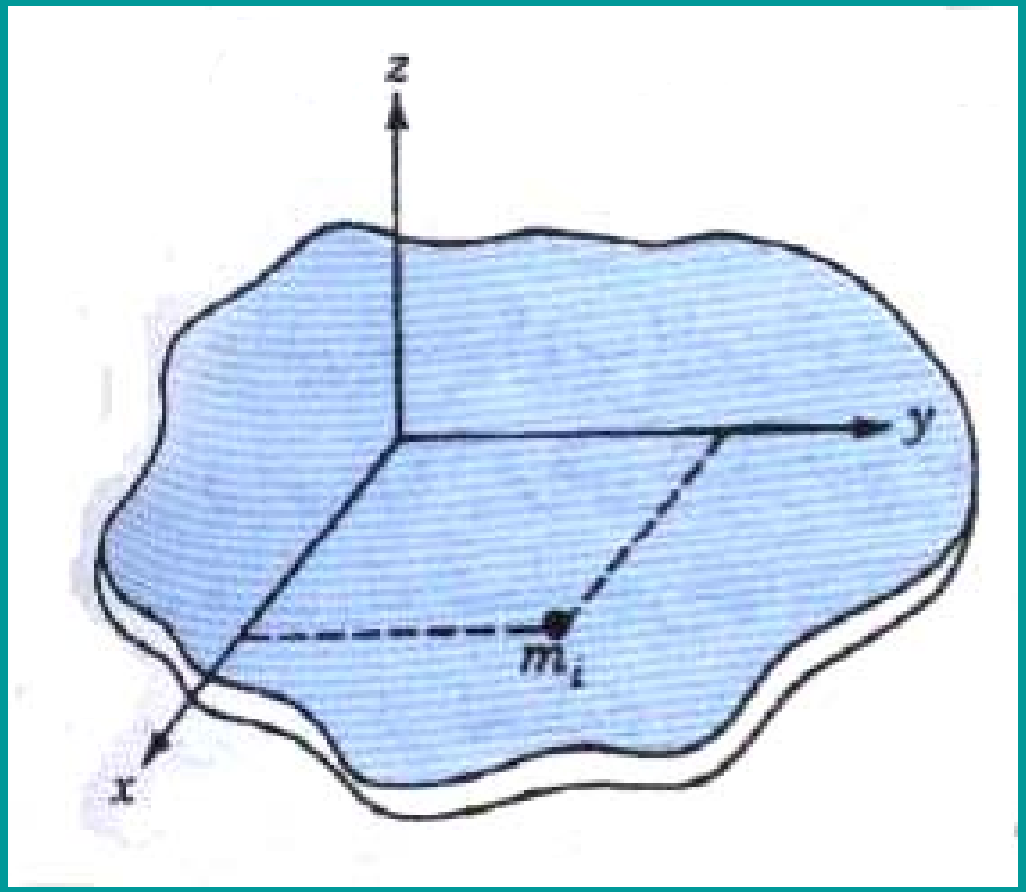
(ب) نسبت به جاده پيدا كنيد.

۳. يك جسم تخت را در صفحة xy در نظر بگيريد (شكل زير).

(الف) لختي دوراني ذره‌اي به جرم m واقع در مختصات x و y را حول محورهاي x ، y و z پيدا كنيد. (ب) نشان بدهيد كه لختي‌هاي دوراني جسم حول محورهاي مختصات با رابطة زير به هم مربوط مي‌شوند

$$I_z = I_x + I_y$$

اين رابطه به قضية محورهاي متعامد معروف است.

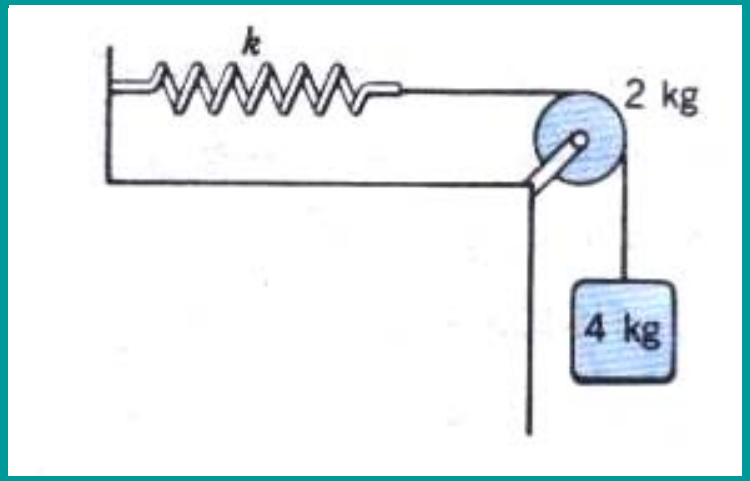


۴. در سیستم شکل زیر ، شعاع قرقره ۵cm و ثابت سختي فنر ۸۰ N/m است.

الف) اگر جسم ۴ کیلوگرمي از حالت سکون رها شود ،

بیشترین انبساط طول فنر چقدر خواهد بود؟

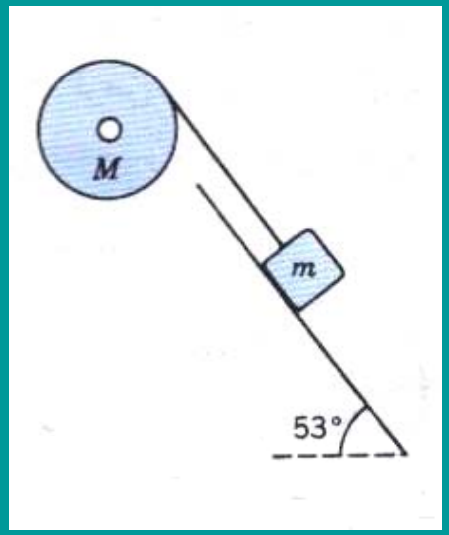
ب) سرعت جسم پس از ۲۰ cm سقوط چقدر است؟ قرقره را مثل قرص در نظر بگیرید.



۵. در سیستم شکل زیر ، $m=kg$ ، $M=۴kg$ ، شعاع قرقره $۵ر۰m$ ، و سطح شیبدار بدون اصطکاك است. قرقره به شکل قرص است

الف) شتاب زاویه‌اي قرقره چقدر است ؟

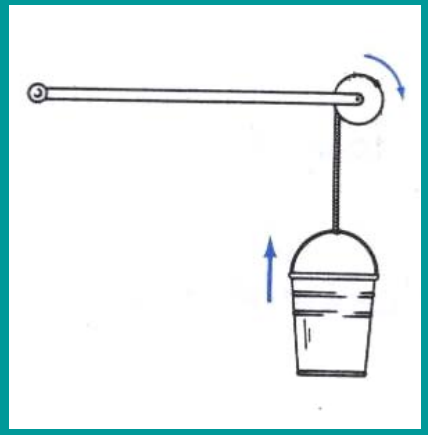
ب) سرعت قطعة ۲ کیلوگرمي پس از طي $۱m$ روي سطح چقدر است ؟ فرض کنید سیستم از حال سکون رها شده است.



۶. يك سطح آب به جرم ۱۵kg را با سرعت ثابت ۲۰cm/s از چاهي بالا مي‌كشيم (شكل زير). طناب دور دوكي به شعاع ۳cm مي‌پيچد. دوك را با دسته‌اي به طول ۴۰cm مي‌چرخانيم.

الف) چه تواني براي بالا كشيدن سطح لازم است؟

ب) اگر نيروي اعمال شده هميشه بر دسته عمود باشد، چه مقدار نيرو براي اين كار لازم است؟



فصل دوازدهم: تكانه زاويه‌اي ، و تعادل جسم صلب

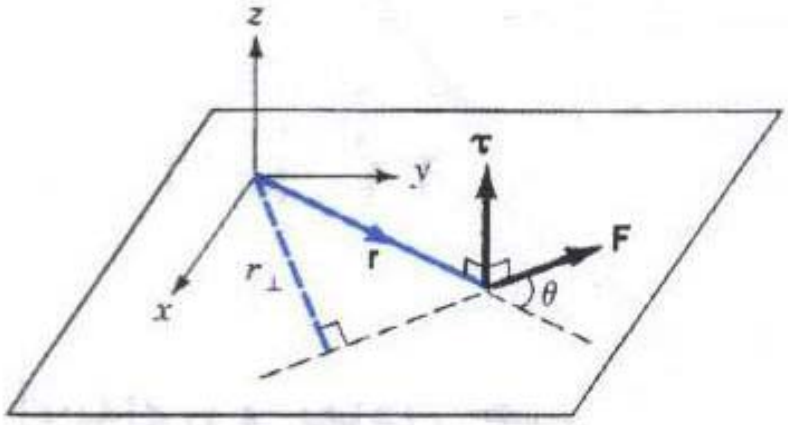
هدف كلي

- آشنايي با ماهيت برداري گشتاور ،
- ارتباط گشتاور با تكانة زاويه‌اي
- درك مفهوم پايستگي تكانة زاويه‌اي
- بررسي شرايط تعادل جسم صلب

مطالب اين فصل:

- بردار گشتاور
- تكانه زاويه‌اي
- ديناميك دوراني
- پايستگي تكانة زاويه‌اي
- شرايط تعادل ايستا
- مركز ثقل

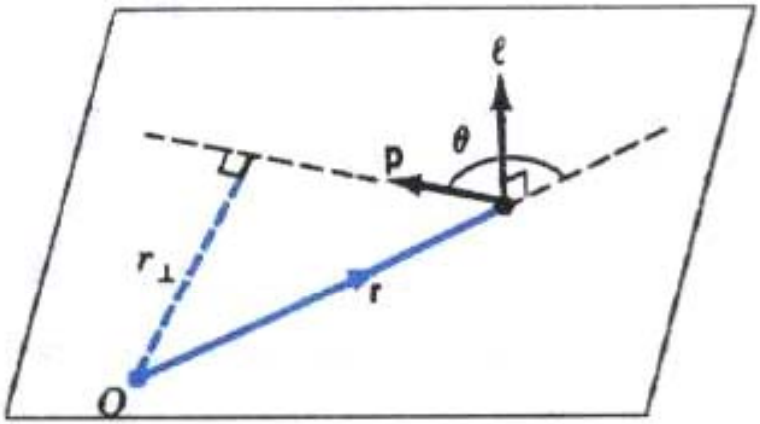
بردار گشتاور



گشتاور نیروی $\vec{F}$ برابر است با $\vec{\tau}=\vec{r}\times\vec{F}$. مقدار آن $\tau=F\sin\theta$ است. فاصلهٔ عمودی $r_\perp=F\sin\theta$، از مبدأ به خط اثر نیرو، بازوی اهرم یا بازوی گشتاور است.

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = rF \sin\theta \hat{n}$$

تکانه زاویه‌اي

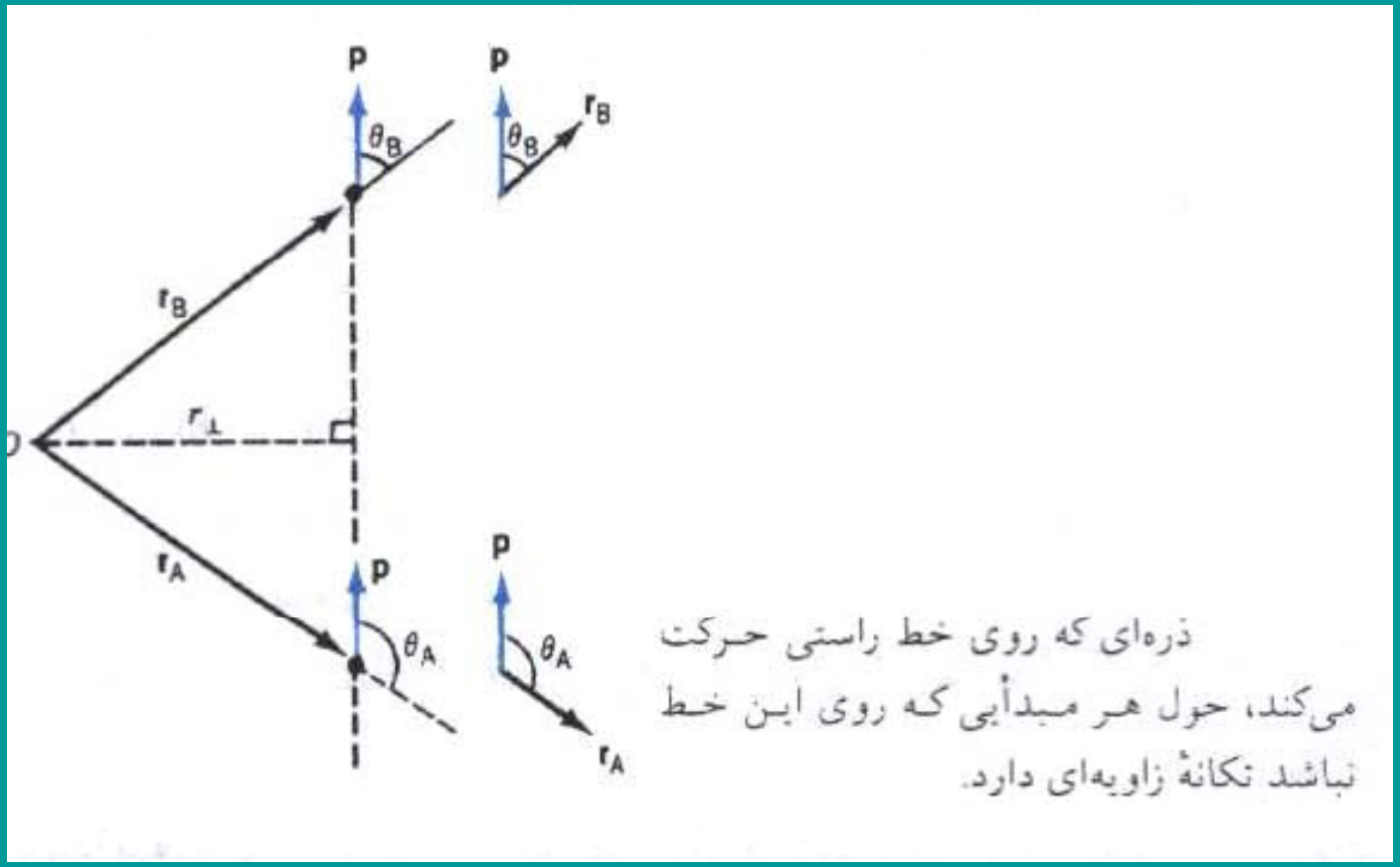


تکانهٔ زاویه‌ای ذره‌ای که در مکان $\vec{r}$ دارای تکانهٔ خطی $\vec{p}$ است، نسبت به مبدأ O از $\vec{l}=\vec{r}\times\vec{p}$ به دست می‌آید. بزرگی تکانهٔ زاویه‌ای $l=rp\sin\theta$ است که می‌توانیم آن را به صورت $l=r_\perp p$ هم بنویسیم. $r_\perp$ فاصلهٔ عمودی از مبدأ تا خط حرکت است.

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$$

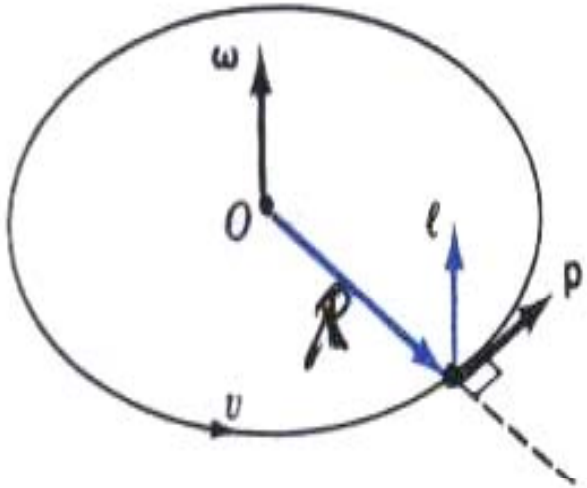
$$l = r\ p\ \sin\theta = r_\perp\ p$$

تکانه زاویه‌اي در حرکت روي خط راست



ذره‌ای که روی خط راستی حرکت می‌کند، حول هر مبدأیی که روی این خط نباشد تکانهٔ زاویه‌ای دارد.

تکانه زاویه‌اي در حرکت روي دایره

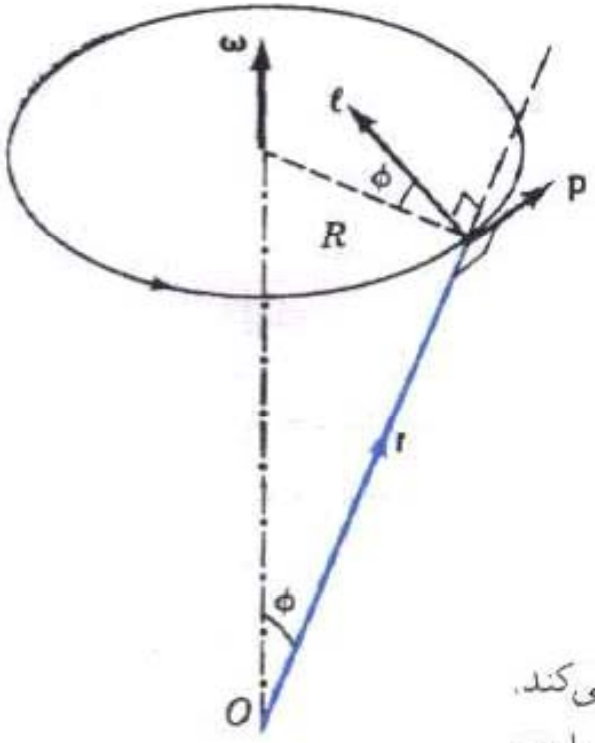


ذره‌ای روی دایره حرکت می‌کند.
چون مبدأ در مرکز دایره است بردارهای $\vec{l}$ و $\vec{\omega}$
با هم موازی‌اند.

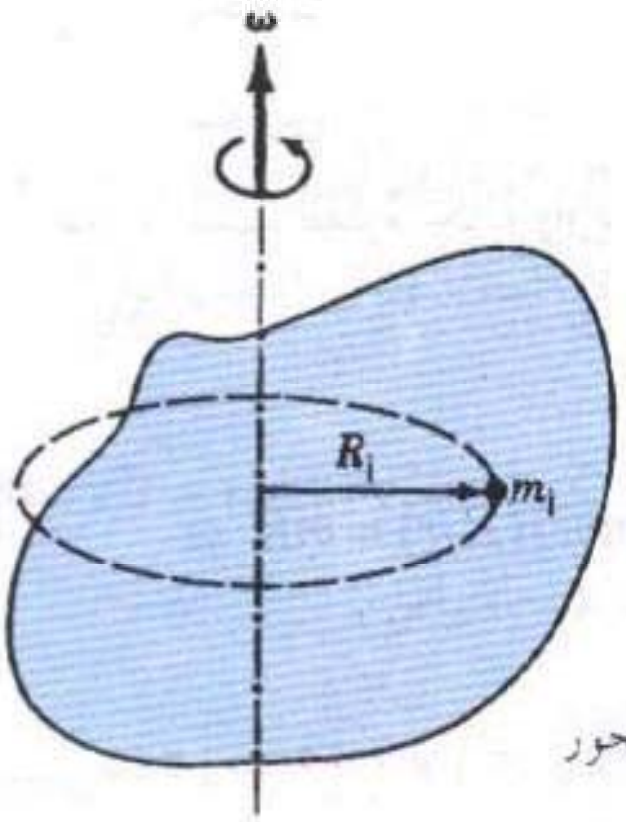
$$l = mvR = mR^2\omega$$

$$l_z = l\sin\phi = (mvr)(R/r) = mR^2\omega$$

تکانه زاویه‌اي براي سیستم ذرات



ذره‌ای روی دایره حرکت می‌کند.
چون مبدأ در مرکز دایره نیست، $\vec{l}$ و $\vec{\omega}$ با هم موازی نیستند.



جسم صلبی که حول یک محور ثابت (محور z) دوران می‌کند.

$$\vec{L} = \sum \vec{l}_i = \sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

$$L_z = \sum l_{iz} = \sum m_i R_i^2 \omega$$

$$l_z = I\omega$$

ديناميك دوراني

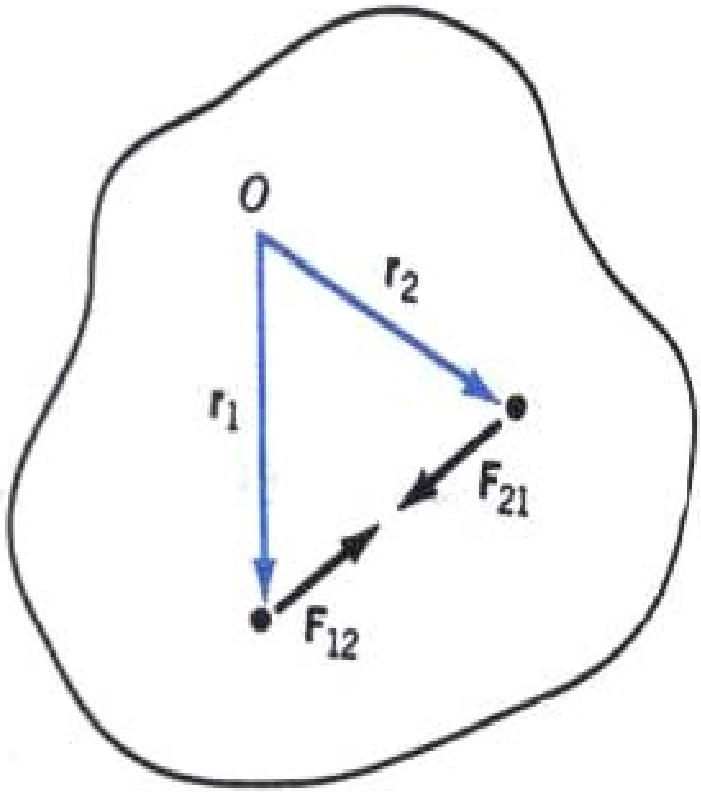
براي ذره:

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}$$

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} + \underbrace{\vec{v} \times m\vec{v}}_{\text{صفر}} \qquad \Rightarrow \vec{t} = \frac{d\vec{l}}{dt}$$

براي سيستم ذرات:



دو ذرهٔ جسم نیروهای مساوی و مخالف ($\vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21}$) به هم وارد می‌کنند. گشتاور کل ناشی ازاین دو نیرو حول مبدأ صفر است.

$$\sum \vec{\tau}_i = \frac{d}{dt} \sum \vec{l}_i$$

$$\vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

اگر محور دوران ثابت باشد:

$$\frac{dL}{dt} \frac{d}{dt}(I\omega) = I\frac{d\omega}{dt} = Ia$$

$$\tau = I\alpha$$

پايستگي تكانة زاويه‌اي

$$\vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\tau_{ext} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{ثابت}$$

$$\vec{L} = I\,\omega = \text{ثابت} \qquad \text{يا} \qquad I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

مثال (پايستگي تكانه زاويه‌اي)

وقتی این شخص دستهایش را
جمع می‌کند سرعت زاویه‌ای‌اش زیاد می‌شود.

شرايط تعادل انتقالي

$$\sum \vec{F} = o \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = o \\ \sum F_y = o \\ \sum F_z = o \end{cases}$$

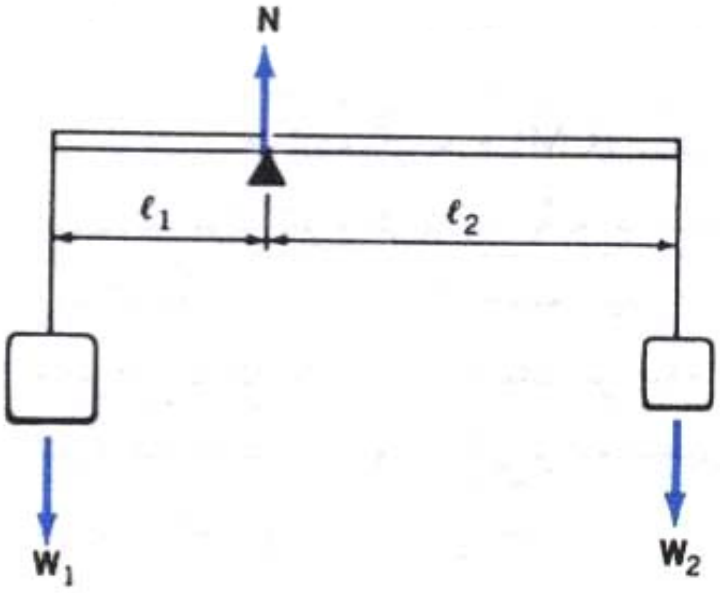
شرط تعادل دوراني:

$$\sum \vec{\ell} = o$$

براي دوران حول محور ثابت:

$$\sum \tau_z = o$$

مرکز ثقل (گرانیگاه)



میله به شرطی متعادل است که $\vec{w}_1 l_1 = \vec{w}_2 l_2$ باشد.

مرکز ثقل هر جسم [که به آن مرکز گراني يا گرانيگاه هم مي‌گويند] نقطه هر جسم که گشتاور گرانشي خالص وارد برجسم حول آن صفر است.

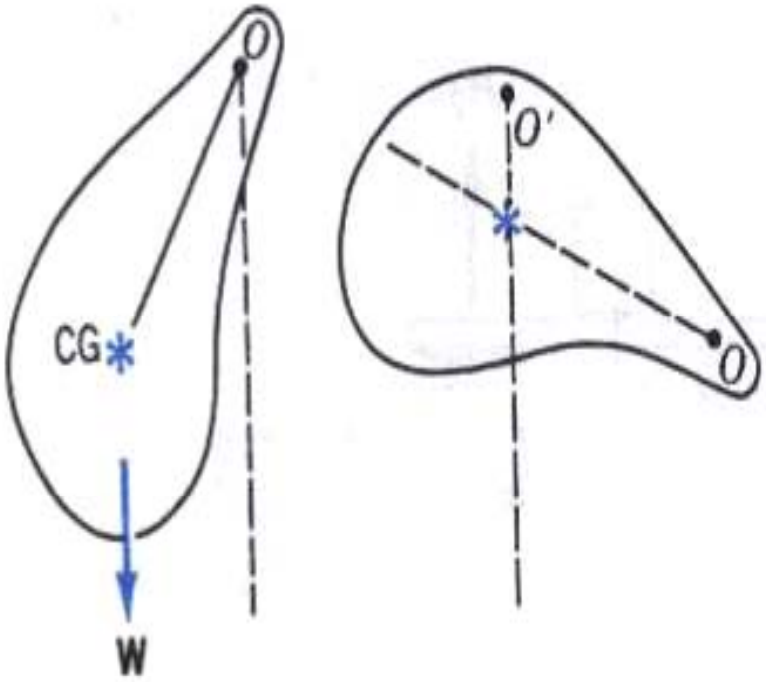
$$\sum \tau_i = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \ldots + w_N x_N$$

$$\left(\sum w_i \right) x_{CG}$$

گشتاور وزن

$$x_{CG} = \frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i}$$

$$x_{CG} = \frac{\sum m_i x_i}{M}$$



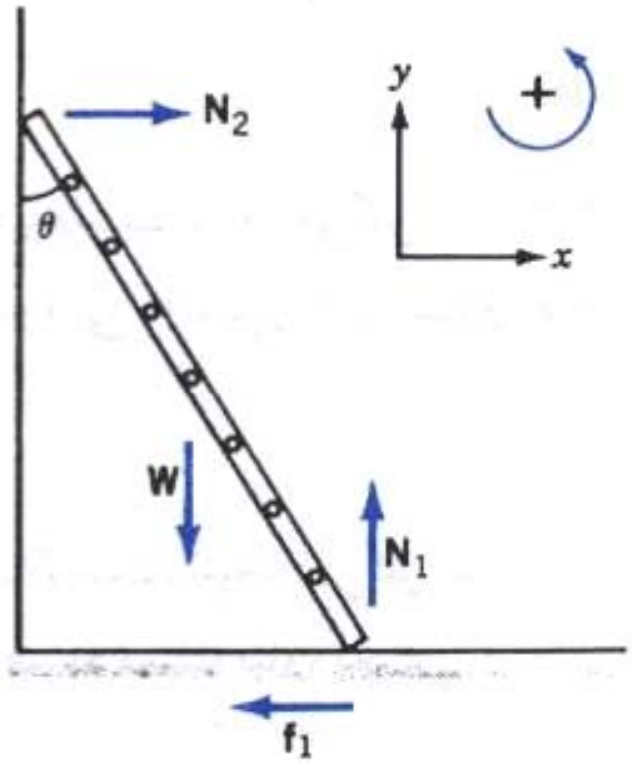
تعیین مرکز ثقل جسم تخت، با
آویختن آن از دو نقطهٔ مختلف جسم.

مثال (شرايط تعادل)

۱. نردباني به وزن W و طول L را به ديواري تكيه داده‌ايم (شكل زير). كف زمين زبر و ديوار بدون اصطكاك است. ضريب اصطكاك ايستايي پايين نردبان با كف زمين ۶ر۰ $= \mu_s$ است.

الف) بي‌آنكه نردبان بلغزد ، زاوية θ (ميان نردبان و ديوار) حداكثر چقدر مي‌تواند باشد؟

ب) در اين وضعيت (θي ماكزيموم) چه نيرويي از ديوار به نردبان وارد مي‌شود؟



نردبان چون با زمین اصطکاک دارد نمی‌لغزد.

$$\sum F_x = N_2 - f_1 = 0$$

$$\sum F_y = N_1 - W = 0$$

$$\sum \tau = -WL/2 \sin\theta - f_1 L \cos\theta + N_1 L \sin\theta = 0$$

$$\sum \tau = +WL/2 \sin\theta - N_2 L \cos\theta = 0$$

مسئله با استفاده از معادلات بالا حل مي‌شود.

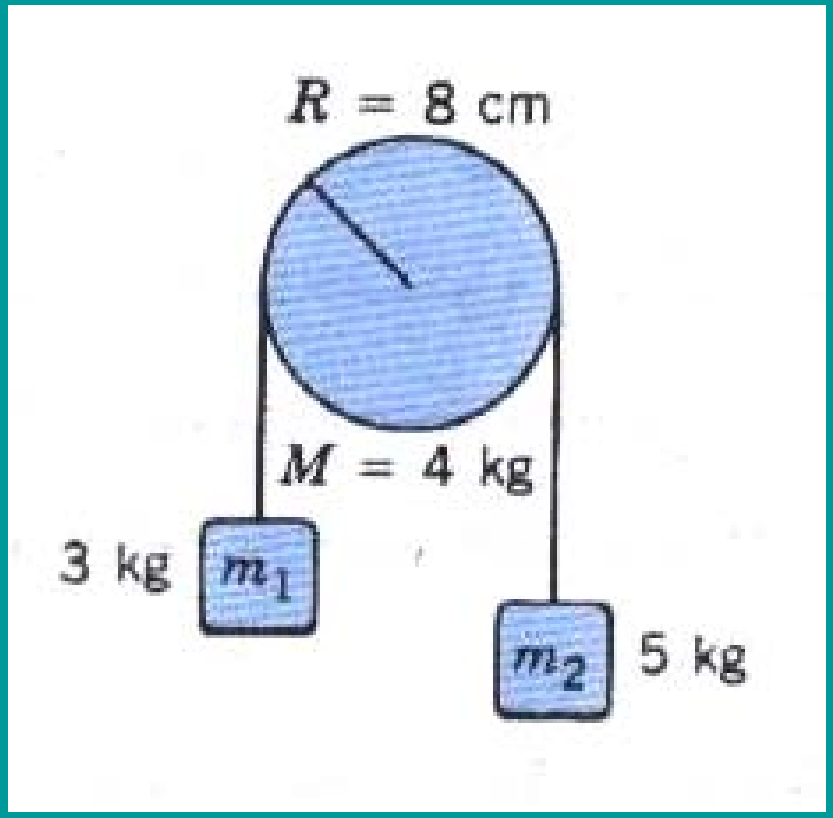
مسائل فصل دوازدهم

۱. در سیستم شکل زیر ، قرقره را به صورت دیسك بگیرید و از اصطکاك صرف نظر کنید. مبدأ را در مرکز قرقره بگیرید.

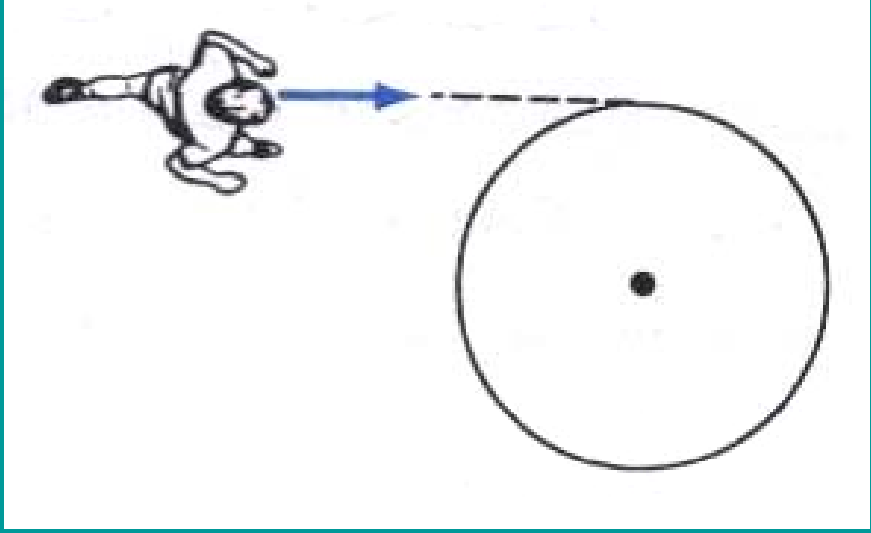
الف) گشتاور خالص وارد بر سیستم چقدر است ؟

ب) تکانهٔ زاویه‌اي سیستم وقتي جرمها به سرعت V رسیده‌اند چقدر است ؟

(ج) شتاب حرکت جرمها را با استفاده از رابطهٔ $\tau = \frac{dL}{dt}$ محاسبه کنید.

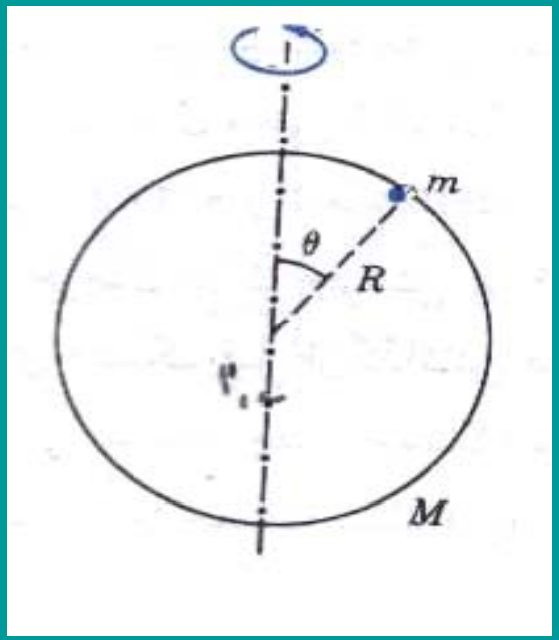

R = 8 cm
M = 4 kg
3 kg
m1
m2
5 kg

۲. شخصي به جرم $60\ kg$ در امتداد مماسي بر لبة سكوي دايره‌اي بي‌حركتي كه مي‌تواند آزادانه (و بدون اصطكاك) حول محور مركزي‌اش بچرخد با سرعت $5\ m/s$ درحال دويدن است. شعاع سكو $3\ m$ و جرم آن $100\ kg$ است (نگاه كنيد به شكل زير). اين شخص با همين سرعت روي لبة سكو مي‌پرد و همان‌جا مي‌ايستد. الف) سرعت زاويه‌اي سيستم (شخص+ سكو) چقدر است؟ ب) چقدر انرژي مكانيكي تلف مي‌شود؟



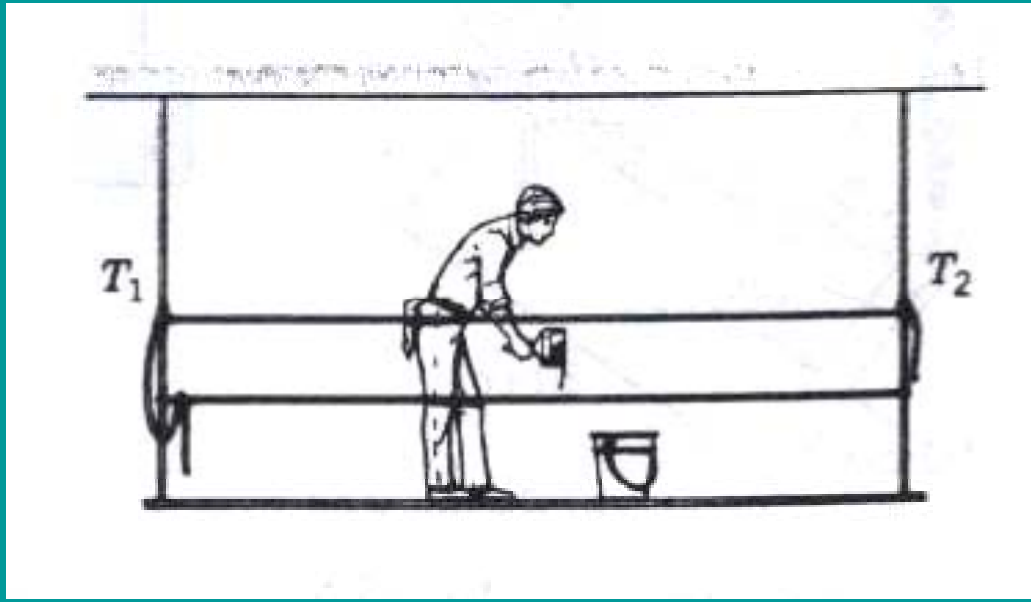
۳. شكل زير حلقة نازكي به جرم $M=۱\text{kg}$ و شعاع $R=۰٫۴m$ را نشان مي‌دهد كه حول قطر قائمش در چرخش است. (I را بگيريد: $\frac{1}{2}MR^2$)

مهرة كوچكي به جرم $m=۰٫۲\text{kg}$ مي‌تواند بدون اصطكاك روي حلقه بلغزد. وقتي مهره در بالاترين قسمت حلقه باشد سرعت زاويه‌اي حلقه ۵rad/s است. حساب كنيد كه وقتي مهره به وضعيت سرعت زاويه‌اي $\theta=45^\circ$ برسد $\theta=0$



۴. تختهٔ یکنواختی به جرم $۵kg$ و طول $۳ر۶m$ را با دو طناب قائم که به دو سر آن بسته شده است آویزان کرده‌ایم (شکل زیر). نقاشی به جرم $۶۰kg$ در فاصلهٔ $۰ر۵m$ از مرکز تخته در طرف چپ آن ایستاده و سطلی به جرم $۸kg$ در فاصلهٔ $۱m$ از مرکز در طرف راست قرار گرفته است.

کشش طنابها، $T_۱$ و $T_۲$ چقدر است؟

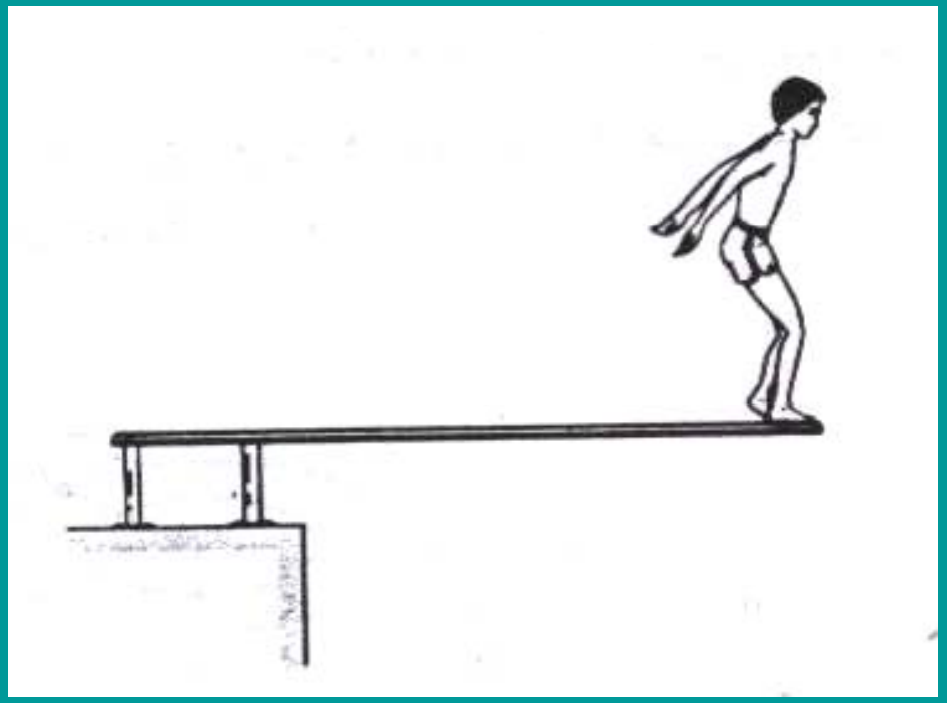


۵. يك شناگر ۶۰ كيلوگرمي در انتهاي تخته- شيرجه‌اي به طول ۳m وجرم

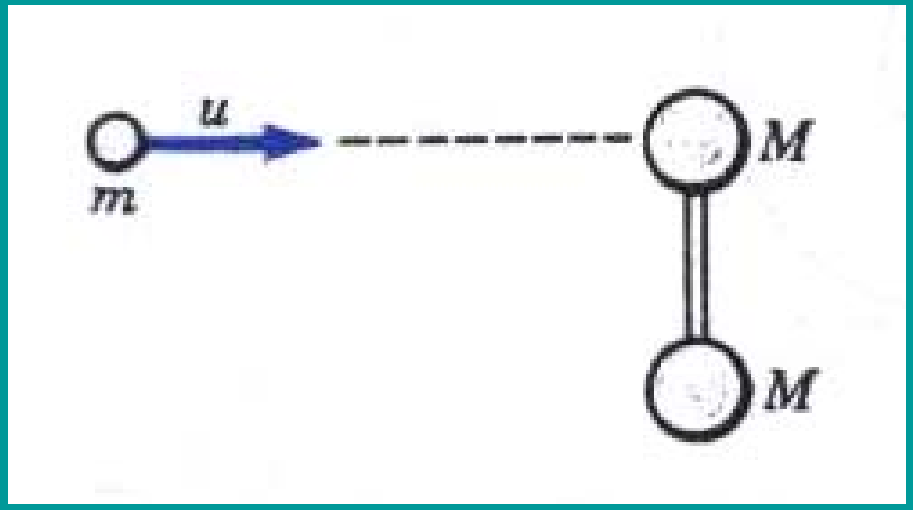
قابل اغماض ايستاده است(شكل زير). تخته شيرجه در انتهاي ديگرش روي دو

پايه ، به فاصله ۵۰cm از يكديگر ، سوار شده است. هر يك از دو پايه چه

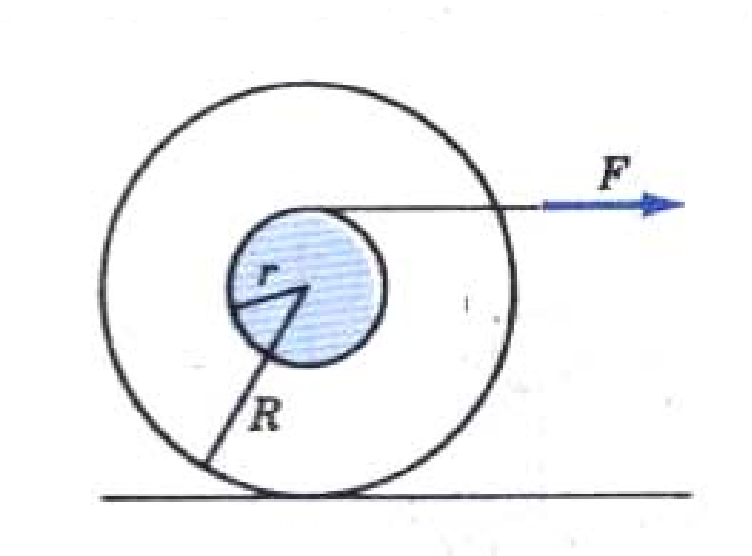
نيرويي و درچه جهتي به تخته وارد مي‌كند؟ (انعطاف تخته را در نظر نگيريد.)



۶. ذره‌اي به جرم ۰٫۵kg كه با سرعت u=۴m/s در حركت است به دمبلي برخورد مي‌كند (شكل زير). اين دمبل متشكل از دو جرم ۱ كيلوگرمي است كه با ميلة بسيار كم جرمي به طول ۲m به هم متصل‌اند. دمبل و ذره مي‌توانند روي سطح افقي بدون اصطكاك بلغزند. (الف) سرعت مركز جرم سيستم پس از برخورد ذره با يكي از وزنه‌هاي دمبل و (چسبيدن به آن) چقدر است؟ (ب) سرعت زاويه‌اي سيستم حول مركز جرم چقدر است؟



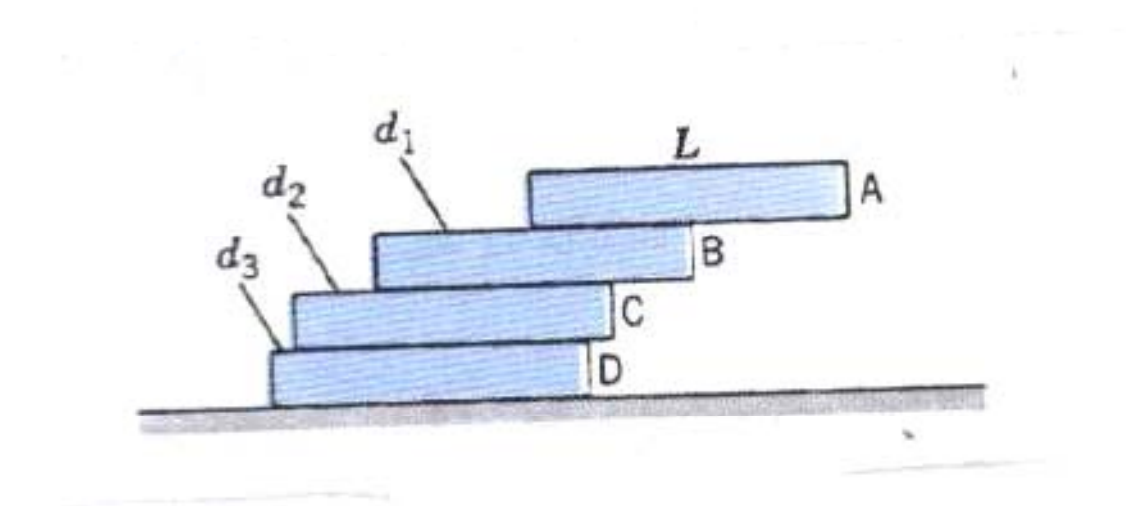
۷. سيستم شكل زير چرخي است به جرم M و شعاع R كه قرقره‌اي به شعاع r در وسط دارد (چيزي شبيه به يويو). لختي دوراني سيستم حول محور مركزي‌اش I است. نخ را با نيروي F در جهتي كه در شكل نشان داده شده است مي‌كشيم. اگر هيچ لغزشي در كار نباشد (الف) شتاب مركز جرم سيستم چقدر است؟ (ب) نيروي اصطكاك سطح با چرخ چقدر است؟ (ج) درهر يك از حالاتي كه r كوچكتر از I/MR ، مساوي با اين مقدار ، يا بزرگتر از آن باشد هر يك از كميات (الف) و (ب) چه تغييري مي‌كند؟



۸. چهار قالب يكسان ، هر يك به طول L ، به صورتي كه در شكل زير نشان داده شده است روي هم قرار گرفته‌اند. (الف) بيشترين مقدار d_1 بي‌آنكه قالب A واژگون شود ، چقدر است ؟

ب) بيشترين مقدار d_2 بي‌آنكه A و B از روي C بيفتد ، چقدر است ؟

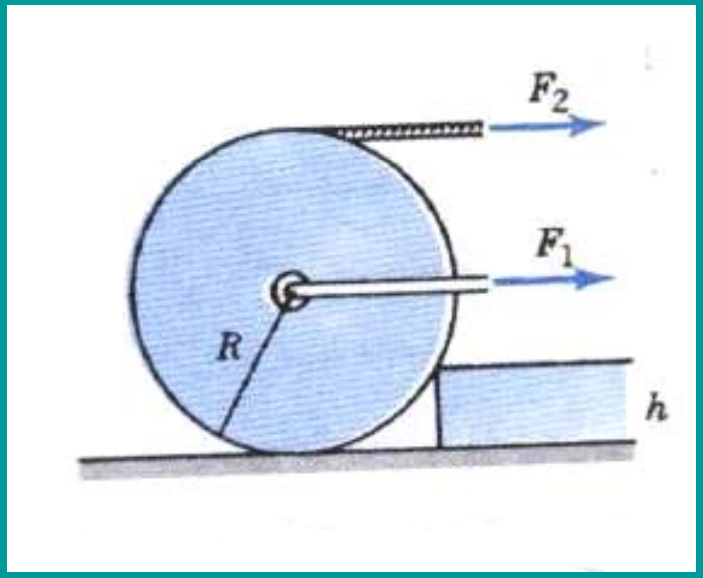
ج) بيشترين مقدار d_3 بي‌آنكه A، B، و C واژگون شوند ، چقدر مي‌تواند باشد ؟



۹. مي‌خواهيم استوانه‌اي به جرم M=۱۰ kg و شعاع R=۰٫۴m را از پله‌اي به ارتفاع h=۰٫۲m بالا ببريم (شكل زير). در هر يك از حالات زير چه نيروي افقي‌اي براي اين كار لازم است؟

الف) اگر نيروي F_1 به محور مركزي وارد شود ،

ب) اگر نيروي (F_2) به لبة بالا اثر كند.



www.salampnu.com

سایت مرجع دانشجوی پیام نور

- ✓ نمونه سوالات پیام نور : بیش از ۱۱۰ هزار نمونه سوال همراه با پاسخنامه تستی و تشریحی
- ✓ کتاب ، جزوه و خلاصه دروس
- ✓ برنامه امتحانات
- ✓ منابع و لیست دروس هر ترم
- ✓ دانلود کاملا رایگان بیش از ۱۴۰ هزار فایل مختص دانشجویان پیام نور

www.salampnu.com