www.salampnu.com

بسم الله الرحمن الرحيم

ریاضی برای آمار ۴ واحد

مؤلف : عین الله پاشا
درسنامه و اسلاید : محسن حبیبی راد
(مرکز مشهد)

فهرست

فصل اول

آنالیز ترکیبی

در این فصل آنالیز ترکیبی معرفی، اصل های اساسی ضرب و جمع مطرح می شوند. بر اساس این دو اصل، بخصوص اصل ضرب مفاهیم ترتیب و ترکیب و فرمول های مربوط به آنها ارائه می شود و با بهره گیری از مفاهیم ترتیب و ترکیب و استفاده های فراوان از اصل ضرب مدل های مختلف توزیع گلوله ها در جعبه ها تشریح و فرمول های آنها به دست می آید. در پایان دستورهایی برای بسط دو جمله ای و چند جمله ای ارائه می شود.

آنـالیز ترکیبـی شـامل مطالعـه جایگشـت هـا , ترکیـب هـا و افرازهاست که به تعین تعداد حالتهای منطقی یک پیشامد مربـوط می شود.

در این فصل تکنیکهایی که برای حل مسائلی کـه شـامل شـمارش باشـند بررسـی مـی کنـیم ایـن تکنیکها اسـاس مطالعـه ترکیبـات شمارش را می سازد .

دو اصل اساسی برای شمارش وجود دارد که در سراسر این فصـل بکار می رود.

قبل از بیان دو قاعده مهم شمارش , یعنی اصل جمع و اصل ضرب و برای ورود به موضوع مثالی را مطرح می کنیم .

مثال : فرض کنید در یک کلاس ۳۴ نفره آمار , ۱۱ دانشجوی پسر و ۲۳ دانشجوی دختر وجود دارد. می خواهیم از هر گروه یک نماینده انتخاب کنیم به چند طریق می توان این عمل را انجام داد؟

حل : چون ۱۱ دانشجوی پسر داریم , بنابراین برای انتخاب یک نماینده پسر , ۱۱ شانس وجود دارد و برای انتخاب یک نماینده دختر از ۲۳ دانشجوی دختر , ۲۳ شانس داریم .

واضح است که این شانس ها هیچ اثری بر یکدیگر ندارند

بنابراین , مستقل از هم می باشند و چون می خواهیم از هر گروه

یک نماینده انتخاب کنیم تعداد انتخاب ها برابر است با :

$$11 \times 23 = 253$$

توجه کنید که یک نماینده از دانشجویان پسر«و» یک نماینده

از دانشجویان دختر مورد نظر است , بنابراین لفظ «و» و علامت

«×» بین ۱۱ و ۲۳ کاملاَ مرتبط هستند.

اکنون فرض کنید که بخواهیم فقط یک نماینده انتخاب کنیم و تاکید خاصی روی پسر یا دختر بودن نداشته باشیم به عبارت دیگر , واضح است که نظر ما اینست که صرفا یک نماینده انتخاب کنیم که میتواند متعلق به گروه دانشجویان پسر «یا» به گروه دانشجویان دختر باشد بنابراین کل شانس های انتخاب برابر است با :

۱۱+۲۳=۳۴

در اینجا به رابطه منطقی بین لفظ یا نماد «+» و «یا» توجه کنید.در مسائل واقعی همواره شرایط به سادگی آنچه که گذشت نیست , که در این صورت لازم است روشها و تکنیکهایی ابداع و ارائه شوند که بتوانیم مسائل مورد نظر را بدون فهرست کردن یا بدون شمارش آنها , تعداد حالات مورد نظر را بدست آوریم .

مجموعه روشها و تکنیکهای ی که برای شمارش ها بکـار مـی رونـد موضوع آنالیز ترکیبی است.

به طـوری کـه گذشـت اساسـی تـرین موضـوع در آنـالیز ترکیبـی اصل های جمع و ضرب است که در عین سادگی اهمیـت و کـاربرد فراوان دارند.

پس از بیان ایـن دو اصـل , دو موضـوع ترتیـب و ترکیـب کـه از مباحث اصلی آنـالیز ترکیبـی اسـت , مـورد مطالعـه قـرار مـی گیـرد. موضوع های تـابع مولـد و اصـل شـمول و عـدم شـمول و اصـل لانـه کبوتر از دیگر روشهای موثر در مبحث آنالیز ترکیبی است . موضوع تابع مولد ها زینت بخش فصل بعدی خواهد بود.

اصول اساسی شمارش:

اصل جمع :

اگر پیشامد E بتواند به m راه و به پیشامد F بتواند به n راه اتفاق بیفتد و فرض کنیم این دو پیشامد نمی توانند به طور همزمان اتفاق بیفتند , آنگاه پیشامد E یا F می توانند به m+n راه اتفاق بیفتد.

به بیان کلی تر , فرض کنید دنباله ای از K پیشامد باشند بطوریکه : پیشامد به طریق بتواند رخ دهد (i=1,2,... k) هیچ دو پیشامدی به طور همزمان رخ ندهد

آنگاه یکی از پیشامدها می تواند به :

$$n_1 + n_2 + ... + n_K$$

طریق رخ دهد.

مثال ۱. فرض کنید در یک دانشگاه ۸ استاد مرد و ۵ استاد زن ,

درس ریاضیات گسسته را تدریس می کنند.

حل: یک دانشجوی این دانشگاه می تواند به ۱۳=۵+۸ طریق استاد

ریاضیات گسسته را انتخاب نماید.

مثال ۲.فرض کنید E پیشامد یک عدد اول کمتر از ده و F پیشامد انتخاب یک عدد زوج کوچکتر از ده است .

حل: در این صورت E می تواند به چهار طریق (۲,۳,۵,۷) و F می تواند به چهار طریق (۲,۴,۶,۸) اتفاق بیفتد , با وجود این E یا F نمی توانند به ۸=۴+۴ طریق رخ دهد زیرا ۲ هم متعلق به E و هم متعلق به F است در حقیقت E یا F میتوانند تنها به ۷=۱−۴+۴طریق رخ دهد.

مثال ۳. در لیست ثبت نام دانشگاه در یـک نیمسـال معـین رشـته آمـار , ملاحظـه مـی شـود کـه ۲۲ دانشـجو بـرای درس ریاضـی عمومی ۱ و ۳۸ دانشجو برای درس آمار و احتمال ثبت نام کـرده اند , آیا می توان گفـت تعـداد دانشـجویانی کـه در ایـن دودرس ثبت نام کرده اند برابر ۶۰= ۳۸+۲۲ نفر می باشند؟

حل: خیر , زیرا ممکن است بعضی دانشجویان در هر دو درس ثبت نام کرده باشند , بنابراین این دو پیشامد عملا جدا از هم نمی باشند و شرط دوم اصل جمع ممکن است برقرار نباشد . به مثال ۴ توجه شود.

مثال ۴. در مثال ۳ با فرض اینکه ۱۲ نفر در هر دو درس ثبت نام کرده باشند , تعداد کل دانشجویان را مشخص کنید؟

حل: می توان سه پیشامد جدا از هم را مشخص نمود:

E_1 ,پیشامد مربوط به اینکه دانشجوی آمار در درس ریاضی عمومی۱ ثبت نام نموده ولی درس آمار و احتمال را انتخاب نکرده باشد بنابر این حالات ممکن برای این پیشامد برابر است با: ۲۲−۱۲=۱۰

E_2 , پیشامد مربوط اینکه یک دانشجوی آمار در درس آمار و

احتمال ثبت نام کرده است ولی در درس ریاضی عمومی۱

ثبت نام نکرده باشد, در این صورت حالات ممکن عبارت

است از: ۲۶=۱۲-۳۸

E_3, پیشامد مربوط به اینکه یک دانشجوی آمار در هر دو درس ثبت نام کرده باشد که بنا به فرض مثال تعداد حالات برابر ۱۲ می باشد.

سه پیشامد جدا از هم می باشند . یعنی وقوع همزمان هر دوتای از آنها غیر ممکن است بنابراین طبق اصل جمع تعداد کل دانشجویان برابر است با : $n_1 + n_2 + n_3$ =۱۰+۲۶+۱۲=۴۸

بیان ریاضی اصل جمع:

فرض کنید مجموعه A دارای n عضو و مجموعه B دارای m عضو باشد اگر $A \cap B = \phi$ در این صورت $A \cup B$ دارای m+n عضو است.

مثال: فرض کنید کلاس آمار و کلاس ریاضی یک دانشکده به ترتیب ۲۸ و ۳۴ دانشجو داشته باشد , اگر بخواهیم نماینده ای از بین این دانشجویان انتخاب کنیم , تعداد صورت های ممکن عبارت است از: ۲۸+۳۴=۶۲

اینک به بیان اصل دوم (ضرب) می پردازیم:

اصل ضرب:

اگر پیشامدی بتواند به n_1 راه مختلف اتفاق بیفتد و بعد از این پیشامد , اگر پیشامد دومی بتواند به n_2 راه مختلف اتفاق بیفتد و به دنبال آن , پیشامد سومی بتواند به n_3 راه مختلف اتفاق بیفتد ,...., آنگاه تعداد راههایی که این پیشامدها می توانند اتفاق بیفتند با توجه به ترتیب ارائه شده به صورت $n_1 \times n_2 \times n_3 \times ....$ است.

مثال۱: برای یک علامت اختصاری از ۷ کد استفاده می شود که ۳ کد اول یکی از حروف الفبای فارسی و چهار کد بعدی , یکی از اعداد ۰ تا ۹ می باشند . با توجه به شرایط زیر , چند علامت متمایز می توان ساخت:

الف : حروف و ارقام بتوانند تکرار شوند.

ب : حروف تکرار نشوند.

حل:

الف : می دانیم که تعداد حروف ۳۲ و تعداد ارقام برابر ۱۰

می باشند , بنابراین

$$n_1 = n_2 = n_3 = 32$$

$$n_4 = n_5 = n_6 = n_7 = 10$$

و بنا بر اصل ضرب , تعداد کل علامت های متمایز برابر است

$$32 \times 32 \times 32 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 327680000$$

ب: چون حروف نباید تکرار شوند لذا :

$$n_1 = 32 \qquad n_2 = 31 \qquad n_3 = 30$$

$$n_4 = n_5 = n_6 = n_7 = 10$$

$$32 \times 31 \times 30 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 29760000$$

مثال۲: کاربردی از اصل ضرب

نشان دهید که تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه n عضوی ,

برابر 2^n است.

حل: این مجموعه را به صورت 3,2,1 ,..., n نشان می دهیم.

و پیشامدهای زیر را تعریف می کنیم

E_1 : انتخاب یا عدم انتخاب اولین عضو A (به منظور شرکت در تشکیل زیر مجموعه مورد نظر)

E_2 : انتخاب یا عدم انتخاب دومین عضو A (به منظور شرکت در تشکیل زیر مجموعه مورد نظر)

.

.

.

E_n : انتخاب یا عدم انتخاب n امین عضو A (به منظور شرکت در تشکیل زیر مجموعه مورد نظر)

هر کدام از E_i ها به دو طریق می توانند اتفاق بیفتد و انتخاب

یکی تاثیری در دیگری ندارد[از شرایط لازم اصل ضرب] بنابر

اصل ضرب حالات ممکن برای آنکه $E_1, E_2, \ldots\ldots, E_n$

رخ دهند برابر است با:

$$2 \times 2 \times 2 \times \ldots \times 2 = 2^n$$

برای دو اصل شـمارش بـالا , تفسـیری روی نظریـه مجموعـه هـا

وجود دارد – به خصوص اینکه اگر n (A) تعـداد عضـوهای

مجموعه A باشد آنگاه :

اصل قاعده جمع: اگر A و B دو مجموعه جدا از هـم باشـند

آنگاه: $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

اصل قاعده ضرب: اگر ضرب دکارتی مجموعه هـای A و B

باشد آنگاه: $n(A \times B) = n(A) \times n(B)$

خود آزمایی(کار در کلاس)

۱-با فرض آنکه تکرار ارقام مجاز نباشد, با رقمهای ۲,۳,۵,۶,۷,۹

الف) چند عدد سه رقمی می توان نوشت

ب) چند عدد سه رقمی زوج می توان نوشت

ج) چند عدد سه رقمی فرد می توان نوشت

د) چند عدد سه رقمی مضرب ۵ می توان نوشت

جواب: الف)۱۲۰ ب)۴۰ ج) ۴۰ د) ۸۰

۲- فرض کنید در یک کلاس ریاضی عمومی ۱ , ۲۰ دانشجوی ریاضی و ۱۵ دانشجوی آمار وجود دارند.

الف) به چند طریق می توان یک نماینده از دانشجویان ریاضی و یک نماینده از دانشجویان آمار انتخاب کرد؟

ب) به چند طریق می توان نماینده ای از این کلاس انتخاب کرد؟

جواب: الف) ۳۰۰ ب) ۳۵

۳- به چند طریق می توان به ۵۰ سوال تستی که ۲۰ تای آنها سه جوابی و بقیه چهار جوابی هستند , پاسخ داد؟

جواب:

$$3^{20} \times 4^{30}$$

ترتیب:

هدف ما از ترتیب انتخاب گروههای K تـایی از میـان n عضـو متمایز , به طوریکه $n \geq k$ باشد. مثل انتخاب گروههای سـه تایی از میان پنج عدد ۹,۷,۵,۴,۲ بطوریکه ارقام تکراری نباشند.

ترتیب n شیئی r به r:

اگر n و r اعداد طبیعی باشند و $r \leq n$ آنگاه

$$P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

این قضیه برای انتخاب گروههای r تایی مرتب از n شیئی متمایز است. لازم به ذکر است که تمایز در اینجا به این معناست که مجموعه اشیاء بکار رفته متمایز باشند.

ترتیب قرار گرفتن اشیاء متفاوت باشد.

مثال: از یک گروه ۷ نفره چند کمیته ۳ نفره می توان تشکیل داد که اولی رئیس , دومی منشی و سومی حسابدار کمیته باشند؟

حل. چون ترتیب اعضاء انتخاب شده در این حالت مهم است بنابراین داریم:

$$P_3^7 = \frac{7!}{(7-3)!} = 7 \times 6 \times 5 = 210$$

ترکیب:

برای انتخاب r شیئی متمایز از nشیئی متمایز از ترکیـب اسـتفاده می کنیم. لازم است یادآور شویم که تمایز در ترکیب فقط به این معناست که مجموعه اشیائی که بکار رفته متمایز باشند.

ترکیب n شییئ r به r:

به ازای اعداد طبیعی nو r, $0 \le r \le n$ داریم:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

چند نکته در رابطه با ترکیب:

1) $\binom{n}{0} = 1$

2) $\binom{n}{1} = n$

3) $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

4) $\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1}$

5) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

6) $P_r^n = r!\binom{n}{r}$

مثال: مقدار این عبارت را $\binom{3}{0}+\binom{3}{1}+\binom{3}{2}+\binom{3}{3}$ بیابید.

حل: طبق فرمول

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots\dots+\binom{n}{n}=2^{n}$$

داریم:

$$\binom{3}{0}+\binom{3}{1}+\binom{3}{2}+\binom{3}{3}=2^{3}=8$$

یکی از کاربردهای ترکیب افراز مجموعه هاست.

قضیه : به ازای اعداد n, $n_1, n_2, \ldots\ldots, n_k$ که

$$n_1 + n_2 + \ldots\ldots + n_k = n$$

داریم:

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots. n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots. n_k!}$$

مثال: به چند صورت می تـوان ۱۰ گلولـه نامتمـایز را در ۳ جعبـه متمایز به شماره های C,B,A توزیع کرد به قسمی که جعبه Aسه گلوله , جعبه B دو گلوله و جعبه C پنج گلوله دریافت کند؟

حل: در واقع یـک مجموعـه ده عضـوی را بـه سـه زیـر مجموعـه ۳,۲,۵ عضوی افراز کرده ایم ; پس تعداد حـالات ممکـن عبـارت است از:

$$\binom{10}{2,3,5} = \frac{10!}{2!\times 3!\times 5!} = 2520$$

با استفاده از افراز مجموعه ها میتوانیم ثابت کنیم

$$(x+y+z)^n = \sum_{n_1+n_2+n_3=n} \binom{n}{n_1, n_2, n_3} x^{n_1} y^{n_2} z^{n_3}$$

که تعمیم آن خواهد بود:

$$(x_1+x_2+\dots+x_k)^n = \sum_{n_1+\dots+n_k=n} \binom{n}{n_1,\dots,n_k} x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k}$$

حال اگر فرض کنیم که :

$$x_1 = x_2 = \dots = x_k = 1 \quad , \quad x_1 + x_2 + \dots + x_k = k$$

خواهیم داشت :

$$\sum_{n_1+n_2+\dots+n_k=n} \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = k^n$$

توزیع اشیاء در جعبه ها:

۱) توزیـع r مهـره متمـایز در n جعبـه متمـایز , و در هـر جعبـه حداکثر یک مهره.

در این حالت مهره اول را به n صورت و مهـره دوم را بـه (n-1) صورت می توانیم قرار دهیم و به همین ترتیـب مهـره r ام را بـه n-(r-1) صورت می توانیم در جعبه بگذاریم ; پس بنابر اصل ضرب تعداد صورت های ممکن برای توزیع عبارتست از :

$$n(n-1)\ldots\ldots(n-r+1)=\frac{n!}{(n-r)!}=P_n^r$$

۲) توزیع r مهره متمایز در n جعبه متمایز , و در هر جعبه فقط یک مهره.

مانند حالت قبل اولین مهره به r صورت و دومین مهره به r-1 صورت و... n امین مهره به r-n+1 صورت در جعبه قرار می گیرد. بنابراین داریم:

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

۳) توزیع r مهره متمایز در n جعبه متمایز کـه در هـر جعبـه بتـوان

بیش از یک مهره قرار داد.

مهره اول به nصورت توزیع می شود ; چون می توان بیش از یک

مهره قرار داد پس دومی و .... r امی هم بـه n صـورت توزیـع

می شود. پس طبق اصل ضرب داریم :

$$\underbrace{n \times n \times \cdots n}_{r} = n^r$$

۴) توزیع r مهره متمایز در n جعبه متمایز که هر جعبه می تواند بیش از یک مهره داشته باشد و ترتیب مهره ها در جعبه ها نیز در نظر گرفته شود.

اگر n جعبه داشته باشیم و (n-1) حد فاصل بین جعبه ها داشته باشیم ; یعنی تعداد حالاتی که بتوان rمهره متمایز در (n-1) نماد حد فاصل را کنار هم قرار داد.

$$r \geq n$$

$$\frac{(r+n-1)!}{(n-1)!}$$

۵) توزیع r گلوله مشابه و نامتمایز در n جعبه متمایز در هر جعبه حداکثر یک گلوله.

چون ممکن است جعبه هایی خالی بمانند r جعبه انتخاب می کنیم و در هر یک از آنها یک مهره قرار می دهیم سپس به تعداد صورتهایی که ممکن است r شیئی متمایز از n شیئی متمایز , بدون رعایت ترتیب , انتخاب کرد. می توان این مهره ها را در جعبه ها توزیع کرد سپس تعداد حالات ممکن عبارت است از:

$$\binom{n}{r}$$

۶) توزیع r گلوله نامتمایز در n جعبه متمایز که بتوان در هر جعبه بیش از یک مهره قرار داد.

مانند حالت (۴) عمل می کنیم یعنی در اصل می خواهیم

(n-1+r) شیئ را که (n-1) تای آنها مثل هم و r تای دیگر مثل هم ولی متفاوت از گروه قبلی باشد , کنار هم مرتب کنیم.

$$\binom{n-1+r}{r} = \frac{(n-1+r)!}{(n-1)!\quad r!}$$

۷) توزیع r گلوله نامتمایز در n جعبه نامتمایز.

برای حل این مسائل کافی است معادلات زیر را حل کنیم.

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = r$$

سپس یکی از کاربردهای استفاده از توزیع اشیاء و ترکیب پیدا

کردن جوابهای صحیح و نامنفی معادلات دیفرانسیل است .

$$\binom{n+k-1}{k-1}=$$ تعداد جواب های معادله

$$x_1+x_2+\ldots\ldots+x_k=n$$

که می توان نامعادلات را هم به راحتی با اضافه کردن یـک عضـو

و تبدیل آن به معادلات دیفرانسیل هم تعداد جوابهای صحیح و

نامنفی آن را بدست آوریم.

مثال: تعداد جوابهای صحیح و نامنفی نامعادله زیر را بدست آورید.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 8$$

حل. اگر فرض کنیم $x_5 = 8 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$ باشد

داریم:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8$$

دراینجا n=8 و k=5 می باشد , بنابر این داریم:

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{8+5-1}{5-1} = \binom{12}{4} = 495$$

خودآزمایی(کار در کلاس)

۱) از بین ۳ سوپ مختلف , ۴نوع ساندویچ و ۲نوع نوشابه , چند ناهار مختلف که شامل یک سوپ , یک ساندویچ و یک نوشابه است می توان انتخاب کرد؟

جواب: ۲۴

۲) یک شعبه محلی انجمن ریاضی به چند طریق می تواند برای سه گردهمایی مختلف , سه سخنران را تعیین کند , به شرطی که همه سخنرانها برای هر یک از پنج تاریخ ممکن , حاضر به انجام سخنرانی باشند؟

جواب: ۶۰

۳) در ۷ پرتاب یک سکه به چند راه ۳ خط و ۴ شیر ظاهر می شوند؟

جواب: ۳۵

۴) به چند طریق می توان هفت بازرگان را که برای شرکت در جلسه

ای سفر کرده اند در یک اتاق سه تخته و دو اتاق دو تخته هتلی

جای داد؟

ضرایب دو جمله ای:

۱.نماد $\binom{n}{r}$ (بخوانید " n سی r " , " ncr " یا "n روی r ")

که در آن r و n اعداد صحیح مثبت هستند و $r \le n$ است به

صورت زیر تعریف می شود:

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1\times2\times\ldots\times(r-1)\ r}$$

به دنبال قضیه ای که خواهد آمد, این اعداد ضریب های

دو جمله ای نامیده می شوند.

نشان دهید که: $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ (۱*)

حل. داریم:

$$n(n-1)\ldots(n-r+1) =$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)(n-r)(n-r-1)\ldots 3\times 2\times 1}{(n-r)(n-r-1)\ldots(3)(2)(1)} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$n(n-1)\ldots(n-r+1)\frac{1}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!}\frac{1}{r!}$$

$$= \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

توجه دارید که $\binom{n}{r}$ دقیقا r عامل ضرب در صورت و مخرج کسر دارد.

یادداشت:

الف) توجه شود که منظور از !n عبارت است از:(بخوانید n فاکتوریل)

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots. \times (n-1) \times n$$

به بیان دیگر !n, حاصل ضرب اعداد صحیح مثبت از ۱ تا خود n است و گاهی !n را به نام تابع فاکتوریل نیز یاد می کنیم. علاوه بر این قرار داد شده است که: 0!=1

ب) یک تعریف بازگشتی برای تعریف فاکتوریل عبارت است از:

$$n! = n \times (n-1)!$$

(این تعریف بازگشتی است زیرا در تعریف !n از تعریف !(n-1)

استفاده می شود)

نتیجه ۱: ثابت کنید

$$\binom{n}{n-r} = \binom{n}{r}$$

مثال کاربردی: در محاسبه $\binom{10}{7}$ با استفاده از این فرمول

می توان $\binom{10}{3}$ را که ساده تر است مورد نظر قرار داد یا به بیان

دیگر, اگر $a+b=n$ باشد آن گاه:

$$\binom{n}{a} = \binom{n}{b}$$

اثبات: این عبارت از رابطه (۱*) و این واقعیت که : $n-(n-r)=r$

است نتیجه می شود.

نتیجه ۲: ثابت کنید:

$$\binom{n+1}{r}=\binom{n}{r-1}+\binom{n}{r}$$

حل: داریم:

$$\binom{n}{r-1}+\binom{n}{r}=\frac{n!}{(r-1)!\,(n-r+1)!}+\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

قضیه دو جمله ای و مثلث پاسکال:

همان طور که گذشت اعداد $\binom{n}{r}$ ضرایب دو جمله ای نام دارند, زیرا به صورت ضرایب در بسط $(a+b)^n$ که بصورت زیر مرسوم به قضیه دو جمله ای زیر است , ظاهر می شوند.

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\times 2}a^{n-2}b^2 + \dots + nab^{n-1} + b^n =$$

$$= a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{1}ab^{n-1} + b^n$$

$$= \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}a^{n-r}b^r$$

نکته ۱: چند نکته درباره بسط $(a+b)^n$

الف) n+1 جمله دارد.

ب) مجموع توانهای a,b در هر جمله برابر n است.

ج) توان های a جمله به جمله از n به ۰ کاهش می یابد ولی توان های b جمله به جمله از ۰ به n افزایش می یابد.

د) ضریب هر جمله برابر $\binom{n}{k}$ است که در آن k توان a یا b است.

ه) ضریب های جمله هایی که به فاصله برابر از ابتداء و انتهای بسط هستند برابر است.

نکته ۲: توجه شود که k در ضریب $\binom{n}{k}$ را می تـوان در قضـیه

دو جمله ای از توان a یا توان b بدست آورد این موضوع از واقعیت

زیر استفاده می شود.

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

مثلث پاسکال :

ضرایب توان های متوالی a+b را می توان در یک آرایش مثلثی

از اعداد مرتب کرد این آرایش مثلثی از اعداد , مثلث پاسکال نام

دارد.این مثلث دارای دو مشخصه اصلی زیر است:

الف) عدد اول و عدد آخر هر سطر ۱ است.

برای رسیدن به یک مخرج برابر در دو کسر , کسر اول را در

$\frac{r}{r}$ و کسر دوم را در $\frac{n-r+1}{n-r+1}$ ضرب می کنیم از این رو:

$$\binom{n}{r-1}+\binom{n}{r}=\frac{r\times n!}{r(r-1)!(n-r+1)!}+\frac{(n-r+1)n!}{r!(n-r+1)(n-r)!}=$$

$$=\frac{r\times n!}{r!(n-r+1)!}+\frac{(n-r+1)n!}{r!(n-r+1)!}$$

$$\frac{r\times n!+(n-r+1)n!}{r!(n-r+1)!}=\frac{(n+1)!}{r!(n+1-r)!}=\binom{n+1}{r}$$

ب) هر عدد دیگر آرایش را می توان با جمع دو عددی که به طور مستقیم در بالای آن عدد قرار دارند به دست آورد برای مثال , $10=4+6$, $15=5+10$, از آنجا که اعدادی که در مثلث پاسکال ظاهر شده از ضرایب دو جمله ای هستند مشخصه (ب) از مثلث پاسکال , از قضیه زیر نتیجه شده است:

$$\binom{n+1}{r}=\binom{n}{r-1}+\binom{n}{r}$$

این مثلث به صورت زیر است:

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

.

.

.

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

.

.

.

ضرایب چند جمله ای :

اگر اعداد صحیح نامنفی $n_1, n_2, n_3, \ldots\ldots, n_r$ طوری باشند

که : $n_1 + n_2 + \ldots\ldots + n_r = n$ آنگاه بسط $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots\ldots, n_r}$

بصورت زیر تعریف می شود:

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \sum_{n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \ldots a_r^{n_r}$$

مثال : الف) $\binom{6}{3,2,1} = \frac{6!}{3!2!1!} = 60$

ب) عبارت $\binom{10}{5,3,2,2}$ بی معنی است زیرا

$$5+3+2+2 \neq 10$$

نتیجه:

$$\binom{n}{n_1, n_2} = \binom{n}{n_1} = \binom{n}{n_2}$$

زیرا به صورت ضمنی از عبارت $\binom{n}{n_1, n_2}$ نتیجه می شود.

$n_1 + n_2 = n$ یا $n_2 = n - n_1$ از این رو:

$$\binom{n}{n_2} = \binom{n}{n_1} = \frac{n!}{n_1!\left(n-n_1\right)!} = \frac{n!}{n_1!n_2!} = \binom{n}{n_1, n_2}$$

كاربردهاي ديگري از قضيه دوجمله اي :

۱) بسط دوجمله ای عبارت است از :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k} \qquad k \le n$$

۲) $a = b = 1$

$$(1+1)^n = 2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1 \cdot 1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

۳) $a = 1, b = -1$

$$(1+(-1))^n = 0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot (1)^k \cdot (-1)^{n-k} = 0$$

۴) در بسط دوجمله ای انتخاب می کنیم

$a=1 \qquad b=x-1$ ،

$$(1+x-1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1)^k(x-1)^{n-k}$$

$$x^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x-1)^{n-k}$$

۵) فرض کنید :

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}\cdot y^k$$

. در این بسط انتخاب کنید

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \cdot (1)$$

یا

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1)^{n-k} x^k$$

از رابطه اخیر نسبت به X مشتق بگیرید .

$$n(x+1)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (k) \cdot x^{k-1}$$

سرانجام در این مشتق انتخاب کنید .

$$n(1+1)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{x} (k) \cdot (1)$$

$$n(2)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{x}$$

۶) حالتی را در نظر می گیریم $n = \alpha \in R$ اکنون می خواهیم $\binom{\alpha}{k}$ را مشخص کنیم .

تعریف : (*)

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{1}{k!}\alpha(\alpha-1)\Lambda\ (\alpha-k+1)$$

اگر $(n \in N)n = \alpha$ همان $\binom{n}{k}$ حاصل می شود .

$$\binom{2.5}{3} = \frac{1}{3!}(2.5)(2.5-1)(2.5-2)$$

$$= 0.3125$$

کاربرد : وقتی که بخواهیم بسط $(1+x)^{1/2}$ را حساب کنیم .

۷) اکنون حالتی را در نظر می گیریم که $n \to -n \in R$

قضیه :

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$$

مثال :

$$\binom{-3}{4} = (-1)^k \binom{3+4-1}{4}$$

مثال : از معادله زیر X را بدست آورید .

$$\binom{-4}{3}+x\binom{-3}{4}=0$$

$$(-1)^3\binom{4+3-1}{3}=-\binom{6}{3}=\frac{-6!}{3!\cdot 3!}=-20$$

$$\binom{-3}{4}=(-1)^4\binom{3+4-1}{4}=15$$

$$-20+15x=0\rightarrow x=\frac{20}{15}=\frac{4}{3}$$

اثبات قضیه :

$$\binom{-n}{k}=(-1)^k\binom{n+k-1}{k}$$ در تعریف (*) انتخاب کنید . $\alpha=-n$

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{1}{k!}\alpha(\alpha-1)\Lambda\ (\alpha-k+1)$$

$$\binom{\alpha}{k} = \binom{-n}{k} = \frac{1}{k!}(-n)(-n-1)\Lambda\ (-n-k+1)$$

$$= \frac{1}{k!}(-1)(n)(-1)(n+1)\Lambda\ (-1)(n+k-1)$$

$$= (-1)^k \frac{1}{k!} n(n+1)\Lambda\ (n+k-1)$$

$$= (-1)^k \frac{1}{k!}\left(\frac{1\times 2\times 3\times \Lambda\ \times (n-1)}{1\times 2\times 3\times \Lambda\ \times (n-1)}\right)\cdot n(n-1)\Lambda\ (n+k-1)$$

$$= (-1)^k \frac{(n+k-1)!}{k!\cdot(n-1)!} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$$

با استفاده از این بسط و تعریف $\binom{\alpha}{k}$ می توانیم بسط هاي مختلفي را نتيجه بگیریم که در این موارد بسط زیر راه گشاست .

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \qquad |x|<1$$

مثال : بسط های زیر را محاسبه کنید .

۱) $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2}$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{1} x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k \binom{1/2}{1}$$

۲) $$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-1/2}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1/2}{k}(-x^2)^k$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1/2}{k}(-1)^k x^{2k}$$

۳) $$\arcsin x=\frac{d}{dx}\arcsin x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int_0^x\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt=\arcsin x$$

$$\int_0^x\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt=\int_0^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1/2}{k}(-1)^k t^{2k}=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\infty}\binom{-1/2}{k}(-1)^k x^{2k}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{-1/2}{k}\frac{1}{2k+1}t^{2k-1}\Big|_0^x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{-1/2}{k}\frac{1}{2k+1}x^{2k-1}$$

۴) $\arctan x = \frac{d \arctan x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$ $\qquad |x|<1$

$$\frac{1}{1-x} = \sum x^n$$

$$x \to -x : \frac{1}{1+x} = \sum (-x)^n$$

$$x \to +x^2 : \frac{1}{1+x^2} = \sum (-x^2)^n = \sum (-1)^n x^{2n}$$

$$\arctan x = \int_0^x (1+t^2)^{-1} dt = \int_0^x \sum (-1)^k t^{2k} dt$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^k t^{2k} dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1} t^{2k+1} \Big|_0^x$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1} x^{2k+1}$$

۸-معرفی یک چند جمله ای که معرف انتخاب ها باشد

(کاربردی از بسط $(1+x)^n$) فرض مي کنیم n

شیء متمایز به صورت $a_0, a_1, \ldots, a_n$ داشته باشیم ،

در این صورت در ریاضیات گسسته ثابت می شود

صورت های مجزایی که می توانیم اشیائی متمایز

بدون تکرار از این شیء را انتخاب کنیم در یک چند

جمله ای به صورت زیر معرفی می شود :

$$P = 1 + (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)x + (a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n)x^2$$

$$+ \ldots + (a_1a_2a_3 \ldots a_n)x^n$$

با استفاده از قوانین جبری می توانیم این چند جمله ای را به صورت زیر ساده کنیم .

$$P = (1 + a_1 x)(1 + a_2 x)\Lambda\ (1 + a_n x)$$

از آنجا که a_i ها نقشی در موضوع ندارند برای ساده شدن مطلب فرض می کنیم :

$$a_1 = a_2 = a_3 = \Lambda\ = a_n = 1$$

در این صورت چند جمله ای به صورت زیر نوشته می شود .

$$P(1 + x)(1 + x)\Lambda\ (1 + x) = (1 + x)^n \qquad |x| < 1$$

با استفاده از بسط دوجمله ای خواهیم داشت :

$$P=(1+x)^{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k} \qquad |x|<1$$

$$1+nx+\Lambda\ +(1)x^{n}$$

فرمول اخير يك چند جمله اي درجة n است كه با استفاده از آن می توانیم انتخاب های ممکن را معرفی کنیم .
در این فرمول ضرایب x ها طرق انتخاب (صورتهاي مختلف انتخاب) و توان x تعداد انتخاب ها را مشخص مي كند . به عنوان نمونه فرض كنيد سه جمله را به صورت زير در هم ضرب كنيم .

$$(1+x)(1+x)(1+x)=1+3x+3x^2+x^3$$
$$=1x^0+3x^1+3x^2+1x^3$$

با توجه به این چند جمله ای نتیجه می گیریم :

۱) $1x^0$: به یک طریق می توانیم صفر شیء انتخاب کنیم .

۲) $3x^1$ به سه طریق می توانیم یک شیء را از بین سه شیء انتخاب کنیم .

۳) $3x^2$: به سه طریق می توانیم دو شیء را انتخاب کنیم .

٤) $1x^3$: به یک طریق می توانیم سه شیء را انتخاب کنیم

تذکر : در صورتی که انتخاب ها با تکرار باشند مسئله به گونهٔ زیر مطرح می شوند . فرض می کنیم شیء n داریم که k_1 تا از یک نوع ، k_2 تا از نوع دوم و ... و k_n تا از نوع n ام باشد. به شرطی که $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = n$ ، در این صورت انتخاب های ممکن عبارت است از :

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_n} = \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_n!}$$

مثال : فرض مي كنيم ۸ گلوله با دو رنگ متمايز داشته باشيم به طوري كه ۵ گلوله آبي و ۳ گلوله قرمز باشند . به چند صورت مي توانيم سه گلوله انتخاب كنيم .

$$\binom{8}{3,5} = \frac{8!}{3!\cdot 5!} = 56$$

۹) سرانجام این فصل را با کاربرد دیگری از مسائل ترکیباتی به پایان می بریم .

از جمله کاربردهای مسائل ترکیباتی بدست آوردن تعداد جوابهای صحیح و نامنفی معادلاتی به صورت

$$x_1 + x_2 + \Lambda + x_k = n$$

می باشد . هر معادله به این صورت دارای

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

جواب صحیح نامنفی است .

مثال : مطلوب است تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادلات زیر :

۱) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$

$$\binom{6+4-1}{4-1} = \binom{9}{3} = \frac{9!}{3! \cdot 6!} = 84$$

۲) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 < 6$

فرض مي كنيم x_5 مقدار مشخصی باشد که داشته باشیم :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6$$

در این صورت تعداد جواب های صحیح و نامنفی نامعادله بالا برابر است با تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله اخیر .

$$\binom{6+5-1}{5-1} = \binom{10}{4} = \frac{10!}{6!\cdot 4!}$$

فصل دوم

تابع مولدها

هدف های آموزشی:

در فصل اول با مفهوم آنالیز ترکیبی و اصول جمع و ضرب و کاربرد آنها آشنا شدیم. در این فصل به معرفی تابع مولدها می پردازیم که روش دیگری برای حل مسائل ترکیباتی و تعیین تعداد انتخاب های معین می باشد.

بسط های تیلور و مک لورن: فرض می کنیم $f(x)$ تابعی باشد

که خود و مشتقاتش یعنی $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x)$ در

فاصله $a \le x \le b$ تعریف شده و پیوسته باشد و همچنین فرض

می کنیم $f^{(n+1)}(x)$ در فاصله (a,b) وجود داشته باشد در

این صورت بنا به تعریف داریم:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a)^1 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n$$

$$n \to \infty \qquad R_n \to 0 \qquad f(x) \cong P_n(x)$$

در بسط مک لورن a=0 داریم:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

سری تیلور $$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

سری مک لورن $$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

در حقیقت سری های مک لورن حالت خاصی از سری هـای تـوانی

یعنی: $$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = a_0x^0+a_1x^1+\ldots+a_nx^n$$ می باشند.

سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ به ازای $|x|\langle R$ همگراست که R شعاع همگرایی است و به ازای $|x| = R$ ممکن است سری همگرا یا واگرا باشد.

در حالت خاص $R = \infty$ سری همواره همگراست. و R=0 فقط در نقطه x=0 همگراست.

می توانیم در فاصله همگرایی مشتق و انتگرال سری ها را محاسبه کنیم

مشتق $$\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{d}{dx} x^n$$

انتگرال $$\int \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_x x^n dx$$

مثال ۱:

$$f(x) = e^x$$

حل:

$$f(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(0) = e^0 = 1$$

$$f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!}\right) x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

مثال۲: مطلوبست محاسبه انتگرال زیر (تقریب تا سه جمله)

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx$$

حل. در بسط $:e^x \quad x \to \frac{-x^2}{2}$

$$e^{\frac{-x^2}{2}} = 1 + \left(\frac{-x^2}{2}\right) + \frac{\left(\frac{-x^2}{2}\right)^2}{2!} + \ldots + \frac{\left(\frac{-x^2}{2}\right)^n}{n!} + \ldots$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{2\Pi}}\right) \left[1 + \left(\frac{-x^2}{2}\right) + \frac{\left(\frac{-x^2}{2}\right)^2}{2!} \right] dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \left(x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{40} x^5 \right)_0^1$$

مثال۳: مطلوبست بسط مک لورن $f(x) = \frac{1}{x-1}$ ، $|x| \langle 1$

حــل. یــک ســری هندســی عبــارت اســت از $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ وقتــی

همگراست که $|r| \langle 1$ ، $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$

در این سری انتخاب می کنیم r=x & a=1

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + ... + x^n + ...$$

مثال۴: مطلوبست محاسبه بسط $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$

حل:

$$x \to x^2 \qquad f(x)=\frac{1}{1-x^2}=1+x^2+x^4+....+x^{2n}+...$$

در هر یک از دو مثال اخیر ملاحظه می کنیم که تابع f(x) ، مولد اعدادی بصورت 1,1,...,1 یا بطور کلی دنباله اعداد {1} (همان ضرایب جملات) می باشد. با این موضوع تعریف تابع مولد را آغاز می کنیم. در حقیقت تابع مولد تابعی است که دنباله اعدادی مانند $\{a_n\}$ را تولید می کند و این امر به کمک شکل سری توانی تابع انجام پذیر است.

تابع مولد:

عبارت است از تابعی که بتواند دنباله اعدادی مانند $\{a_n\}$

را تولید کند.

مثال ۱: تابع $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ مولد چه دنباله ای است؟

مولد دنباله 1,1,1,... می باشد.

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}(1)x^n$$

مثال۲: تابع مولد انتخاب r شیئی از n شیئی (بدون تکرار) را

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

بدست آورید؟

$$= \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r = \binom{n}{0} x^0 + \binom{n}{1} x^1 + ...$$

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^r b^{n-r}$$ (بسط دو جمله ای) می دانیم

تابع مولد انتخاب r شیئی از n شیئی

$$f(x) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r = (1+x)^n$$

مثال ۳: تابع مولد $f(x) = e^{x}$ چه دنباله ای از اعداد را تولید می کند؟

$$f(x) = e^{x} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!}\right) x^n \Rightarrow \{a_n\} = \left\{\frac{1}{n!}\right\}_{n=0}$$

مثال ۴: مطلوبست تابع مولد دنباله اعداد $\{a_n\} = \frac{(-1)^n}{n!}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = e^{-x}$$

مثال ۵: تابع $\cosh(x)$ مولد چه دنباله ای است؟

حل:

$$\cosh(x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\Rightarrow 2\cosh(x)=e^{x}+e^{-x}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-x\right)^{n}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}+\left(-x\right)}{n!}$$

$$=\begin{cases}0 & n=2k+1\\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2x^{n}}{n!} & n=2k\end{cases}$$

$$\Rightarrow \cosh(x)=\begin{cases}0 & n=2k+1\\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!} & n=2k\end{cases}\Rightarrow a_{n}=\begin{cases}0 & n=2k+1\\ \frac{1}{n!} & n=2k\end{cases}$$

خواص تابع مولد ها:

تابع مولد را با یکی از نمادهای زیر معرفی می کنیم.

$G(s) \qquad G_a(s) \qquad \varphi_a(s)$

$$\varphi_a(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$$

۱.شرط لازم و کافی برای آنکه $\varphi_b(s) = \varphi_a(s)$ باشد آن است

که به ازای هر n، $a_n = b_n$

و می دانیم شرط لازم و کافی برای آنکـه دو سـری بـا هـم برابـر

باشند آن است که بازای هر n ; $a_n = b_n$

۲- فرض می کنیم $a_0, a_1, \ldots, a_n$ دنباله اعداد تابع مولد $\varphi_a(s)$

باشد دراین صورت تابع مولد دنباله اعداد $ca_0, ca_1, \ldots, ca_n$

عبارت است از $c\varphi_a(s)$

مولد $\{ca_n\}$

$$c\varphi_a(s) = c\sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n = \sum_{n=0}^{\infty} ca_n s^n$$

اگر $a_0, a_1, \ldots, a_n$ و $b_0, b_1, \ldots, b_n$ دو دنباله از اعداد

حقیقی باشند با تابع مولدهای $\varphi_a(s), \varphi_b(s)$ در این صورت

تابع مولد دنباله اعداد $c(a_0+b_0), c(a_1+b_1), \ldots, c(a_n+b_n)$

عبارت است از $c\varphi_{(a+b)}(s)$

مولد دنباله

$$c\varphi_{(a+b)}(s) =$$

$$c\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)s^n = \sum_{n=0}^{\infty}(ca_n+cb_n)s^n = \sum_{n=0}^{\infty}c(a_n+b_n)s^n\{c(a_n+b_n)\}$$

۴- مشتق n ام تابع مولد درنقطه صفر

$$\frac{d^n}{ds^n}\varphi_a(s)\Big|_{s=0} = n!a_n$$

$$\varphi_a(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n = a_0 + a_1 + a_2 s^2 + \ldots$$

$$\frac{d\varphi_a(s)}{ds} = \varphi_a^{'}(s) = 0 + a_1 + 2a_2 s + 3a_3 s^2 + \ldots. \qquad s = 0 \Rightarrow \varphi_a^{'}(s) = 0 + a_1 + 0 + \ldots. = 1!a_1$$

$$\varphi_a^{''}(s) = 0 + 0 + 2a_2 + 6a_3 s + \ldots. \qquad s = 0 \Rightarrow \varphi_a^{''}(0) = 0 + 0 + 2a_2 + 0 + \ldots. = 2!a_2$$

.

.

.

$$\varphi_a^{(n)}(0) = \big(n(n-1)(n-2)\ldots.\times 2\times 1\big)a_n = n!a_n$$

قضیه مشتق: مشتق تابع مولـد $\varphi_a(s)$ چـه دنبالـه ای از اعـداد را تولید می کند؟

$$\varphi_a(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n = a_0 + a_1 s^1 + ... + a_n s^n$$

$$\varphi_a'(s) = 0 + a_1 + 2a_2 s + ... + na_n s^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} na_n s^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} s^n$$

به این ترتیب نتیجه می گیریم که: مشتق تابع مولـد، دنبالـه اعـدادی بصورت $\{(n+1)a_{n+1}\}$ راتولید می کند.

انتگرال: انتگرال معین φ را در فاصله 0 تا S تعیین می کنیم.

$$\int_0^s \varphi_a(t)dt$$

$$\varphi_a(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \Rightarrow \int_0^s \varphi_a(t)dt=\int_0^s \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^s\left(a_n t^n\right)dt\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[a_n\frac{1}{n+1}t^{n+1}\right]_0^s$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\frac{1}{n+1}s^{n+1}-0\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}s^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n-1}}{n}s^n$$

نتیجه $\int_0^S \varphi(t)dt$ مولد دنباله اعداد $\left\{\frac{a_{n-1}}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ می باشد.

تمرین: تابع مولد دنباله $c_n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \dfrac{1}{n} & n \geq 1 \end{cases}$ را بیابید؟

تابع مولد احتمال:

فرض می کنیم X متغیر تصادفی با مقادیر 0,1,2,… باشد

بطوریکه $x = 0,1,2,\ldots.$ $\quad \mathrm{P}(X = x) = \mathrm{P}_x$

اما می دانیم که $\varphi_a(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$ اکنون $a_n = \mathrm{P}_x$

که n=x=0,1,2,… $\quad \Rightarrow \varphi(s) = \sum_{x=0} \mathrm{P}_x s^x$

در اینصورت این تابع مولد را که احتمالات P_X را تولید

مي کند، تابع مولد احتمال می نامیم.

می دانیم که امید ریاضی g(x) عبارت است از :

$$E[g(X)] = \sum g(X).\mathrm{P}(X = x) = \sum_{x} g(X).\mathrm{P}_{x}$$

$$g(X) = s^{X} \Rightarrow E[g(X)] = E\left(s^{X}\right) = \sum_{x=0}^{\infty} \mathrm{P}_{x} s^{x}$$

یعنی تابع مولد احتمال عبارت است از گشتاورهای مرتبه X ام .

$$\varphi_{p}(s) = E(s^{X})$$

مثال۱: مشتق مرتبه اول تابع مولد احتمال را در نقطه یک محاسبه کنید؟

حل:

$$\varphi_p(s) = p_0 s^0 + p_1 s^1 + \ldots. \qquad \varphi'_p(s) = \sum_{x=1}^{\infty} x p_x s^{x-1}$$

$$s = 1 \to \varphi'_p(1) = \sum_{x=1}^{\infty} x p_x (1) = \sum_{x=1}^{\infty} x p_x = E(x) \Rightarrow \varphi'_p(1) = E(x)$$

مثال۲: مشتق مرتبه دوم تا مرتبه n ام را در نقطه یک محاسبه کنید؟

$$\varphi''(s)=\sum_{x=2}^{\infty}x(x-1)p_x s^{x-2} \qquad s=1 \qquad \varphi_p''(1)=\sum_{x=2}^{\infty}x(x-1)p_x=E(x(x-1))=E\left[x(x-2+1)\right]$$

$$\varphi'''(s)=\sum_{x=3}^{\infty}x(x-1)(x-2)p_x s^{x-3} \qquad s=1 \qquad \varphi_p'''(1)=E\left[x(x-1)(x-2)\right]$$

.

.

.

$$\varphi^{(n)}(1)=E\left[x(x-1)(x-3+1)....(x-n+1)\right]$$

این عبارت را **گشتاورهای فاکتوریل** می نامیم.

تمرین: واریانس را بر حسب گشتاورهای فاکتوریل بنویسید؟

قضیه: اگر $X_1, X_2, ..., X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل باشند

آنگاه:

$$\varphi_{\sum_{i=1}^{n} x_i}(s) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{x_i}(s)$$

برهان: در حقیقت می خواهیم ثابت کنیم:

$$\varphi_{(x_1+x_2+\dots+x_n)}(s)=\varphi_{x_1}(s).\varphi_{x_2}(s)\dots.\varphi_{x_n}(s)$$

اما داریم:

$$\varphi(s)=\sum_{x=0} p_x s^x = E(s^x) \Rightarrow E\left(s^{\sum_{i=1}^{n} x_i}\right)=\sum_{x=0} p_x s^{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$E\left(s^{\sum_{i=1}^{n} x_i}\right)=E\left(s^{x_1+x_2+\dots+x_n}\right)=E\left(s^{x_1}\right)\dots.E\left(s^{x_n}\right)$$

$$E\left(s^{x_i}\right)=\varphi_{x_i}(s)=E\left(s^{x_1}\right)\dots.E\left(s^{x_n}\right)$$

$$\varphi_{x_1}(s)\dots.\varphi_{x_n}(s)=\prod_{i=1}^{n}\varphi_{x_i}(s)$$

مثال ۱: تابع مولد احتمال توزیع پواسن با پارامتر θ را پیدا کرده و با استفاده از آن تابع مولد احتمال $\sum_{i=1}^{n} x_i$ را بدست آورید؟

حل:

$$p_n = e^{-\theta}\frac{\theta^n}{n!}$$

$$\varphi_{x_i}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\theta}\frac{\theta^n}{n!}s^n = e^{-\theta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\theta^n}{n!}s^n = e^{-\theta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\theta s)^n}{n!} = e^{-\theta}e^{\theta s} = e^{-\theta(1-s)}$$

اما چون $X_1, X_2, \ldots, X_n$ مستقل اند داریم:

$$\varphi_{\sum x_i}(s) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{x_i}(s) = e^{-\theta_1 (1-s)} \ldots e^{-\theta_n (1-s)} = e^{(1-s) \sum_{i=1}^{n} \theta_i}$$

یعنی مجموع پواسن های مستقل دارای توزیع پواسنی می باشد که

پارامتر آن مجموع پارامتر هاست.

مثال ۲: مطلوبست تعیین تابع مولد احتمال برنولی؟

$$p(X=x)=p^{x}(1-p)^{1-x}=p_{x}$$

$$\varphi_{x}(s)=\sum_{x=0}^{\infty} p_{x} s^{x}=\sum_{x=0}^{1} p^{x}(1-p)^{1-x} s^{x}=(1-p)+ps$$

مثال ۳: مطلوبست تابع مولد احتمال دو جمله ای به دو روش؟

الف) با استفاده از توزیع برنولی **ب)** به طور مستقیم

فرض می کنیم $X_1, X_2, \dots, X_n$ مستقل با تابع برنولی باشد.

$$X_i \to b(1,p) \Rightarrow y = \sum_{i=1}^{n} X_i \to B(n,p)$$

$$1)\ \varphi_y(s) = \varphi_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(s) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{X_i}(s) = [1+p(s-1)]....[1+p(s-1)] = [1+p(s-1)]^n$$

$$2)\ X \to B(n,p) \qquad p(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = p_x$$

$$\varphi_X(s) = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} s^x = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (ps)^x (1-p)^{n-x}$$

$$\varphi_X(s) = (ps + (1-p))^n = [1+p(s-1)]^n$$

پیچش :

پیچش دنباله $\{a_n\}$ یا $\{b_n\}$ عبارت است از دنباله ای با جمله عمومی: $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

و با تابع مولد $\varphi_c(s) = \varphi_a(s).\varphi_b(s)$ نمادگذاری هر پیچش را با a*b نشان می دهیم.

$$a*b = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1$$

حالت خاص: درصورتی که عوامل پیچش ها با هم برابر باشند آنگاه:

$$\underbrace{a_1.a_2\ldots_3 a}_{n} = a_n^{*}$$

مثال ۱: فرض کنید دنباله اعداد عبارتند از دنباله اعداد پواسن $a_n = e^{-\theta}\dfrac{\theta^n}{n!}$ پیچش k بار این دنباله اعداد را به دست آورید؟

$$a_k^* = e^{-\theta}\frac{\theta^n}{n!}....e^{-\theta}\frac{\theta^n}{n!} = (e^{-\theta}\frac{\theta^n}{n!})^k$$

مثال ۲: فرض کنید دنباله زیـر مفـروض اسـت : n=0,1,2,....

مطلوبست پیچش b,a ؟

$$a_n = e^{-\theta_1}\frac{\theta_1^n}{n!} \qquad b_n = e^{-\theta_2}\frac{\theta_2^n}{n!}$$

$$a*b = c_n = \sum_{k=0}^{n} e^{-\theta_1}\frac{\theta_1^k}{k!}.e^{-\theta_2}\frac{\theta_2^{n-k}}{(n-k)!}$$

مثال ۳: تابع مولد احتمالی را بدست آورید که دنباله اعداد آن

عبارت است از k بار پیچش دنباله اعداد پواسن ؟

$$\varphi_c(s)=\underbrace{\varphi_a(s)\dots\varphi_a(s)}_{k}=(\varphi_a(s))^k$$

$$\varphi_a(s)=\sum_{x=0}^{\infty} s^x p_x = e^{-\theta}\sum_{x=0}^{n}\frac{\theta^x}{x!}s^x$$

$$=e^{-\theta}\sum_{x=0}^{n}\frac{(s\theta)^x}{x!}=e^{-\theta}.e^{s\theta}=e^{-\theta(1-s)}=e^{\theta(s-1)}$$

$$\varphi_c(s)=(\varphi_a(s))^k=(e^{\theta(s-1)})^k=e^{k\theta(s-1)}$$

تمرین : تابع مولد دنباله $c_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ را بیابید؟

فصل سوم

معادلات دیفرانسیل

۳ . ۱ تشکیل معادله دیفرانسیل : تعاریف اساسی

مقدمه : نمو و کاهش :

فرض می کنیم $y = f(x)$ ، معرف یک حالت فیزیکی ، مانند حجم یک جسم ، یا گونه معینی از یک جمعیت یا جرم در حال تلاشی یک ماده پرتوزا[۱] و نظایر آن باشد، در این صورت نمو (یا آهنگ تغییر) $f(x)$ به وسیله مشتق آن یعنی $\frac{dy}{dx}$ بدست می آید.

بنابراین اگر $f(x)$ به میزان ثابتی نمو پیدا کند ، یعنی آن گاه $y = kx + c$ می باشد به عبارت دیگر $y = f(x)$ یک تابع خطی است .

۱.Radioactive

۳ . ۱ تشکیل معادله دیفرانسیل : تعاریف اساسی

در بسیاری از موارد و در حالت کلی ، میزان نسبی نمو در نظر قرار می گیرد که به صورت زیر تعریف می شود :

$$= \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{dy/dx}{y}$$ اندازه $f(x)$ / میزان واقعی نمو = میزان نسبی نمو (۱)

این معادله ، در حقیقت درصد افزایش یا کاهش را برای نشان می دهد ؛ به عنوان مثال ، افزایش ۱۰۰ نفر به جمعیتی به اندازه ی ۵۰۰ نفر ، افزایشی حدود ۲۰ درصد را به همراه خواهد داشت .

۳ . ۱ تشکیل معادله دیفرانسیل : تعاریف اساسی

در بسیاری از کاربردها ، میزان نسبی رشد (نمو) یک کمیت فیزیکی ثابت است :

$$\frac{dy/dx}{y} = \alpha \qquad (۲)$$

یا

$$\frac{dy}{dx} = \alpha\, y \qquad (۳)$$

که درصد ثابت افزایش یا کاهش است ؛ اگر ، کمیت افزایش می یابد و در صورتی که، کمیت کاهش خواهد داشت .

۳ . ۱ تشکیل معادله دیفرانسیل : تعاریف اساسی

معادلاتی از قبیل معادله (۳) را یک معادله دیفرانسیل می نامیم ، زیرا ، معادله ای می باشد که به یک مشتق بستگی دارد .

بسیاری از قوانین اساسی علوم بر حسب چنین روابط ریاضی مشتمل بر مقادیر معلوم و مجهول و مشتقات آن ها ، فرمول بندی شده اند که چنین روابطی را " معادلات دیفرانسیل " می نامیم .

معادلات دیفرانسیل نسبت به این که تابع مجهول یک متغیره باشد یا بیشتر ، به دو رده ی اساسی " معادلات دیفرانسیل معمولی " و " معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی " تقسیم می شود .

۳ . ۱ تشکیل معادله دیفرانسیل : تعاریف اساسی

یک مثال ساده از معادله دیفرانسیل معمولی رابطه (۳) یعنی ، $\frac{dy}{dx} = \alpha\, y$ ، یا معادل : $f'(x) = \alpha\, y$ می باشد ، که به خصوص تابع نمایی $f(x) = ce^{\alpha x}$ در آن صدق می کند و به زودی ، خواهیم دید که هرجواب به شکل کلی $f(x) = ce^{\alpha x}$ نیز در معادله (۳) صدق می کند که در آن می تواند مقدار ثابتی را اختیار نماید .

۳ . ۱ تشکیل معادله دیفرانسیل : تعاریف اساسی

از طرف دیگر معادله ای مانند :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) = 0$$

که معادله لاپلاس[1] نام دارد ، یک معادله دیفرانسیلی با مشتقات جزئی است ، این معادله به خصوص در کاربردهای مختلف فیزیک و مکانیک ، ظاهر می شود.

1. Laplace

۳ . ۱ تشکیل معادله دیفرانسیل : تعاریف اساسی

در این فصل معادلات دیفرانسیل معمولی و چگونگی حل آن ها را مطالعه خواهیم کرد .

هدف از حل یک معادله دیفرانسیل نظیر (۳) ، بدست آوردن تابعی مانند است که در دامنه اش مشتق پذیر بوده و داشته باشیم :

اکنون معادله (۳) را دوباره در نظر می گیریم ؛ برای اینکه این معادله را حل کنیم ، اعمال زیر می تواند راهگشای مهم مساله باشد

۱) آن را به شکل $(1/y)dy/dx$ می نویسیم .

۲) طرفین معادله را در dx ضرب می کنیم

۳) و از طرفین انتگرال می گیریم

$$(1/y)dy = \alpha \, dx$$

$$\int (1/y)dy = \int \alpha \, dx$$

۳ . ۱ تشکیل معادله دیفرانسیل : تعاریف اساسی

با استفاده از قوانین انتگرال گیری خواهیم داشت :

$$\ln|y| = \alpha x + c_1$$

حال با توجه به این که اگر $a = b$ ، آن گاه $e^a = e^b$ ، داریم :

$$e^{\ln|y|} = e^{\alpha x + c_1} = e^{\alpha x} e^{c_1}$$

چون همواره $e^{\ln a} = \alpha$ ، بنابراین $e^{\ln|y|} = |y|$ می باشد ، و اگر e^{c_1} را k فرض کنیم ، خواهیم داشت :

$$|y| = ke^{\alpha x} \quad \text{یا} \quad y = \pm ke^{\alpha x}$$

چون e^{c_1} مثبت است پس $k>0$ ، بنابراین ، $\pm k$ می تواند هر عدد حقیقی، جز صفر باشد.

۳ . ۱ تشکیل معادله دیفرانسیل : تعاریف اساسی

اما بدیهی $y=0$ است که یک جواب (۳) می باشد ، زیرا داریم :

$$0' = \alpha.0 = 0$$

بنابراین ، هر جواب (۳) را می توانیم ، به صورت زیر بنویسیم :

$$y = ce^{\alpha x} \quad (۵)$$

که ، می تواند هر عدد حقیقی باشد . برای تحقیق این که (۵) واقعا جواب است ، از طرفین (۵) مشتق می گیریم :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}ce^{\alpha x} = c\frac{d}{dx}e^{\alpha x} = \alpha(ce^{\alpha x}) = y$$

بنابراین $y = ce^{\alpha x}$ در (۵) صدق می کند .

۳ . ۱ تشکیل معادله دیفرانسیل : تعاریف اساسی

با توجه به این مطالب قضیه ی زیر را ثابت کرده ایم :

قضیه : اگر α عددی حقیقی باشد ، آن گاه جواب های بی شماری ، برای معادله دیفرانسیل $y' = \alpha . y$ وجود دارد که این جواب ها ، به شکل $y = ce^{\alpha x}$ ، می باشد و α عدد حقیقی دلخواهی است .

اگر $\alpha>0$ ، گوییم ، کمیت توصیف شده به وسیله $f(x)$ ، به طور نمایی ، رشد کرده است و اگر $\alpha<0$ ، گوییم ، کمیت به طور نمایی کاهش یافته است . و در صورتی که $\alpha=0$ ، هیچ گونه نمو یا کاهشی ، برای کمیت وجود نداشته است ، در این حال ، ثابت می ماند .

۳ . ۱ تشکیل معادله دیفرانسیل : تعاریف اساسی

مثال بالا ، نمونه ای است از آنچه که در حالت کلی رخ می دهد . در این معادله بالاترین مشتقی که وجود دارد ، y' است بر این اساس آن را یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول می نامیم . در هنگام حل این معادله مرتبه اول و در جایی باید ، با انتگرال گیری ، y' را حذف نماییم ، و در این مرحله است که ثابت دلخواه c ظاهر می شود .

چگونگی ورود c به جواب ، به شکل و طبیعت معادله دیفرانسیل داده شده ، بستگی دارد . این ثابت ممکن است مانند معادله (۵) به صورت ، حاصل ضرب ظاهر شود و یا این که به صورت یک ثابت جمع پذیر ، پدیدار گردد . مانند وقتی که معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dx} = 2\sin x$ را حل کنیم که در آن صورت جواب ، به شکل :

$$y = -2\cos x + c$$

خواهد بود .

۳ . ۱ تشکیل معادله دیفرانسیل : تعاریف اساسی

در هر حال ، این جواب ها که شامل ، ثابت دلخواهی مانند می باشند ، جواب های کلی مساله است که آن را جواب عمومی می نامیم . در بسیاری از مسائل لازم است که از دسته ی همه جواب ها یکی را که مقدارش برای نقطه به خصوصی داده شده ، اختیار کنیم . این مقدار داده شده را یک شرط اولیه می نامیم و مساله ی تعیین چنین جوابی را ، یک مساله با مقدار اولیه می نامیم .

در این حالت ، دیگر c هرعدد دلخواهی نخواهد بود و مقدار خاصی را به دست می آورد ، به عنوان نمونه ، اگر در معادله (۵) بخواهیم به ازای $x=0$، مقدار y برابر یک شود ، خواهیم داشت :

$$1 = c.e^{0x} = c \Rightarrow c = 1$$

۳ . ۱ تشکیل معادله دیفرانسیل : تعاریف اساسی

در این حالت جوابی خواهیم داشت که آن را یک جواب خصوصی معادله می نامیم ؛ زیرا به ازای مقدار مشخصی از c حاصل شده است .

معمول است که برای $x=0$، که $y=1$ می شود بنویسیم :

$y(0)=1$

به طور کلی مقصود از $y(a)=b$ یعنی وقتی $x=a$ ، آن گاه ، $y=b$ است .

اکنون آماده هستیم تا مفاهیم اصلی و نیز حل معادلات دیفرانسیل را شروع کنیم.

۳ . ۲ مفاهیم اصلی

۳ . ۲ . ۱ تعریف - معادله دیفرانسیل مرتبه n ام :

یک معادله دیفرانسیل ، معادله ای است که متغیرهای مستقل ، تابع و مشتقات (یا دیفرانسیل های) آن تابع را به هم ربط می دهد به عبارت دیگر یک معادله به صورت :

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

که در آن مشتقات مرتبه اول و دوم, ... , nام تابع *y=f(x)* می باشد ، " یک معادله دیفرانسیل مرتبه n ام " نامیده می شود .

۳ . ۲ مفاهیم اصلی

۳ . ۲ . ۲- مرتبه یک معادله دیفرانسیل ، عبارت است از : مرتبه بالاترین مشتق موجود در آن معادله .

۳ . ۲ . ۳ -جواب یک معادله دیفرانسیل : تابع مشتق پذیری مانند *y=f(x)* است که خود و مشتقاتش در معادله صدق نماید ، یعنی :

$$F(x, f(x), f'(x),\dots, f^{(n)}(x)) = 0 \qquad , \ \forall x \in D_f$$

۳ . ۲ . ٤- مثال های اولیه :

۱. معادله (۳) مقدمه ، یعنی $\frac{dy}{dx} = \alpha\, y$ ، یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول است .

معادله دیفرانسیل، $x''(t) + 4x'(t) - x(t) = \sin t'$ از مرتبه دوم است ؛ بالاترین مشتق موجود از مرتبه "۲" است .

۲. معادله ی : $\frac{d^4 y}{dx^4} + x\frac{dy}{dx} = xe^x$ یک معادله دیفرانسیل است و چون مرتبه ی بالاترین مشتق موجود آن "٤" است ؛ بنابراین ، این معادله دیفرانسیل از مرتبه "٤" است .

۳. معادله ی : $(\frac{dy}{dx})^5 - 2e^y = 6\cos x$ از مرتبه اول است زیرا ، بالاترین مرتبه مشتق موجود ، $\frac{dy}{dx}$ می باشد که از مرتبه اول است .

۳ . ۲ . ٤- مثال های اولیه :

٦. $F(x,y,y')=0$ شکل کلی یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول است .

٧. $F(x,y,y',y'')=0$ شکل کلی یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم است .

٨. $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=0$ یک معادله دیفرانسیل (با مشتقات جزئی) مرتبه اول است .

٩. $y-\ln x+xy=0$ معادله ، معادله دیفرانسیلی نیست ، زیرا شامل هیچ یک از مشتقاتش نمی باشد .

۳ . ۲ . ٤- مثال های اولیه :

جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه اول $y' = f(x,y)$ در قلمرو D تابعی است مانند $y = f(x,c)$ که از خواص زیر برخوردار است :

۱. این تابع به ازای جمیع مقادیر ثابت دلخواه c متعلق به مجموعه ای مشخص جوابی از معادله داده شده است .

۲. به ازای هر شرط اولیه $y(x_0) = y_0$ یعنی به ازای $\begin{cases} x = x_0 \\ y = 0 \end{cases}$ ، که $(x_0, y_0) \in D$ مقداری چون وجود دارد که جواب : به ازای آن در شرط اولیه داده شده صدق می نماید .

هر جواب $y = f(x, c_0)$ حاصل از جواب عمومی $y = f(x,c)$ به ازای $c = c_0$ یک جواب خصوصی نامیده می شود

۳ . ۲ . ٦ – نمودار معادله دیفرانسیل داده شده که بر صفحه *xoy* رسم می شود یک **منحنی انتگرال معادله** نام دارد . بنابراین جواب عمومی $y=f(x,y)$، به خانواده هایی از منحنی های انتگرال رسم شده بر صفحه و وابسته به یک پارامتر c (ثابت دلخواه) مربوط است ، و جواب خصوصی صادق در شرط اولیه $y(x_0)=y$ به آن منحنی از خانواده مربوط می شود که از نقطه $m(x_0,y_0)$ می گذرد .

تذکر مهم : ممکن است معادلات دیفرانسیلی وجود داشته باشد که جواب هایی از آن را نمی توان از جواب عمومی به ازای مقداری از c (حتی $c=\pm\infty$) بدست آورد . این گونه جواب ها **منفرد** نامیده می شود .

۳ . ۲ .۷ – فرایند یافتن جواب های یک معادله ، **انتگرال گیری** از معادله دیفرانسیل نامیده می شود

۳ . ۳ – مطالعه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول :

$F(x,y,y')=0$ و $y' = f(x,y)$ و $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

این معادلات را انواع زیر مطالعه می کنیم :

- ۱. معادلات دیفرانسیل مرتبه اول با متغیرهای جدا پذیر (معادلات دیفرانسیل متغیرها از هم جدا)
- ۲. معادلات دیفرانسیل مرتبه اول همگن
- ۳. معادلات دیفرانسیل مرتبه اول کامل
- ۴. معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول
- ۵. معادلات دیفرانسیل مرتبه اول برنولی

۳ . ۳ . ۱ - حل معادلات دیفرانسیل متغیرها از هم جدا :

این معادلات به یکی از صورت های زیر معرفی می شوند:

۱. $f_1(x)\varphi_1(y)dx + f_2(x)\varphi_2(y)dy = 0$

۲. $M(x)dx + N(y)dy = 0$

۳. $M(x) + N(y)y' = 0$

روش حل شکل (۱) :

با فرض صفر نبودن عوامل ، طرفین را بر $f_2(x)\varphi_1(y)$ تقسیم نموده و از طرفین انتگرال می گیریم :

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\int \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy=c \Rightarrow F(x)+F(y)=c$$

روش حل شکل (۲) :

از طرفین انتگرال می گیریم :

$$\int M(x)dx+\int N(y)dy=c \Rightarrow F(x)+F(y)=c$$

روش حل شکل (۳) : معادله را مرتب نموده و مانند شکل ۲ عمل می کنیم :

$$M(x)dx+N(y)dy=0 \Rightarrow \int M(x)dx+\int N(y)dy=c \Rightarrow F(x)+F(y)=c$$

مثال ۱. مطلوبست حل معادله دیفرانسیل زیر ؟

$$\ln\cos y.dx + x.\tan y.dy = 0$$

$$\frac{\ln\cos y}{x.\ln\cos y}dx + \frac{x.\tan y}{x.\ln\cos y}dy = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}dx + \frac{\tan y}{\ln\cos y}dy = 0 \Rightarrow \int\frac{1}{x}dx + \int\frac{\tan y}{\ln\cos y}dy = c$$

$$\Rightarrow \ln x + \ln(-\ln\cos y) = c \Rightarrow \ln(\frac{x}{\ln\cos y}) = c \Rightarrow \frac{x}{\ln\cos y} = e^{c}$$

$$\Rightarrow x = e^{c}.\ln\cos y \Rightarrow \ln\cos y = \frac{x}{e^{c}} \Rightarrow y = e^{Arc\cos\frac{x}{e^{c}}}$$

$$\Rightarrow y = e^{Arc\cos x.e^{-c}}.$$

مثال ۲. مطلوبست حل معادله دیفرانسیل زیر ؟

$$e^{x-y}.y' = -1$$

$$e^{x}.e^{-y}.\frac{dy}{dx} = -1 \Rightarrow \frac{e^{x}}{dx} = \frac{-1}{\frac{dy}{e^{y}}} \Rightarrow \frac{dx}{e^{x}} = -\frac{dy}{e^{y}}$$

$$\Rightarrow e^{-x}dx = -e^{-y}dy \Rightarrow \int e^{-x}dx = \int -e^{-y}dy + c$$

$$\Rightarrow -e^{-x} - e^{-y} = c$$

مثال ۳. مطلوبست حل معادله دیفرانسیل زیر ؟

$$y' = \tan x . \tan y$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan x . \tan y \;\Rightarrow\; \frac{dy}{\tan y} = \tan x . dx \Rightarrow \cot y . dy = \tan x . dx$$

$$\Rightarrow \ln|\sin y| = -\ln|\cos x| + c_1 \;\Rightarrow \ln|\sin y| = -\ln|\cos x| + \ln c_1$$

$$\Rightarrow \ln|\sin y| = \ln\left|\frac{c}{\cos x}\right| \Rightarrow |\sin y| = \left|\frac{c}{\cos x}\right| \Rightarrow \sin y = \pm\frac{c}{\cos x}$$

$$\Rightarrow y = Arc\sin\frac{c}{\cos x}$$

مثال ۴. مطلوبست حل معادله دیفرانسیل زیر

$$\frac{yy'}{x}+e^{y}=0$$

به شرط آن که y(1)=0؟

$$yy'+x.e^{y}=0\Rightarrow y\frac{dy}{dx}+x.e^{y}=0\Rightarrow \frac{ydy}{e^{y}}+xdx=0$$

$$\Rightarrow \int xdx+\int y.e^{-y}dy=c\Rightarrow \frac{x^{2}}{2}+(-e^{-y}-y.e^{-y})=c$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}\Rightarrow \frac{1}{2}+(-e^{0}-0)=c\Rightarrow c=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}x^{2}+(-e^{-y}-y.e^{-y})=-\frac{1}{2}.$$

مثال ۵. تمام منحنی هایی را پیدا کنید که ضریب زاویه آنها در نقطه ای مانند p عکس ضریب زاویه خطی باشد که از نقطه p و مبدا مختصات می گذرد ؟

$$m.m' = 1$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - 0}{x - 0} = \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow m' = \frac{x}{y}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \Rightarrow y.dy = x.dx \Rightarrow \int y.dy = \int x.dx + c$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c_1$$

$$\Rightarrow y^2 - x^2 = c.$$

تمرین - مطلوبست حل معادلات دیفرانسیل زیر ؟

$$e^{x}.\tan y.dx+(1+e^{x})\sec^{2} y.dy=0 \qquad , y(0)=\frac{\pi}{4}$$

$$(1+e^{2.x})y^{2}.dy=e^{x}.dx \qquad , y(0)=0$$

$$y'.\cos(x+2y)=\cos(x-2y) \qquad , y(0)=\frac{\pi}{4}$$

$$5e^{x}.\tan y.dx+(1-e^{x})\sec^{2} y.dy=0$$

$$y'=\sinh(x+y)+\sinh(x-y)$$

۳ . ۳ . ۲ – حل معادلات دیفرانسیل همگن .

تعریف : هر معادله به شکل $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ را همگن گوییم هر گاه *M(x,y)* و*N(x,y)* توابع همگن با درجه یکسان باشد . همچنین بنا به تعریف ، تابع *f(x,y)* را همگن از درجه *n* گوییم هر گاه با تبدیل $y \to ty\ ,\ x \to tx$ داشته باشیم :

$$f(tx,ty)=t^{n}f(x,y)$$

روش حل :

معادلات دیفرانسیل همگن با تبدیل به معادلات دیفرانسیل متغیرها از هم جدا تبدیل می شود.
کافی است از این تابع مشتق گرفته و در معادله اصلی قرار دهیم . به طور خلاصه برای حل معادلات همگن داریم :

۱. معادله را برای همگن بودن امتحان می کنیم :

$$M(tx,ty) = t^n M(x,y)$$
$$N(tx,ty) = t^n N(x,y)$$

۲. انتخاب می کنیم : $y = tx$

۳. این تابع و مشتق آن را در معادله اصلی قرار می دهیم و معادله را ساده می کنیم .

۴. معادله اصلی را به صورت جدا از هم حل می کنیم .

چند مثال

مثال ۱ . فرض کنید $F(x,y)=ax+by$ آیا این تابع همگن است و از چه درجه ای ؟

$$y\to ty \ , \ x\to tx$$

$$F(tx,ty)=a(tx)+b(ty)=t(ax+by)=tF(x,y)$$

پس همگن از درجه ۱ است.

مثال ۲ . تابع زیر را در نظر بگیرید آیا همگن است و از چه درجه ای ؟

$$g(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$$

$$y\to ty \ , \ x\to tx$$

$$g(tx,ty)=a(tx)^2+b(tx)(ty)+c(ty)^2=t^2(ax^2+bxy+cy^2)=t^2g(x,y)$$

پس همگن از درجه ۲ است.

مساله ۱ . مطلوبست حل معادله دیفرانسیل زیر ؟

$$(x^2+2xy)dx+xy.dy=0$$

$$y\to ty \ , \ x\to tx$$

$$\begin{cases} M(tx,ty)=t^2x^2+2(tx)(ty)=t^2(x^2+2xy)=t^2M(x,y) \\ N(tx,ty)=(tx)(ty)=t^2(xy)=t^2N(x,y) \end{cases}$$

همگن از مرتبه ۲ می باشد .

$$\xrightarrow{\div dx}(x^2+2xy)+xy\frac{dy}{dx}=0 \xrightarrow{y=vx}(x^2+2x(vx))dx+(x(vx))(v.dx+x.dv)=0$$

$$\Rightarrow (x^2+2x^2v)dx+x^3v.dv+x^2v^2.dx=0 \quad \Rightarrow x^2(1+2v+v^2)dx+x^3v.dv=0$$

$$\xrightarrow{\div x^3(1+v)} \frac{1}{x}dx+v\frac{dv}{(1+v)^2}=0$$

$$\Rightarrow \int\frac{1}{x}dx+\int\frac{v^{+1-1}}{(1+v)^2}dv=\mathrm{c}_1$$

$$\Rightarrow \ln|x|+\int\frac{v+1}{(1+v)^2}dv=c_1 \Rightarrow \quad \ln|x|+\frac{1}{2}\quad \ln(1+v)^2-\frac{1}{(-2+1)}(1-v)^{-1}=c_1$$

$$\ln(|x|.(v+1))+\frac{1}{v+1}=c_1 \xrightarrow{v=\frac{y}{x}} \ln(|x|.(1+\frac{y}{x}))+\frac{1}{1+\frac{y}{x}}=c$$

مساله ۲ . جواب خصوصی معادله $y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x}$ با شرط $y(1) = \frac{\pi}{2}$ را پیدا کنید ؟

$$y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x} \xrightarrow{\times x} y'x = y + x\sin\frac{y}{x} \Rightarrow xy' - (y + x\sin\frac{y}{x}) = 0$$

$$\begin{cases} x \to tx \\ y \to ty \end{cases}$$

$$\begin{cases} M(tx,ty) = -ty - tx\sin\frac{ty}{tx} = t(-y - x\sin\frac{y}{x}) = tM(x,y) \\ N(x,y) = tx + 0.ty = t(x) = tN(x,y) \end{cases}$$

$$if \quad y = vx \Rightarrow \begin{cases} dy = x.dv + v.dx \\ y' = xv' + v \end{cases}$$

$$y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{x.dv + v.dx}{dx} = \frac{xv}{x} + \sin\frac{xv}{x}$$

$$\frac{x.dv}{dx} + v = v + \sin v \Rightarrow x.dv = \sin v.dx \xrightarrow{\div x \sin v} \frac{dv}{\sin v} = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dv}{\sin v} = \int \frac{dx}{x} + c \Rightarrow \ln\left|\tan\frac{v}{2}\right| - \ln|x| = c \Rightarrow \ln\left|\frac{\tan\frac{v}{2}}{x}\right| = c$$

$$\xrightarrow{v=\frac{y}{x}} \ln\left|\frac{\tan\frac{y}{x}}{x}\right| = c \xrightarrow{y(1)=\frac{\pi}{2}} \ln\left|\frac{\tan\frac{\pi/2}{2}}{1}\right| = c \qquad \Rightarrow \ln\left|\frac{\tan\frac{y}{x}}{x}\right| = 0$$

۳ . ۳ . ۳ - معادلات دیفرانسیل مرتبه اول کامل :

تعریف : معادلات دیفرانسیل مرتبه اول $M(x,y)+N(x,y)y'=0$ را کامل گوییم هر گاه $\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial M}{\partial y}$.

روش حل : جواب عمومی عبارت است از $f(x,y)=c$ که در شرط زیر صدق کند :

$$\frac{\partial F}{\partial y}=N \;\&\; \frac{\partial F}{\partial x}=M$$

مراحل حل :

۱. تست کامل بودن : $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$

۲. جواب عمومی : $F(x,y)=c$

۳. روابط زیر را تشکیل می دهیم:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y}=N & (3.2) \\ \frac{\partial F}{\partial x}=M & (3.1) \end{cases}$$

۴. یک از روابط (۱ . ۳) یا (۲ . ۳) را انتخاب می کنیم . مثلا (۱ . ۳) را انتخاب می کنیم و از طرفین نسبت به x انتگرال می گیریم ؛ ثابت را تابعی از y در نظر می گیریم :

$$F(x,y)=\int M.dx+g(y)=k+g(y) \qquad (*)$$

۵. اکنون نسبت به از (*) مشتق می گیریم .

۶. $g(y)$ را تعیین و جواب عمومی مشخص می شود .

تذکر : در صورتی که رابطه (۲ . ۳) انتخاب شود کافی است انتگرال گیری نسبت به y انجام شده و ثابت را بر حسب x در نظر می گیریم .

مثال ۱. مطلوبست حل معادله دیفرانسیل زیر ؟

$$(y^2 - x^2)y' = 2xy$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = 2x \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = 2x \end{cases}$$

با جواب عمومی $F(x, y) = c$

حل:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = M = 2xy & (1) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = N = x^2 - y^2 & (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{from } (1)} F(x,y) = \int 2xy\,.dx + g(y) = 2\frac{x^2}{2}y + g(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + g'(y) = x^2 - y^2 \Rightarrow g'(y) = -y^2 \Rightarrow g(y) = -\frac{y^3}{3}$$

جواب عمومی :

$$F(x,y) = x^2 y - \frac{y^3}{3} = c$$

مثال ۲. مطلوبست حل معادله دیفرانسیل زیر ؟

$$(e^x + y + \sin y)dx + (e^y + x + x\cos y)dy = 0$$

حل:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = 1 + \cos y \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = 1 + \cos y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = M = e^x + y + \sin y & (1) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = N = e^y + x + x\cos y & (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{from(1)} F(x,y)=\int (e^x+y+\sin y)dx+g(y)=e^x+xy+x\sin y+g(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=x+x\cos y+g'(y)=e^y+x+x\cos y \Rightarrow g'(y)=e^y \Rightarrow g(y)=e^y$$

$$\Rightarrow F(x,y)=e^x+xy+x\sin y+e^y=c$$

مثال ۳. مطلوبست حل معادله دیفرانسیل زیر ؟

$$(x+y-1)dx+(e^{y}+x)dy=0$$

حل:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y}=1 \\ \dfrac{\partial N}{\partial x}=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}=M=x+y-1 & (1) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=N=e^{y}+x & (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{from }(1)} F(x,y)=\int (x+y-1)\,dx+g(y)=\frac{x^2}{2}+xy-x+g(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=x+g'(y)=e^y+x \Rightarrow g'(y)=e^y \Rightarrow g(y)=e^y$$

$$\Rightarrow F(x,y)=\frac{x^2}{2}+xy-x+e^y=c$$

تمرين :

١. $(x+\sin y)dx+(x\cos y+\sin y)dy=0$

٢. $(x^2+y^2+y)dx+(2xy+x+e^y)dy=0 \quad , \quad y(0)=0$

٣. $(2xye^{x^2}+\ln y)dx+(e^{x^2}+\frac{x}{y})dy=0 \quad , \quad y(0)=1$

٤. $(x\cos y-y\sin y)dy+(x\sin y+y\cos y)dx=0$

۳ . ۳ . ٤ ـ معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول :

تعریف : هر معادله به صورت زیر را یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول می نامیم :

شکل ۱: همگن $Q(x) = 0$

شکل ۲: غیر همگن $Q(x) \neq 0$

حالت اول : حل معادلات همگن

این معادله را می توانیم به روش تغییر متغیرها از هم جدا کنیم :

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} + p(x)dx = 0$$

$$\int \frac{1}{y}dy + \int p(x)\,dx = c$$

$$\ln|y| + p(x) = c_1 \Rightarrow \ln|y| = c_1 - p(x)$$

$$|y| = e^{c_1 - p(x)} = e^{c_1}.e^{-p(x)} \Rightarrow y = \pm e^{c_1}.e^{-p(x)}$$

$$y = c.e^{-p(x)} = c.e^{-\int p(x)dx}$$

تعریف : مقدار $I(x)=e^{\int p(x)dx}$ انتگرال را عامل انتگرال کننده یا عامل انتگرال می نامیم . از این عامل می توانیم برای حل معادله خطی غیر همگن استفاده کنیم . برای این منظور طرفین معادله (۱) را در عامل انتگرال کننده ($I(x)=e^{\int p(x)dx}$) ضرب می کنیم :

$$y'.I(x)+p(x).I(x).y=Q(x).I(x) \qquad (2)$$

$$(y.I(x))'=Q(x).I(x)$$

زیرا

$$y.I(x)=y.e^{\int p(x)dx}$$

$$(y.I(x))'=(y.e^{\int p(x)dx})'=y'.e^{\int p(x)dx}+p(x).y.e^{\int p(x)dx}=y'.I(x)+p(x).I(x).y$$

از طرفین (۲) انتگرال گرفته :

$$y.I(x)=\int Q(x).I(x)=\int Q(x).e^{\int p(x)dx}+c$$

$$y.e^{\int p(x)dx}=\int Q(x).e^{\int p(x)dx}+c$$

به عبارت دیگر

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int Q(x).e^{\int p(x)dx}+c\right]$$

تمرین :

مطلوبست حل معادلات دیفرانسیل زیر ؟

۱. $xy' - y = x^2 \cos x$

۲. $y' - \frac{n}{x} y = \frac{a}{x^x} \quad , \quad y(1) = 0$

۳. $y' + y = e^{\frac{x}{2}} . \sqrt{y} \quad , \quad y(0) = \frac{9}{4}$

۴. $y' + \frac{y}{x} = x^2 y^4$

۵. $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = \frac{4\sqrt{y}}{1+x^2} Arc\tan x$

۳ . ٤ – معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم

معادلات مرتبه دومی که مورد مطالعه قرار می گیرند ، عبارتند از : معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت

شکل کلی : $y'' + ay' + by = f(x)$

حالت اول : $f(x) = 0$ ، معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت بدون طرف دوم

حالت دوم: $f(x) \neq 0$ ، معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت همراه با طرف دوم

۳. ٤ . ۱ - روش حل حالت اول :

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad (۱)$$

قضیه : جواب عمومی معادله دیفرانسیل (۱) عبارت است از $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ که y_2, y_1 عبارتند از دو جواب مستقل خطی .

اثبات :

از این که y_1 جواب است داریم

$$y_1'' + ay_1' + by_1 = 0$$

از این که y_2 جواب است داریم

$$y_2'' + ay_2' + by_2 = 0$$

برای اینکه $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ جواب باشد بایستی در معادله صدق کند :

$$(c_1 y_1 + c_2 y_2)'' + a(c_1 y_1 + c_2 y_2)' + b(c_1 y_1 + c_2 y_2)$$

$$c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + ac_1 y_1' + ac_2 y_2' + bc_1 y_1 + bc_2 y_2$$

$$c_1 (y_1'' + ay_1' + by_1) + c_2 (y_2'' + ay_2' + by_2)$$

دو پرانتز بالا صفر و در نتیجه حاصل صفر است:

$$c_1 (0) + c_2 (0) = 0$$

بدین ترتیب نتیجه می گیریم برای این که بتوانیم جواب عمومی معادله (۱) را بدست آوریم ؛ کافی است دو جواب مستقل معادله را مشخص نماییم.

٣ . ٤ . ١ . ١ – جواب های مستقل :

در مبحث معادلات دیفرانسیل ثابت می شود که جواب های مستقل خطی به صورت $y=e^{\lambda.x}$ (به ازای مقادیر λ) حاصل می شود . چون $y=e^{\lambda.x}$ جواب است ، پس در معادله (١) صدق می کند .

داریم:

$$y''+ay'+by=0$$

$$(e^{\lambda.x})''+a(e^{\lambda.x})'+b(e^{\lambda.x})=0$$

$$\lambda^2 e^{\lambda.x}+a\lambda e^{\lambda.x}+be^{\lambda.x}=0$$

معادله مفسر (مشخصه) :

$$\xrightarrow{\div e^{\lambda.x}}\lambda^2+a\lambda+b=0$$

حالت ۱ :

$\Delta > 0$ $\quad\quad$ $\Delta = a^2 - 4b$

$$\Delta > 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \left\langle \begin{array}{l} \lambda_1 = \dfrac{-a}{2} + \dfrac{\sqrt{a^2 - 4b}}{2} \\ \lambda_2 = \dfrac{-a}{2} - \dfrac{\sqrt{a^2 - 4b}}{2} \end{array} \right.$$

پس دو جواب مستقل عبارت است از : $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ و $y_2 = e^{\lambda_2 x}$

پس دو جواب مستقل عبارت است از :

$$\Delta > 0 \Rightarrow y_c = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

حالت ۲ : $\Delta = 0$ معادله مفسر ریشه مضاعف دارد.

$$\Delta = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$$

یک جواب عبارت است از $y_1 = e^{\lambda x}$ در این صورت جواب دوم را به صورت $y_2 = xe^{\lambda x}$ در نظر می گیریم :

$$\Delta > 0 \Rightarrow y_c = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$$

حالت ۳ $\Delta < 0$: معادله ریشه حقیقی ندارد.

$$\lambda = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} = \frac{-a \pm \sqrt{(-1)(4b - a^2)}}{2} = \frac{-a \pm \sqrt{i^2 (4b - a^2)}}{2}$$

$$\lambda = \frac{-a}{2} \pm i \frac{\sqrt{4b - a^2}}{2} = \alpha \pm i\beta$$

در این صورت دو جواب مستقل خطی عبارتند از: $y_2 = e^{\alpha . x}.\cos \beta x, y_1 = e^{\alpha . x}.\sin \beta x$

پس داریم :

$$\Delta < 0 \Rightarrow y_c = c_1 e^{\alpha . x}.\sin \beta x + c_2 e^{\alpha . x}.\cos \beta x = e^{\alpha . x}(c_1.\sin \beta x + c_2.\cos \beta x)$$

۳ . ٤ . ۲ – روش حل معادله دیفرانسیل مرتبه دوم با طرف دوم :

$$y'' + ay' + by = f(x) \qquad (۲)$$

ابتدا قضیه زیر را مطرح می کنیم :

قضیه : جواب عمومی معادله (۲) عبارت است از $y = y_p + y_c$

در این جا y_c جواب عمومی معادله بدون طرف دوم و y_p یک جواب ویژه برای معادله (۲) می باشد . با استفاده از این قضیه باید y_p مشخص شود .

یکی از روش هایی که می توانیم y_p را مشخص کنیم ، عبارت است از تعیین y_p به کمک ضرایب نا معین .

	شکل f(x)	y_p پیشنهادی
۱	$p_n(x)$: n چند جمله ای درجه	$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$
۲	$p_n(x).e^{\alpha.x}$	$(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n) e^{\alpha.x}$
۳	$p_n(x)\sin\beta x$ *or* $p_n(x)\cos\beta x$	$(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n)\sin\beta x +$ $(b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n)\cos\beta x$
۴	$p_n(x) e^{\alpha.x}\sin\beta x$ *or* $p_n(x) e^{\alpha.x}\cos\beta x$	$(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n) e^{\alpha.x}\sin\beta x +$ $(b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n) e^{\alpha.x}\cos\beta x$

۳ . ٤ . ۳ - تذکرات مهم :

۱. معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم را می توانیم به مرتبه ۳ و ...وk تعمیم دهیم .به طور کلی یک معادله دیفرانسیل **مرتبه k** عبارت است از :

$$y^k + a_1 y^{k-1} + \ldots + a_k y = f(x)$$

وقتی باشد *f(x)=0*، معادله دیفرانسیل را همگن و در غیر این صورت ، نا همگن یا با طرف دوم گوییم .

معادله مفسر چنین معادلاتی عبارت است از : $\lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + \ldots + a_k = 0$

۲. با توجه به معادله مفسر می توانیم جواب عمومی یک معادله را نیز بدست آوریم .

۳ .۴ . ۴ - چند نوع معادلات دیفرانسیل دیگر :

معادله دیفرانسیل به صورت $y' + p(x)y = q(x)y^m$ را **معادلات برنولی** می نامیم .

بایستی این معادلات را به معادلات خطی مرتبه اول تبدیل کنیم .

روش حل :

طرفین را در y^{-m} ضرب کنید ($m \neq 0,1$)

انتخاب کنید $z = y^{1-m}$

با قرار دادن این مقادیر و محاسبه مشتقات لازم معادله داده شده به معادله خطی مرتبه اول تبدیل می شود .

مثال - مطلوبست حل معادله زیر ؟

$$y' + \frac{y}{x} = x^2 y^4$$

حل:

$$y^{-4} y' + \frac{y^{-3}}{x} = x^2 \qquad (1^*)$$

$$z = y^{-3} \Rightarrow z' = -3y'y^{-4} \Rightarrow y' = \frac{-z^3}{3} \times y^4$$

این مقادیر را در (۱*) قرار می دهیم :

$$I(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{-\int \frac{3}{x}dx} = e^{-3\ln x} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{x^3} z = -3\int \frac{1}{x} dx \Rightarrow z = x^3 \ln x^{-3} + c_1 x^3$$

$$y^{-3} = x^3 \ln x^{-3} + c_1 x^3 \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^3 \ln x^{-3} + c_1 x^3}}$$

۲ .٤. ٥ – نتایج :

یک معادله همگن با استفاده از آنچه گفته شد دارای ویژگی خاصی است و آن عبارت است از این که جواب عمومی اش را می توان از تعدادی نتیجه خصوصی بدست آوریم یعنی :

قضیه : هر گاه $y_1, y_2, ..., y_n$ جواب های خصوصی مستقل خطی برای معادله $y^{(n)} + a_1 y^{n-1} + ... + a_n y = 0$ ، باشد ، آن گاه جواب عمومی معادله $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n$ است .

یادآوری : $a_1 y_1 + a_2 y_2 + ... + a_n y_n = 0$ برای $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$ نتیجه می گیریم $y_1, y_2, ..., y_n$ در بازه ای مانند *(a,b)* مستقل خطی هستند.

از طرفی شرط کافی برای استقلال خطی $y_1, y_2, \ldots, y_n$ که در بازه ای مانند (a,b) تا مرتبه $n-1$ ام مشتق جزئی پیوسته دارند آن است که دترمینان رونسکی $w(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$ این توابع در هیچ نقطه ای از بازه (a,b) صفر نباشد ، یعنی داشته باشیم :

$$w(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & & \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & \cdots & y_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

در صورتی که $y_1, y_2, \ldots, y_n$ جواب های خصوصی یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n باشد این شرط W نه فقط شرط کافی بلکه یک شرط لازم برای استقلال خطی این n تابع است .

فصل چهارم

معادلات بازگشتی

اهداف آموزشی:

دربرخی از مسائل احتمال و فرآیندهای تصادفی، معادلاتی مطرح می شوند که به آنها «**معادلات بازگشتی**» می گویند.

تفاوت این معادلات با معادلات دیفرانسیل در این است که: در معادلات دیفرانسیل تابع، تابعی از مقادیر حقیقی تحلیل شده روی یک بازه است. ولی در معادلات بازگشتی تابع، تابعی از مقادیر طبیعی است.

در هر حال خواهیم دید که حل این معادلات نیز مشابه حل معادلات دیفرانسیل خواهد بود.

معادلات بازگشتی (تفاضلی):

مقدمه:

یک دنباله عبارت است از تابعی از N به R:

$$a : N \longrightarrow R$$

یا

$$u : N \longrightarrow R$$

برای هر $n \in N$ اثر a روی n و یا اثـر U روی n یعنـی a(n) یا U(n) بصورت ساده a_n یا U_n نمایش می دهیم و آن را جمله عمومی دنباله می نامیم.

هر دنباله به دو صورت نمایش داده می شود:

۱) بصورت نام بردن اعضا ... $u_1, u_2, \ldots$

۲) یـــا بـــه شـــکل کلـــی (عمـــومی) $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ یـــا

$\{u_n\}$ مشخص می کنیم

مثال :

$$\left\{ u_n = \frac{3_n + 1}{n^2 + 1} \right\}$$

یک معادله بازگشتی عبارت است از معادله ای بر حسب u_n ها

مانند: $$u_{n+2}=1+u_n$$

همچنین می توانیم این معادلات را باشرایط ویژه (خاصی) نیز

حل کنیم مثلا داشته باشیم:

$$\begin{cases} u_{n+2}=1+un \\ u(1)=u_1=2 \end{cases}$$

معادلات بازگشتی یا تفاضلی به کمک عملگری به نـام پسـرو (B)

معرفی می شوند. این عملگر بصورت زیر تعریف می شود:

$$B^{1}(u_{n}) = u_{n-1}$$

$$B^{2}(u_{n}) = u_{n-2}$$

M

$$B^{k}(un) = u_{n-k}$$

می دانیم که یک چند جمله ای درجه n از x عبارت است از

$$p_n(x) = a_0 + a_1 n^1 + a_2 n^2 + \dots a_n n^n$$

یا از مرتبه k

$$p_k(n) = a_0 + a_1 n^1 + a_2 n^2 + \dots a_k n^k$$

اثر این چند جمله ای را می توانیم روی B بصورت زیر در نظر بگیریم:

$$p_k(B) = a_0 + a_1 B^1 + a_2 B^2 + \dots a_k B^k$$

از اثر **$p_k(B)$** بر روی u_n مطابق تعریف $B^k(u_n) = u_{n-k}$

داریم:

$$p_k(B)(u_n) = a_0 + a_1 B^1 + \ldots + a_k B^k(u_n)$$

$$p_k(B)(u_n) = a_0 u_n + a_1 B^1 u_n + \ldots + a_k B^k(u_n)$$

$$p_k(B)(u_n) = a_0 u_n + a_1 u_{n-1} + \ldots + a_k u_{n-k}$$

این معادله را «**معادله بازگشتی مرتبه k**» می نامیم.

اگر طرف دوم معادله را بصورت f(n) نمایش دهیم، می توانیم این معادله بازگشتی مرتبه k را بصورت زیر نشان دهیم.

$$p_k(B)u_n = f(n)$$

که هدف حل چنین معادلاتی می باشد.معادلات بازگشتی که در این درس بررسی می شوند، به ازای k=2 بوده که آنها را معادلات بازگشتی مرتبه دوم می نامیم.

بنابراین هدف، حل معادلات زیر می باشد.

$$p_2(B)u_n = f(n)$$

$$= a_0 u_n + a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2}$$

برای حل این معادلات، دو حالت مطرح می شود:

۱) $f(n) \equiv 0$ معادله بازگشتی همگن

۲) $f(n) \neq 0$ معادله بازگشتی ناهمگن

حل معادلات بازگشتی مرتبه دوم با $f(n) \equiv 0$

منظور از حل معادلات مذکور به دست آوردن جواب عمومی آن می باشد.

قضیه:

جواب عمومی معادله بازگشتی مرتبه ۲، عبارت است از

$w_n = c_1 u_n + c_2 v_n$ که v_n , u_n دو جواب مستقل

معادله می باشند.

برهان:

برای اینکه W_n جواب معادله بازگشتی مرتبه دوم

$$p_2(B)u_n = a_0\, u_n + a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2}$$

باشد

باید داشته باشیم

$$p_2(B)(w_n) = 0$$

$$= (a_0 + a_1 B + a_2 B^2)(c_1 u_n + c_2 v_n)$$

$$= (a_0 + a_1 B + a_2 B^2) c_1 u_n + (a_0 + a_1 B + a_2 B^2) c_2 v_n$$

$$= c_1 (a_0 u_n + a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2}) +$$

$$c_2 (a_0 v_n + a_1 v_{n-1} + a_2 v_{n-2})$$

$$= c_1 (0) + c_2 (0) = 0$$

چون u_n , v_n هر دو جواب هستند.

نتیجه:

بنابراین نتیجه می گیریم برای به دست آوردن جواب عمومی معادله بازگشتی مرتبه دوم کافی است دو جواب مستقل از معادله را داشته باشیم.

u_n , v_n را دو جواب مستقل خطی گوییم اگر $\begin{vmatrix} u_0 & v_0 \\ u_1 & v_1 \end{vmatrix} \neq 0$ *

تعریف:

u_n , v_n را با شرط * جواب های اساسی می نامیم.

مثال: تحقیق کنید $v_n = 3^n, u_n = 2^n$ دو جواب برای معادله

$$p_2(B)u_n = (1 - 5B + 6B^2)u_n = 0$$

حل:

$$p_2(B)u_n = (1 - 5B + 6B^2)u_n = 0$$

$$p_2(B)u_n = 0$$

$$\begin{aligned}(1 - 5B + 6B^2)u_n &= u_n - 5Bu_n + 6B^2u_n \\ &= u_n - 5u_{n-1} + 6u_{n-2} \\ &= 2^n - 5(2^{n-1}) + 6(2^{n-2}) \\ &= 2^{n-2}(6 - 5 \times 2 + 4) = 0\end{aligned}$$

$$p_2(B)v_n = 0$$

$$\begin{aligned}(1 - 5B + 6B^2)v_n &= v_n - 5v_{n-1} + 6v_{n-2} \\ &= 3^n - 5(3^{n-1}) + 6(3^{n-2}) \\ &= 3^{n-2}(9 - 5 \times 3 + 6) = 0\end{aligned}$$

مثال: جواب عمومی معادله بالا را به دست آورید.

ابتدا تحقیق می کنیم جواب ها اساسی هستند یا خیر:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{u_0} & \boldsymbol{v_0} \\ \boldsymbol{u_1} & \boldsymbol{v_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{vmatrix} = \mathbf{3 - 2 = 1 \neq 0}$$

پس جواب ها اساسی هستند.

$$\begin{aligned} w_n &= c_1 u_n + c_2 v_n \\ &= c_1 2^n + c_2 3^n \end{aligned}$$

با توجه به این مثال می توانیم جواب های معادلات بازگشتی مرتبه دوم را بصورت کلی λ^n یا r^n در نظر بگیریم این جواب ها به ازای مقادیر مختلف λ یا r مشخص می شوند. به این ترتیب برای حل معادلات بازگشتی مرتبه دوم:

$$p_2(B)u_n = (a + a_1 B + a_2 B^2)u_n = a_0 u_n + a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} = 0$$

همـــــانطور کـــــه بیـــــان شـــــد، جـــــواب هـــــا را بصـــــورت کلـــــی

$\boldsymbol{u_n = r^n}$ پیشنهاد می کنیم.

بر این اساس چون **u_n** جواب است باید در معادلـه صـدق کنـد، یعنـی

داشته باشیم:

$$p_2(B)u_n = P_2(B)r^n = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + a_2 r^{n-2} = 0$$

$$r^{n-2}(a_0 r^2 + a_1 r + a_2) = 0 \qquad (r \neq 0)$$

$$a_0 r^2 + a_1 r + a_2 = 0 \qquad (\div a_0)$$

$$r^2 + \frac{a_1}{a_0} r + \frac{a_2}{a_0} = 0 \qquad \alpha = \frac{a_1}{a_0} \qquad \beta = \frac{a_2}{a_0}$$

$$r^2 + \alpha\, r + \beta = 0 \; \ast$$

از حل این معادله درجه دوم می توانیم مقادیر r و با استفاده از آن،

جواب ها را بصورت $u_n=r^n$ مشخص کنیم.

تعریف: معادله ✵ را معادله مفسر می نامیم.

با توجه به حل معادله درجه دوم(مفسر) سه حالت در نظر می گیریم:

حالت ۱) معادله مفسر دو ریشه دارد یعنی:

$$\Delta \rangle 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 - 4\beta \rangle 0$$

$$u_n = r_1^{\,n}, \quad v_n = r_2^{\,n}$$

داریم:

$$\begin{vmatrix} u_0 & v_0 \\ u_1 & v_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix} = r_2 - r_1 \neq 0$$

بنابراین جواب ها، اساسی اند.

بنابراین جواب عمومی عبارت است از: $w_n = c_1 r_1^{\,n} + c_2 r_2^{\,n}$

مثال: مطلوب است حل معادله بازگشتی $u_{n+2} - u_n = 0$

حل:

$$r^2 - 1 = 0 \qquad r = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} r_1 = 1 \\ r_2 = -1 \end{array}$$

$$w_n = c_1 (1)^n + c_2 (-1)^n$$

حالت ۲) معادله ریشه مضاعف دارد.

$$\Delta = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = \alpha^2 - 4\beta = 0$$

$$r = r_1 = r_2$$

چون معادله دارای ریشه مضاعف است، جواب های مستقل را بصورت:

$$u_n = r^n \quad , \quad v_n = nr^n$$

در نظر می گیریم که ثابت می شود:

تمرین: این دو جواب مستقل اند(به شرط آنکه $r \neq 0$)

بنابراین جواب عمومی عبارت است از:

$$w_n = c_1 r^n + c_2 n r^n$$

تذکر:

بطور کلی شرایط مطرح شده برای حالت مضاعف برای هر مرتبه ای قابل قبول است مثلا فرض می کنیم معادله بازگشتی از مرتبه ۴ و معادله مفسر دارای ۴ جواب مکرر باشد یعنی $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 =$ r در اینصورت جواب های اساسی عبارت است از:

$$u_1 = r^n \qquad u_3 = n^2 r^n$$

$$u_2 = nr^n \qquad u_4 = n^3 r^n$$

به همین ترتیب می توانیم تا مرتبه k ادامه دهیم: $u_k = n^{k-1} r^n$

مثال: مطلوب است حل:

$$u_{n+4} - 4u_{n+3} + 6u_{n+2} - 4u_{n+1} + u_n = 0$$

$$r^4 - 4r^3 + 6r^2 - 4r + 1 = 0$$

$$(1-r)^4 = 0 \qquad r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 1$$

$$u_1 = r^n = (1)^n = 1 \qquad u_2 = n(1)^n = n$$

$$u_3 = n^2 = (1)^n = n^2 \qquad u_4 = n^3(1)^n = n^3$$

$$w_n = c_1 + c_2 n + c_3 n^2 + c_4 n^3$$

حالت ۳) ریشه های معادله موهومی اند.

$$\Delta \langle 0 \qquad \Rightarrow \qquad \Delta = \alpha^2 - 4\beta \langle 0$$

می دانیم که در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c=0$ اگـر یکـی از

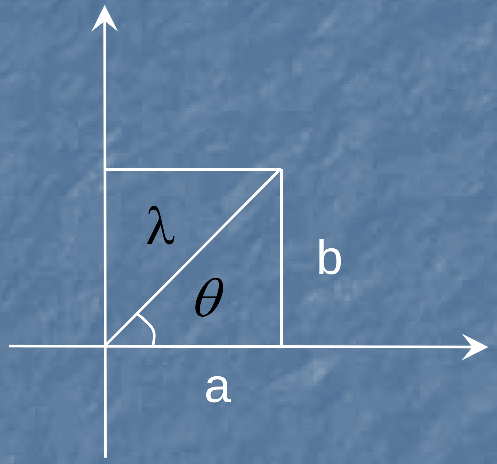
ریشه ها مختلط بصورت $z=a + bi$ وجود داشته باشد ریشـه دیگـر

عبارت اسـت از $z=a - bi$ در اینصـورت جـواب هـا بـرای معادلـه

بازگشتی می توانند بصورت $r_1=a + bi$ و $r_2=a - bi$ باشند.

جواب ها بر مبنای $u_n = r^n$ می باشند. برای معرفی r^n داریم:

$$(a\ ,\ b) = a+bi$$



$$\begin{cases} a = \lambda\cos(\theta) \\ b = \lambda\sin(\theta) \end{cases}$$

$$\tan(\theta) = \frac{b}{a} \qquad \theta = \arctan\frac{b}{a}$$

$$a^2 + b^2 = \lambda^2$$

بنابراین می توانیم بنویسیم:

$$r_1 = \lambda\cos\theta + i\lambda\sin\theta$$
$$r_2 = \lambda\cos\theta - i\lambda\sin\theta$$

برطبق قضیه دموآر داریم:

$$r_1{}^n = (a+bi)^n = \lambda^n\cos n\theta + i\lambda^n\sin n\theta$$
$$r_1{}^n = \lambda^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$
$$r_2{}^n = \lambda^n(\cos n\theta - i\sin n\theta)$$
$$w_n = c_1 r_1{}^n + c_2 r_2{}^n$$
$$= c_1\lambda^n(\cos n\theta + i\sin\theta) + c_2\lambda^n(\cos n\theta - i\sin n\theta)$$

مثال: مطلوب است حل معادلات بازگشتی زیر:

۱) $u_{n+2} + u_n = 0$

حل:

$$r^2 + 1 = 0 \qquad r = 0 \pm 1i \qquad \begin{cases} r_1 = 0 + i \\ r_2 = 0 - i \end{cases}$$

$$a = 0 \qquad b = 1 \to \tan\theta = \infty \to \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\lambda^2 = a^2 + b^2 = 1 \to \lambda = 1$$

$$r_1^{\ n} = 1^n(\cos\frac{n\pi}{2} + i\sin\frac{n\pi}{2})$$

$$r_2^{\ n} = 1^n(\cos\frac{n\pi}{2} - i\sin\frac{n\pi}{2})$$

$$w_n = c_1(\cos\frac{n\pi}{2} + i\sin\frac{n\pi}{2}) + c_2(\cos\frac{n\pi}{2} - i\sin\frac{n\pi}{2})$$

$$٢) \quad u_{n+2} - 2u_{n+1} + 2u_n = 0$$

حل:

$$r^2 - 2r + 2 = 0 \qquad \Delta = 4 - 4(1)(2) = -4$$

$$r_1 = a + bi = \frac{2 + \sqrt{(i)\Delta}}{2} = \frac{2 + 2i}{2} = 1 + i$$

$$a = 1, b = 1 \to \lambda^2 = 2 \to \lambda = \sqrt{2}$$

$$\tan\theta = \frac{b}{a} = 1 \to \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$r_1^{\,n} = (\sqrt{2})^n (\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4})$$

$$r_2^{\,n} = (\sqrt{2})^n (\cos\frac{n\pi}{4} - i\sin\frac{n\pi}{4})$$

$$w_n = c_1(\sqrt{2})^n(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}) + c_2(\sqrt{2})^n(\cos\frac{n\pi}{4} - i\sin\frac{n\pi}{4})$$

۲–حل معادلات بازگشتی مرتبه دوم؛با طرف دوم(ناهمگن):

$$(B^2+\alpha B+\beta)u_n=f(n)$$

روش حل:

جواب کلی عبارت است از: $w_n^* = w_n + u_n^*$

جواب عمومی همگن $w_n =$

جواب خصوصی با طرف دوم $u_n^* =$

بنابراین مطابق فرمول بالا کافی است u_n^* را مشخص کنیم که

به وسیله روش ضرایب نامعین (شکل f(n)) جوابی پیشنهاد

می شود و تعیین ضرایب آن شکل u_n^* را مشخص می کند.

در اینصورت می توانیم از جدول مفید زیر استفاده کنیم.

جواب پیشنهادی u_n^*	$F(n)$
k: ثابت	ثابت: c
ka^n	a^n ، a ریشه مفسر نباشد
kna^n	a^n ، a ریشه مفسر باشد
$A\sin an+B\cos an$	$\sin an$ یا $\cos an$

F(n)	جواب u_n* پیشنهادی
n^k	$a_0+a_1n^1+a_2n^2+...+a_kn^k$
n^ka^n	$(a_0+a_1n^1+...+a_kn^k)a^n$
$a^n \sin an$ یا $a^n \cos an$	$(A\sin an+B\cos an)a^n$

مثال: مطلوب است حل:

۱) $u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 3^n$

$r_2 - 3r + 2 = 0 \qquad (r-1)(r-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 1 \\ r_2 = 2 \end{cases}$

$w_n = c_1(1)^n + c_2(2)^n$

* چون 3 ریشه معادله مفسر نیست پس:

$u_n^* = k3^n$

$k3^{n+2} - 3k(3)^{n+1} + 2k3^n = 3^n$

$3^n(9k - 9k + 2k) = 3^n \rightarrow 2k = 1 \rightarrow k = \frac{1}{2}$

$u_n^* = (\frac{1}{2})3^n$

$W_n^* = w_n + u_n = c_1 + c_2 2^n + \frac{1}{2}3^n$

۲) $$u_{n+2}-u_{n+1}-2u_n=n^2$$

$$r^2-r-2=0 \qquad (r-2)(r+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} r_1=-1 \\ r_2=2 \end{cases}$$

$$w_n=c_1(-1)^n+c_2(2)^n$$

$$u_n^*=a_0+a_1n+a_2n^2$$

$$(a_0+a_1(n+2)+a_2(n+2)^2)-(a_0+a_1(n+1)+a_2(n+1)^2)$$
$$-(2a_0+2a_1n+2a_2n^2)=n^2$$

$$a_1n+2a_1+a_2n^2+2a_2n+4a_2-a_1n-a_1-a_2n^2-2a_2n$$
$$-a_2-2a_0-2a_1n-2a_2n^2=n^2$$

$$a_0=-1 \quad , \quad a_1=-\frac{1}{2} \quad , \quad c=-\frac{1}{2}$$

$$u_n^*=(-1)+(-\frac{1}{2})(n)+(-\frac{1}{2})(n^2)$$

$$w_n^*=c_1(2)^n+c_2(-1)^n-1+(-\frac{1}{2})(n)+(-\frac{1}{2})(n^2)$$

٣) $u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n \equiv n + 3^n$

$r^2 - 5r + 6 = 0 \qquad (r-3)(r-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 2 \\ r_2 = 3 \end{cases}$

$w_n = c_1(2)^n + c_2(3)^n$

$u_n^* = (A + Bn) + kn3^n$

$(A + B(n-2) + k(n+2)3^{n+2}) - 5(A + B(n+2) + k(n+1)3^{n+1})$

$+6(A + Bn + kn3n) \equiv n + 3n$

$A = 1 \quad , \quad B = \frac{1}{2} \quad , \quad k = \frac{1}{3}$

$w_n^* = c_1(2)^n + c_2(3)^n + (1 + \frac{n}{2}) + \frac{1}{3}n3^n$

۴) $$8u_{n+2}-6u_{n+1}+u_n=5\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$8r^2-6r+1=0 \qquad \Delta=\frac{1}{16}$$

$$r_1=\frac{1}{2} \quad , \quad r_2=\frac{1}{4}$$

$$w_n=c_1\left(\frac{1}{2}\right)^n+c_2\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$u_n^*=A\sin\frac{n\pi}{2}+B\cos\frac{n\pi}{2}$$

$$8A\sin(n+2)\frac{\pi}{2}+8B\cos(n+2)\frac{\pi}{2}-6A\sin(n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$-6B\cos(n+1)\frac{\pi}{2}+A\sin\frac{n\pi}{2}+B\cos\frac{n\pi}{2}\equiv 5\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$8A\sin\left(\frac{n\pi}{2}+\pi\right)=-8A\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$8B\cos\left(\frac{n\pi}{2}+\pi\right)=-8B\cos\frac{n\pi}{2}$$

$$6A\sin\left(\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=6A\cos\frac{n\pi}{2}$$

$$6B\cos\left(\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=-6B\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$-A\sin\frac{n\pi}{2}-8B\cos\frac{n\pi}{2}-6A\cos\frac{n\pi}{2}+6B\sin\frac{n\pi}{2}+A\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$+B\cos\frac{n\pi}{2}\equiv 5\sin n\frac{\pi}{2}$$

$$\sin n\frac{\pi}{2}(-8A+6B+A)+\cos n\frac{\pi}{2}(-8B-6A+B)\equiv 5\sin n\frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} 6B-7A=5 \\ -7B-6B=0 \end{cases} \qquad A=-\frac{7}{17} \quad , \quad B=-\frac{6}{17}$$

$$u_n=-\frac{7}{17}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{6}{17}\cos\frac{n\pi}{2}$$

$$w_n=c_1\left(\frac{1}{2}\right)^n+c_2\left(\frac{1}{4}\right)^n-\frac{7}{17}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{6}{17}\cos\frac{n\pi}{2}$$

نکات و مسائل دیگری درباره معادلات تفاضلی:

۱- معادلات زیر را حل کنید.

$$y_{n+2}-5y_{n+1}+6y_n=2$$

حل:

$$r^2-5r+6=0 \qquad (r-2)(r-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} r_1=2 \\ r_2=3 \end{cases}$$

$$w_n=c_1(2)^n+c_2(3)^n$$

$$u_n^*=k \quad \rightarrow \quad k-5k+6k=2 \quad \rightarrow \quad 2k=2 \quad k=1$$

$$w_n^*=w_n+u_n=2^n c_1+3^n c_2+1$$

$$u_n+2+u_n=\sin n\frac{\pi}{2}$$

$$r^2+1=0 \quad \rightarrow \quad r^2=-1 \quad \rightarrow \quad r=0 \pm 1i$$

$$a^2+b^2=\lambda^2 \rightarrow \lambda^2=1 \rightarrow \lambda=1$$

$$\tan\theta=\frac{b}{a}=\frac{1}{0}=\infty \quad \rightarrow \quad \theta=\frac{\pi}{2}$$

$$r_1^n=(1)^n(\cos\frac{n\pi}{2}+i\sin\frac{n\pi}{2})$$

$$r_2^n=(1)^n(\cos\frac{n\pi}{2}-i\sin\frac{n\pi}{2})$$

$$w_n=c_1(\cos n\frac{\pi}{2}+i\sin n\frac{\pi}{2})+c_2(\cos n\frac{\pi}{2}-i\sin n\frac{\pi}{2})$$

$$A\sin(n+2)\frac{\pi}{2}+B\cos(n+2)\frac{\pi}{2}+A\sin n\frac{\pi}{2}+B\cos n\frac{\pi}{2}\equiv\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$A\sin(\frac{n\pi}{2}+\pi)+B\cos(\frac{n\pi}{2}+\pi)+A\sin n\frac{\pi}{2}+B\cos n\frac{\pi}{2}\equiv\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$-A\sin\frac{n\pi}{2}-B\cos(\frac{n\pi}{2}+\pi)+A\sin n\frac{\pi}{2}+B\cos n\frac{\pi}{2}\equiv\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$0\equiv\sin\frac{n\pi}{2}$$

این معادله جواب خصوصی ندارد

بطور کلی این معادله جواب ندارد.

۳) صورت کلی یک معادله مرتبه k را با عملگر B مشخص کنید.
داریم:

$$(B^{k}+a_{k-1}B^{k-1}+\dots+a_{0})u_{n}=f(n)$$

به عنوان نمونه داریم:

$$u_{n-3}+3u_{n-1}+2u_{n}=3n-2$$

اکنون حل این معادله را به شکل B تنظیم کنید.

$$(B^{3}+3B+2)u_{n}=3n-2$$

۴) تحقیق کنید:

الف) $x_n=2^n$ در معادله زیر صدق می کند.

$$x_{n+3} - 9x_{n+2} + 26x_{n+1} - 24x_n = 0$$

$$2^n \times 2^3 - 9 \times 2^n \times 2^2 + 26 \times 2^n \times 2 - 24 \times 2^n = 0$$

$$8 \times 2^n - 36 \times 2^n + 52 \times 2^n - 24 = 2^n(8 - 36 + 52 - 24) = 0$$

ب) ثابت می شود تابع زیر در معادله صدق می کند.

$$x_n = c_1 2^n + c_2 3^n + c_3 4^n$$

اکنون می خواهیم جوابی از معادله را بیابیم که در شرایط اولیه

$x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$ صدق کند.

نکته: اگر جواب های معادله را به شرایطی مقید کنیم که با آن شرایط

تعدادی از جمله های اولیه آن مانند $x_1, x_2, \ldots$ یا $u_1, u_2, \ldots$ برابر

مقادیر معلومی باشند آنگاه این مقادیر اولیه را شرایط اولیه

می نامیم.

برای این مسائل باید c_3, c_2, c_1 را با شرایط گفته شده به دست آوریم:

$$x_1 = 2c_1 + 3c_2 + 4c_3 = 1$$

$$x_2 = 4c_1 + 9c_2 + 16c_3 = 2$$

$$x_3 = 8c_1 + 27c_2 + 64c_3 = 3$$

دستگاه سه معادله و سه مجهولی را حل می کنیم و به دست می آوریم:

$$c_1 = \frac{1}{4} \quad , \quad c_2 = \frac{1}{3} \quad , \quad c_3 = -\frac{1}{8}$$

$$x_n = \frac{1}{4}(2^n) + \frac{1}{3}(3^n) - \frac{1}{4}(4^n)$$

۵)فرض می کنیم معادله مفسر بازگشتی با طرف دوم f(n)=3 بصورت

زیر حاصل شده باشد، شکل معادله را مشخص کنید.

$$(r-2)(r-3)(r-4=0$$

$$\left(r^{2}-3r-2r+6\right)\left(r-4\right)=r^{3}-4r^{2}-5r^{2}+20r+6r-24$$

$$=r^{3}-9r^{2}+26r-24=0$$

$$u_{n+1}-9u_{n+2}+26u_{n+1}-24u_{n}=3$$

۶) فرض می کنیم معادله مفسر یک معادله بصورت زیر باشد.

$$r^4 - 2r^3 + 2r^2 - 2r + 1 = 0$$

جواب عمومی معادله را مشخص کنید.

$$(r-1)^2(r^2+1) = 0 \qquad r_1 = (1)^n \quad , \quad r_2 = n(1)^n$$

$$w_n^* = c_1(1)^n + c_2 n(1)^n + c_3(1)^n(\cos n\frac{\pi}{2} + i\sin n\frac{\pi}{2})$$

$$+ c_4(1)^n(\cos n\frac{\pi}{2} - i\sin n\frac{\pi}{2})$$

۷) مطلوب است حل معادله:

$$u_{n+3} - 6u_{n+2} + 11u_{n+1} - 6u_n = 0$$

$$\mathbf{r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0}$$

$$\mathbf{(r-1)(r^2 - 5r + 6) = 0}$$

$$\mathbf{r_1 = 1 \quad , \quad r_2 = 2 \quad , \quad r_3 = 3}$$

$$\mathbf{w_n = c_1(1)^n + c_2(2)^n + c_3(3)^n}$$

فصل پنجم

توابع مهم در آمار

انتگرال های ناسره (مجازی)

مفاهیم اساسی :

انتگرال های ناسره عبارتند از :

۱.انتگرال هایی با حدود انتگرال گیری نامتناهی

۲.انتگرال های توابع بی کران

انتگرال ناسره تابع $f(x)$ با حدی از a تا $+\infty$ با معادله:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx$$

مشخص می شود .

اگر حد موجود متناهی باشد ، انتگرال ناسره ، همگرا نامیده می شود ؛ ولی اگر حد موجود نبود یا مساوی بی نهایت شود ، واگرا خوانده خواهد شد .

به همین نحو ،

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx$$

و

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to -\infty}} \int_{a}^{b} f(x)dx$$

هرگاه تابع $f(x)$ در نقطه c از بازه بسته $[a,b]$ ناپیوستگی نامتناهی داشته باشد و در $a \le x < c$ و $c < x \le b$ پیوسته باشد ، آن گاه طبق تعریف ،

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{a \to 0} \int_{a}^{c-a} f(x)dx + \lim_{b \to 0} \int_{c+b}^{b} f(x)dx$$

گوییم انتگرال ناسره $\int_a^b f(x)dx$ (که در آن $f(c)=\infty$ و $a<c<b$)
همگرا است اگر هر دو حد سمت راست تساوی موجود
باشند ، و اگر یکی از آن ها وجود نداشته باشد ، انتگرال ناسره
واگرا است .

مثال – انتگرال ناسره $\int_a^{+\infty} \cos x dx$ را محاسبه کنید
(یا واگرایی آن را ثابت کنید) ؟
حل – داریم :

$$\int_a^{+\infty} \cos x dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b \cos x . dx =$$

$$\lim_{b \to +\infty} \sin x \Big|_a^b = \lim_{b \to +\infty} (\sin b - \sin a) = \lim_{b \to +\infty} \sin b$$

و این حد وجود ندارد ، در نتیجه انتگرال ناسره واگراست .

مثال – انتگرال $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2}$ را محاسبه کنید ؟

حل - داریم :

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{-1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{a \to -\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_a^{-1} = \lim_{a \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{a}\right) = 1$$

یعنی انتگرال ناسره همگراست .

مثال – انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ را بیابید ؟

حل : انتگرالده زوج است ، بنابراین :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\left(\lim_{b \to +\infty} \int_{0}^{b} \frac{dx}{1+x^2}\right) =$$

$$2\left(\lim_{b \to +\infty} \arctan x\Big|_0^b\right) = 2\left(\lim_{b \to +\infty} \arctan b\right) = 2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

یعنی انتگرال همگراست .

مثال – انتگرال $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ رابیابید ؟

حل: انتگرالده $f(x)=\frac{1}{x}$ در نقطه $x=0$ بی کران است :

و از این رو ، داریم

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{a\to 0} \int_a^1 \frac{dx}{x} \quad \lim_{a\to 0} (\ln x)\Big|_a^1 = \lim_{a\to 0} (\ln 1 - \ln a) = +\infty$$

یعنی انتگرال ناسره واگراست .

مثال – $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$ را بیابید؟

حل- داریم :

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \lim_{b\to +\infty} \int_0^b xe^{-x^2}dx = \lim_{b\to +\infty} \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^b =$$

$$\lim_{b\to +\infty} \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-b^2}\right) = \frac{1}{2}$$

یعنی انتگرال ناسره همگراست .

مثال – همگرایی انتگرال $\int_a^\infty \frac{dx}{x^p}$ را بیازمائید ؟

حل – طبق تعریف داریم :

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b x^{-p}dx = \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{1}{-p+1}x^{-p+1}\right]_a^b$$

$$= \frac{1}{-p+1} \lim_{b\to+\infty} b^{-p+1} - \frac{1}{-p+1} a^{-p+1}$$

فرض می کنیم $p>1$: پس :

$$\lim_{b\to+\infty} b^{-p+1} = 0$$

.

این بدان معناست که انتگرال به ازای $p>1$ همگراست .

حال فرض می کنیم $p\le 1$ ، پس :

$$\lim_{b\to+\infty} b^{-p+1} = \infty$$

یعنی انتگرال $\int_a^\infty \frac{dx}{x^p}$ به ازای $p \le 1$ واگراست .

تذکر- یکی از روش هایی که می توانیم نوع یک انتگرال ناسره را تعیین نمائیم ، استفاده از آزمون مقایسه است . این آزمون به صورت زیر است :

هر گاه توابع $g(x), f(x)$ و به ازای $x \ge a$ تعریف شده و در بازه $[a, A]$ که $A \ge a$ انتگرال پذیر باشد و نیز به ازای هر $x \ge a$
$0 \le f(x) \le g(x)$ ، آن گاه همگرایی انتگرال $\int_a^\infty g(\mathrm{x})\mathrm{dx}$ ، همگرایی انتگرال $\int_a^\infty f(\mathrm{x})\mathrm{dx}$ را همراه $\int_a^\infty f(\mathrm{x})\mathrm{dx} \le \int_a^\infty g(\mathrm{x})\mathrm{dx}$ ، نتیجه می دهد .

مثال – همگرایی انتگرال $\int_1^{\infty}\frac{dx}{1+x^{10}}$ را بیازمائید ؟

حل : انتگرالده $f(x)=\frac{1}{1+x^{10}}$ بر بازه انتگرال گیری از تابع

$g(x)=\frac{1}{x^{10}}$ کوچکتر بود و انتگرال $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{10}}$ همگراست ($p>1$

مطابق صفحه قبل) پس نتیجه می شود انتگرال داده شده همگراست .

انتگرال ناسره خاص از رده اول

۱. انتگرال نمایی یا هندسی ، $\int_a^{+\infty}xe^{-tx}dx$ ، که در آن t

ثابت است ، یک انتگرال همگراست وقتی که $t>0$

و واگراست اگر $t\leq 0$ ،

به شباهت این انتگرال با سری هندسی توجه کنید که اگر

$r=e^{-t}$ آن گاه $e^{-tx}=r^{x}$

۲.انتگرال از نوع اول $\int_0^\infty \frac{dx}{x^p}$ که p ثابت است و $a>0$

انتگرال همگراست اگر $p>1$ و وقتی که $p\le 1$ ، با سری p

مقایسه شود .

۳.اکنون انتگرال ناسره خاصی را به صورت :

$\int_0^\infty x^{n-1}.e^{-x}dx$

در نظر می گیریم ، این انتگرال را تابع گامای n ، نامیده

و با نماد $\Gamma(n)$ (بخوانید گامای) نشان می دهیم و ثابت می کنیم

که : $\Gamma(n)$ به ازای $n>0$ ، همگراست .

به این ترتیب می توانیم تابع گاما و خواص آن را بررسی نمائیم

تعریف – تابع گاما :

تابع گاما که با $\Gamma(n)$ نمایش داده می شود با ضابطه :

$$\Gamma(n)=\int_0^\infty x^{n-1}.e^{-x}dx \qquad (1)$$

تعریف می گردد . این تابع برای $n>0$ همگراست .

که در ادامه به اثبات آن خواهیم پرداخت ولیکن چند کاربرد و دستور مهم در رابطه با تابع گاما را بیان می کنیم :

۱.دستور بازگشتی برای تابع گاما عبارتست از :

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n) \qquad (2)$$

که در آن : $\Gamma(1)=1$.

از (۲) ، $\Gamma(n)$ را می توان برای هر $n>0$ وقتی مقادیر برای $1 \leq n < 2$ ، (یا هر بازه دیگر با طول واحد) معلوم هستند ، معین نمود.

رابطه بازگشتی (۲) یک معادله تفاضلی است که (۱) جوابی از آن است .

۲.از تابع گاما ، داریم : $n = 1,2,3,...$ $\Gamma(n+1) = n!$

به این دلیل گاهی اوقات $\Gamma(n)$ تابع فاکتوریل نامیده می شود .

چند مثال :

$$\Gamma(2) = 1! = 1$$

$$\Gamma(6) = 5! = 120$$

$$\frac{\Gamma(5)}{\Gamma(3)} = \frac{4!}{2!} = 12$$

۳.ثابت می شود : $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

اگر n بزرگ باشد ، مشکلات محاسبه ای موجود در محاسبه $\Gamma(n)$ آشکار شود ، در این مورد می توانیم از شکل مجانبی $\Gamma(n)$ استفاده کنیم .

فرمول مجانبی برای $\Gamma(n)$:

اگر n بزرگ باشد ، مشکلات محاسبه ای موجود درمحاسبه $\Gamma(n)$ وجود دارد در چنین حالتی رابطه زیر موسوم به فرمول مجانبی برای $\Gamma(n)$ یا استرلینگ نتیجه مفیدی بدست می دهد .

$$\Gamma(n+1) = \sqrt{2\pi n}.n^n e^{-n} e^{\frac{a}{12(n+1)}} \quad ,0 < a < 1$$

در بسیاری از اهداف عملی جمله آخر را که برای مقادیر بزرگ ، خیلی نزدیک یک است ، می توان حذف نمود

$$\left(e^{\frac{a}{12(n+1)}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1\right)$$

.

در این صورت اگر عددی صحیح باشد ، می توانیم بنویسیم :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}.n^n e^{-n}$$

که در آن ~به معنی " تقریبا مساوی برای مقادیر بزرگ n " می باشد .

این عبارت اغلب تقریب فاکتوریل استرلینگ یا فرمول مجانبی برای $n!$ نامیده می شود .

اینک خواص بالا را در جند مساله بیان می کنیم :

۱.ثابت کنید :

$$\Gamma(n)=\int_0^\infty x^{n-1}.e^{-x}dx$$

الف) اگر $n>0$ ، همگراست .

ب) اگر $n\leq 0$ ، واگراست .

حل – می نویسیم :

$$\Gamma(n)=\int_0^\infty x^{n-1}.e^{-x}dx=\int_0^1 x^{n-1}.e^{-x}dx+\int_1^\infty x^{n-1}.e^{-x}dx \qquad (1*)$$

الف) اگر $n\geq 1$ ، انتگرال اول در رابطه (۱*) همگراست

، زیرا تابع زیر انتگرال در $0\leq x\leq 1$ پیوسته است .

اگر $0<n<1$، اولین انتگرال (۱*) یک انتگرال ناسره رده دوم از

$x=0$ است . و چون :

$$\lim_{x\to 0^+} x^{1-n}.x^{n-1}.e^{-x}=1$$

۲- ثابت کنید :

الف) $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) \qquad , n > 0$

ب) $\Gamma(n+1) = n! \qquad , n = 1,2,3,...$

الف) $\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} x^n.e^{-x}.dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b x^n.e^{-x}.dx$

$$= \lim_{b\to\infty}\left\{\left[x^n(-e^{-x})\right]_0^b - \int_0^b n.x^n(-e^{-x})dx\right\}$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left\{-b^n.e^{-b} + \int_0^b x^{n-1}e^{-x}dx\right\}$$

$$= 0 + n\Gamma(n) = n\Gamma(n) \qquad n > 0$$

ب) $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x}.dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}.dx$

$$= \lim_{b\to\infty}\left\{1 - e^{-b}\right\} = 1$$

در $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ قرار می دهیم : $n = 1,2,3,...$ در این صورت ،

$$\Gamma(2)=1\Gamma(1)=1$$
$$\Gamma(3)=2\Gamma(2)=2\times1=2!$$
$$\Gamma(4)=3\Gamma(3)=3(2!)=3!$$

در حالت کلی اگر n عددی صحیح مثبتی باشد ، آن گاه ،

$$\Gamma(n+1)=n!$$

۳- انتگرال های $\int_0^\infty x^3.e^{-x}.dx$ ، $\int_0^\infty x^6.e^{-2x}.dx$ را محاسبه کنید ؟

$$\int_0^\infty x^3.e^{-x}.dx=\int_0^\infty x^{4-1}.e^{-x}.dx=\Gamma(4)=3!=6$$

برای محاسبه : $\int_0^\infty x^6.e^{-2x}.dx$ فرض می کنیم : $2x=y$

بنابراین :

$$\int_0^\infty x^6.e^{-2x}.dx=\int_0^\infty \left(\frac{y}{2}\right)^6.e^{-y}.\frac{dy}{2}$$

$$=\frac{1}{2^7}\int_0^\infty y^6.e^{-y}.dy=\frac{\Gamma(7)}{2^7}=\frac{6!}{2^7}=\frac{45}{8}$$

۴- ثابت کنید : $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$

برای اثبات این مساله دو لم از ریاضی بدون اثبات بیان می کنیم :

لم ۱ – فرض کنید که : $\lim_{x\to\infty} x^p . f(x)=A$

الف) $\int_a^\infty f(x)dx$ همگراست وقتی $p>1$ و A متناهی باشد .

ب) اگر $p\leq 1$ و $A\neq 0$ (A ممکن است نامتناهی باشد) آن گاه $\int_a^\infty f(x)dx$ واگراست .

لم ۲ – با استفاده از این لم ابتدا ثابت می کنیم $\int_0^\infty e^{-x^2} .dx$ همگراست

حل :

بنا به دستور هوپیتال یا هر روش دیگری ، $\lim_{x\to\infty} x^2e^{-x^2}=0$

بنا به لم ۱ ، وقتی p=2 وA=0 انتگرال مطلوب همگراست .

بعلاوه می توان ثابت نمود (تمرین) که مقدار این انتگرال برابر $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ است .

بنابراین : $\int_0^\infty e^{-x^2}.dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

با استفاده از این موارد اکنون ثابت می کنیم : $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$

داریم :

$$\Gamma(\frac{1}{2})=\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}.dx$$

با فرض $x=u^2$ داریم :

$$dx=2udu$$

$$x^{\frac{-1}{2}}=u^{-1}$$

$$\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-x}.dx = 2\int_0^\infty e^{-u^2}.du$$

$$x^{\frac{-1}{2}} = u^{-1}$$

$$\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-x}.dx = 2\int_0^\infty e^{-u^2}.du$$

و با استفاده از مساله قبل داریم :

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-x}.dx = 2\int_0^\infty e^{-u^2}.du = 2(\frac{\sqrt{\pi}}{2}) = \sqrt{\pi}$$

نتایج دیگر برای تابع گاما :

۱. $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\sin \pi x} \quad , \quad 0 < x < 1$

اگر : $x = \dfrac{1}{2}$ آن گاه :

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

۲. $2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}\,\Gamma(2x)$

این فرمول **دو برابر سازی برای تابع گاما** نامیده می شود .

تابع بتا : این تابع معمولاً با نماد $\mathrm{B}(\alpha,\beta)=(Beta)$ و یا $\mathrm{B}(m,n)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم .

$$\mathrm{B}(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$$

این تابع با تابع گاما به صورت زیر معرفی می شود .

$$\mathrm{B}(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx=\frac{\Gamma(m)\cdot\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

کاربردها و مثال ها :

۱) $$B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\cdot\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)}=\frac{\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{\pi}}{1}=\pi$$

۲) $$B(4,3)(\Gamma(\frac{1}{2}))^2=\frac{\Gamma(4)\cdot\Gamma(3)}{\Gamma(7)}\cdot(\sqrt{\pi})^2=\frac{3!\times 2!}{6!}\cdot\pi$$

۳) $$\int_0^1 x^4(1-x)^3dx=\int_0^1 x^{5-1}(1-x)^{4-1}dx$$

$$=\frac{\Gamma(5)\cdot\Gamma(4)}{\Gamma(9)}=\frac{4!\times 3!}{8!}$$

همواره داریم :

٤) $$B(m,n)=B(n,m)$$

برهان :

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$$

$$\begin{cases} 1-x=y \\ x=1-y \end{cases} \quad dx=-dy \qquad \begin{cases} x\to 0 & y\to 1 \\ x\to 1 & y\to 0 \end{cases}$$

$$=\int_0^1 (1-y)^{m-1}(y)^{n-1}(-dy)=\int_0^1 (1-y)^{m-1}(y)^{n-1}dy$$

$$=\mathrm{B}(n,m)$$

۵) $\mathrm{B}(1,n)=\mathrm{B}(n,1)=\dfrac{\Gamma(1)\Gamma(n)}{\Gamma(n+1)}=\dfrac{\Gamma(n)}{n\Gamma(n)}=\dfrac{1}{n}$

۶) $\mathrm{B}(n+1,m)$

$$=\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(m)}{\Gamma(n+1+m)}=\frac{n\Gamma(n)\Gamma(m)}{(n+m)\Gamma(n+m)}=\frac{n}{n+m}\mathrm{B}(n,m)$$

$$\text{۷)}\ \int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx$$

$$\begin{cases} x^4 = y \\ 4x^3 dx = dy \end{cases} \qquad -x^4 = -y \qquad x = \sqrt[4]{y} \qquad 1-x^4 = 1-y \qquad dx = \frac{1}{4}x^{-3}dy$$

$$\frac{1}{4}\int_0^1 (1-y)^{1/2} y^{-3/4} dy = \frac{1}{4}\mathrm{B}(\frac{3}{2},\frac{1}{4})$$

$$= \frac{1}{4}\mathrm{B}(\frac{1}{4},\frac{3}{2})$$

$$\frac{1}{4}\mathrm{B}(\frac{1}{4},\frac{3}{2}) = \frac{1}{4}(\frac{\Gamma(1/4)\Gamma(3/2)}{\Gamma(7/4)})$$

$$(*) \qquad = \frac{1}{4}\frac{\Gamma(1/4)1/2\Gamma(1/2)}{3/4\Gamma(3/4)}$$

از طرفی داریم :

$$2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\Gamma(2x) \qquad 0 < x < 1$$

از طرفی داریم :

$$2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}\Gamma(2x) \qquad 0<x<1$$

$$x=\frac{1}{4}$$

$$2^{-1/2}\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{3}{4})=\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{1}{2})$$

این مقدار را در (*) قرار می دهیم .

$$\Gamma(\frac{3}{4})=\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(\frac{1}{4})}\times\Gamma(\frac{1}{2})$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\Gamma(\frac{1}{4})\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{\frac{3}{4}\times\sqrt{2\pi}\Gamma(\frac{1}{2})\times\frac{1}{\Gamma(1/4)}}\right)=\frac{(\Gamma(\frac{1}{4}))^2}{6\sqrt{2\pi}}$$

۸) فرض می کنیم برای B ثابت در فاصله $(0,\infty)$

تعریف کنیم :

$$f(\alpha)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)}\cdot \mathrm{B}(\alpha,\beta)$$

۱)مطلوب است محاسبه $f(1)$.

$$f(1)=\frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(\beta)}\cdot \mathrm{B}(1,\beta)$$

$$=\frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(\beta)}\cdot\frac{\Gamma(1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(1+\beta)}=\Gamma(1)=1$$

۲) مطلوب است محاسبه $f(\alpha+1)$.

$$f(\alpha+1)=\frac{\Gamma(\alpha+1+\beta)\cdot \mathrm{B}(\alpha+1,\beta)}{\Gamma(\beta)}$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha+1+\beta)}{\Gamma(\beta)}\cdot\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+1+\beta)}=\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$$

از جمله کاربردهای تابع B تعریف تابع چگالی B می باشد که یکی از توزیع های پیوسته در آمار است .

تعریف : گوییم متغیر تصادفی پیوسته X دارای توزیع B است هرگاه تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد .

$$f(x,\alpha,\beta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)}\cdot x^{\alpha-1}\cdot(1-x)^{\beta-1} & 0<x<1\\ 0 & o.w\end{cases}$$

برای این توزیع داریم :

$$\Gamma=E(X)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

$$\sigma^2=\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

فصل ششم

تبدیلات لاپلاس

تبدیلات لاپلاس

مقدمه : هدف :

در این فصل به معرفی تبدیلات لاپلاس می پردازیم که به کمک آنها بتوانیم برخی مسائل را آسانتر تبدیل نموده و حل کنیم . به خصوص تبدیلات لاپلاس در حل معادلات دیفرانسیل نقش اساسی دارند .

تعریف : فرض می کنیم f تابعي از $[0,+\infty) \to R$ باشد ، تبدیل لاپلاس f که با نماد $\hat{f}$ یا $L(f)$ نشان می دهیم عبارت است از :

$$L(f)(s) = \hat{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x)dx$$

مسائل نمونه :

۱) $f(x)=1$

$$L(f)(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\cdot(1)dx=-\frac{1}{s}e^{-sx}$$

$$=-\frac{1}{s}(0-1)=\frac{1}{s}$$

$$f(x)=1 \quad : L(f)(s)=\frac{1}{s}$$

۲) $f(x)=x$

$$L(f)(s)=\int_0^\infty x\cdot e^{-sx}dx \qquad \begin{cases} sx=u \\ x=\dfrac{u}{s} \end{cases}$$

$$dx=\frac{1}{s}du$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{s} \cdot \frac{u}{s} \cdot e^{-u} du = \frac{1}{s^2} \int_0^\infty u \cdot e^{-u} du$$

$$= \frac{1}{s^2} \Gamma(2) = \frac{1}{s^2}$$

۳) $f(x) = x \quad : L(f)(s) = \frac{1}{s^2}$

$$f(x) = e^{ax}$$

$$L(f)(s) = \int_0^\infty e^{-sx} \cdot e^{ax} dx = \int_0^\infty e^{-x(s-a)} dx$$

$$= \frac{1}{s-a} \left(e^{-x(s-a)} \right) \Big|_0^\infty = -\frac{1}{s-a}(0-1) = \frac{1}{s-a}$$

$$f(x) = e^{ax} \quad : L(f)(s) = \frac{1}{s-a}$$

لاپلاس $\sin ax$ و $\cos ax$

در آنالیز مخلط داریم :

$$e^{iax} = \cos ax + i\sin ax$$

۱) دو تابع با هم برابرند : بنابراین لاپلاس آن ها با هم برابرند (و برعکس : قضیه یکتایی لاپلاس)

$$L(e^{iax}) = L(\cos ax + i\sin ax)$$

۲) از ویژگی های لاپلاس :

$$L(f+g) = L(f)(s) + L(g)(s)$$

بنابراین :

$$L(e^{iax}) = L(\cos ax + i\sin ax)$$

$$L(\lambda f(x))(s) = \lambda L(f)(s)$$

$$= L(\cos ax) + L(i\sin ax)$$

$$L(e^{iax}) = L(\cos ax) + iL(\sin ax)$$

در مسئله سوم a را به ia تبدیل می کنیم .

$$L(e^{iax}) = \frac{1}{s-ia} \times \frac{s+ia}{s+ia} = \frac{s+ia}{s^2+a^2}$$

$$= \frac{s}{s^2+a^2} + i\frac{a}{s^2+a^2}$$

$$L(e^{iax}) = \frac{s}{s^2+a^2} + i\frac{a}{s^2+a^2} = L(\cos ax) + iL(\sin ax)$$

از تساوی دو عدد مختلط :

$$L(\cos ax)(s) = \frac{s}{s^2+a^2}$$

$$L(\sin ax)(s) = \frac{a}{s^2+a^2}$$

$$a = 1 \rightarrow L(\sin x) = \frac{1}{s^2+1} \qquad a = 1 \rightarrow L(\cos x) = \frac{s}{s^2+1}$$

ویژگی ها :

۱) $L(f+g)(s)=L(f)(s)+L(g)(s)$

$$L(f+g)(s)=\int_0^\infty e^{-sx}(f+g)(x)dx$$

$$=\int_0^\infty e^{-sx}(f(x)+g(x))dx$$

$$=\int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx+\int_0^\infty e^{-sx}g(x)dx$$

$$=L(f)(s)+L(g)(s)$$

٢) $L(\lambda f(x))(s) = \lambda L(f)(s)$

$$L(\lambda f(x))(s) = \int_0^\infty e^{-sx} \lambda f(x)dx$$

$$= \lambda \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx = \lambda L(f)(s)$$

مثال :

$$L(1 + 2x + 3\sin x + \cos x)$$

$$= L(1) + 2L(x) + 3L(\sin x) + L(\cos x)$$

$$= \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{3}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1}$$

لاپلاس تغییر مکان :

مطلوب است تعیین لاپلاس تابع

$$g(x)=\begin{cases} f(x-a) & x>a \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$L(g)(s)=\int_0^\infty e^{-sx}g(x)dx=\int_a^\infty e^{-sx}f(x-a)dx$$

$$\begin{cases} x-a=u & dx=du \\ x=u+a & x=a,u=0,x\to\infty,u\to\infty \end{cases}$$

$$L(g)(s)=\int_0^\infty e^{-s(u+a)}\cdot f(u)du$$

$$=\int_0^\infty e^{-su}\cdot e^{-sa}\cdot f(u)du=e^{-sa}\int_0^\infty e^{-su}\cdot f(u)du$$

$$= e^{-sa} L(f)(s)$$

$$L(f(x-a))(s) = e^{-sa} L(f)(s)$$

مسئله :

$$g(x) = \sin(x-\pi)$$

$$L(g)(s) = L(\sin(x-\pi))(s) = e^{-s\pi} L(\sin x)(s)$$

$$= \frac{e^{-s\pi}}{s^2+1}$$

مسئله تغيير مقياس :

مطلوب است تعيين لاپلاس

$$g(x) = f(\lambda x)$$

$$L(g)(s) = \int_0^\infty e^{-sx} \cdot g(x)dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-sx} \cdot f(\lambda x)dx$$

$$\begin{cases} u = 0 \\ x \to \infty, u \to \infty \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda x = u \\ x = \dfrac{u}{\lambda} \end{cases} \qquad \lambda dx = du$$

$$L(g(x))(s) = \int_0^\infty e^{-\frac{su}{\lambda}} \cdot \frac{1}{\lambda} f(u)du$$

$$= \frac{1}{\lambda} L(f)(\frac{s}{\lambda}) = \frac{1}{\lambda} \hat{f}(\frac{s}{\lambda})$$

مطلوب است حل $L(\cos \pi x)$ ؟

$$L(\cos x)(\frac{s}{\pi}) = L(\cos x)(\frac{s}{\pi}) = \frac{\frac{s}{\pi}}{\frac{s^2}{\pi^2}+1}$$

$$L(co x \pi x)(s) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\frac{s}{\pi}}{\frac{s^2}{\pi^2}+1}$$

مسئله : لاپلاس مشتق یک تابع

هدف : با فرض این که لاپلاس $f(x)$ وجود داشته باشد و مشتق $f(x)$ موجود باشد ، می خواهیم $L(f'(x))$ را محاسبه کنیم .

$$L(f'(x))(s) = \int_0^\infty e^{-sx} \cdot f'(x)dx$$

$$\begin{cases} e^{-sx} = u & -se^{-sx}dx = du \\ f'(x)dx = dv & f(x) = v \end{cases}$$

$$= f(x)e^{-sx}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty se^{-sx} f(x)dx$$

$$= (0 - f(0)) + sL(f)(s)$$

$$L(f')(s) = sL(f)(x)(s) - f(0)$$

پایان