www.salampnu.com

سایت مرجع دانشجوی پیام نور

- ✓ نمونه سوالات پیام نور : بیش از ۱۱۰ هزار نمونه سوال همراه با پاسخنامه تستی و تشریحی
- ✓ کتاب ، جزوه و خلاصه دروس
- ✓ برنامه امتحانات
- ✓ منابع و لیست دروس هر ترم
- ✓ دانلود کاملا رایگان بیش از ۱۴۰ هزار فایل مختص دانشجویان پیام نور

www.salampnu.com

هندسه هذلولی

مولف کتاب اصلی : محمد مهدی ابراهیمی
محمد جلوداری ممقانی
تهیه وتنظیم power point : محمد چایچی
مجری طرح : مدیریت رسانه ها
دانشگاه پیام نور
شهریور 1385
All rights reserved

فهرست

- فصل 1 : هندسه اقلیدسی مسطحه
- فصل 2 : تبدیل آفین درصفحه اقلیدسی
- فصل 3 : هندسه کره
- فصل 4 : صفحه تصویری
- فصل 5 : هندسه طوای در E^2
- فصل 6 : صفحه هذلولوی

اهداف آموزشی درس

- آشنایی با روش های تحلیلی درهندسه اقلیدسی
- آشنایی با روش های تحلیلی در تبدیلات آفین
- آشنایی با روش های تحلیلی درهندسه کره
- آشنایی با روش های تحلیلی در صفحه تصویری
- آشنایی با روش های تحلیلی درهندسه طولی
- آشنایی با روش های تحلیلی در صفحه هذلولوی

فصل اول

هندسه اقلیدسی مسطحه

فضای برداری R^2

- اگر $y=(y_1,y_2)$ ،$x=(x_1,x_2)$ و c عددی حقیقی باشد ، آنگاه

مجموع x و y ومضرب اسکالر c در x را،به ترتیب به صورت

$$x+y= (x_1+y_1,x_2+y_2)$$

$$cx =(cx_1 cx_2)$$

تعریف میکنیم.به ویژه،اگر $c=-1$ باشدآنگاه بردار cx رابا $-x$ نشان میدهیم.

بردار $0=(0,0)$ را بردارصفرمی نامیم. اعمال جمع برداری و مضرب اسکالردارای خواص جبری زیر است :

فضای برداری R^2

- قضیه1: به ازای بردارهای x ، y ، z واعداد حقیقی c و d، داریم

الف : $(x + y) + z = x + (y+z)$

ب : $x+y = y+x$

پ : $x+0 = x$

ت : $x + (-x) = 0$

ث : $1x = x$

ج : $c(x+y) = cx + cy$

چ : $(c+d)x = cx + dx$

ح : $c(dx) = (cd)x$

قضیه 1 بیان می کند که R^2 همراه با اعمال جمع برداری ومضرب اسکالر، یک فضای برداری است.

فضای ضرب داخلی R^2

- اگر $x=(x_1,x_2)$ و $y=(y_1,y_2)$ دو بردارباشند، آنگاه حاصل ضرب داخلی آنها را با $< x,y >$ نشان می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$< x+y > = x_1y_1+x_2y_2$$

حاصل ضرب داخلی را حاصل ضرب نقطه ای یا حاصل ضرب اسکالر x و y مینامیم.

- قضیه 2:

الف:به ازای هر x، y، z در R^2، داریم :

$$< x,y+z > = < x,y > + < x,z >$$

$$< y+z,x > = < y,x > + < z,x >$$

فضای ضرب داخلی R^2

ب:به ازای هر x و y در R^2 و $c \in R$

$$< x,cy > = c< x+y > = < cx,y >$$

پ:به ازای هر x و y در R^2

$$< x,y > = < y,x >$$

ت:اگر،به ازای هر $x \in R^2$ و $< x,y > = 0$، آنگاه $y = 0$

فضیه 2 بیان میکند که عمل ضرب داخلی یک نگاشت دو خطی،متقارن و زوال ناپذیر است

- برای هر بردار $x = (x_1,x_2)$ ، در R^2 ،اندازه یا طول X را با |x| نشان میدهیم و برابر است با $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

فضای ضرب داخلی R^2

- قضیه 3 : تابع اندازه دارای خواص زیر است:

الف : به ازای هر $x \in R^2$ ، $| x | \geq 0$

ب: $| x | = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$

پ: به ازای هر $x \in R^2$ و $c \in R$ ، $| cx | = | c | | x |$

- قضیه 4 (نامساوی کشی-شوارتز):

به ازای هر دو بردار x و y در R^2 داریم:

$$| < x,y > | \leq | x | | y |$$

وتساوی برقرار است اگروتنها اگر x و y متناسب باشند.

فضای ضرب داخلی R^2

- نتیجه قضیه 4:

به ازای هر x و y در R^2 :

$$| x + y | \leq | x | + | y |$$

وتساوی برقراراست اگروتنها اگر x و y با ضریب تناسب نامنفی متناسب باشند.

صفحه اقلیدسی E^2

- اکنون مفهوم هندسی فاصله رامورد بررسی قرارمیدهیم اگر p و q دو نقطه باشند فاصله بین این دوبه صورت زیرتعریف میشود :

$$d(p,q) = |q - p|$$

مجموعه R^2 همراه با تابع فاصله d را با E^2 نشان می دهیم.

- قضیه 5:فرض کنید P،Q،R سه نقطه در E^2 هستند دراین صورت:

الف : $d(P,Q) \geq 0$

ب : $d(P,Q) = 0$ اگر و تنها اگر $P = Q$

پ : $d(P,Q) = d(Q,P)$

ت : $d(P,Q) + d(Q,R) \geq d(P,R)$ (نامساوی مثلث)

خط

- هر خط درهندسه تحلیلی توسط این خاصیت مشخص میشود که بردارهای واصل هرزوج نقطه آن متناسبند مجموعه همه بردارهای متناسب با یک بردارغیرصفرv یک راستا می نامیم و آن را با [v] نمایش می دهیم.

$$[\,v\,] = \{\, tv \mid t \in R \,\}$$

خط

- اگر p یک نقطه و v برداری غیر صفر باشد آنگاه مجموعه

$$(4.1)\quad L = \{ x \mid x - p \in [v] \}$$

راخط گذرنده از P با راستای [v] می نامیم شکل زیر را ببینید مجموعه (4.1) را به صورت زیرنیز می نویسیم .

$$L = P + [v]$$

اگر L = P + [v] یک خط باشد v را بردار راستای L می نامیم .

خط

- اگر L یک خط و x یک نقطه باشد،عبارتهای متفاوتی برای رابطه $L \ni x$ وجود دارد.به عنوان مثال عبارات زیرمترادفند

الف : $x \in L$

ب: L شامل x است .

پ: x بر L قرار دارد .

ت: L از x میگذرد .

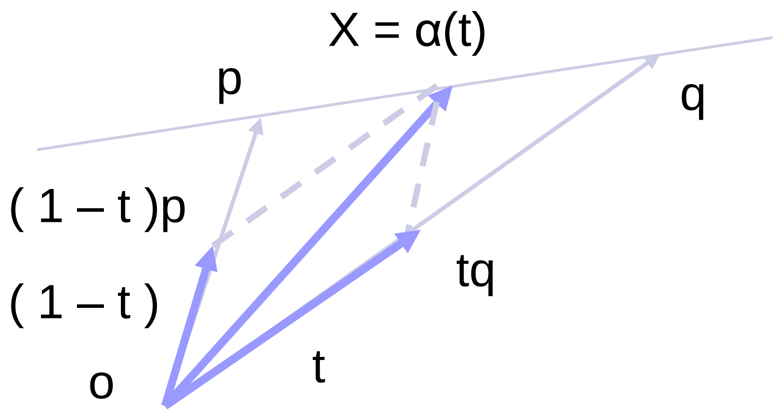
ج : x بر L واقع است .

خط

- قضیه 6 : فرض کنید p و q دو نقطه متمایزدرE^2 هستند. دراین صورت، تنها یک خط شامل نقاط pو q وجود داردواین خط رابا $\overleftrightarrow{pq}$ نشان می دهیم .

نتیجه : هرنقطه x واقع برخط $L = \overleftrightarrow{pq}$ به صورت :

$$X = \alpha (t) + t (q – p)$$
$$= (1 – t)p + t \qquad (5.1)$$



خط

- معادله (5.1) را می توان به عنوان یک معادله پارامتری خط در نظر گرفت وقتی t در اعداد حقیقی تغییر می کند $\alpha(t)$ براین خط تغییرمکان می دهد فاصله هر دو نقطه برخط L توسط فرمول زیر به دست می اید :

$$d(\alpha(t_1), \alpha(t_2)) = | t_2 - t_1 | | q - p |$$

اگر $x = (1-t)p + tq$ ، که درآن $0<t<1$، انگاه می گوییم x میان p,q واقع است.

خط

- قضیه 7: فرض کنید x،p وq سه نقطه متمایزدر E^2 هستند.
درااین صورت x میان p و q است اگروتنها اگر :

$$d(p,x) + d(x,q) = d(p,q)$$

- فرض کنید p و q دونقطه متمایزهستند :

دراین صورت، مجموعه شامل p و q وهمه نقاط میان انها را یک پاره خط می نامیم وآن را با pq نشان می دهیم.
P و q نقاط انتهایی پاره خط pq هستند نقاط دیگرپاره خط را نقاط درونی می گوییم .

خط

- اگر m نقطه ای برپاره خط pq باشد به طوری که :

$$d(p, m) = d(m,q) = \frac{1}{2} d (p,q)$$

آنگاه، m نقطه وسط pq است.

ازتمرین 8 به اسانی نتیجه میشود که هرپاره خط تنها یک نقطه وسط دارد وآن عبارت است از:

$$m = \frac{1}{2} (p + q)$$

- اگردو خط L و m از نقطه p بگذرد، میگوییم یکدیگررادرp قطع میکنند و p نقطه تقاطع آنهاست .

خط

- قضیه 8 : دوخط متمایزحداکثر یک نقطه تقاطع دارند.
- خواهیم دید که دو خط در E^2 ممکن است هیچ نقطه تقاطع نداشته باشند
- اگرسه خط یا بیشتر از سه خط از یک نقطه بگذرند خطوط را متقارب می گوییم .
- اگرسه یا بیشترازسه نقطه بریک خط واقع شوند،این نقاط را هم خط گوییم .

زوج متعامد یکه

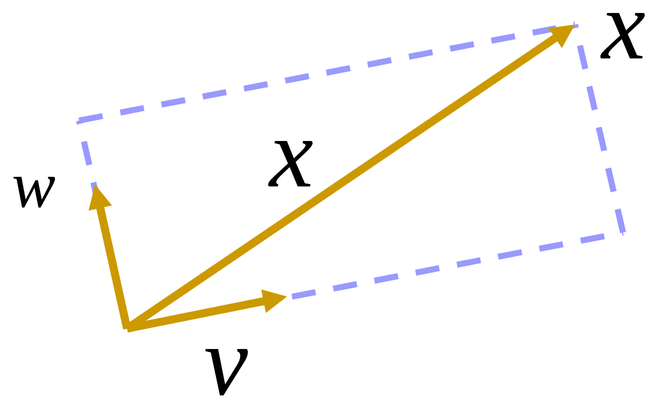
- دوبردار u وv رامتعامد می گوییم اگر0= < v,u > باشد.اغلب لازم می آید برداری عمود بربرداردداده شده ای به دست اوریم . روشن است که اگر $v=(v_1,v_2)$ انگاه v وبردار $v^{\perp}$ برهم عمودوهم اندازه هستند. $v^{\perp}=(-v_2,v_1)$
همچنین به آسانی دیده می شود که $v^{\perp\perp}=(v^{\perp})^{\perp}=-v$ هر بردار به طول 1 را یک بردار یکه یا واحد می نامیم . زوج متعامد راکه دران v و w بردارهای یکه هستند را یک زوج متعامد یکه می گوییم . $\{v,w\}$

زوج متعامد یکه

- قضیه 9 : فرض کنید { v,w } یک زوج متعامد یکه ازبردارهای R^2 باشد. دراین صورت به ازای هر $x \in R^2$ ، داریم :

$$x = < x,v > v + < x,w > w$$

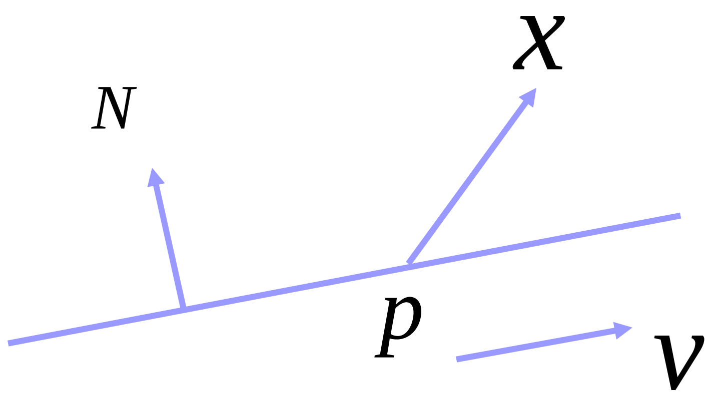
قضیه 9 درشکل زیرنمایش داده شده است .



معادله خط

- اگر L خطی با بردارراستای v باشد، انگاه $v^{\perp}$ رابردارقائم بر L می نامیم روشن است که بردارهای قائم بر یک خط با یکدیگر متناسب (یعنی مضرب یکدیگر) هستند .

اکنون خاصیت مشخصه ای ازخط رابرحسب بردارهای قائم بر آن به دست می اوریم . شکل زیررا ببینید .



معادله خط

- قضیه 10 : فرض کنید p یک نقطه دلخواه و { v,N } یک زوج متعامد یکه است . دراین صورت ،

$$p + [v] = \{ x \mid < x- p > N \geq 0 \}$$

- نتیجه : اگر N برداری غیر صفرباشد، آنگاه مجموعه نقاط

$$\{ x \mid < x- p,N \geq 0 \}$$

خط گذرنده از p با بردار قائم N است، ولذا بردار راستای آن $N^{\perp}$ می باشد .

معادله خط

- یادآوری می کنیم که درهندسه تحلیلی، مجموعه

$$\{ (x,y) \mid ax + by + c = 0 \}$$

نمایشگریک خط است ، مشروط براین که $a^2+b^2 = 0$ این مطلب در قالب مفاهیم فوق به صورت زیر بیان می شود.

- قضیه 11: فرض کنید a، b، c سه عدد حقیقی هستند . دراین صورت $\{ (x,y) \mid ax + by + c = 0 \}$ برابر است با :

الف : مجموعه تهی اگر $a = 0$ ، $b = 0$ ، $c \neq 0$

ب : تمام صفحه R^2، اگر $a = 0$ ، $b = 0$ ، $c = 0$

پ: درغیراین دو صورت، خطی است بابردارقائم (a,b) .

خطوط متعامد

- دوخط L و m رامتعامد گوییم اگربردارهای راستای آنها متعامد باشند دراین صورت می نویسیم $m \perp L$ دو پاره خط متعامداند اگرخطوط حامل آنها متعامد باشند .
- قضیه 12 : (فیثاغورس) فرض کنیم p، q، r سه نقطه متمایز هستند. دراین صورت ،

$$|r-p|^2 = |q-p|^2 + |r-q|^2$$

اگروتنهااگردو خط $\overleftrightarrow{qp}$ و $\overleftrightarrow{rq}$ متعامد باشند.

خطوط متعامد

- قضیه 13: اگر $m \perp L$، انگاه L و m یک وتنها یک نقطه مشترک دارند .
- قضیه 14: فرض کنید x یک نقطه و L یک خط است. دراین صورت، یک وتنها یک خط مانند m وجود دارد که ازx می گذرد وبر L عمود است. بعلاوه،

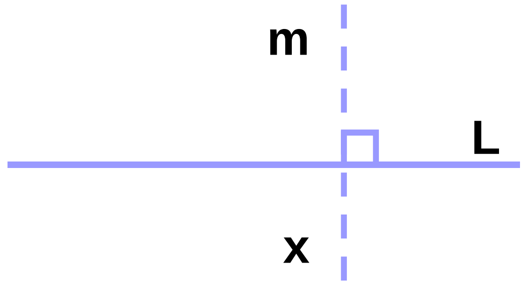
الف : $m = x + [\, N \,]$، که درآن N یک برداریکه قائم بر L است

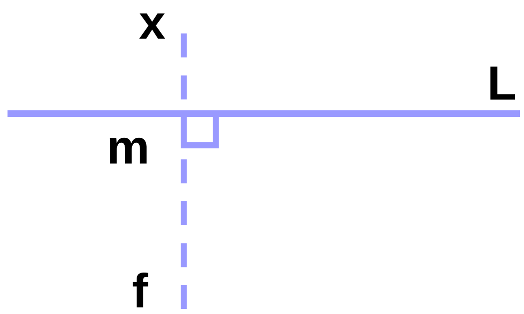
ب : L و m درنقطه $F = x - < x - p,N > N$ که درآن p نقطه ای دلخواه بر L است، یکدیگررا قطع می کنند .

پ: $d\,(\,x,F\,) = |\; < x - p,N > \;|$

خطوط متعامد

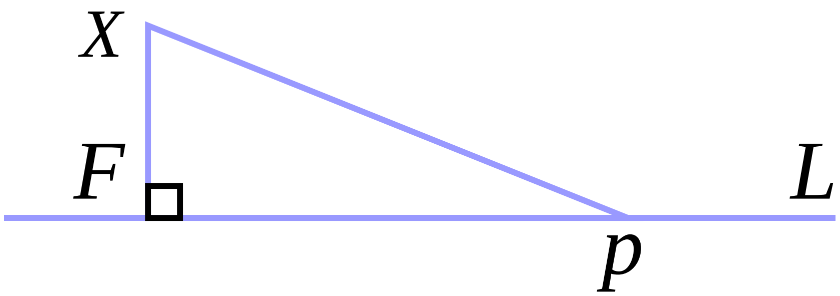
- اگر نقطه x برخط L باشد، عمل ساختن خط m از خط L ونقطه x مذکوردرقضیه 14، رااخراج عمود از x بر L می گوییم. اگر x خارج ازخط L باشد، m را خط عمود از x (وارد) بر L می نامیم. قضیه 14 در شکل های زیر نمایش داده شده است .





خطوط متعامد

- قضیه 15 : فرض کنید L یک خط و x نقطه ای خارج از L است. اگر F پای عمودار x بر L باشد، آنگاه F نزدیکترین نقطه L به x است .



- تعریف: اگر F پای عمودازx برخط L باشد، آنگاه d(x,L) رافاصله نقطه x وخط L می گوییم وآن راباd(x,L) نمایش می دهیم .

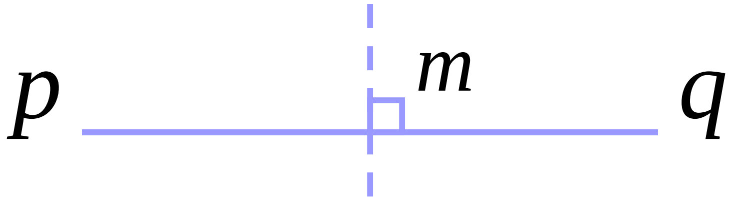
خطوط متعامد

- تذکر: $d(x,L)$ کوتاهترین فاصله x و L است .
- نتیجه: فرض کنید L خطی با بردارقائم N و x نقطه ای در R^2است اگر p نقطه ای بر L باشد، آنگاه

$$d(x,L) = \left|\langle x-p, N \rangle\right|$$

اکنون روش ساختاری دیگری را درمورد تعامد ارائه میدهیم فرض کنید $\overleftrightarrow{pq}$ یک پاره خط است. خطی که از نقطه m در pq بر pq عمود است راعمود منصف پاره خط pq میگوییم.

تذکر:عمود منصف پاره خط pq مجموعه نقاطی ازصفحه است که از p و q به یک فاصله هستند.



خطوط موازی و متقاطع

- دو خط L و m را موازی می گوییم اگرنقطه تقاطع نداشته باشند، دراین صورت می نویسیم $m \| L$
- آزمون زیر در مورد خطوط موازی وجود دارد .
- قضیه 16: دو خط L و m موازی اند اگر و تنها اگردارای یک راستا باشند .
- قضیه 17:

الف : اگر $m \| L$ و $n \| m$ ، آنگاه $n \| L$ یا $L = n$

ب: اگر $m \| L$ و $n \perp m$ ، آنگاه $n \perp L$

پ: اگر $n \perp L$ و $n \perp m$ ، آنگاه $m \| L$ یا $L = m$

خطوط موازی و متقاطع

- قضیه 18: فرض کنید دوخط L و m موازی هستند. دراین صورت، عددیکتاییی، به نمایش d(L,m) وجوددارد به طوری که به ازای هر $m \ni x$ و $L \ni y$

$$d(x,L) = d(y,m) = d(L,m)$$

درواقع، اگر N یک برداریکه قائم برخطوط L و m باشد، آن گاه به ازای هردونقطه x بر m و y بر L، داریم

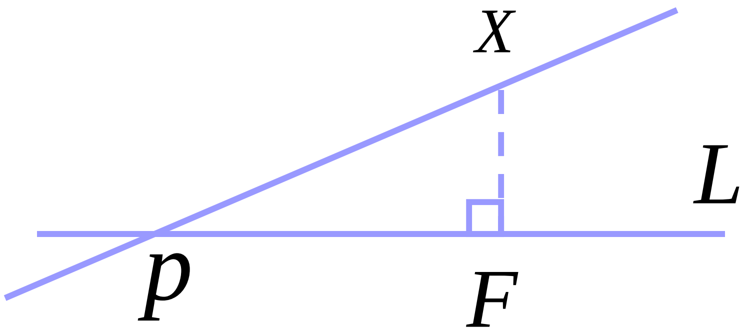
$$|\langle x - y, N \rangle| = d(L,m)$$

خطوط موازی و متقاطع

- قضیه 19: فرض کنید خط m خط دلخواه L را درنقطه p قطع می کند و v و w به ترتیب، بردارهای یکه راستای L و m هستند. فرض کنید $\alpha(t) = p + tw$ معادله پارامتری m است. دراین صورت،

$$d(\alpha(t),L) = |t|\,|\langle w,v^{\perp}\rangle|$$

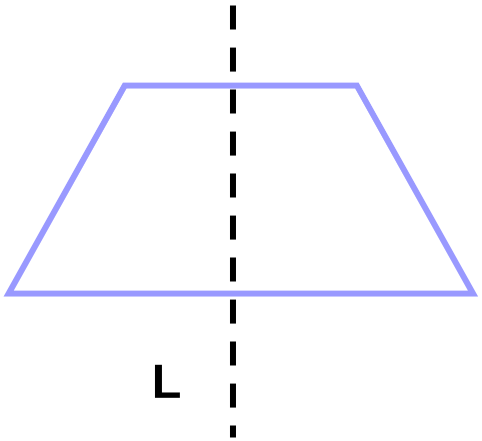
ازاین رو، وقتی x بر m تغییرمکان می دهد، $d(x,L)$ همه اعداد حقیقی نامنفی، به جزصفر، را دوباراختیار می کند .



$$d(\alpha(t),F) = |t|\,|\langle w,v^{\perp}\rangle|$$

انعکاس

- هرزیرمجموعه دوبعدی ازصفحه را یک پیکره می نامیم. طبیعی است که برخی از پیکره ها از پیکره های دیگرجالبتر هستند. پیکره های متقارنتر، نه تنهاازنظرزیبایی بلکه ازآنجا که درطبیعت یافت می شوند بیشترموردتوجه هستند.



انعکاس

- ساده ترین نوع تقارن پیکره های مسطحه، تقارن نسبت به یک خط است. اکنون این مفهوم رابه طوردقیق فرمول بندی میکنیم. فرض کنید L خط گذرنده از p بابردارقائم N است. دونقطه x و x' نسبت به L متقارن هستند اگرنقطه وسط پاره خط xx' پای عمود از x بر L باشد. به بیان دیگر، x و x' نسبت به L متقارن هستند اگر :

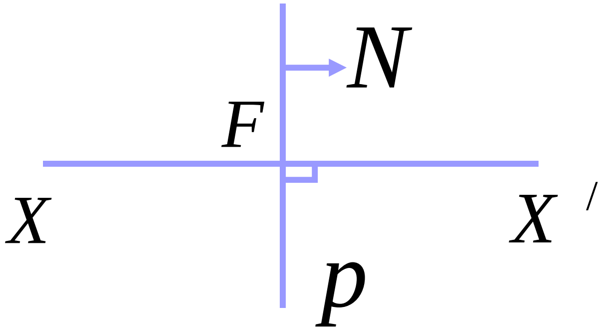
$$\tfrac{1}{2}(x + x') = F$$

که درآن F پای عمود از x برخط L است. پس بنا به قضیه 14:

$$\tfrac{1}{2}(x + x') = x - < x - p, N > N$$

$$\tfrac{1}{2}x' = \tfrac{1}{2}x - < x - p, N > N$$

$$x' = x - 2 < x-p, N > N$$



انعکاس

- انعکاس نسبت به خط L نگاشتی چون Ω_L از E^2 به E^2 با تعریف : $x' = \Omega_L x = x - 2 < x - p, N > N$
است، که درآن N یک برداریکه قائم برL و p نقطه ای دلخواه بر L است.
- اگر τ یک پیکره باشد به طوری که $\Omega_{|}\tau = \tau$ ، آنگاه می گوییم τنسبت به L متقارن است. خط L رایک خط یامحور متقارن τ می نامیم.

انعکاس

- قضیه 20 :

الف : به ازای هردو نقطه x و y در E^2 ؛

$$d(\Omega_L x , \Omega_L y) = d(x,y)$$

ب: به ازای هر x در E^2 ؛

$$\Omega_L \Omega_L x = x$$

پ: نگاشت $\Omega_L : E^2 \to E^2$ دوسوئی است.

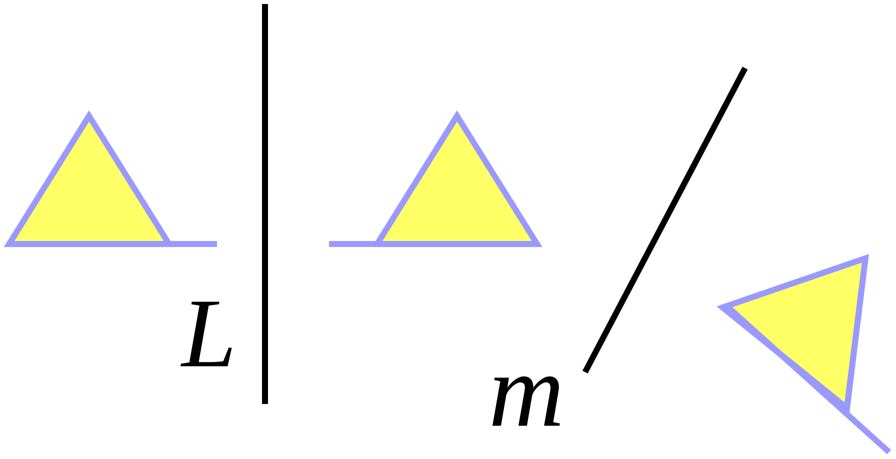
انعکاس

- قضیه 21 : $\Omega_L x = x$ اگروتنهااگر $x \in L$
- نقطه x رایک نقطه ثابت Tمیگوییم اگر $x = Tx$ لذاقضیه 21 بیان می کند که نقاط واقع بر محورانعکاس نقاط ثابت نگاشت انعکاس هستند.
- قضیه 20 نشان می دهدکه هرانعکاس یک نگاشت دوسوئی برگشتی وحافظ فاصله است. نگاشت Tرابرگشتی می گوییم اگر T^2 نگاشت همانی روی E^2 باشد. یعنی

$$T^2 = T \,.\, T = I$$

قابلیت انطباق و ایزومتری

- اگر τ یک پیکره و Ω_L یک انعکاس باشد، آنگاه $\Omega_L \tau$ را تصویرآینه ای τ نسبت به خط L می نامیم. مشاهده میشود که هر پیکره و تصویرآینه ای آن دارای یک اندازه و شکل هستند. اگر Ω_m انعکاس دیگری باشد، آنگاه $\Omega_m \Omega_L \tau$ و τ نیزهم اندازه وهم شکل هستند.



قابلیت انطباق و ایزومتری

- مشاهده نشان میدهد که بایک حرکت "صلب" پیکره τ در صفحه، این پیکره را می توان بر $\Omega_m\Omega_L\tau$ منطبق کرد. خاصیت کلیدی برای ارائه تعریف دقیق مفاهیم شهودی اندازه، شکل وحرکت صلب این است که فاصله بین هر، نقطه بر τبرابراست بافاصله بین همتای این نقطه برپیکره $\Omega_m\Omega_L\tau$. مفهوم مجرد نگاشت حافظ فاصله باایزومتری را به صورت زیرتعریف می کنیم.
- نگاشت پوشای T از E^2 به E^2 رایک ایزومتری (یاحافظ فاصله) می گوییم اگربه ازای هر X و Y در E^2

$$d(TX, TY) = d(X, Y)$$

قابلیت انطباق و ایزومتری

- دوپیکره τ_1 و τ_2 راقابل انطباق میگوییم اگریک ایزومتری مانند T وجود داشته باشدبه طوری که $T\tau_1 = \tau_2$ در بخش قبل نشان دادیم که هر نگاشت انعکاس، یک ایزومتری است. اگر چه هر ایزومتری یک انعکاس نیست، ولی خواهیم دید هر ایزومتری حاصل ضرب (ترکیب) حداکثر سه انعکاس است. ازاین رو، انعکاس ها سازه های اساسی ایزومتریها هستند.
- هر ایزومتری T از E^2 به E^2، نگاشتی دوسویی است.

درواقع، اگر $TX = TY$، آنگاه

$$0 = d(TX,TY) = d(X,Y)$$

ولذا $X = Y$.

قابلیت انطباق و ایزومتری

بنابراین، نگاشت وارون T، یعنی T^{-1}، وجود دارد .

- قضیه 22 :

الف : اگرT و S ایزومتری باشند، آنگاه TS نیزیک ایزومتری است .

ب : اگر T یک ایزومتری باشد، T^{-1} نیزایزومتری است.

پ : نگاشت همانی I روی E^2 ایزومتری است .

این قضیه نشان می دهد که مجموعه ایزومتریهای روی E^2همراه با عمل ضرب (ترکیب) یک گروه است. این گروه راگروه ایزومتری E^2 می نامیم. وآن را با (E^2) I نشان می دهیم.

گروه تقارن

- فرض کنید τ پیکره ای در E^2 است. بآسانی دیده میشودکه

$$\varphi(\tau) = \{ T \in I(E^2) \mid T\tau = \tau \}$$

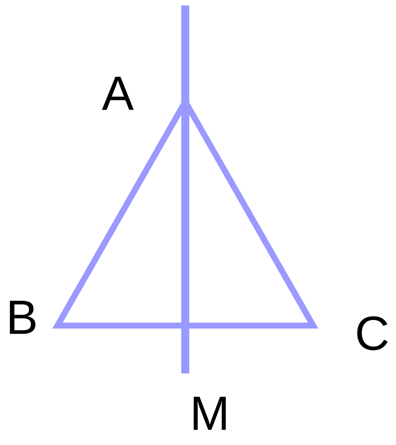
یک زیرگروه $I(E^2)$ است. این زیرگروه را گروه تقارن τ می نامیم. بزرگی مرتبه گروه تقارن τ،میزان تقارن پیکره τ راتعیین می کند.

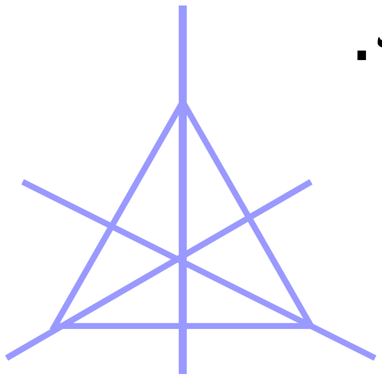
به عبارت دیگر، هرچه $\varphi(\tau)$ بزرگتر باشد، τمتقارنتراست

مثال: درفصل های بعدی نشان میدهیم که مرتبه گروه تقارن مثلث متساوی الاضلاع برابر 6 است.

گروه تقارن

واین گروه توسط انعکاایهای نسبت به هرمیانه مثلث تولید می شود. مرتبه گروه تقارن مثلث متساوی الساقین **ABC** برابربا 2 است، واین گروه توسط انعکاس نسبت به **AM** ، میانه **BC** ، تولید می شود. مرتبه گروه تقارن دایره نامتناهی است واین گرئه توسط انعکهسهای نسبت به قطرهای دایره تولید می شود.





انتقال

- آیا روش ساده ای برای توصیف خاصل ضرب دوانعکاس وجودداردد؟دراین بخش به این سوال، درحالتی که محورها دارای انعکاس موازی اند پاسخ مثبت می دهیم.
- درواقع، اگر m وn دوخط موازی باشند، آنگاه نقطه دلخواه p را بر m انتخاب می کنیم و پای عمود از p بر n را Q مینامیم. دراین صورت، اگر N بردار یکه قائم بر m باشد داریم :

$$\Omega_m(\Omega_n x) = x + 2(p - Q)$$

انتقال

- فرض کنید L خطی دلخواه و خطوط m و n بر L عمود باشند. تبدیل $\Omega_m\Omega_n$ راانتقال درامتداد L می نامیم.
اگر $n \neq m$، آنگاه این انتقال راغیربدیهی می نامیم .
روشن است که در E^2هردوخط عمودبریک خط L موازی اند. ازطرف دیگروقتی دو خط موازی اند، خطی عمود بر این دوخط وجود دارد.
- قضیه 23 : فرض کنید T انتقالی درامتداد L است. اگر L′ خطی موازی با L باشد، آنگاه T یک انتقال درامتداد L′ نیز است.

انتقال

قضیه زیرنشان می دهد که اثرهرانتقال درامتداد L این است که یک برداررراستای L رابربردارهای صفحه می افزاید.

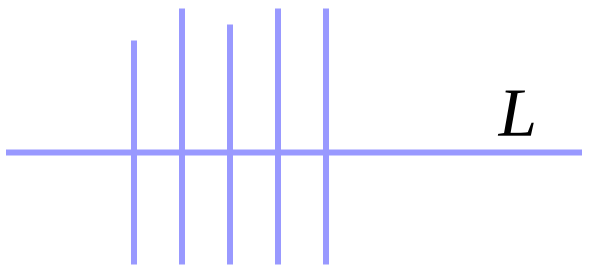
- قضیه 24 : فرض کنید T یک انتقال غیربدیهی درامتداد L است. دراین صورت، برداررراستایی L چون v داردبه طوری که به ازای هر $x \in E^2$

$$Tx = x + v$$

برعکس، اگر $v \neq 0$ هر بردار راستای خط L باشد، آنگاه نگاشت T یک انتقال درامتداد L است.

انتقال

- مجموعه خطوط عمود بر خط داده شده L در E^2 را یک دسته خطوط موازی می نامیم. خط L عمود مشترک این دسته نامیده می شود.



مشاهده کردیم که حاصل ضرب (ترکیب) دونعکاس نسبت به دو خط ازیک دسته خطوط موازی، یک انتقال درامتدادعمود مشترک این دسته است. حال ساختمان جبری مجموعه ایزومتریهای حاصل ازانعکاسهای نسبت به این خانواده موازی را مورد بررسی قرار می دهیم .

انتقال

- ابتدا مجموعه انتقال ها رابررسی می کنیم. انتقال های در امتداد L را با **TRANS (L)** نشان می دهیم.
- قضیه 25 : **TRANS (L)** یک گروه آبلی و یکریخت با گروه جمعی اعداد حقیقی است.
- فرض کنید P یک دسته خطوط عمود برخط L است. گروه تولید شده توسط همه انعکاسهای Ω_m، $m \in P$، را با **REF (P)** نشان می دهیم. به عبارت دیگر **REF (P)** کوچکترین زیرگروه $I(E^2)$ است به طوری که شامل همه Ω_mها می باشد. درنتیجه، **TRANS (L)** یک زیر گروه **REF (P)** است .

انتقال

- قضیه 26 (قضیه سه انعکاس) :

فرض کنید α و β و γ سه خط متعلق به دسته خطوط موازی P با عمود مشترک L هستند. دراین صورت خط δ متعلق به این دسته وجود دارد به طوری که:

$$\Omega_\alpha \Omega_\beta \Omega_\gamma = \Omega_\delta$$

انتقال

- یک انتقال داده شده را می توان به گونه های متفاوت به صورت حاصلضرب دو انعکاس نمایش داد. این مطلب را در قضیه زیرمی آوریم.
- قضیه 27 (قضیه نمایش انتقالها) : فرض کنید $T = \Omega_\alpha \Omega_B$ عضوی از TRANS (L) است. اگر m و n دوخط دلخواه عمود بر خط L باشند آنگاه دوخط منحصر به فرد مانند m′ و n′ وجود دارد

به طوری که:

$$T = \Omega_m \Omega_{m'} = \Omega_{n'} \Omega_n .$$

انتقال

- نتیجه: هرعضو متعلق به REF (P) انتقالی درامتداد L با یک انعکاس نسبت به خطی متعلق به P است .

$\times$	Ω_b	T_μ
Ω_a	$T_{2(a-b)}$	$\Omega_{a-\mu/2}$
T_λ	$\Omega_{b+\lambda/2}$	$T_{\lambda+\mu}$

انتقال

- فرض کنید v برداری در E^2 است. انتقال توسط v را با τ_v نمایش می دهیم و آن را به صورت

$$\tau_v x = x + v$$

تعریف می کنیم. (اگر $v = 0$ آنگاه $\tau_v = I$ انتقال همانی است)

- قضیه 28 : مجموعه $T(E^2)$ متشکل ازانتقالهای E^2 یک زیرگروه آبلی ازگروه $I(E^2)$ است.
- نتیجه:گروه $T(E^2)$ باگروه R^2، تحت جمع برداری، یکریخت است.

دوران

- فرض کنید $L = p + [v]$ خطی بابردارراستای یکه v است عدد حقیقی منحصر به فرد θ در بازه $[-\pi, \pi)$ وجود دارد به قسمی که

$$v = (\cos\theta, \sin\theta)$$

$$\Omega_L = \tau_p \, \Omega_{L0} \, \tau_{-p}$$

$$\Omega_{L0}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

دوران

- به عبارت دیگر، $\Omega_{L0} : R^2 \rightarrow R^2$ یک تبدیل خطی روی فضای برداری R^2 است. ماتریس نمایشگر این تبدیل خطی رابانماد ref θ نشان می دهیم.

$$\text{ref } \theta = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$$

این ماتریس، نمایشگرتبدیل انعکاس نسبت به خط گذرنده از مبدا با بردار راستای (cosθ,sinθ) است.

دوران

- اکنون جبر ماتریس انعکاسها را بررسی می کنیم. فرض کنید خط m نیزاز p بگذرد و m_0 خط گذرنده ازمبدا موازی با m باشد. دراین صورت، اگر(cosφ, sinφ) یک بردارراستای m باشد، آنگاه بآسانی دیده می شود که

$$\text{ref } \theta \text{ ref } \varphi = \begin{bmatrix} \cos 2(\theta - \varphi) & -\sin(\theta - \varphi) \\ \sin 2(\theta - \varphi) & \cos 2(\theta - \varphi) \end{bmatrix}$$

دوران

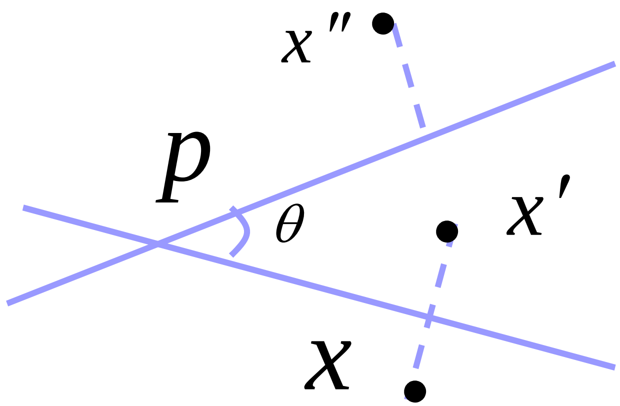
- ماتریس rot θ را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$\text{rot } \theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

- اگردوخط α و β ازنقطه p بگذرد، آنگاه ایزومتری $\Omega_\alpha\Omega_\beta$ را دوران حول p میگوییم. اگر β = α آن گاه نگاشت همانی دورانی حول هرنقطه دلخواه p متعلق به α است.

دوران

- اگردورانی نگاشت همانی نباشد، آن را دوران غیربدیهی می گوییم . اگر $\beta \perp \alpha$ ، دوران $\Omega_\alpha \Omega_\beta$ را یک نیم دور می نامیم.



- قضیه 29 : مجموعه دورانهای حول مبدا یک گروه آبلی ، به نمایش so (2) است.

دوران

- گروه $SO(2)$ را گروه متعامد خاص E^2 می نامیم.

- قضیه 30 :

الف : $(\text{ref}\ \theta)(\text{rot}\ \varphi) = \text{ref}(\theta - \varphi/2)$

ب : $(\text{rot}\ \theta)(\text{ref}\ \varphi) = \text{ref}(\varphi + \theta/2)$

پ: $(\text{ref}\ \theta)(\text{ref}\ \varphi)(\text{ref}\ \Psi) = \text{ref}(\theta - \varphi + \Psi)$

دوران

- قضیه 31 : مجموعه دورانهای حول مبدا همراه با انعکاس های نسبت به خطوط گذرنده ازمبدایک گروه است. این گروه راگروه متعامد می نامیم. وآن رابا (2) o نمایش می دهیم . So (2) یک زیرگروه باندیس (شاخص)2 در o (2) است .

×	ref φ	rot β
ref θ	rot 2(θ – φ)	ref (θ – β/2)
rot α	ref (φ + α/2)	rot (α + β)

دوران

- فرض کنید p نقطه ای دلخواه باشد. مجموعه P متشکل از همه خطوط گذرنده از p را دسته خطوط گذرنده از p مینامیم. زیرگروه تولید شده توسط مجموعه $\{ \Omega_L \mid L \in P \}$ در گروه $I(E^2)$ یعنی کوچکترین گروه ایزومتریهای شامل $\{ \Omega_L \mid L \in p \}$ را با $REF(p) = REF(p)$ نشان میدهیم مجموعه تمام دوران های حول p رابا $ROT(p)$ نمایش می دهیم.

دوران

- قضیه 32 : فرض کنید P دسته خطوط گذرنده ازنقطه p است دراین صورت :

$$ROT\ (p) \cong so(2)$$

$$REF\ (p) \cong o\ (2)$$

- قضیه 33 (سه انعکاس) فرض کنید α ، β وγ سه خط گذرنده ازنقطه p باشند دراین صورت خط منحصربه فرد σ گذرنده از p، وجوددارد به قسمی که :

$$\Omega_\alpha \Omega_\beta \Omega_\gamma = \Omega_\sigma$$

دوران

- قضیه 34 (نمایش دوران ها): فرض کنید $T = \Omega_\alpha \Omega_\beta$ عضوی از ROT (p) و L خطی گذرنده از p باشد.

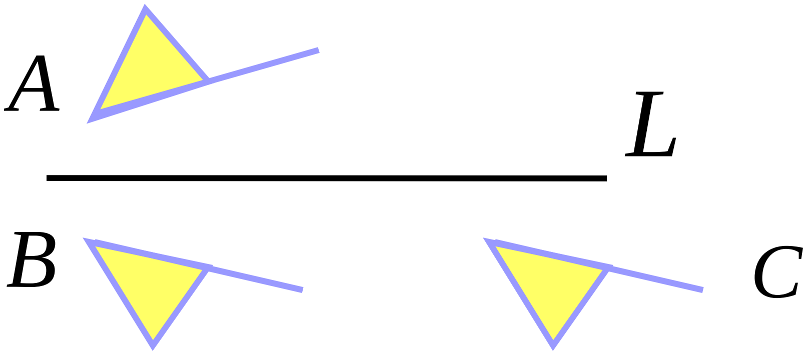
دراین صورت، خطوط منحصربه فرد m و m′ گذرنده از p، وجود دارند به طوری که

$$T = \Omega_L \Omega_m = \Omega_{m'} \Omega_L$$

انعکاس های لغزنده

- تاکنون سه نوع ایزومتری – انعکاس، انتقال ودوران رامعرفی کرده ایم. نوع چهارم ایزومتری، انعکاس لغزنده یابه طورخلاصه یک لغزه نام دارد. بنابه تعریف یک لغزه حاصل ضرب یک انعکاس و یک انتقال درامتداد محورانعکاس است.

به بیان دیگر، اگر Ω_L انعکاسی نسبت به خط L و τ_V انتقالی درامتداد L باشد، آنگاه $\tau_V\Omega_L$ رایک لغزه می نامیم.



انعکاس های لغزنده

- به طورصریح، اگر $L = p + [\,v\,]$ ، آنگاه لغزه حاصل از L و v عبارت است از :

$$\tau_v \Omega_L x = x - 2 < x - p, N > N + v$$

که درآن N برداریکه $\mathbf{v}^{\perp} / |\mathbf{v}|$ است. توجه می کنیم که

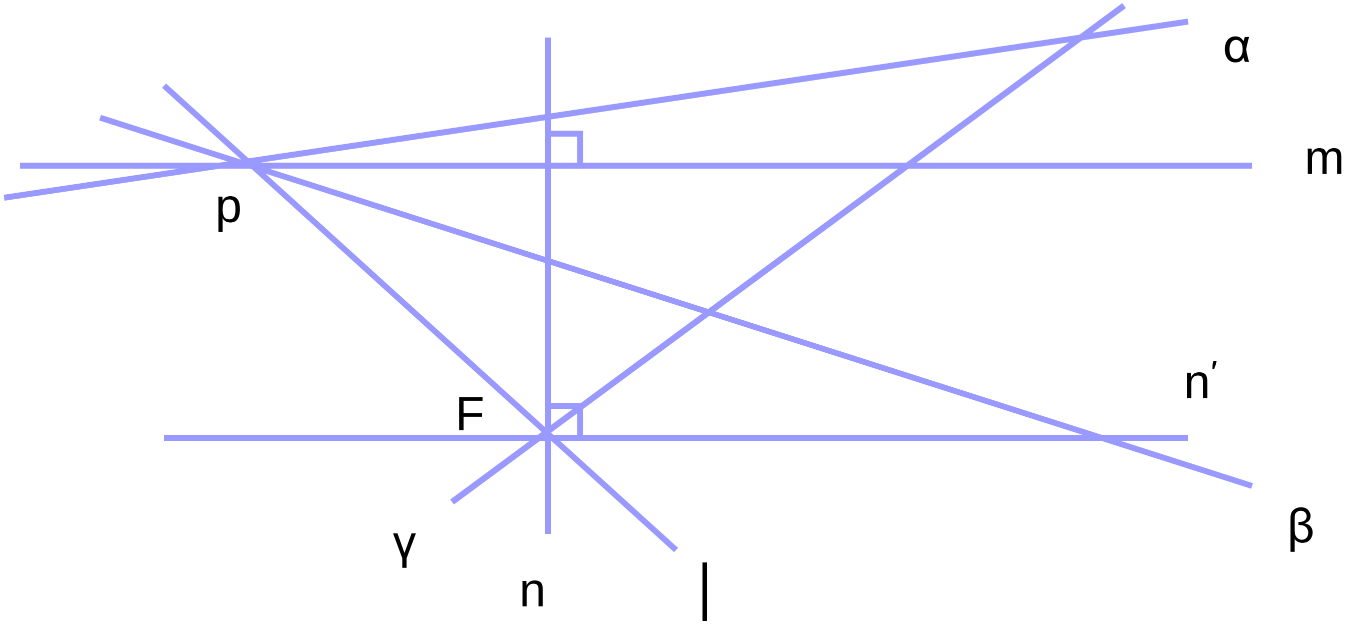
$$\Omega_L \tau_v \mathbf{x} = \tau_v \Omega_L x$$

لذا، انعکاس و انتقالی که یک لغزه را میسازند، باهم جابجا می شوند.

اینک حاصل ضرب انعکاسهای نسبت به سه خط دلخواه را مورد بررسی قرار می دهیم .

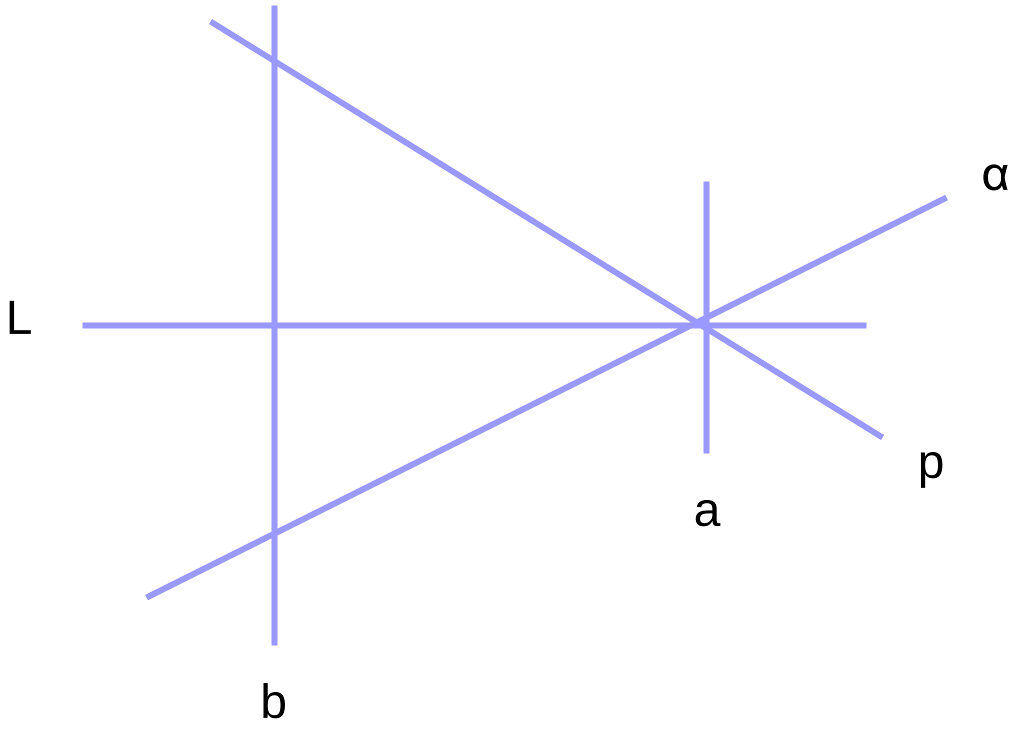
انعکاس های لغزنده

- قضیه 35 : فرض کنید α و β و γ سه خط متمایز هستند به طوری که متقارب با هم ودوبدو با هم موازی نیستند.در این صورت $\Omega_\alpha\Omega_\beta\Omega_\gamma$ یک لغزه غیربدیهی است.



انعکاس های لغزنده

- قضیه 36 : فرض کنید T یک لغزه و Ω_α یک انعکاس دلخواه است. دراین صورت $\Omega_\alpha T$ یک انتقال یا دوران است.



انعکاس های لغزنده

- هرایزومتری را که حاصل ضرب تعدادی متناهی انعکاس باشد یک حرکت می نامیم.

- قضیه 37 : هرحرکت را می توان به صورت حاصلضرب یک، دویا سه انعکاس نوشت.

- گروه حرکتها مرکب است ازهمه انتقالها، دورانها، انعکاس ها ولغزه ها .

ساختمان گروه ایزومتری

- قضیه 38 : هرایزومتری E^2 یک حرکت است.
- لم : اگر T یک ایزومتری باشد به طوری که $T(0) = 0$ آنگاه :

$$< Tx,Ty > = < x,y >$$

وبه ازای θ ای، $T = rot\ \theta$ یا $T = ref\ \theta$

نقاط و خطوط ثابت ایزومتریها

- p رایک نقطه ثابت ایزومتری T می گوییم اگر Tp = p قضیه زیردرمورد مجموعه نقاط ثابت ایزومتری هااست.
- قضیه 39 :

الف : یک انتقال غیربدیهی دارای نقطه ثابت نیست.

ب : یک دوران غیربدیهی دقیقا یک نقطه ثابت دارد. این نقطه ثابت مرکزدوران نامیده می شود.

پ : هرانعکاس خطی ازنقاط ثابت دارد. این خط محورانعکاس است.

ت : هرلغزنده غیربدیهی دارای نقطه ثابت نیست.

ث : همه نقاط صفحه، نقاط ثابت تابع همانی هستند.

نقاط و خطوط ثابت ایزومتریها

- نتیجه : مجموعه نقاط ثابت هرایزومتری برابربا یکی از مجموعه های زیر است :

الف : تک عضوی (دوران)

ب : یک خط (انعکاس)

پ : مجموعه تهی (انتقال یالغزه)

ت : تمام صفحه E^2 (همانی)

نقاط و خطوط ثابت ایزومتریها

- درفصل 2 میبینیم که اگر L یک خط و T یک ایزومتری باشد، آنگاه TL یک خط است. هر ایزومتری یک دوسویی $T : L_1 \to L_2$ روی مجموعه خطوط L به دست می دهد. اگر L خطی باشد که $TL = L$ آنگاه میگوییم که L یک خط ثابت T است. دسته بندی ایزومتریهای E^2 برحسب خطوط ثابت آنها مفید است.

نقاط و خطوط ثابت ایزومتریها

- قضیه 40 :

الف : هرانتقال غیربدیهی درامتداد خط L دسته ای موازی از خطوط ثابت دارد.

ب : هرنیمدوربه مرکز c دسته ای ازخطوط متقاربدرc راثابت نگه می دارد.

پ : خط m ودسته خطوط عمود برآن، خطوط ثابت انعکاس Ω_m هستند.

ت : تنها خط ثابت هرلغزه غیربدیهی، محورش است.

پایان

فصل دوم

تبدیل آفین در صفحه اقلیدسی

تبدیل آفین

- درفصل 1 دو جنبه اساسی هندسه را بررسی کردیم . یکی جنبه وقوع (برمبنای مفهوم همخطی) ودیگری جنبه متریک (برمبنای مفهوم فاصله) ایزومتریها تبدیل هایی هستند که این خصوصیات را حفظ می کنند. دراین فصل تبدیل هایی را مطالعه می انیم که وقوع راحفظ میکنند ولی لزوما حافظ فاصله نیستند. این بررسی را به دو دلیل انجام می دهیم. یکی این میخواهیم پیکره ها رابرحسب شکل آنها، به جای شرط قویتر قابلیت انطباق، دسته بندی

تبدیل آفین

- کنیم. به عنوان مثال، تبدیلهایی رامعرفی میکنیم که مثلثهای متشابه رامشخص می کنند. دلیل دوم، آسانتربودن محاسبات است. استفاده از خواص جبری معرف ایزومتریهای پر درد سرتر ازکارکردن با خواصی است که صرفا برمبنای وقوع ارائه می شوند.

تبدیل آفین

- تعریف : نگاشت دوسویی $T : E^2 \to E^2$ را یک هم خطی می گوییم هرگاه هرسه نقطه p، q، r واقع بریک خط رابر سه نقطه واقع بریک خط دیگربنگارد. وبرعکس یعنی، p ، q، r همخط باشند اگروتنهااگر Tp، Tq وTr همخط باشند.
- تعریف : نگاشت $T : E^2 \to E^2$ رایک تبدیل آفین میگوییم اگرماتریس 2×2 واورون پذیری مانند A وبرداری چون $b\in R^2$ وجود داشته باشد به طوری که، $\forall\ x\in R^2$:

$$Tx = Ax + b$$

تبدیل آفین

- تذکر: با توجه به اینکه هرایزومتری یک حرکت است، هر ایزومتری یک تبدیل آفین است.
- تذکر: درقضیه های زیرنشان می دهیم که دومفهوم همخطی وتبدیل آفین یکسانند.
- تذکر: ماتریس A وبردار b مذکوردرتعریف تبدیل آفین T به طوریگانه ای توسط T تعیین می شوند. درواقع $b = T(0)$ وبآسانی دیده می شود که، ستون های ماتریس A بردارهای

$$T\varepsilon_2 - b \quad , T\varepsilon_1 - b$$

تبدیل آفین

- هستند. ماتریس A راجزخطی T وبردار b راجزانتقالی T میگوییم.
- قضیه 1 : هرتبدیل آفین یک هم خطی است.
- نتیجه : هرایزومتری یک همخطی است.
- قضیه 2: هرهمخطی یک تبدیل آفین است.
- تذکر : ازاین پس، دراین فصل کلمه " همخطی " رامترادف با " تبدیل آفین " به کارمی بریم.

خط ثابت یک تبدیل آفین

- اگر T یک تبدیل آفین و L خط مفروضی باشد، آنگاه TL یک خط است. درقضیه زیرنشان می دهیم که چگونه TL برحسب داده های معرف T و L مشخص می شود.
- قضیه 3: فرض کنید T یک تبدیل آفین و L = p + [v] یک خط است. دراین صورت TL برابر با خط :

$$Tp + [Av]$$

است، که درآن ماتریس A جزخطی T می باشد.

خط ثابت یک تبدیل آفین

- نتیجه : فرض کنید T یک تبدیل آفین با جزخطی A و جز انتقالی b است. خط L = p + [v] یک خط ثابت T است اگروتنهااگر v یک بردارویژه A باشد و

$$(A - I)p + b \in [v]$$

خط ثابت یک تبدیل آفین

- قضیه 4 :

الف : اگردوخط ثابت تبدیل آفین T متقاطع باشند، آنگاه نقطه تقاطع آنها تحت T ثابت است.

ب : اگردوخط ثابت تبدیل آفین T موازی باشند، آنگاه هرخط متعلق به دسته خطوط موازی با این دو خط نیزتحت T ثابت است.

پ : اگردو خط موازی باشند، نگاره های آنها تحت هر تبدیل آفین نیزموازی اند.

گروه آفین AF(2)

- اکنون ترکیب تبدیل های آفین رابررسی میکنیم. اگر

$\tilde{T}x = \tilde{A}x + \tilde{b}$ و $Tx = Ax + b$

دوتبدیل آفین باشند، آنگاه

$$T\tilde{T}x = A(\tilde{A}x + \tilde{b}) + b$$

$$T\tilde{T}x = A\tilde{A}x + A\tilde{b} + b$$

گروه آفین AF(2)

- لذا، ترکیب دوتبدیل آفین یک تبدیل آفین، با جزخطی $A\tilde{A}$ وجزانتقالی $A\tilde{b} + b$ است. روشن است که اگر $\tilde{A} = A^{-1}$ و $\tilde{b} = -A^{-1}b$ آنگاه $T\check{T} = I$ پس هرتبدیل آفین وارون پذیراست، واگر $Tx = Ax + b$، آنگاه

$$T^{-1}x = A^{-1}x - A^{-1}b$$

این مطاب نشان می دهد که مجموعه تبدیلهای آفین روی R^2 تحت ترکیب یک گروه تشکیل می دهد.

گروه آفین AF(2)

- قضیه 5 : مجموعه همه تبدیلهای آفین روی R^2 تحت عمل ترکیب توابع آفین یک گروه است . این گروه را گروه آفین R^2 مــــی نـــــامیم وآن رابــــا **AF(2)** نشـــــان مـــــی دهـــــیم.
هرعضو **AF(2)** را میتوان توسط یک ماتریس نشان داد .

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

گروه آفین AF(2)

- حال اگر $Tx = y = Ax + b$، آنگاه بآسانی دیده می شود که معادله ماتریس

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- برقراراست. همچنین، عمل ترکیب درتبدیل آفین درگروه AF(2) متناظرباحاصلضرب ماتریسهای 3×3 متناظر با این تبدیل ها.

گروه آفین AF(2)

- لذا، اگر GL(3) گروه ماتریس های 3×3 وارون پذیرباشد، آنگاه AF(2) رامی توان به عنوان یک زیر گروه GL(3) درنظرگرفت
این نمایش تبدیلهای آفین را میتوان به صورت ساده و بلوکی

$$T = \begin{bmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نوشت.

قضیه اساسی هندسه آفین

- هندسه آفین حقایقی را درمورد E^2 دربرمی گیرد که تنها به خواص وقوع بستگی دارند ، ولی به تعامد و فاصله وابسته نیستند. اگر چه هندسه آفین خود مبحث حالی است، ولی در اینجا جنبه هایی از این هندسه مورد نظراست که برای حل مسائل قابلیت انطباق و تقارن شکلها به کارمی روند. قضیه اساسی هندسه آفین بیان می کند که متناظر با هر دو مثلث داده شده، یک تبدیل آفین منحصر به فرد می توان یا فت به طوری که این دومثلث را در رابطه با یکدیگر قرار می دهد .

قضیه اساسی هندسه آفین

- قضیه 6 : فرض کنید p و q دونقطه و T یک تبدیل آفین است.
  دراین صورت،

الف : $\forall\, t \in R$

$$T(\,(\,1 - t\,)p + tq\,) = (\,1 - t\,)Tp + tTq$$

ب : نقطه x میان p و q واقع است یعنی

$$(\,x = (\,1\text{-}t\,)p + tq\;,\; 0<t<1\,)$$

اگرو تنها اگر Tx میان Tp و Tq باشد. بعلاوه

$$\frac{d(p,q)}{d(p,q)} = \frac{d(Tp,Tx)}{d(Tp,Tq)}$$

قضیه اساسی هندسه آفین

- قضیه 7 :

اگرتبدیل آفین T، دو نقطه متمایز را ثابت نگه دارد، آنگاه T همه نقاط خط گذرنده ازاین دونقطه راثابت نگه می دارد.

ب : اگرتبدیل آفین T سه نقطه ناهمخط راثابت نگه دارد، آن گاه T تبدیل همانی است.

اکنون قضیه اساسی هندسه آفین را بیان می کنیم.

قضیه اساسی هندسه آفین

- قضیه 8 (قضیه اساسی آفین) :
- به ازای هردو مثلث PQR و P′Q′R′ تبدیل آفین منحصربه فرد T وجود دارد به طوری که :

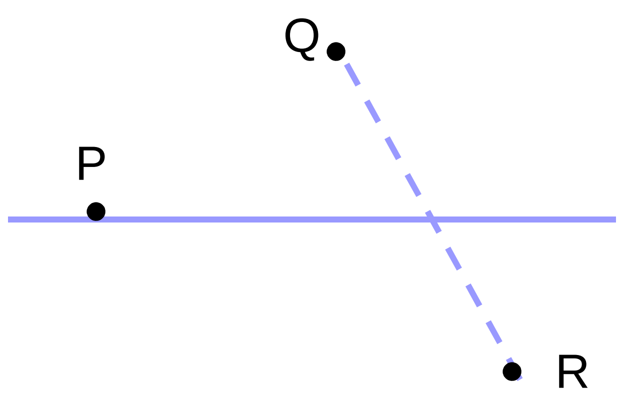
$$TR = R' \quad و \quad TQ = Q' \quad و \quad TP = P'$$

انعکاس آفین

- فرض کنید نقاط P ، Q ، R درصفحه E^2 همخط نیستند. تبدیل منحصر به فرد T را، به طوری که P را ثابت نگه میدارد ولی Q و R رابا هم جابجا میکند (قضیه اساسی) یک انعکاس آفین می نامیم. این تبدیل آفین رابا نماد

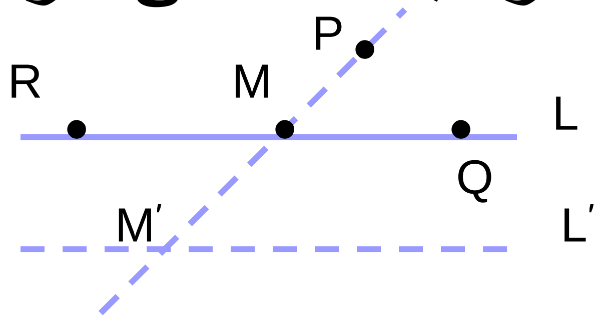
$$[P ; Q \leftrightarrow R]$$

نمایش می دهیم.



انعکاس آفین

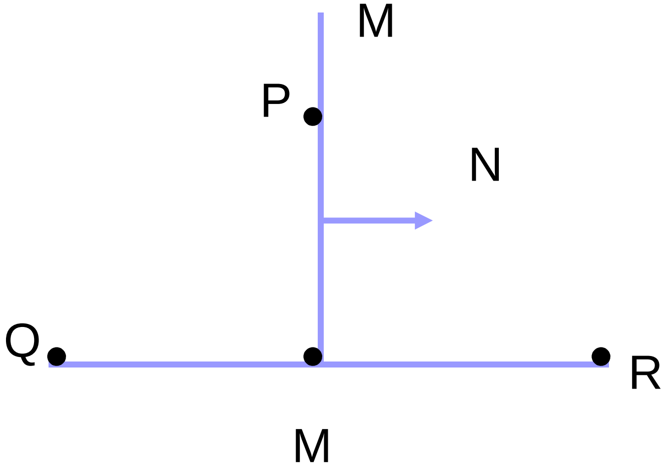
- بزودی می بینیم که هر انعکاس آفین لزوما یک ایزومتری نیست (قضیه11) ولی، انعکاسهای آفین دربرخی ازخواص انعکاسهای معمولی سهیم هستند.
- قضیه 9 : فرض کنیم M نقطه وسط پاره خط QR و P نقطه ای ناهمخط با QوR است. دراین صورت، انعکاس آفین $[P ; Q \leftrightarrow R]$
همه نقاط خط $\overleftrightarrow{PM}$، وتنها این نقاط، راثابت نگه می دارد



انعکاس آفین

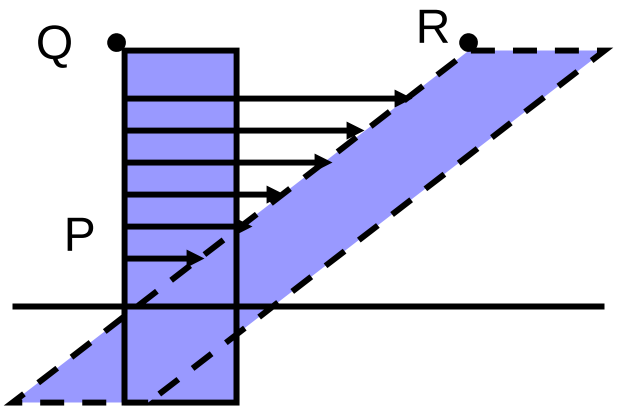
- قضیه 10 : انعکاس آفین T = [P ; Q ↔ R] خط $\overleftrightarrow{PM}$ وهر خط موازی با $\overleftrightarrow{QR}$ و تنهااین خطوط، راثابت نگه می دارد.
- قضیه 11 : انعکاس آفین T = [P ; Q ↔ R] یک ایزومتری است اگروتنهااگر

$$\overleftrightarrow{PM} \perp \overleftrightarrow{QR}$$



قیچی

- با استفاده ازقضیه اساسی آفین، می توانیم دسته های دیگری ازتبدیل های آفین راتعریف کنیم. فرض کنیم P، Q، R سه نقطه نا همخط هستند. تبدیل آفین منحصربه فردی را که هر نقطه بر خط گذرنده از P و موازی با $\overleftrightarrow{QR}$ را ثابت نگه می دارد و Q رابر R می نگارد، یک قیچی می نامیم وآن رابا [P ; Q → R] می دهیم.



قیچی

- قضیه 12 : مجموعه نقاط ثابت قیچی $[P ; Q \to R]$ برابربا خط گذرنده از P وموازی با $\overleftrightarrow{QR}$ است. مجموعه خطوط ثابت این قیچی، دسته خطوط موازی با QR است.

- تذکر : خط متشکل ازنقاط ثابت یک قیچی T را محورآن می نامیم.

قیچی

- قضیه 13 : قیچی T که نقاط ثابت آن محور x_1 (محور x) باشد، ماتریس به صورت زیردارد.

$$s_\lambda = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- تذکر :

الف : هرماتریس به صورت s_λ، $\lambda \neq 0$، متناظربایک قیچی است.

ب : اگر T یک قیچی بامحور L و p یک تبدیل آفین باشد، آن گاه $p^{-1} \top p$ یک قیچی بامحور pL است.

قیچی

- اگرمحور قیچی T خط افقی گذرنده از نقطه p باشد، آنگاه

$$Tx = p + s_\lambda (x - p)$$

واگرمحور T ازمبدا بگذرد ودرراستای

$$(\cos\theta , \sin\theta) = (\mathrm{rot}\theta)\varepsilon_1$$

باشد، آنگاه

$$Tx = (\mathrm{rot}\theta)\, s_\lambda (\mathrm{rot}(-\theta)\, x)$$

ولذا هرقیچی بامحور $p + [(\mathrm{rot}\theta)\varepsilon_1]$ میتوان بصورت

$$Tx = p + (\mathrm{rot}\theta) s_\lambda (\mathrm{rot}(-\theta))(x - p)$$

نوشت، که درآن $\lambda \neq 0$ عددی حقیقی است.

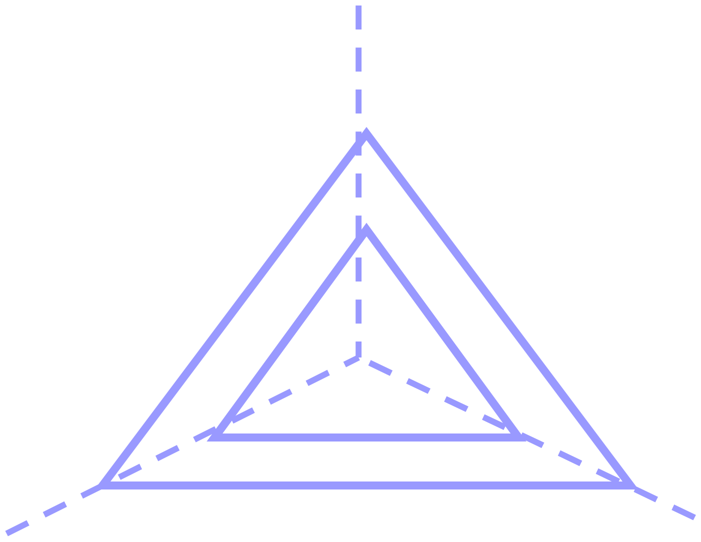
تجانس

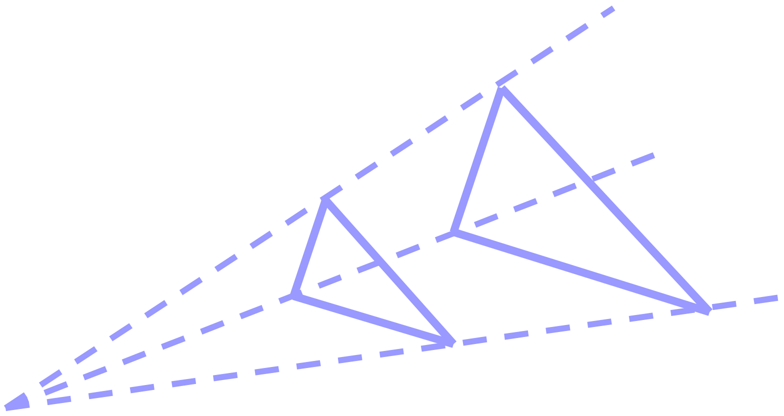
- تبدیل آفین T یک تجانس نامیده می شود اگربه ازای هرخط L، L = TL یا L || TL، نگاشت همانی را تجانس بدیهی می گوییم.

- قضیه 14 : تجانسی که دونقطه را ثابت نگه دارد، تجانس همانی نامیده می شود.

تجانس

- تذکر : بنا بر قضیه 14، هر تجانس غیربدیهی حداکثر یک نقطه ثابت دارد. تجانس را که دقیقا یک نقطه ثابت داشته باشد، یک تجانس مرکزی، ونقطه ثابت آن را مرکز تجانس می نامیم.





تجانس

- قضیه 15 :

الف : هرتجانس مرکزی با مرکز C را می توان به صورت :

$$Tx = C + K(x – c)$$

نوشت. عدد | k | را ضریب تجانس می نامیم.

ب : تجانسی که هیچ نقطه ثابت ندارد انتقال است.

- قضیه 16:خطوط ثابت یک تجانس مرکزی دقیقاخطوطی هستند که ازمرکزتجانس می گذرند.
- تذکر : هرنیمدور، یک تجانس مرکزی با K = -1

تشابه

- نگاشت $T : E^2 \rightarrow E^2$ رایک نگاشت تشابه (با ضریب تشابه $K>c$) مینامیم اگر، به ازای هر x و y در E^2 ،

$$d(Tx,Ty) = kd(x,y)$$

قضیه زیرنشان میدهد که دردومرحله میتوان شیئی مشابه با شی دیگر به دست آورد ابتدا، با یک تجانس مرکزی اندازه رابه دست می آوریم. و سپس بایک ایزومتری این شیئی را به محل مناسب حرکت می دهیم.

تشابه

- قضیه 17: هرتشابه، ترکیب یک تجانس مرکزی بایک ایزو متری است. به ویژه، هرتشابه یک تبدیل آفین است.
- قضیه 18:

الف : اگر T_1 و T_2 دوتشابه، به ترتیب، باضرایب تشابه k_1 و K_2 باشند آنگاه T_1T_2 یک تشابه باضریب تشابه k_1k_2 است.

ب: اگر T یک تشابه باضریب k باشد، آنگاه T^{-1} یک تشابه با ضریب تشابه 1/k است.

تشابه

- نتیجه : مجموعه تشابه های روی E^2 همراه با ترکیب توابع یک گروه تشکیل می دهد این گروه را با **Sim (E^2)** نشان می دهیم.

- دو پیکره $Д_1$ و $Д_2$ را متشابه میگوییم اگرنگاشت تشابه T وجود داشته باشد به طوری که

$$T\,Д_1 = Д_2$$

تقارن آفین

- فرض کنید д یـک پیکره است. تبدیل آفین کـه д راثابـت نگـه مـی دارد، یـک تقـارن آفین д میـنـامیم. مجموعـه همـه تقارنهای д یـک گروه تشکیل مـی دهد. ایـن گروه را گروه تقارن های آفین д می نامیم و آن رابا نماد

$$A\,I(\text{д}) = \{\, T \in AF(2) \mid T\,\text{д} = \text{д} \,\}$$

نشان میدهیم. چون هرایزومتری یک تبدیل آفین است پس :

$$I(\text{д}) \subseteq A\,I(\text{д}) \subseteq AF(2)$$

تقارن آفین

- دربخش بعدی، چار چوبی برای دسته بندی تقارن های آفین کلاس وسیعی ازپیکره ها ارائه میدهیم.
- قضیه 19 : فرض کنید پیکره д تنها شامل یک نقطه باشد. دراین صورت :

$$AI(д) \cong GL(2)$$

که درآن **GL (2)** گروه ماتریسهای 2×2 وارون پذیر است.

تقارن آفین

- قضیه 20 : فرض کنید پیکره π مجموعه ای شامل دونقطه باشد. دراین صورت، $AI(\pi)$ باگروه ماتریسهای 2×2 به صورت:

$$\begin{bmatrix} \pm 1 & \lambda \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$$

که درآن $\mu \neq 0$، یکریخت است.

تقارن آفین

- تذکر : اگردراین قضیه بنویسیم

$$T^{-}_{\lambda,\mu} = \begin{bmatrix} -1 & \lambda \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, T^{+}_{\lambda,\mu} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$$

آنگاه می توان نشان داد که مجموعه $T^{+}_{\lambda,\mu}$ ها یک زیر گروه $AP(\pi)$ است. برخی دیگر از زیر مجموعه های جالب این گروه عبارتند از :

تقارن آفین

الف : گروه $I(\Pi)$ که توسط $\lambda = 0$ ، $\mu = \pm 1$ تعیین میشود.

ب : گروه $\{ T^{+}_{\lambda\mu} \mid \mu = 1 \}$ متشکل از همانی وقیچیهایی که در نقطه داده شده در Π راثابت نگه می دارند.

پ : مجموعه $\{ T^{+}_{\lambda\mu} \mid \mu = -1 \}$ متشکل ازانعکاس های آفین که این دونقطه راثابت نگه می دارند.

ت : گروه $\{ T^{+}_{\lambda\mu} \mid \lambda = 0, \mu > 0 \}$ متشکل ازهمانی وکشش های درامتداد محور X_2 (محور y)

تقارن آفین

- تذکر : پس ازمطالعه هندسه تصویری خواهیم دید که این تبدیل ها همتای آفینی همخطی تصویری هستند به طوری که نقاط یک خط راثابت نگه می دارند. درهندسه تصویری، این نگاشتها به دو نوع تقسیم می شوند : همانستگی (مانستگی یاهمولوژی وبالابری)

نیمخط وزاویه

- فرض کنیم p نقطه ای متعلق به E^2 و v برداری غیرصفر باشد. در این صورت،

$$R = \{ p + tv \mid t \geq 0 \}$$

رایک نیمخط با مبدا p وبرداراراستای v می نامیم.

اکنون اندازه زاویه را تعریف می کنیم.

- فرض کنید u و v بردارهای یکه راستای اضلاع زاویه A هستند اندازه A برحسب رادیان رابرابربا :

$$\alpha = \cos^{-1} < u,v >$$

تعریف می کنیم.

نیم خط و زاویه

- تذکر : اگر $u = (\cos\theta, \sin\theta)$ و $v = (\cos\Phi, \sin\Phi)$ ، آنگاه α، برحسب رادیان، عدد یکتایی درفاصله $[0, \pi]$ است به طوری که :

$$(rot\alpha)v = u \quad \text{یا} \quad (rot\alpha)u = v$$

به عبارت دیگر، دورانی به اندازه α رادیان یک ضلع A را برضلع دیگر آن می نگارد.

نیم خط و زاویه

- قضیه 21 : فرض کنید A یک زاویه باشد. دراین صورت α، اندازه A برحسب رادیان برابر است با :

الف : 0 اگروتنهااگر A زاویه صفر باشد.

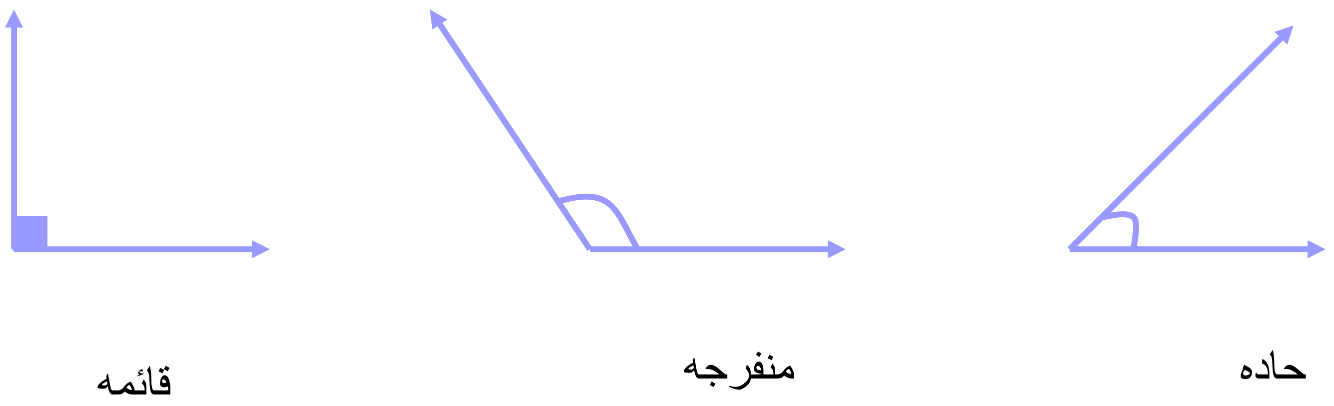
ب : π اگروتنهااگر d یک زاویه نیم صفحه باشد.

پ : درغیراین صورت، بین 0 و π است.

به علاوه، $\alpha = \pi/2$ اگروتنهااگر A قائمه باشد.

نیم خط و زاویه

- تعریف: زاویه A راحاده می گوییم اگراندازه آن برحسب رادیان کمتر از π/2 باشد زاویه A را منفرجه می گوییم اگراندازه آن برحسب راذیان بیشتراز π/2 باشد.



نیم خط و زاویه

- قضیه 22 : فرض کنید $A = \angle PQR$ دراین صورت :

الف : $\angle PQR$ حاده است. اگروتنهااگر < P – Q,R – Q > مثبت باشد.

ب : $\angle PQR$ منفرجه است اگروتنهااگر < P –Q,R – Q > منفی باشد.

نیم خط و زاویه

- تعریف : فرض کنید A زاویه ای باراس P واندازه α رادیان است. اگر u و v بردارهای یکه راستای اضلاع A باشند به طوری که

$$(rot\alpha)u = v$$

آنگاه نیمخط با مبدا P وبرداررراستای **$(rot\ \alpha/2\ )u$** رانیمساز A می نامیم.

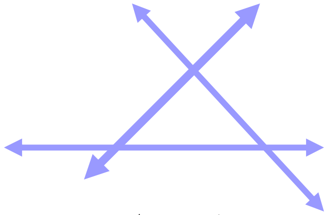
نیم خط و زاویه

- تذکر : هرزاویه نیم صفحه دونیمساز و هرزاویه دیگرتنها یک نیمساز دارد.

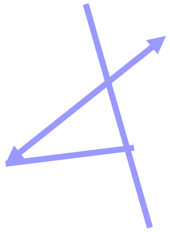
- قضیه 23 : به ازای هر زاویه A یک انعکاس منحصر به فرد وجود دارد به طوری که اضلاع این زاویه راتعویض می کند، وآن انعکاس است نسبت به خط حامل نیمساز A.

نیم خط و زاویه

- تعریف : فرض کنیم Д پیکره ای خطی است. پیکره Д^ متشکل ازخطوطی که خطوط پاره خط هابا نیم خط های Д راشامل می شوند راکمال خطی Д می نامیم.
پیکره خطی Д را کامل می گوییم اگربه ازای هر پاره خط متعلق به Д، خط حامل این پاره خط نیزدر Д باشد. دراین صورت، روشن است که Д^ کوچکترین پیکره خطی کامل است که Д راشامل می شود.



کمال خطی



نیم خط و زاویه

- قضیه 24 : فرض کنید T یـک تبدیل آفین و Д یـک پیکره بـا شـد. در ایـن صـورت T تنـاظری دوسـوئی ازمجموعـه خطوط Д^ به مجموعه خطوط T^Д برقرارمی سازد.

- نتیجه : فرض کنید T یـک تقارن آفین پیکره خطـی Д است. دراین صورت T تناظری دوسویی روی Д^برقرارمی سازد

نیم خط و زاویه

- تعریف : فرض کنید Д پیکره ای خطی است. هرنقطه Д را که محل تلاقی دوخط متعلق به ^Д باشد، یک راس Д می نامیم .
- قضیه 25 : اگر Д پیکره ای خطی و T یک تبدیل آفین باشد، آنگاه T تناظری دوسویی بین مجموعه راسهای Д و مجموعه راس های TД برقرارمی سازد. اگر T یک تقارن آفین Д باشد، آنگاه T تناظری دوسویی بین راسهای Д به دست می دهد.

نیم خط و زاویه

- نتیجه :

الف : هرتقارن آفین T روی یک پیکره خطی д، تقارن آفین д^ نیز هست.

ب : هرتقارن آفین یک پیکره خطی д تناظری دوسویی روی مجموعه راسهای д^ که رئوس д برقرار می سازد.

نیم خط و زاویه

- نتیجه : اگر Д پیکره ای خطی با حداقل سه راس غیرواقع بر یک خط باشد. آنگاه گروه (Д)Al متناهی است.

- تذکر : اگر همه راسهای یک پیکره خطی Д همخط باشند، گروه (Д)Al نیز متناهی است . پیکره های کامل ازاین نوع رادرفصل 3 به طورصریح توصیف می کنیم.

مرکز هندسی

- فرض کنید F مجموعه ای متناهی ازنقاط E^2 باشد. به ازای $x \in E^2$ تعریف می کنیم

$$f(x) = \sum_{P \in F} d(x,p)^2$$

- قضیه 26 : فرض کنید F مجموعه ای متناهی ازنقاط E^2 است. نقطه منحصر به فردی در E^2 وجود دارد به طوری که مقدار تابع f درآن نقطه مینیمم است. این نقطه را مرکز هندسی F می نامیم.

مرکز هندسی

- تذکر : اگر д پیکره ای خطی باتعدادی متناهی راس باشد معمولا مرکزهندسی مجموعه راس های д را مرکزهندسی д می نامیم.
- قضیه 27 : فرض کنید д پیکره ای خطی باتعدادی متناهی (حداقل یک) راس است. فرض کنید c مرکز هندسی д می باشد. دراین صورت، به ازای هرایزومتری T، Tc مرکز هندسی Tд است.
- نتیجه : اگر T یک تقارن پیکره خطی д باشد و д تعدادی متناهی راس داشته باشد، آنگاه T مرکز هندسی д را ثابت نگه می دارد.

تقارنهای یک پاره خط

- فرض کنید PQ یک پاره خط است. گروه تقارن های پاره خط PQ یعنی (PQ) I رامحاسبه می کنیم. می دانیم که هرتبدیل آفین T پاره خط PQ رابر پاره خطی چون P′Q′ می نگارد، که درآن P′ = TP و Q′ =TQ نخست نشان می دهیم که T جایگشتی روی { P,Q } است.
- لم : هرپاره خط توسط نقاط انتهایی اش مشخص می شود، اگر PQ و P′Q′ نمایش یک پاره خط باشند، آنگاه

$$\{ P'Q' \} = \{ PQ \}$$

تقارنهای یک پاره خط

- دوایزومتری وجوددارند که نقاط مجموعه { P,Q } راثابت نگه می دارند : انعکاس Ω_L با محور PQو نگاشت همانی. ازطرف دیگر، دقیقا دو ایزومتری وجود دارند که P و Q راتعویض می کنند.
- جدول ضرب این گروه به صورت روبرو است

×	I	Ω_L	Ω_m	H_M
I	I	Ω_L	Ω_m	H_M
Ω_L	Ω_L	I	H_M	Ω_m
Ω_m	Ω_m	H_M	I	Ω_L
H_M	H_M	Ω_m	Ω_L	I

تقارنهای یک پاره خط

- گروه مجردی که جدول ضرب آن را در اسلاید صفحه قبل آمده است گروه کلاین می نامیم. این گرو دارای دو انعکاس یک نیمدور و نگاشت همانی است.
- قضیه 28 : گروه تقارن های یک پاره خط چهارعضودارد ، دوانعکاس یک نیمدور وجایگشت همانی که جدول ضرب این گروه در اسلاید صفحه قبل آمده است .

تقارن های زاویه ای

- فرض کنید A زاویه ای غیرنیم صفحه است دراین بخش گروه تقارن A یعنی I(A) را تعیین می کنیم.
- لم : فرض کنید A زاویه ای با راس p است اگر آفین T روی A هردو خط متعلق به A^ را ثابت نگه دارد آنگاه اضلاع A را ثابت نگه می دارد .

تقارن های زاویه ای

- تذکر : اگر A یک زاویه نیم صفحه باشد، یک خط است. اگر A زاویه صفربباشد، یک نیم خط است.

- قضیه 29 : فرض کنید T یک تقارن آفین زائیه A است در این صورت T جایگشتی روی دو ضلع A است.

- تذکر : اگر A زاویه صفر باشد، T تنها ضلع A را ثابت نگه می دارد.

تقارن های زاویه ای

- نتیجه : $I(A)$ دارای دوعضو Ω_m و I است که درآن m خط حامل نیم ساز زاویه A است .

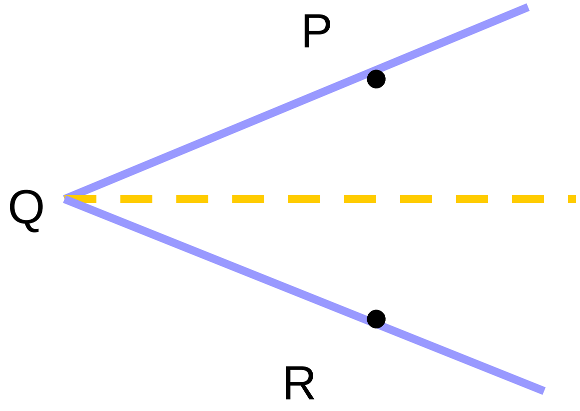
- تذکر : اگر r یک نیمخط باشد، آنگاه $I(r)$ دوعضو دارد ، انعکاس نسبت به r ونگاشت همانی .

تقارن های زاویه ای

- قضیه 30 : زاویه PQR ∠ را درنظر می گیریم اگر

$$d(P,Q) = d(Q,R)$$

و m خط حامل نیمساز زاویه PQR ∠ است دراین صورت Ω_m دو نقطه P و R را با هم تعویض می کند و Q را ثابت نگه می دارد .



مختصات مرکزثقلی

- فرض کنید **P** و **Q** و **R** سه نقطه غیر واقع بر یک خط هستند . به ازای هر نقطه $x \in E^2$، سه تایی منحصربه فرد (λ,u,v) ازاعداد حقیقی وجود دارد، به طوری که :

$$X = \lambda p + \mu Q + VR$$

و $\lambda + \mu + V = 1$ تناظر

$$X \rightarrow \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \\ v \end{bmatrix}$$

را یک دستگاه مختصات مرکز ثقلی و **PQR** را مثلث مرجع این دستگاه می نامیم.

مختصات مرکزثقلی

- تذکر :

الف : مفهوم فوق تعمیم این مطالب است که هرنقطه خط PQ را می نوان به طور یکتا به صورت $\mu Q + \lambda p$ نوشت ، که درآن $\lambda + \mu = 1$

ب : خواهیم دید که مولفه های مختصات مرکز ثقلی، یعنی λ، μ و v بامحل نقطه x نسبت به مثلث مرجع PQR رابطه نزدیکی دارند.

مختصات مرکزثقلی

پ : مختصات مرکزثقلی دارای تعبیرفیزیکی است. اگروزنه هایی به وزن های λ، μ و V به ترتیب، در **P**، **Q** و **R** دهیم ، آنگاه مرکز ثقل پیکره حاصل درنقطه X است. همان گونه که در بند الف بیان شد، این مطلب درمورد یک خط نیز صادق است.

مختصات مرکزثقلی

- قضیه 31 : فرض کنید **PQ** یک خط و **R** نقطه ای خارج آن باشد. با درنظرگرفتن **PQR** به عنوان مثلث مرجع، به ازای هرنقطه x، بامختصات مرکز ثقلی λ، μ و v داریم :

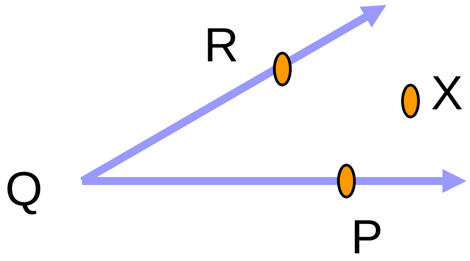
الف : $v = 0$ اگروتنهااگر x بر PQ واقع باشد.

ب : $v > 0$ اگروتنهااگر $\varnothing = PQ \cap XR$.

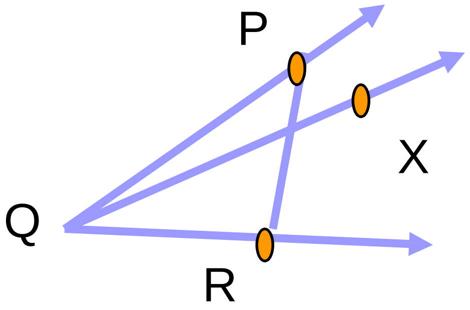
تذکر : وقتی دونقطه دریک نیم صفحه هستند، می گوییم دریک طرف L قرار دارند. نقاط بردو نیم صفحه متقابل را نقاط واقع در طرفین L می گوییم.

مختصات مرکزثقلی

- تعریف : می گوییم نقطه $x = \lambda p + \mu Q + VR$ دردرون زاویه $\angle PQR$ است اگر $\lambda > 0$ و $v > 0$

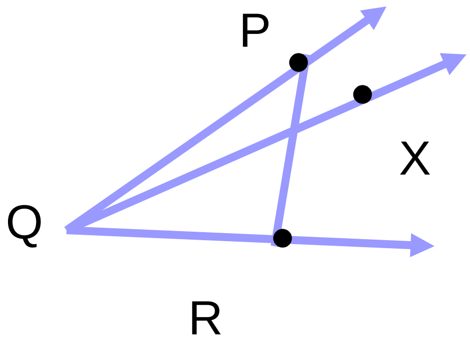


- تذکر:تعریف فوق به این معنی است که **x** و **R** دریک طرف خط PQ و x و p دریک طرف خط QR قرار دارند.



مختصات مرکزثقلی

- قضیه 33 : اگر X نقطه ای دردرون زاویه PQR∠ باشد، آنگاه نیم خط QX پاره خط PR را قطع می کند.

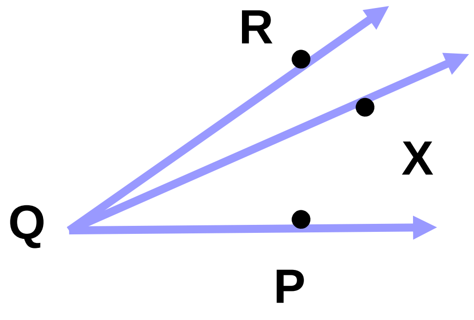


جمع زاویه ها

- قضیه 34 :

الف : زاویه $\angle PQR$ ونقطه X رادرون آن درنظر می گیریم. اندازه زاویه $\angle PQR$(برحسب رادیان) مجموع اندازه های $\angle PQX$ و $\angle RQX$ است.

ب : اگر $\angle PQR$ یک زاویه نیم صفحه X نقطه ای خارج خط $\overleftrightarrow{PQ}$ باشد آنگاه مجموع زاویه های $\angle PQR$ و $\angle RQX$ برابر با π رادیان است.



مثلث

- فرض کنید P، Q، R سه نقطه غیرواقع بریک خط در E^2 هستند. مثلث PQR (گاهی می نویسیم **Δ PQR**) پیکره خطی (مستقیم الخط) متشکل از پاره خطهای PQ، QR، PR است. این پاره خطها راضلع های این مثلث می گوییم.

مثلث

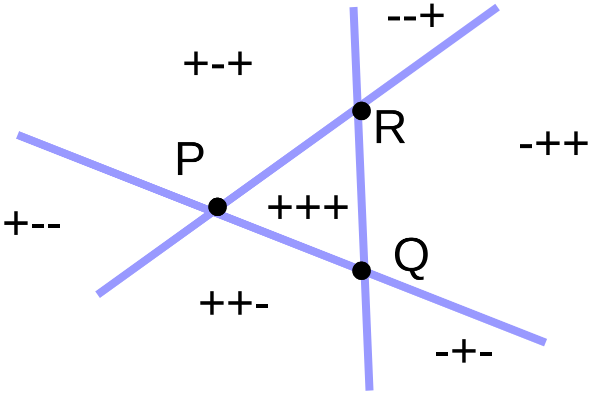
- قضیه 35 : اگرمثلث PQR رابه عنوان مثلث مرجع برای دستگاه مختصات مرکزثقلی درنظر بگیریم. آنگاه داریم :

الف : نقطه $X \in E^2$ یک راس ΔPQR است اگروتنهااگر دومختص مرکزثقلی صفر باشند.

ب : نقطه X برپیکره ΔPQR است اگر X یک راس باشد یا یکی از مختصات X برابر باصفر وودوتای دیگر مثبت باشند.

مثلث

- تعریف : می گوییم نقطه X دردرون ΔPQR واقع است اگردر درون هرسه زاویه این مثلث باشد.
- تذکر : نقطه X دردرون ΔPQR است اگروتنهااگر هر سه مختص آن مثبت باشند شکل زیر نشان می دهد که صفحه مختصات، برحسب علامتهای مختصات ثقلی λ، μ و ν به هفت ناحیه تقسیم می شوند.



مثلث

- قضیه 36 : هر تبدیل آفین T مثلث ΔPQR را بر مثلث $\Delta P'Q'R'$ می نگارد، که درآن :

$$P' = TP \text{ ،} Q' = TQ \text{ و } R' = TR$$

تقارن های مثلث

- اگر T یک تقارن آفین مثلث Δ باشد، آنگاه T روی مجموعه راسهای Δ یک جایگشت است. برعکس، بنا به قضیه اساسی هندسه آفین، هرجایگشت راسهای مثلث Δ یک تبدیل آفین منحصر به فرد به دست می دهد. درنتیجه، $AI(\Delta)$ گروهی با شش عضو، به نام گروه متقارن وبه نمایش S_3 است. این گروه را، به طور جبری، می توانیم توسط $\{ I , \alpha , \alpha^2 , \beta , \alpha\beta , \alpha^2\beta \}$ نمایش دهیم،

تقارن های مثلث

- که درآن $\beta\alpha = \alpha^2\beta$ و $\alpha^3 = I$ به عبارت دیگر، α، β جایگشت های

$$\alpha = \begin{pmatrix} P & Q & R \\ Q & R & P \end{pmatrix} = (P \quad Q \quad R)$$

$$\beta = \begin{pmatrix} P & Q & R \\ Q & P & R \end{pmatrix} (P \quad Q)$$

هستند. روشن است که β انعکاس آفین [R; P ↔ Q] می باشد. همچنین، بآسانی دیده می شود که حاصل ضرب (ترکیب) انعکاس های آفین I

[p; Q ↔ R] , [R; P ↔ Q]

تقارن های مثلث

- متناظربا جایگشت $\alpha = (\ PQR\ )$ است. جدول ضرب گروه S_3

$\times$	I	α	α^2	β	$\alpha\beta$	$\alpha^2\beta$
I	I	α	α^2	β	$\alpha\beta$	$\alpha^2\beta$
α	α	α^2	I	$\alpha\beta$	$\alpha^2\beta$	β
α^2	α^2	I	α	$\alpha^2\beta$	β	$\alpha\beta$
β	β	$\alpha^2\beta$	$\alpha\beta$	I	α^2	α
$\alpha\beta$	$\alpha\beta$	β	$\alpha^2\beta$	α	I	α^2
$\alpha^2\beta$	$\alpha^2\beta$	$\alpha\beta$	β	α^2	α	I

تقارن های مثلث

- اینک (Δ)I رابررسی می کنیم. روشن است که (Δ) I زیرگروه (Δ)AI است.
- تعریف :

الف : مثلث Δ مختلف الاضلاع است اگر اندازه هرسه ضلع آن متفاوت باشند.

ب : مثلث Δ متساوی اساقین است اگردقیقا دوضلع هم اندازه داشته باشند.

پ : مثلث Δ متساوی الاضلاع است اگرهرسه ضلع آن به یک اندازه باشند.

تقارن های مثلث

- قضیه 37 :

الف : اگر Δ مختلف الاضلاع باشد، آنگاه $I(A) = \{ I \}$

ب : اگر Δ متساوی الساقین، با $d(P,Q) = d(P,R)$، باشد، آنگاه $I(\Delta)=\{ I,\Omega \}$ که درآن Ω انعکاس آفین $[P; Q \leftrightarrow R]$ است.

پ : اگر Δ متساوی الاضلاع باشد، آنگاه $I(A) = AI(\Delta)$ دو عضو این گروه دوران غیربدیهی حول مرکز هندسی مثلث، سه عضوآن انعکاس (نسبت به میانه های مثلث) وعضوششم نگاشت همانی است. (میانه خطی است که ازیک راس ونقطه وسط ضلع مقابلش می گذرد.)

تقارن های مثلث

- نتیجه : فرض کنیم Δ مثلثی متساوی الاضلاع با مرکز هندسی c است. دراین صورت $I(\Delta)$ متشکل است از :

  الف : همانی

  ب : سه انعکاس نسبت به میانه های Δ

  پ : دورانهای به اندازه های $2\pi/3 \pm$ حول c .

- نتیجه : مرکزهندسی هرمثلث درمحل تلاقی سه میانه است وهر میانه را به نسبت 1 : 2 تقسیم می کند .

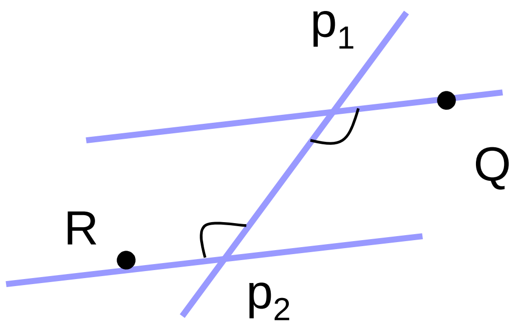
قابلیت انطباق

- قضیه 38 : دوزاویه قابل انطباق هستند اگروتنهااگر (بر حسب رادیان) هم اندازه باشد.
تعریف : خطی که دو خط دیگررا درنقطه متفاوت قطع کند خط قاطع آن دو خط نامیده می شود. اگر L_1 و L_2 دوخط موازی با بردارراستای v و m یک خط قاطع L_1 و L_2 به ترتیب، در نقاط p_1 و p_2 باشد، واگر

$$Q = p_1 + v \quad \text{و} \quad R = p_2 - v$$

قابلیت انطباق

آنگاه $\angle p_2p_1Q$ و $\angle Rp_2p_1$ رادو زاویه متبادل (داخلی) می گوییم. توجه می کنیم که هرخط قاطع، دوجفت زاویه متبادل (داخلی) تعیین می کند.



- قضیه 39 : اگرخطی دو خط موازی را قطع کند، جفتهای زاویه های متبادل حاصل قابل انطباق هستند.
- تذکر: ایزومتری $Hp_2\tau_{p2-p1}$ یک نیمدورحول نقطه وسط p_1p_2 است.

قضیه های قابلیت انطباق مثلثها

- دراین بخش قضیه های مانوس قابلیت انطباق مثلثها در هندسه اقلیدسی را ثابت می کنیم. قضیه اول به نام قضیه ض ض ض بیان می کند که دو مثلث که اندازه های سه ضلع نظیرشان برابرند قابل انطباق هستند.

قضیه های قابلیت انطباق مثلثها

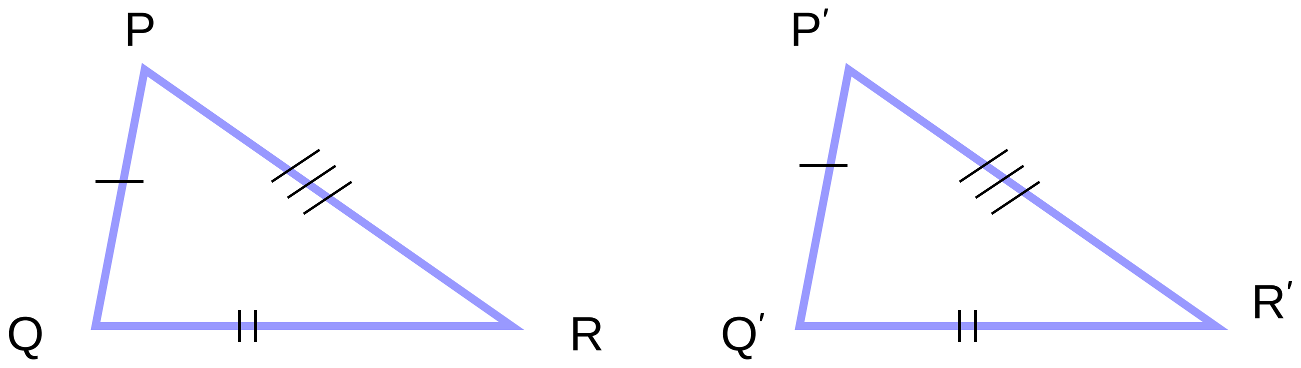
- قضیه 40 : اگر دردومثلث ΔPQR و $\Delta P'Q'R'$

$$d(P,Q) = d(P',Q') \qquad d(P,R) = d(P',Q')$$

$$d(Q,R) = d(Q',R')$$

آنگاه، ایزومتری T وجود دارد به طوری که

$$TR = R' \quad , \quad TQ = Q' \quad , \quad TP = P'$$



قضیه های قابلیت انطباق مثلثها

- حکم دیگر اقلیدس، انطباق دو مثلث برپایه اندازه های دوضلع وزاویه بینشان می باشد (قضیه ض ز ض).
برای اثبات این حکم، ابتدا قانون موسوم به "قانون کسینوس ها" رثابت می کنیم.
- لم : اگر P، Q، R سه نقطه در E^2 باشند، آنگاه

$$d(P,R)^2 = d(P,Q)^2 + d(Q,R)^2 - 2d(P,Q)d(Q,R)\cos\theta$$

که درآن θ اندازه زاویه $\angle PQR$ است.

قضیه های قابلیت انطباق مثلثها

- قضیه 41 : اگر دردو مثلث ΔPQR ،$\Delta P'Q'R'$

$$d(Q,R) = d(Q',R') \quad , \quad d(P,Q) = d(P',Q')$$

و $\angle P'Q'R' = \angle PQR$ (برحسب رادیان)، آنگاه ایزومتری T وجود دارد به طوری که

$$TR = R' \quad , \quad TQ = Q' \quad , \quad TP = P'$$

- نتیجه : دو زاویه مجاوربه دوساق درهر مثلث متساوی الساقین قابل انطباق هستند.

مجموع زاویه های مثلث

- قضیه 42 : مجموع اندازه های سه زاویه هرمثلث برابر با π رادیان است.
- نتیجه : اگر دوزاویه ازمثلثی بردو زاویه ازمثلث دیگرقابل انطباق باشد، آنگاه زاویه های دیگرنیزقابل انطباق هستند.
- تذکر : درمطالعه هندسه مسطحه بااقلیدسی، میبینیم که قضیه 42 یکی ازمعدود قضیه هایی است مه درهندسه نااقلیدسی برقرارنیست. درواقع، درمطالعه اصل موضوعی هندسه، این قضیه ازمونی است که صفحه اقلیدسی راازصفحه نااقلیدسی متمایز می سازد.

پایان

فصل سوم

هندسه کره

مقدمه

اکنون به مطالعه هندسه کروی پی پردازیم. اگرچه با درنظر گرفتن کره به عنوان زیرمجموعه ای ازفضای اقلیدسی سه بعدی، هندسی تحلیلی ان بهترفرمول بندی می گردد ولی دیدگاه ما باید ازبطن کره ناشی شود. با استفاده ازفضای اقلیدسی سه بعدی هندسه تحلیلی کره به آسانی فرمولبندی میگردد، ولی انگیزه شهودی مابايد ذاتی باشد. به عبارن دیگر، احکام هندسی مورد نظرباید دررابطه با خود کره باشند، نه دررابطه با نقاطی ازفضا که داخل یت خارج ان واقعند. دیدگاه ما نسبت به مساله ناشی ازاحساس حشره ایست که روی رویه ای دوبعدی کره درحال حرکت است. ازاین رومفاهیم نقطه، خط، فاصله، زاویه وانعکاس راچنان انتخاب خوتهیم کرد که باتجزیه حشره مطابقت داشته باشد.

مباحثی مقدماتی از E^3

- اگر $x = (x_1, x_2, x_3)$ و $y = (y_1, y_2, y_3)$ آنگاه

1. $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$
2. $cx = (cx_1, cx_2, cx_3)$
3. $< x,y > = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$
4. $|x| = \sqrt{< x,x >}$

ضرب خارجی

مسالــه پیـداکردن بــرداری متعامـد بردوبــردار داده شـده بــه صورت زیرحل می شود :

- تعریـف : فــرض کنیـد u و v بردارهــایی در R^3 هســتند. حاصلضـرب خـارجی u و v برداریگانـه مانند z است، بـه طوری که به ازای هر $x \in R^3$ تساوی

$$< z,x > = \det(x,u,v)$$

برقراراست.

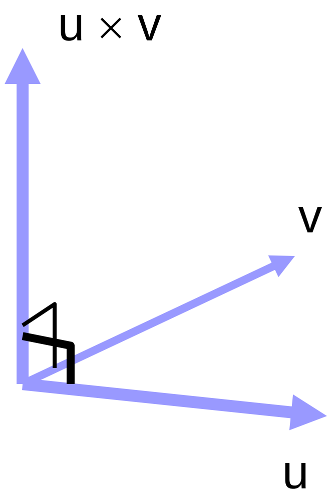
ضرب خارجی

حاصل ضرب خارجی u در v رابا نماد $z = u \times v$ نشان می دهیم لذا به ازای هر $x \in R^3$

$$< u \times v, x > = \det(x,u,v)$$

- تذکر : توجه کنید که دراین تعریف عدد $\det(x,u,v)$ برابربه دترمینان ماتریسی 3×3 است که درآیه های سطرهای ان به ترتیب مولفه ها x، u و v هستند.

ضرب خارجی



- قضیه 1 :

1. $u \times v$ خوش تعریف است.
2. $< u \times v , u > = < u \times v , v > = 0$
3. $u \times v = - v \times u$
4. $< u \times v , w > = < u , v \times w >$
5. $(u \times v) \times w = < u , w > v - < v , w > u$

ضرب خارجی

- نتیجه :

1. $u \times v = 0$ اگروتنهااگر u و v متناسب بایکدیگرباشند.
2. اگر $u \times v \neq 0$ آنگاه مجموع $\{ u,v,u \times v \}$ یک پایه برای R^3 است.
3. $$< u \times v, w \times z > = < u,w >< v,z > - < v,w >< u,z >$$
4. $$| u \times v |^2 = |u|^2 |v|^2 - < u,v >^2$$

آخرین تساوی را اتحاد لاگرانژ می گوییم.

پایه متعامد یکه

- سه تایی $\{ u,v,w \}$ ازبردارهای یکه دوبدو متعامد را یک سه تایی متعامد یکه می نامیم.

- قضیه 2 : اگر $\{ u,v,w \}$ یک سه تایی متعامد یکه باشد، آنگاه به ازای هر $x \in R^3$ داریم

$$x = < x,u > u + < x,v > v + < x,w > w$$

پایه متعامد یکه

- تذکر : با توجه به قضیه 2، سه تایی { u,v,w } رایک پایه متعامد یکه می نامیم.

- قضیه 3 : اگر u برداری یکه باشد، بردارهای v و w وجود دارند به طوری که { u,v,w } یک پایه متعامد یکه است.

صفحه

صفحه مجموعه ای چون π ازنقاط E^3 باخواص زیراست.

1. هیچ خطی شامل π است.
2. خط واصل هردونقطه π در π واقع است.
3. π شامل همه نقاط E^3 نیست.

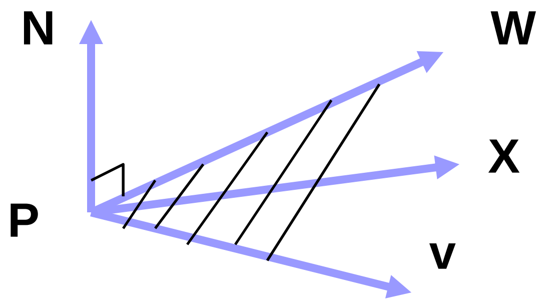
صفحه

- قضیه 4 :

1. اگر v و w متناسب نباشند و p نقطه دلخواهی باشد، آنگاه [v,w] + p یک صفحه است. این صفحه را صفحه تولید شده توسط { v,w } وگذرنده از p می نامیم.
2. اگرنقاط P، Q، R واقع بریک خط نباشند، صفحه منحصربه فردی چون π شامل این سه نقطه وجود دارد، این صفحه را صفحه PQR می نامیم.

صفحه

3. اگر N یک برداریکه و p نقطه ای دلخواه باشد، آنگاه
مجموعه $\{ x | < x - p, N > = 0 \}$
یک صفحه است. این صفحه را صفحه گذرنده از p
بابردارقائم یکه N می نامیم.



نماد گذاری : مجموعه $\{ tv + sw \ | t,s \in R \}$ = [v,w] را تولید شده توسط { v,w } می نامیم.

هندسه وقوع کره

کره S^2، که برمطالعه هندسه ان تاکید داریم، با شرط آشنایی

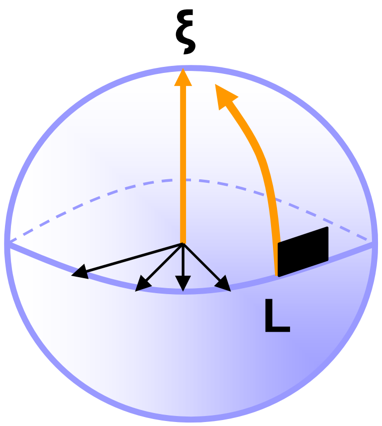
$$S^2 = \{ x \in E^3 \mid |x| = 1 \}$$

مشخص می شود.

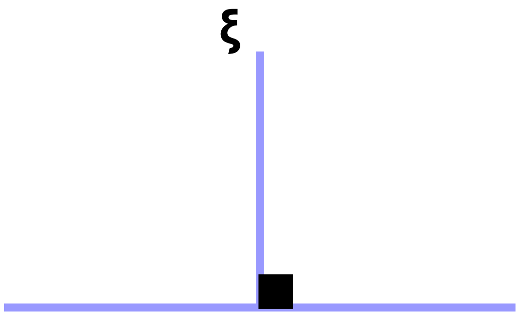
- تعریف : فرض می کنیم ξ یک برداریکه باشد. دراین صورت $L = \{ x \in s^2 \mid < \xi, x > = 0 \}$ خط با قطب ξ نامیده می شود. همچنین L را خط قطبی ξ می نامیم.

هندسه وقوع کره

- تذکر : هندسه کروی نااقلیدسی است. این بدان معناست که وقتی شکلی را توسط نموداری نشان می دهیم ازشکل طبیعی خارج کردن ان اجتناب ناپذیراست.



نقطه ع وخط قطبی ان (چشم اندازاول)



نقطه ع وخط قطبی ان (چشم انداز دوم)

هندسه وقوع کره

نقاط p و Q متعلق به S^2 رامتقاطر می نامیم اگر p = - Q خطهای S^2 نمی توانند موازی باشند، ودوخط S^2 نه تنها در یک نقطه بلکه دردو نقطه متقاطر، متقاطعند.

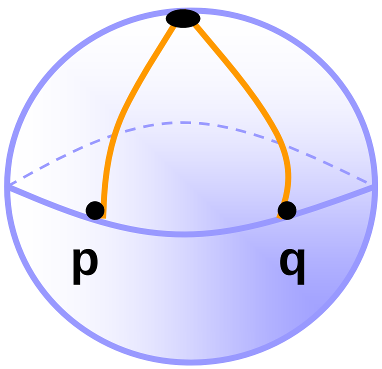
- قضیه 5 :

1. اگر ع یک قطب خط L باشد، آنگاه ع– نیزقطبی از Lاست.
2. اگر p برخط L واقع باشد، آنگاه p– نیزبر L واقع است.

هندسه وقوع کره

- قضیه 6 : فرض می کنیم p و q دونقطه متمایز و نامتقاطر متعلق به S^2 باشند دراین صورت تنهایک خط شامل p و q وجود دارد. این خط را با $\overleftrightarrow{pq}$ نشان می دهیم.

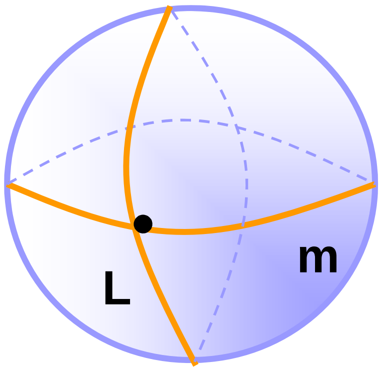
ع



هندسه وقوع کره

- قضیه 7 : فرض می کنیم L و m دوخط متمایز در S^2 باشند. دراین صورت L و m دقیقا دارای دونقطه تقاطع هستند، واین نقاط متقاطرند.

دوخط متقاطع m و L درچشم انداز اول

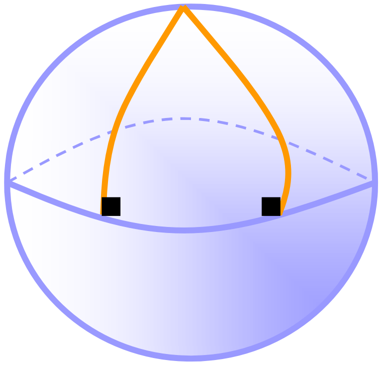


دوخط متقاطع m و L درچشم انداز دوم

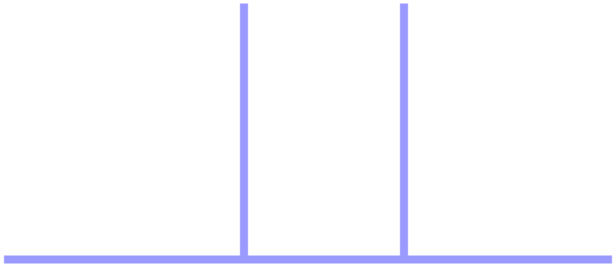
- نتیجه : هیچ دوخط S^2 نمی توانند موازی باشند.

هندسه وقوع کره

- تذکر : حتی خطوطی که دارای عمود مشترک هستند، یکدیگررا قطع می کنند.



حتی خطوطی که دارای عمود مشترکند، متقاطعند (درچشم انداز اول)



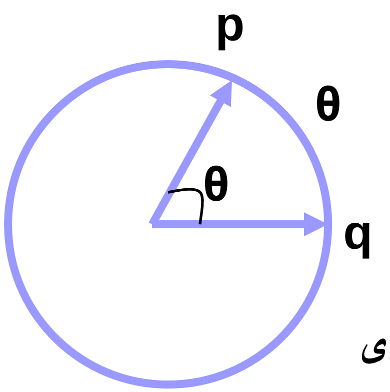
حتی خطوطی که دارای عمود مشترکند، متقاطعند (درچشم اندازدوم)

فاصله و نامساوی مثلث

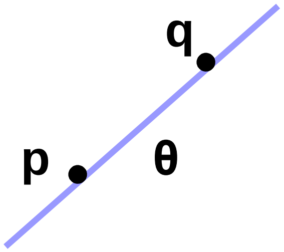
- فاصله بین دو نقطه p و q متعلق به S^2 را توسط معادله ،

$$d(p,q) = \cos^{-1}\langle p,q \rangle$$

تعریف می کنیم. این تعریف منعکس کننده این نظراست که اندازه زاویه مرکزی مقابل به کمان pq باید مساوی با اندازه کمان باشد.



فاصله درهندسه کروی
(چشم انداز اول)



فاصله درهندسه کروی
(چشم انداز دوم)

فاصله و نامساوی مثلث

- قضیه 8 : اگر P، Q و R نقاط از S^2 باشند، آنگاه :

1. $d(P,Q) \geq 0$
2. $d(P,Q) = 0$ اگروتنهااگر $P = Q$
3. $d(P,Q) = d(Q,P)$
4. $d(P,Q) + d(Q,R) \geq d(P,R)$ نامساوی مثلث

- نتیجه : اگردرنامساوی 4 ازقضیه فوق تساوی برقرار باشد، آنگاه p، Q، R روی یک خط هستند.
- تذکر : درمورد E^2 این نتیجه نیزحاصل می شود که Q بین P و R است خواهیم دید که درهندسه کروی نتیجه مشابه وقتی برقرار است که تعاریف مناسب ارائه دهیم.

نمایش پارامتری خط

- درست مانند E^2 بیشتر مواقع بهتراست که خطها را به صورت پارامتری مشخص کنیم. فرض می کنیم L خطی با قطب ξ باشد. نقاط p و q را چنان اختیار می کنیم که { ξ,p,q } یک پایه متعامد یکه باشد. سپس قرار می دهیم :

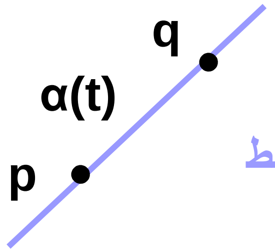
$$\alpha(t) = (\cos t)p + (\sin t)q$$

نمایش پارامتری خط

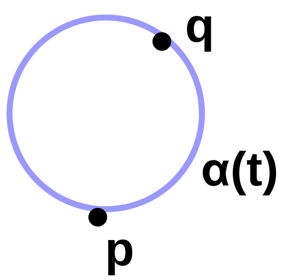
- قضیه 9 :

1. $L = \{ \alpha(t) \mid t \in R \}$
2. وقتی t روی فاصله $[0,2\pi)$ تغییر می کند، هرنقطه L دقیقا یکبار به عنوان مقدار $\alpha(t)$ رخ می دهد.
3. اگر $0 \le |t_1 - t_2| \le \pi$ ، آنگاه $d(\alpha(t_1),\alpha(t_2)) = |t_1 - t_2|$

این قضیه بیان می کند که α نمایش پارامتری L باسرعت واحداست.



نمایش پارامتری خط
چشم انداز اول



نمایش پارامتری خط
چشم انداز دوم

خط متعامد

- تعریف : دو خط را متعامد گوییم درصورتی که قطب های ان متعامد باشد.

- قضیه 10 : فرض کنیم که L و m خطوط متمایزی در s^2 هستند. دراین صورت خط منحصربه فردی چون n وجود دارد به طوری که n ⊥ L و n ⊥ m . نقاط تلاقی L و m قطبهای n هستند.

خط متعامد

- قضیه 11 : فرض می کنیم خط L ونقطه p بر s^2 هستند اگر p قطبی از L نباشند آنگاه تنها یک خط وجود دارد که از p می گذرد وبر L عمود است.
- تذکر :

1. اگر p قطبی از L باشد، هرخط گذرنده از p بر L عمود خواهد شد.
2. قضیه 11 نشان می دهد که مانند هندسه E^2، از هرنقطه p ناواقع بر L می توان خطی بر L عمود کرد. در E^2، پای عمود نزدیکترین نقطه L به p است.در هندسه کروی خط عمود m، خط L را دوبار قطع می کند.

حرکت های S^2

- تعریف : بع ازای خط دلخواه L با قطب ξ، انعکاس نسبت به L نگاشتی چون Ω_L است که توسط فرمول زیر تعریف می شود.

$$\Omega_L x = x - 2< x,\xi >\xi$$

- قضیه 12 : فرض کنیم 1= < ξ,ξ > ونگاشت $T : R^3 \rightarrow R^3$ را توسط $Tx = x - 2< x,\xi >\xi$ تعریف می کنیم. دراین صورت،

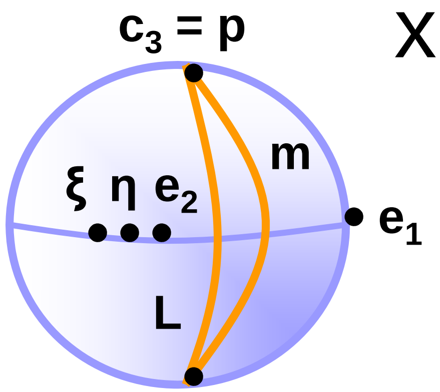
1. T خطی است.
2. $< Tx,Ty > = < x,y > \quad \forall\, x,y \in R^3$

حرکت های S^2

- قضیه 13 :

1. به ازای هر x,y متعلق به S^2، **$d(\Omega_L x, \Omega_L y) = d(x,y)$**
2. به ازای هر x متعلق به S^2، $\Omega_L \Omega_L x = x$
3. $\Omega_L : S^2 \rightarrow S^s$ یک نگاشت دو سویی است.

- قضیه 14 : $\Omega_L x = x$ اگروتنهااگر $x \in L$



حرکت های S^2

اکنون حاصلضرب دوانعکاس را مورد بررسی قرار می دهیم. فرض می کنیم L و m دوخط متمایزبا قطبهای ξ و η هستند و p یکی ازنقاط تلاقی L و m است. یک پایه متعامد یکه مانند **{ L_1, L_2, e_3 }** چنان اختیارمی کنیم که $e_3=p$. دراین صورت ξ و η بردارهایی درفضای تولید شده توسط { e_1, e_2 } هستند. می توانیم اعداد θ و φ را چنان اختیارکنیم که

$$\xi = (-\sin\theta)e_1 + (\cos\theta)e_2 \text{ ، } \eta = (-\sin\varphi)e_1 + (\cos\varphi)e_2$$

حرکت های S^2

- ماتریس نمایشگر $\Omega_L \Omega_m$ به صورت زیراست.

$$\begin{bmatrix} rot\ 2(\theta - \varphi) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- تعریف : اگر α و β خطوطی گذرنده ازنقطه p باشند، آنگاه ایزومتری $\Omega_\alpha \Omega_\beta$ را یک دوران حول p می نامیم. حالت خاص α = β دوران بدیهی همانی را معین می کند. اگر $\alpha \neq \beta$ آنگاه این ذوران را نابدیهی می نامیم. مجموعه تمام دورانهای حول p را با ROT (p) نشان می دهیم. توجه می کنیم که

$$ROT(p) = SO(2)$$

حرکت های S^2

- قضیه 15(قضیه سه انعکاس)فرض می کنیم α، β و γ سه خط گذرنده ازنقطه p باشند. دراین صورت خط منحصر بفرد δ گذرنده از p وجود دارد به طوری که

$$\Omega_\alpha \Omega_\beta \Omega_\gamma = \Omega_\delta$$

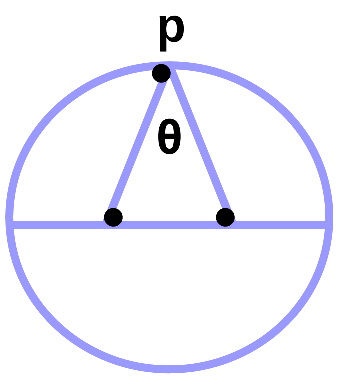
- قضیه 16 (نمایش دورانها) : فرض می کنیم $T = \Omega_\alpha \Omega_\beta$ عضودلخواهی از(ROT(p و L خطی گذرنده ازp است. دراین صورت خطوط منحصربه فرد m و ′m گذرنده از p موجودند به طوری که

$$T = \Omega_L \Omega_m = \Omega_{m'} \Omega_L$$

حرکت های S^2

- تعریف : فرض کنید L خطی دلخواه و m و n بر L عمود باشند. تبدیل $\Omega_m\Omega_n$ را یک انتقال درامتداد L می نامیم. اگر $n \neq m$ این انتقال را نابدیهی می گوییم.
- تذکر : برخلاف فضای اقلیدسی S^2 دارای خطوط موازی نیست. درواقع اگردوخط بر L عمود باشند درقطبهای L متقاطعند ولذا بررسی حاصلضرب دوانعکاس به طورچشمگیری ساده می گردد.

حرکت های s^2



- قضیه 17 :

1. هرانتقال s^2 یک دوران نیز هست.
2. هر دوران s^2 یک انتقال نیز هست.

- مجموعه تمام انتقالها درامتداد L رابا **TRANS(L)** نشان می دهیم. گروه تولید شده توسط انعکاسهای نسبت به اغضای دسته خطوط p، متشکل ازخطوط عمور بر L ، را با **REF(p)** نشان می دهیم.

حرکت های S^2

- قضیه 18 : گروه TRANS(L) یک گروه آبلی است ومساوی است با گروه ROT(ξ) ، که در ان ξ قطبی از L است.
- قضیه 19 (قضیه سه انعکاس) فرض کنیم α، β، γ خطوط متعلق به دسته خطوط p با عمود مشترک L باشند. دراین صورت خط منحصربفرد δ متعلق به این دسته وجود دارد به طوری که

$$\Omega_\alpha \Omega_\beta \Omega_\gamma = \Omega_\delta$$

حرکت های S^2

- قضیه 20 : (نمایش انتقال ها) فرض می کنیم $T = \Omega_\alpha\Omega_\beta$ متعلق به TRANS(N) باشد. اگر m، n خطوط دلخواه متعامد بر L باشند، آنگاه خطوط منحصربفرد m' و n' وجود دارند به طوری که

$$T = \Omega_m\Omega_{m'} = \Omega_{n'}\Omega_n$$

- نتیجه : هرعضو REF(P) یا انتقال درامتداد L باانعکاس نسبت به خطی متعلق به P است.

حرکت های S^2

- تعریف : اگر α، β برخط L عمود باشند، $\Omega_\alpha \Omega_\beta \Omega_L$ را یک لغزه با محور L می نامیم.

- تذکر : اگر $\{ e_1, e_2, e_3 \}$ یک پایه متعامد یکه باشند به طوری که e_3 قطبی ازخط L است، آنگاه

$$\Omega_L e_1 = e_1 \quad , \quad \Omega_L e_2 = e_2 \quad , \quad \Omega_L e_3 = e_3$$

حرکت های S^2

- نتیجه : نمایش ماتریس یک لغزه با محور L، نسبت بـه پایـه متعامد یکه ای ازنوع مذکوربه صورت زیراست :

$$\begin{bmatrix} \cos\lambda & -\sin\lambda & 0 \\ \sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- تعریف : یک ایزومتری که حاصلضرب تعدادی متنـاهی از انعکاس هاست یک حرکت نامیده می شود.

حرکت های s^2

- تعریف : یک ایزومتری که حاصل ضرب تعدادی متناهی ازانعکاسهاست یک حرکت نامیده می شود.

- قضیه 21 : هرحرکت حاصل ضرب دویا سه انعکاس مناسب است.

تبدیلات متعامد E^3

- تعریف : نگاشت $T : E^3 \to E^3$ متعامد نامیده می شود، اگر

1. T خطی باشد.
2. $\forall\ x,y \in E^3 \quad \langle Tx,Ty \rangle = \langle x,y \rangle$

- قضیه 22 : تابع خطی T متعامد است اگروتنهااگر ماتریس ان نسبت به یک پایه متعامد یکه در تساوی $A^tA = I$ صدق کند.

تبدیلات متعامد E^3

- تعریف : ماتریس 3×3 ای چون A را متعامد نامیم اگر

$$A^tA = I$$

- تذکر : **متعامد A $\leftrightarrow A^{-1} = A^t \leftrightarrow AA^t = I \leftrightarrow \det A = \pm 1$**
- قضیه 23 :

1. مجموعه **O(3)** متشکل از تمام تبدیلات متعامد روی **E^3** یک گروه است این گروه را گروه متعامد **E^3** می نامیم.
2. مجموعه **SO(3)** متشکل ازتمام تبدیلات متعامد روی **E^3** با دترمینان +1 زیرگروهی از **O(3)** است. این زیرگروه، گروه متعامد ویژه نام دارد.

قضیه اویلر

- قضیه اویلر

SO(3) دقیقا با مجموعه دورانها متناظرمی گردد وتبدیلات متعامد با دترمینان 1- متناظربا انعکاسها واغزه ها هستند.

$$\begin{cases} \det = +1 & \text{دورانها} \\ \det = -1 & \text{لغزه و انعکاس} \end{cases}$$

- قضیه 24(اویلر) : به ازای هر $T \in SO(3)$ عضوی چون $x \in S^2$ وجود دارد به طوری که $Tx = x$

قضیه اویلر

- تعریف : هر تبدیل متقاطر تبدیلی است چون E و با تعریف

$$Ex = -x$$

ماتریس نمایشگر E نسبت به هرپایه متعامد یکه، عبارت است از :

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

وچون

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

پس نگاشت متقاطریک لغزه است.

قضیه 25 : تحدید هرتبدیل متعامد S^2 یک حرکت از S^2 است.

ایزومتریها

- تعریف : تابع $T : S^2 \to S^2$ یک ایزومتری است اگر تساوی

$$d(Tx,Ty) = d(x,y)$$

به ازای هر $x,y \in S^2$ برقرارباشد.

- قضیه 29 : به ازای هر ایزومتری T_0 روی S^2 تبدیل متعامد T وجود دارد که T و T_0 روی S^2 برابرند.

نقاط و خطوط ثابت ایزومتریها

اکنون انواع مختلف ایزومتریها را برحسب ماهیت نقاط ثابت وخطوط ثابت انها مشخص می کنیم.

- قضیه 27 :

1. یک دوران نابدیهی دقیقا دارای دونقطه ثابت متقاطراست.
2. یک انعکاس دارای یک خط ثابت بنام محور انعکاس.
3. یک لغزه نتطه ثابت ندارد.
4. تابع همانی همه نقاط را ثابت نگه می دارد.

نقاط و خطوط ثابت ایزومتریها

- قضیه 28 : ایزومتری T، خط با قطب ξ را ثابت نگه می دارد اگروتنهااگر $T\xi = \pm \xi$
- قضیه 29 :

1. یک نیم دورحول یک نقطه تمام خطوط گذرنده ازیک نقطه (مرکز نیم دور) وعمود مشترک انها را ثابت نگه می دارد.
2. یک دوران نا بدیهی که نیم دورنیزنباشد، خط قطبی مرکزدوران را ثابت نگه می دارد.

نقاط و خطوط ثابت ایزومتریها

- ادامه قضیه 29 :

3. یـک انعکـاس محورخـودش وتمـام خطـوط عمـود بـراین محور را ثابت نگه می دارد.(دارای همان خطوط ثابت نیمدور است)
4. یک لغزه که مساوی با نگاشت متقاطرنباشد تنها محور خودش را ثابت نگه می دارد.
5. نگاشت متقاطر وتابع همانی تمام خطوط را ثابت نگه می دارند.

قضایای نمایش دیگر

- قضیه نمایش زیردرمورد دورانها برقراراست.
- قضیه 30 : هر دوران را می توان به صورت حاصلضرب دونیمدور نوشت.

- تذکر : در E^2 حاصلضرب دونیمدور یک انتقال است وهرانتقال را می توان به این صورن نمایش داد.

قضایای نمایش دیگر

- قضیه 31 : فرض کنید p نقطه ای متعلق به S^2 است.
دراین صورت به ازا هر $x \in S^2$ ،

$$H_p x = -x + 2< x,p>p$$

- نتیجه : فرض کنیم p نقطه ای بر S^2 و L خط قطبی ان باشد. در این صورت

$$\Omega_L H_p = H_p \Omega_L = E$$

که درآن E نگاشت متقاطر است.

قضایای نمایش دیگر

فرض می کنیم T لغزه ای غیراز نگاشت متقاطر E باشد. فرض می کنیم نقطه p قطبی ازمحوراین لغزه باشد. P را یک قطب لغزه T می نامیم.

- قضیه 32 :

1. به ازای هرخط m گذرنده از p نقطه یکتایی Q وجود دارد به طوری که $T = \Omega_m H_Q$. نقطه Q لزوما بر L واقع است.
2. به ازای هرنقطه **Q** بر L، خط یکتای m وجود دارد به طوری که $T = \Omega_m H_Q$ خط m لزوما ازنقطه p می گذرد.

- تذکر : به ازای هرخط m وهرنقطه Q، $\Omega_m H_Q$ لغزه ای است که محوران بر m عمود است واز Q می گذرد.

پاره خط

- درهندسه کروی "میانبود" مفهومی مبهم است. به ازای هرسه نقطه واقع بریک خط، می توان هریک را بین دیگر تلقی کرد.
- تعریف : زیرمجموعه r از S^2 را یک پاره خط می نامیم اگرنقاط p و Q با شرط $< p,Q > = 0$ واعداد $t_1<t_2$ با شرط $t_2 - t_1 < 2\pi$ یافت شوند، به طوری که

$$R = \{ (\cos t)p + (\sin t)Q \mid t_1 \le t \le t_2 \}$$

پاره خط

- قضیه 33 : فرض کنیم پاره خط r توسط p، Q، t_1 و t_2 و نیزتوسط p~، Q~ و $t\tilde{}_1$ ، $t\tilde{}_2$ معین شده باشد، دراین صورت :

1. $t_2 - t_1 = t\tilde{}_2 - t\tilde{}_1$ این عدد را طول پاره خط می نامیم.
2. اگر $\alpha(t) = (\cos t)p + (\sin t)Q$ و $\alpha\tilde{}(t) = (\cos t)p\tilde{} + (\sin t)Q\tilde{}$

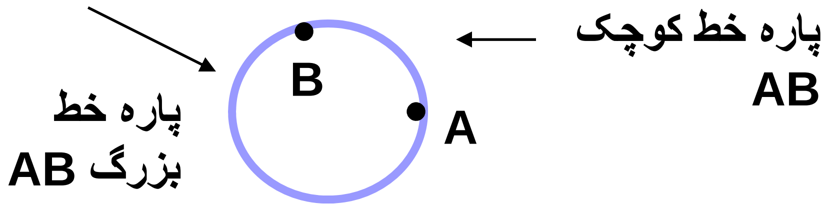
   آنگاه داریم :

   $$\{ \alpha(t_1),\alpha(t_2) \} = \{ \alpha\tilde{}(t\tilde{}_1),\alpha\tilde{}(t\tilde{}_2) \}$$

   این نقاط را نقاط انتهایی پاره خط r می نامیم. سایرنقاط r نقاط داخلی r نامیده می شود.
3. $p \times Q = \pm\, p\tilde{} \times Q\tilde{}$. این نقاط قطبهای خطی هستند که r بران واقع است.

پاره خط

- قضیه 34 : فرض کنیم A و B نقاط نا ممتقاطرباشند دراین صورت دقیقا دوپاره خط با نثاط انتهایی A و B وجود دارد. اجتماع این پاره خط ها خط AB واشتراک انها مجموعه { A,B } است.
- تعریف : فرض کنیم Aو B نقاط نا متقاطرباشند. ازدو اره خط با نقاط انتهایی Aو B، انکه طواش بیشتراست، پاره خط بزرگ AB وانکه طولش کمتر است، پاره خط کوچک AB نامیده می شوند. این دوپاره خط، پاره خطهای مکمل یکدیگرنامیده می شوند.



پاره خط

- تعریف : اگر A و B دونقطه متقاطرباشند، هریک از(بینهایت) پاره خطهایی بانقاط انتهایی Aو B را یک نیم خط می نامیم.
- تذکر : طول پاره خط کوچک AB برابر $d(A,B)$ وطول پاره خط بزرگ AB برابر $2\pi - d(A,B)$ است. طول یک نیمخط برابراست با π
- تذکر : درهندسه کروی صحبت کردن ازپاره خط AB بدون پسوند کوچک یا بزرگ ابهام آمیز است .

پاره خط

- قضیه 35 : فرض کنید p و Q نقاط متوازیزی در S^2 هستند. اگر p و Q نامتقاطر باشند، نقطه X روی پاره خط کوچک pQ واقع است اگروتنهااگر

$$d(p,x) + d(x,Q) = d(p,Q)$$

- قضیه 36 : فرض کنید p و q دونقطه متقاطرو r نقطه دسگری باشد. دراین صورت اجتماع پاره خطهای کوچک pr و rq یک نیمخط است اگر $-r = r'$ آنگاه اجتماع چهارپاره خط pr، rq، pr′ و r′q برابربا خط $\overleftrightarrow{pr}$ است.

پاره خط

- قضیه 37 : فرض کنید T یک ایزومتری باشد. دراین صورت

1. اگر r یک پاره خط کوچک باشد، Tr نیزچنین است.
2. اگر r یک نیمحط باشد، tr نیزچنین است.
3. اگر r یک پاره خط بزرگ باشد، Tr نیزچنین است .

پرتوها ، زاویه ها و مثلث ها

- درهندسه کروی یک پرتورا نیمخطی تعریف می کنیم که یکی ازنقاط انتهایی ان حذف شده است. نقطه انتهایی دیگر را مبدا پرتو می نامیم. فرض می کنیم PQ پاره خط کوچکی به طول L باشد که به صورت استانده

$$\{ (\cos t)P + (\sin t)\tilde{P} \mid 0 \leq t \leq L \}$$

تعریف شده است. دراین صورت پرتو

$$PQ = \{ (\cos t)P + (\sin t)\tilde{P} \mid 0 \leq t < \pi \}$$

تنها پرتوی است که از Q می گذرد و P مبدا ان است.

پرتوها ، زاویه ها و مثلث ها

- تعریف : زاویه PQR ∠ را درنظر می گیریم. نقطه X را یک نقطه داخلی این زاویه می نامیم درصورتی که پاره خط کوچک xp خط $\overleftrightarrow{QR}$ و پاره خط کوچک $\overleftrightarrow{xR}$ خط QP را قطع می کند.
- تعریف : مجموعه نقاط واقع درداخل یک زاویه را یک هلال می نامیم. یک جفت ازخطوط متمایز، مجموعه S^2 را به چهار هلال تقسیم می کند.

پرتوها ، زاویه ها و مثلث ها

- تعریف : اندازه زاویه PQR $\angle$ برحسب رادیان برابر است با :

$$A^0 = \cos^{-1} < \frac{Q \times P}{|Q \times P|}, \frac{Q \times R}{|Q \times R|} >$$

- فرض کنید P، Q ، R سه نقطه غیرواقع بریک خط باشند ، مثلث **PQR** عبارتند ازاجتماع پاره خطهای کوچک **PQ**، **QR**، **RP** . این پاره خطها رااضلاع مثلث می نامیم.طول هرضلع برابراست با فاصله بین دونقطه انتهای ان ضلع.

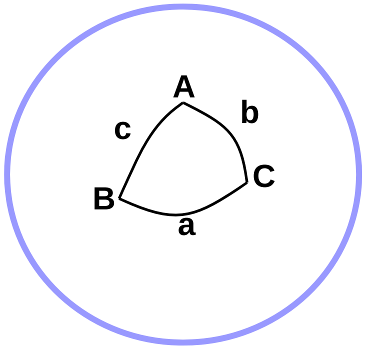
مثلث کروی

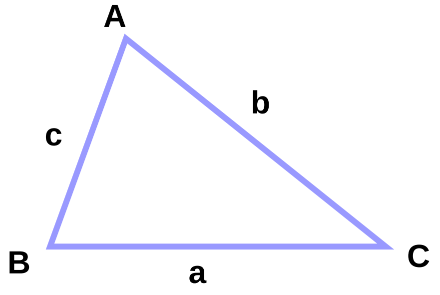
- مثلث ABC را درنظربگیرید فرض کنید a، b، c به ترتیب طول اضلاع BC، AC و AB باشند.

$$|B \times C|^2 = |B|^2\,|C|^2 - \langle B,C \rangle^2 = 1 - \cos^2 a = \sin^2 a$$

$$\langle A \times B , A \times C \rangle \langle B,C \rangle - \langle A,C \rangle \langle A,B \rangle$$

$$= \cos a - \cos b \cos c$$





مثلثات کروی

- درنتیجه همتای کروی قانون کسینوسها وسینوسها را به صورت زیر به دست می آوریم :

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$

مثلثات کروی

- قضیه 38 : برحسب نمادهای این بخش ، داریم :

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin b \sin c}$$

- نتیجه : طول اضلاع مثلث توسط اندازه های زاویه های ان برحسب رادیان معین می گردد.

$$a = \cos^{-1} < B , C >$$

$$A = \cos^{-1} < \frac{|x|}{11}, \frac{|x|}{11} >$$

پیکره های خطی

- پیکره های خطی را می تواه مانند هندسه اقلیدسی تعریف کرد. تقریبا تمام تعریفها واثباتها یا دقیقا با تعریفها واثباتهای اقلیدسی یکسانند یا بسیارشبیه آنها هستند بویزهف هرتقارن یک پیکره خطی جایگشتی روی رئوس ان القا می کند. رئوس یک پیکره خطی کامل روی S^2 به صورت متقاطرهستند ولذا هرتقارن جایگشتی روی مجموعه رئوس متقاطرنیزمی باشد.

پیکره های خطی

- قضیه 39 : فرض کنید д یک پیکره خطی با دست کم سه راس ناواقع بزیک خط باشد. دراین صورت I(д) گروهی متناهی است.
- قضیه 40 : فرض کنید д پیکره خطی کاملی باشد که مشتمل است برسه خط دوبدو متعامد دراین صورت I(д) گروهی ازمرتبه 48 است .
- تذکر : گروه I(д) مشتمل بر 24 دوران، 9 انعکاس و 15 لغزه است که نگاشت متقاطر یکی از این لغزه هاست.

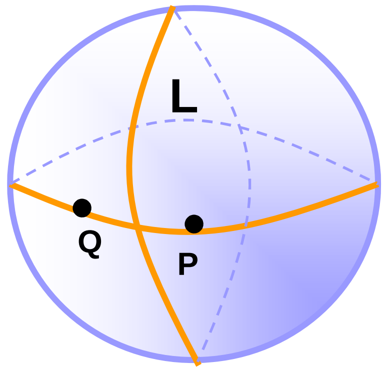
قضایای قابلیت انطباق

- اکنون به بررسی گروههای ایزومتری S^2 وچگونگی عمل انها براین پیکره های ساده می پردازیم.

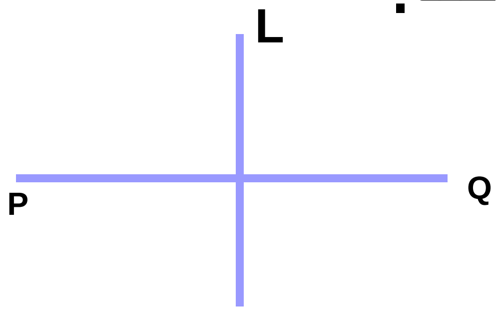
- قضیه 41 : فرض می کنیم P و Q نقاطی بر S^2 باشند. دراین صورت تنها یک انعکاس وجود دارد به طوری که این نقاط را جابجا می کند.

قضایای قابلیت انطباق

- تعریف : پاره خط r را درنظربگیرید. عمود منصف r خط یکتایی چون L است، به طوری که Ω_L دونقطه انتهایی پاره خط را جابجا می کند.



عمود منصف PQ چشم انداز اول



عمود منصف PQ چشم انداز دوم

- تذکر : عمود منصف پاره خط r برخط حامل r عمود است.

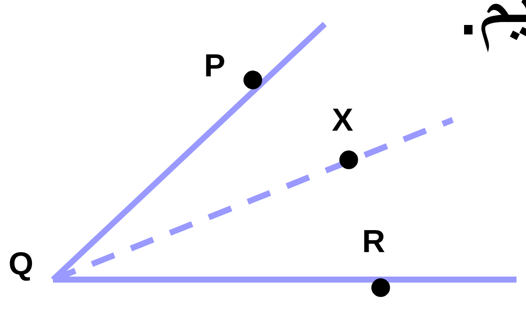
قضایای قابلیت انطباق

- قضیه 42 : عمود منصف یک پاره خط، مجموعه نقاطی از S^2 است که ازنقاط انتهایی ان پاره خط به یک فاصله اند.
- تعریف : تنها نقطه تلاقی یک پاره خط با عمود منصفش رانقطه وسط ان می نامیم.
- تذکر :

1. نقطه وسط پاره خط r نقطه یکتایی چون M است که ازدو انتهای پاره خط به یک فاصله است.
2. هرپاره خط ومتمم ان یک عمود منصف دارند.

قضایای قابلیت انطباق

- قضیه 43 : دقیقا دوانعکاس وجود دارند که یک جفت خط داده شده را جابجا می کنند.
- قضیه 44 : متناظربا هر زاویه A تنها یک انعکاس وجود دارد که اضلاع ان را جابجا می کند.
- تعریف : با نمادهای قضیه 44 پرتو QX که دران $x=\frac{P+R}{|P+R|}$ را نیمساز زاویه $A = \angle PQR$ می نامیم.



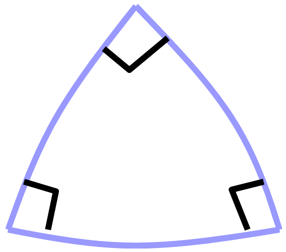
قضایای قابلیت انطباق

این بخش را با چند قضیه درمورد جمع زاویه ها به پایان می بریم.

- قضیه 45 : اگر QX نیمساز زاویه PQR ∠ باشد، آنگاه PQX∠ قابل انطباق بر RQX ∠ است.
- قضیه 46 : فرض کنیم که X نقطه ای درداخل PQR ∠ باشد. دراین صورت اندازه زاویه PQR ∠ بر حسب رادیان مساوی است با مجموع اندازه های زاویه های PQX ∠ و RQX∠ برحسب رادیان .

قضایای قابلیت انطباق

- تذکر : درهندسه کروی مجموع اندازه های زاویه های مثلث نسبت به اندازه مثلث متغیراست. به عنوان مثال به آسانی دیده می شود که اگر { P,Q,R } یک پایه متعامد یکه باشد، آنگاه هریک اززاویه های مثلث PQR Δ قائمه است ولذا مجموع اندازه های زاویه های این مثلث برحسب رادیان $3\pi/2$ است.



مثلثی با سه زاویه قائمه

قضایای قابلیت انطباق

- قضیه 47 : فرض می کنیم P و Q دونقطه برخط L باشند. دراین صورت انتقال منحصربه فردی درامتداد L وجود دارد که p رابر Q می نگارد.
- قضیه 48 : فرض می کنیم P، Q، P′، Q′ چهارنقطه که لزوما متمایزنیستند روی خط L باشند. اگر

$$d(P,P') = d(Q,Q')$$

آنگاه ایزومتری T وجود دارد به طوری که

$$TP' = Q' \quad , \quad TP = Q$$

- قضیه 49 : دوپاره خط قابل انطباق اند اگروتنهااگر دارای طولهای مساوی باشند.

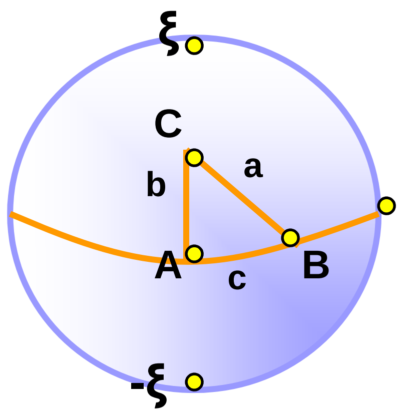
تقارن های پاره خط

- قضیه 50 : فرض می کنیم r پاره خطی با خط حامل L و m عمودمنصف ونقطه M وسط ان باشد، دراین صورت گروه تقارن های r برابراست با $\{ I, \Omega_L, \Omega_m, H_M \}$ جدول ضرب این گروه مانند جدول ضرب قضیه 28.2 است.

مثلث قائم الزاویه

- یکی ازمهمترین ویژگی های مثلث قائم الزاویه در هندسه اقلیدسی صدق کردن انها درقضیه فیثاغورس است. درهندسه کروی مشابه قضیه فیثاغورس به صورت زیر است.

- قضیه 51 : فرض می کنیم ABC مثلثی در S^2 به طول اضلاع **a = d(B,C)** و **b = d(A,C)** و **c = d(A,B)** باشد. اگر AC بر AB عمود باشد آنگاه :



$$Cosa = Cosb\ Cosc$$

مثلث قائم الزاویه

- قضیه 52 : فرض کنید L خطی دلخواه باشد ونقطه X ناواقع بر L بوده وقطبی از L نباشد اگر m خط عمود بر L از X باشد ونقطه تلاقی L و m نقطه F باشد. آنگاه به ازای هرنقطه Y واقع بر L به شرط $F \pm \neq Y$ داریم :

$$D(X,F) < d(X,Y) < d(X,-F)$$

مثلث قائم الزاویه

- تذکر : محتوی قضیه این است که نقاط F و F– واقع بر L به ترتیب نزدیکترین و دورترین نقاط از X هستند.
- تعریف : **F** را پای عمود از **X** به **L** می نامیم. عدد **d(X,F)** را فاصله **X** و **L** می نامیم و می نویسیم :

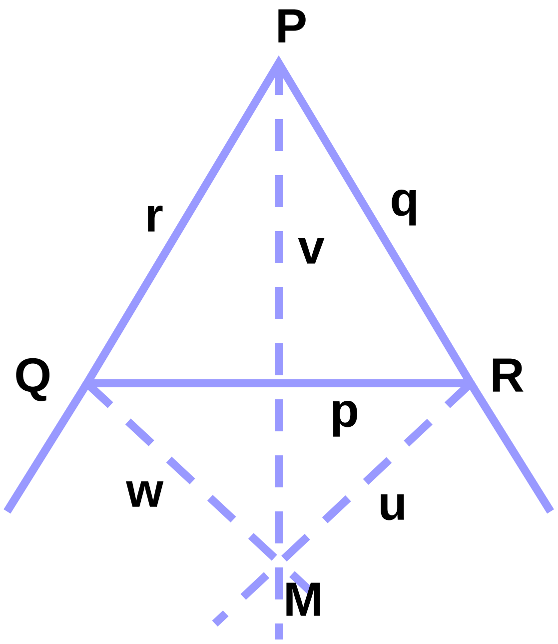
$$d(X,L) = d(X,F)$$

قضایای تقارب

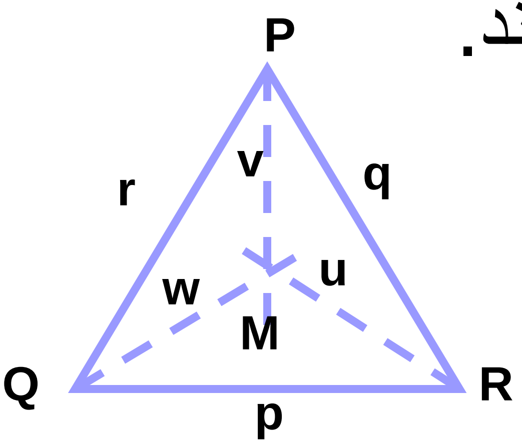
- قضیه 53 : عمود منصف های اضلاع مثلث متقاربند.
- قضیه 54 : فرض می کنیم P، Q، R سه نقطه نـا واقع بر یـک خط در S^2 باشند. خطهای $p = \overleftrightarrow{QR}$، $q = \overleftrightarrow{PR}$، $r = \overleftrightarrow{PQ}$ را در نظر مـی گیـریم. اگرانعکـاس Ω_u خـط هـای p، q و انعکـاس Ω_v خطهـای q و r را جابجـا کننـد آنگـاه خـط w متقارب با u و v وجود دارد. بطوریکه Ω_w خطهای p و r را جابجا می کند.

قضایای تقارب

- نتیجه : خطهای حامل نیمسازهای زاویه های یک مثلث متقاربند.



تقارب نیمسازهای دوزاویه خارجی با نیمساززاویه داخلی غیرمجاور



تقارب نیمسازهای مثلث

مثلثهای قابل انطباق

- قضیه 55 (ض ض ض) : اگر در دو مثلث $\Delta\, PQR$ و $\Delta P'Q'R'$ داشته باشیم $d(P,R) = d(P',R')$ و $d(Q,R) = d(Q',R')$ و $d(P,Q) = d(P',Q')$ آنگاه این دومثلث قابل انطباق اند.
- قضیه 56 : (ض ز ض) اگر دردو مثلث $\Delta\, PQR$ و $\Delta P'Q'R'$ داشته باشیم $d(P,Q) = d(P',Q')$ و $d(Q,R) = d(Q',R')$ و $\angle PQR = \angle P'Q'R'$ آنگاه این دو مثلث قابل انطباق اند.

مثلثهای قابل انطباق

- قضیه 57 (ززز) : اگر دردو مثلث PQR Δ و $\Delta P'Q'R'$ داشته باشیم $\angle P'Q'R' = \angle PQR$ و $\angle Q'P'R' = \angle QPR$ و $\angle Q'R'P' = \angle QRP$ آنگاه این دو مثلث قابل انطباق هستند.
- نتیجه : دو زاویه قابل انطباق اند اگروتنهااگر دارای اندازه رادیان مساوی باشند.

گروههای متناهی دورانها

- قضیه 58 : فرض می کنیم G یک زیرگروه متناهی **SO(3)** باشد. دراین صورت G با یکی ازگروههای جدول زیر ایزومرف است.

مرتبه	تعداد مدارها	تعداد قطب ها	تعداد پایاگرها
دوری n	2	2	n n
دووجهی 2	3	2n + 2	2 2 n
چهاروجهی 12	3	14	2 3 3
هشت وجهی 24	3	26	2 3 4
بیست وجهی 60	3	62	2 3 5

گروههای متناهی دورانها

- لم : هرعضو گروه G روی مجموعه قطب ها یک جایگشت است .

گروههای متناهی ایزومتری S^3

- فرض کنید G یک گروه متناهی ازایزومتری های S^2 باشد ونیزفـرض کنیـد G کـلاً ازدورانهـا تشـکیل نشـده باشـد. عضوی از G مانند β را کـه دوران نیسـت اختیـارمی کنیم دراین صورت اگر G_0 مجموعه دوران های G باشد، آنگاه $G = G_0 u \beta G_0$ لذا برحسب ساختار G_0 مرتبـه گروه G باید یکی از اعداد 2n، 4n، 24، 48 یا 120 باشد.

پایان

فصل چهارم

هندسه تصویری

مقدمه

- اکنون به مطالعه یک ساختار هندسی که بمراتب مجردتراز دو ساختارقبلی است می پردازیم. دربسیاری موارد هندسه صفحه تصویری مشابه هندسه روی کره است. با این وصف درهندسه تصویری برخلاف هندسه کروی این پدیده اقلیدسی که دوخط تنها دریک نقطه می توانند متقاطع باشد، معتبراست. صفحه تصویری مبنای مطالعه هندسه هذلولوی درفصل های آینده خواهد بود. اگرچه بسیاری از ویژگی های صفحه تصویری متعارف هستند. ولی ویژگی جهت ناپذیری این صفحه متعارف نیست. در P^2 هرانعکاس را می توان یک دوران تلقی کرد .

مقدمه

- مجرد بودن P^2 ناشی ازآن است که هرنقطه اش زوجی ازنقاط s^2 است. دونقطه متقاطر S^2 را یک نقطه P^2 منظور می کنیم.
- تعریف : صفحه تصویری P^2 مجموعه تمام جفت های $\{ x , - x \}$ ازنقاط متقاطر S^2 است.

مقدمه

- تذکر : دوتعریف دیگر P^2 که معادل تعریف فوق هستند عبارتند از :

1. مجموعه تمام خطوط گذرنده از مبدا E^3 .
2. مجموعه تمام رده های هم ارزی ازسه تائیهای مرتب (x_1 , x_2 , x_3) ازاعداد حقیقی (یعنی بردلرهای E^3) که تمام مولفه های آنها همزمان صفرنیستند درانیجا دوبردار را هم ارز گوییم اگرمتناسب باشند.

مقدمه

- فرض کنیم $\pi : S^2 \rightarrow P^2$ نگاشتی باشد که به هر x نقطه $\{ x , -x \}$ رانسبت می دهد . دراین صورت π نگاشتی دو به یک از S^2 به P^2 است.
- یک خط در P^2 مجموعه ای به صورت πL است که درآن L خطی از S^2 است. اگر ξ یک قطب L باشد، πξ را قطب πL می نامیم. روشن است که πx بر πL واقع است اگروتنهااگر $< \xi,x > = 0$. دونقطه در P^2 متعامد هستند، اگرنماینده های آنها در S^2 متعامد باشند. دوخط در P^2 متعامدند اگرقطب های آنها متعامد باشند.

ویژگی های وقوع در P^2

- قضیه 1 :

1. دوخط متمایز در P^2 دقیقا دارای یک نقطه تلاقی اند.
2. دونقطه متمایز در P^2 دقیقا روی یک خط واقع اند.

الگوهای دیگری برای P^2 ومختصات همگن

- الف : مکمل تصویری صفحه اقلیدسی

درفصل اول دیده ایم که صفحه اقلیدسی E^2 دراصل وقوع زیرصدق می کند :

1. برهردونقطه تنها یک خط می گذرد.
2. برهرخط دست کم دونقطه وجود دارد(درواقع بینهایت نقطه)
3. برهرنقطه خارج یک خط تنها یک خط به موازات آن خط می گذرد.
4. سه نقطه نا واقع بریک خط وجود دارد.

الگوهای دیگری برای P^2 ومختصات همگن

- بنابر قضیه 1 وشیوه ساختن، P^2 ملاحضه می کنیم که P^2 دراصول زیر صدق می کند.

I. برهر دو نقطه تنها یک خط می گذرد.

II. برهر خط دست کم سه نقطه واقع است .

III. هردو خط متقاطع هستند.

IV. سه نقطه نا واقع بریک خط وجود دارند.

دراینجا بااستفاده از E^2 هندسه ای بنا می کنیم که دراصول بالا صدق کند.

الگوهای دیگری برای P^2 ومختصات همگن

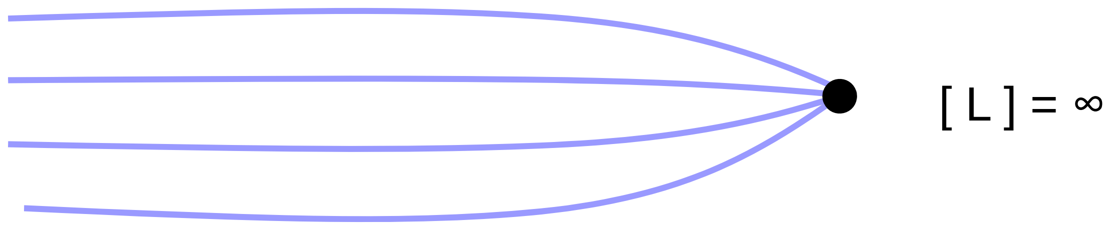
- برای این منظور روی مجموعه خطهای E^2 رابطه ~ را به صورت زیرتعریف می کنیم.
- تعریف : اگر L و L′ دوخط در E^2 باشند، می گوییم L و L′ در رابطه اند و می نویسیم $L' \sim L$ اگروتنهااگر

$$L \parallel L' \quad \text{یا} \quad L = L'$$

- قضیه 2 : رابطه ~ یک رابطه هم ارزی روی مجموعه خطوط E^2 است.

الگوهای دیگری برای P^2 ومختصات همگن

- با توجه به قضیه 2 مجموعه خطوط E^2 به رده های هم ارزی تقسیم می گردد. رده های هم ارزی وابست به خط L را با [L] نشان می دهیم [L] را نقطه در بی نهایت در امتداد خط L می نامیم.

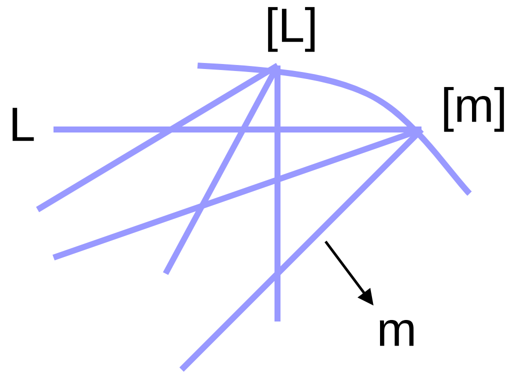


نقطه دربینهایت درامتداد L خطهای موازی دربینهایت متقاطعند

الگوهای دیگری برای P^2 ومختصات همگن

- اکنون E^2_* را به صورت زیر تعریف می کنیم.
- تعریف :

1. E^2_* متشکل از نقاط E^2 ونقاط در بی نهایت است.
2. در E^2_* دو نوع خط وجود دارد خط اقلیدسی L که به آن نقطه در بی نهایت [L] رااضافه کرده ایم وخط دربینهایت که اجتماع تمام نقاط دربینهایت است.



خط دربینهایت شامل تمام نقطه های دربینهایت است.

الگوهای دیگری برای P^2 ومختصات همگن

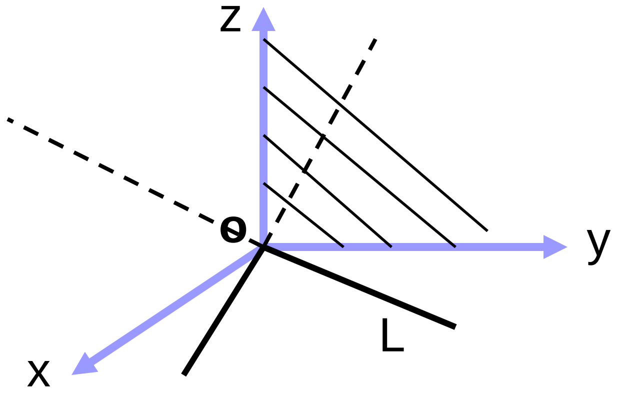
- قضیه 3 : E^2_* دراصول I تا IV صدق می کند .
- تعریف : E^2_* را مکمل تصویری E^2 می نامیم.
- ب : صفحه تصویری حقیقی

مجموعه E را به صورت زیرتعریف می کنیم اسلاید بعدی را ببینید .

الگوهای دیگری برای P^2 ومختصات همگن

- تعریف :

1. هرنقطـــه E خطـــی از R^3 اســـت کـــه ازنقطـــه o (مبـــدا مختصات) می گذرد.
2. هرخط E صفحه ای از R^3 است که از o می گذرد.



L نقطه ای از E وصفحه yoz خطی در E است.

الگوهای دیگری برای P^2 ومختصات همگن

- قضیه 4 : E دراصول I تا IV صدق می کند.
- تعریف : E را صفحه تصویرحقیقی می نامیم.
- تعریف : اگر A و B دوالگوی هندسی باشند که دراصول I تا IV صدق می کنند می گوییم A و B یکریخت هستند اگرنگاشت دوسویی $T : A \rightarrow B$ وجود داشته باشد به طوری که وقوع را حفظ کند.

الگوهای دیگری برای P^2 ومختصات همگن

- قضیه 5 :

1. E^2_* و E یکریختند.
2. E و P^2 یکریختند.

- نتیجه : E^2_* و P^2 یکریختند.

الگوهای دیگری برای P^2 ومختصات همگن

- دیدیم که هرنقطه E تنها با یک نقطه E^2_* یا P^2 متناظر است. اگراین نقطه L باشد و E^2_* را درنقطه (x,y,1) قطع کند، (x,y,1) رامختصات همگن L (یاهرنقطه متناظربا L درهرالگویی) می نامیم. واگر نقطه L ، E^2_* راقطع نکند آنگاه در، xoy واقع است ولذا متناظربا یک نقطه دربینهایت واقع بر E^2_* است دراین صورت مختصات همگن L به صورت (1,m,0) ویا برابر (0,1,0) است که درآن $m \neq \infty$ ضریب زاویه ای L است.

مختصات همگن و P^2 الگوهای دیگری برای

- اکنون یکی ازمهترین کاربردهای مختصات همگن را ذکرمی کنیم ولی پیش ازتذکری در مورد مختصات همگن ضروری است فرض می کنیم $\{e_1 , e_2 , e_3\}$ یک پایه برای R^3 باشد. دراین صورت هر $x \in R^3$ را می توان به صورت یکتای $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ نوشت. اگر πx نقطه ای از P^2 و λ عددی حقیقی ودلخواه باشد و

$$\lambda x = u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3$$

آنگاه، چنانچه پیش از این گفتیم، (u_1 , u_2 , u_3) را یک مختصات همگن نقطه πx می نامیم.

الگوهای دیگری برای P^2 ومختصات همگن

- قضیه 6 : فرض مـی کنـیم P، Q، R و S چهارنقطـه بـر P^2 باشند به طوری هیچ سه تایی از آنها بریک خط نیستند. دراین صورت پایه ای برای R^3 وجود دارد به طوری که نسبت بـه این پایـه مختصـات خمگن این نقاط بـه ترتیـب عبارتند از (1,0,0) و (0,1,0) و (0,0,1) و (1,1,1) .

الگوهای دیگری برای P^2 ومختصات همگن

- قضیه 7 : اگر $x = (x_1 , x_2 , x_3)$ و $y = (y_1 , y_2 , y_3)$

مختصات همگن دونقطه متمایز در P^2 باشند، آنگاه مختصات همگن هر نقطه واقع برخط واصل x و y به صورت $\lambda x + \mu y$ است، که در آن λ و μ اعداد حقیقی هستند.

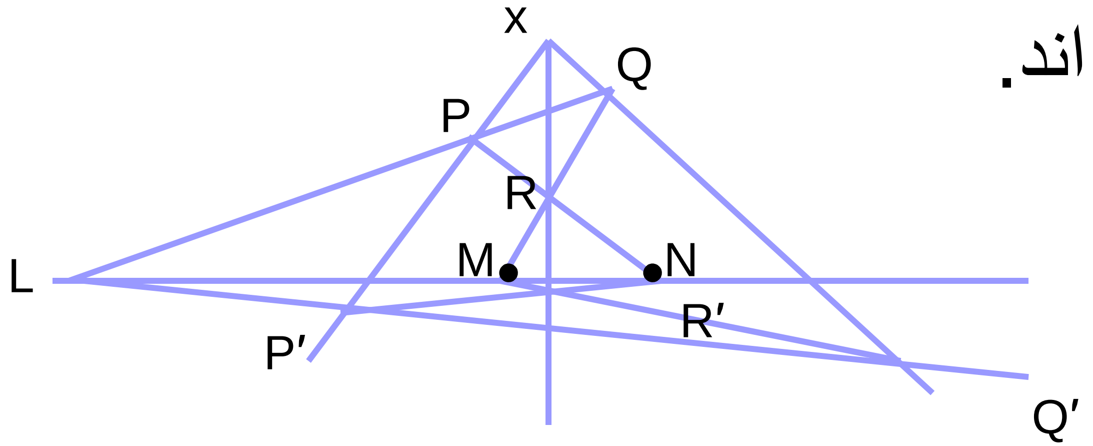
دو قضیه معروف

- قضیه 8 (قضیه دزارگ)

فرض کنید PQR و P′Q′R′ دو مثلث در P^2 باشند. همچنین فرض کنیم خطوط PP′، QQ′، RR′ در نقطه X متقارب باشند. دراین صورت نقاط

N = RP ∩ R′P′ و M = QR ∩ Q′R′ و L = PQ ∩ P′Q′

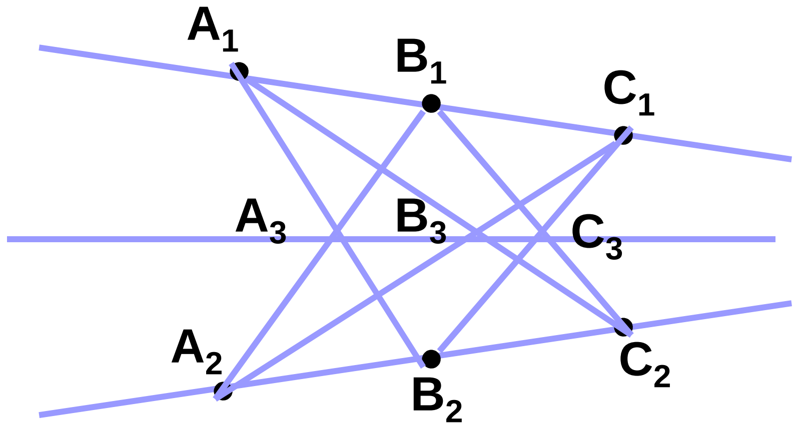
بریک خط واقع اند.



دو قضیه معروف

- قضیه 9 (قضیه پاپرس) فرض می کنیم A_1 و B_1 و C_1 سه نقطه واقع بریک خط و A_2 و B_2 و C_2 سه نقطه واقع برخطی دیگر باشند. دراین صورت نقطه های A_3 و B_3 و C_3 روی یک خط قرار دارند

$$A_3 = B_2C_1 \cap B_1C_2 \ , B_3 = A_1C_2 \cap A_2C_1 \ , \ C_3 = A_1B_2 \cap A_2B_1$$

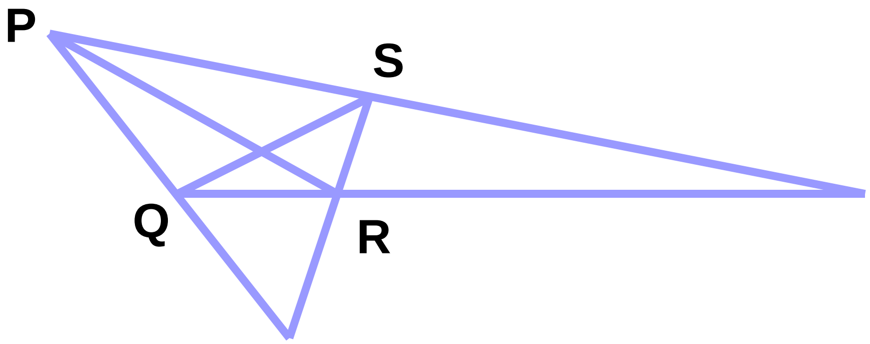


کاربرد در E^2

- یکی ازدلایل ابداع P^2 ساده کردن هندسه وقوع در E^2 بوده است.
- تعریف : یک چهارضلعی PQRS در P^2 ازچهار نقطه که هیچ سه تایی از آنها بریک خط نیستند وشش خط که از جفتهای این چهار نقطه می گذرند، تشکیل می شوند. چهارنقطه P، Q، R، S را رئوس چهار ضلعی ونقاط $RS \cap PQ$ و $QR \cap PS$ و $QS \cap PR$ رانقاط قطری چهار ضلعی می نامیم. یک چهارضلعی در E^2_* برحسب این که L_∞ آن را قطع کند یا نه ، صورتهای مختلفی بخود می گیرد در اسلایدهای بعدی کلیه صورت های ممکن را می آوریم.

کاربرد در E^2

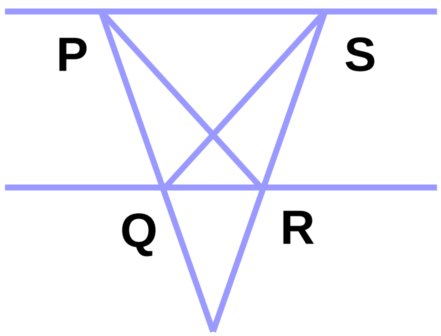
1. هیچ کدام از رئوس P، Q، R و S ونقاط قطری بر L_∞ نیستند. دراین حالت این چهارضلعی یک چهارضلعی اقلیدسی است.



چهار ضلعی اقلیدسی در E^2_*

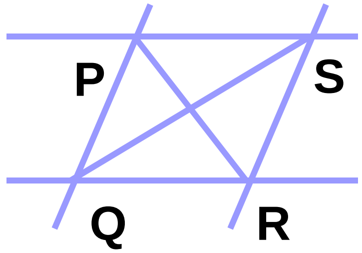
کاربرد در E^2

2. هیچ یک از رئوس بر L_∞ نیستند ولی تنها یکی ازنقاط قطری بر L_∞ است در این حالت دوضلع چهارضلعی موازیند و دو تای دیگر متقاطعند.



یک چهار ضلعی با یک نقطه قطری در بیتهایت

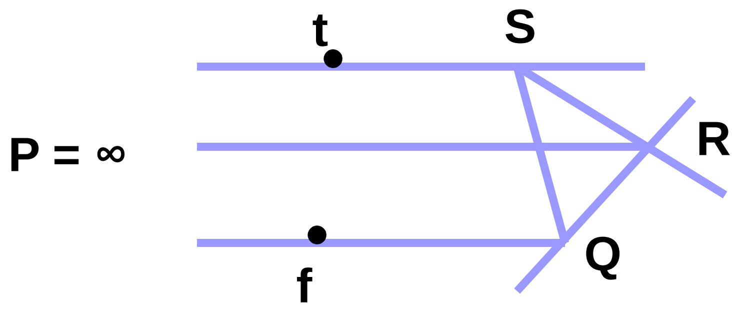
3. هیچ راسی بر L_∞ نیست ولی دونقطه قطری برآن هستند، دراین حالت چهارضلعی یک متوازی الاضلاع است.



یک چهار ضلعی با دو نقطه قطری در بینهایت

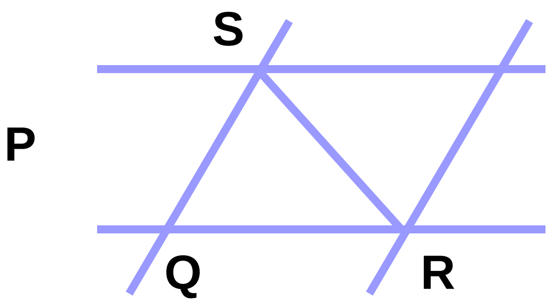
کاربرد در E^2

4. L_∞ شامل یک راس است وهیچ نقطه قطری در بینهایت آن نیست.



یک چهار ضلعی با یک راس در بینهایت

5. L_∞ شامل دو راس P و Q است. دراین حالت یک نقطه قطری هم لزئما دربر L_∞ است بینهایت است



یک چهار ضلعی با دو راس در بینهایت

قضیه دزارگ در E^2

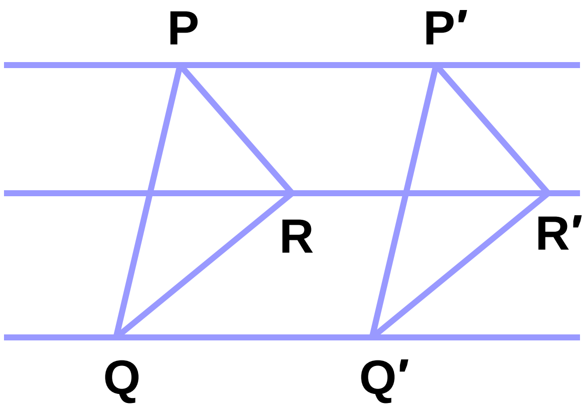
- صـــورت تصـــویری قضـــیه دزارگ دارای توصـــیف هـــای مختلفـــی در E^2_* اســـت کـــه بـــه اصـــل تلاقـــی خطـــوط و L_∞ وابسته هستند. مـثلا اگـر در ایـن قضـیه x روی L_∞ باشد، قضیه به صورت زیر بیان می شود.
- قضیه 10 : فرض می کنیم PQR و P′Q′R′ دو مثلث در E^2 باشند. ونیز فرض می کنیم PP′، QQ′، RR′ موازی باشند دراین صورت داریم :

قضیه دزارگ در E^2

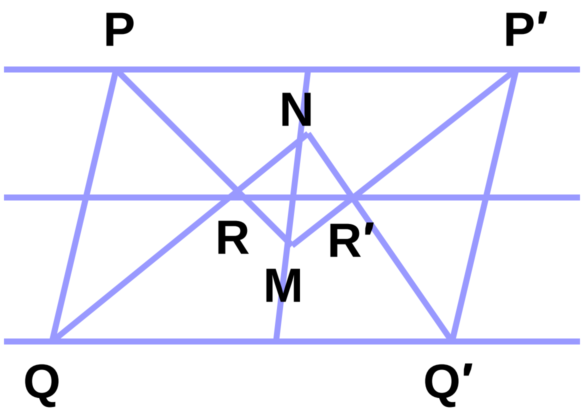
1. اگر **P′Q′ || PQ** و **Q′R′ || QR** آنگاه **P′R′ || PR**
2. اگر **P′Q′ || PQ** و **N = Q′R′ ∩ QR** آنگاه **PR** و **P′R′** درنقطه ای چون M متلاقی اند و MN موازی با PQ است.
3. اگر **L = PQ ∩ P′Q′**، **M = QR ∩ Q′R′** و **N = PR ∩ P′R′** آنگاه **L**، **M** و **N** روی یک خط قرار دارند.

- تذکر : شکل های قضیه به ترتیب در اسلاید بعدی قرار دارد.

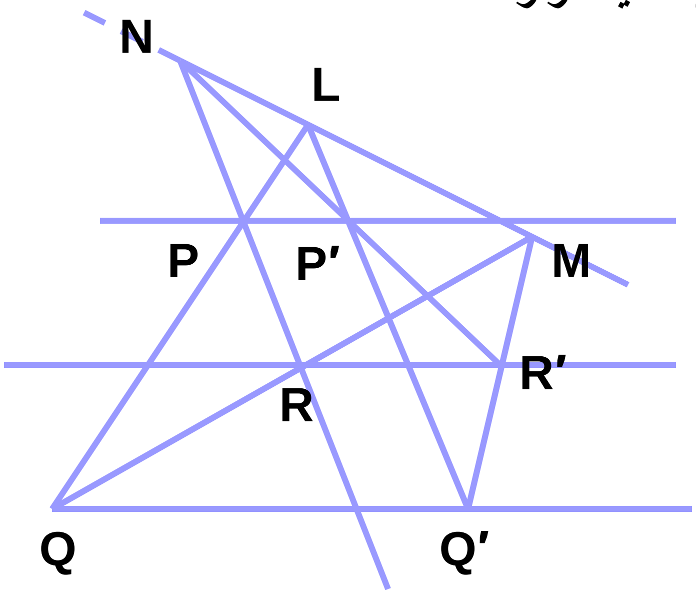
قضیه دزارگ در E^2



همتای اقلیدسی قضیه دزارک
حالت 1



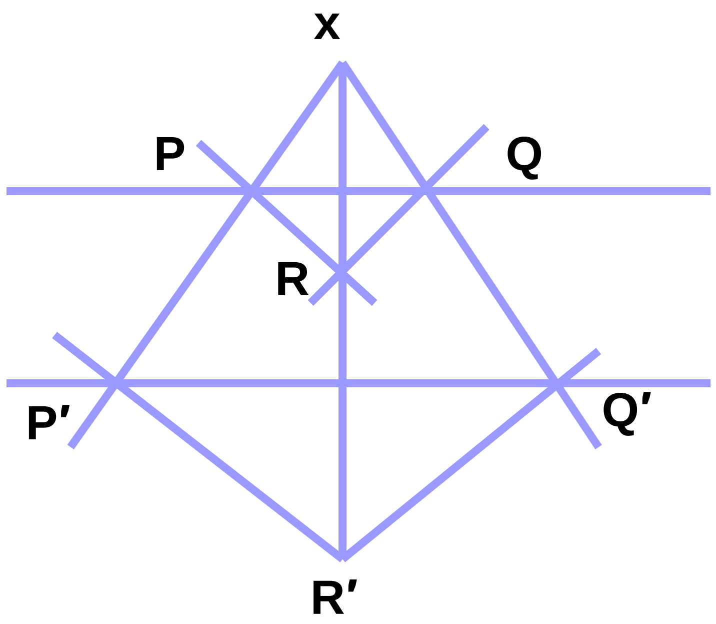
همتای اقلیدسی قضیه دزارک
حالت 2



همتای اقلیدسی قضیه دزارک
حالت 3

قضیه دزارگ در E^2

- قضیه 11 : فرض می کنیم PQR و P′Q′R′ دومثلث در E^2 باشند. اگر خطهای PQ′، QQ′ و RR′ در X تلاقی کنند، آنگاه احکام قضیه 10 برقرار است.

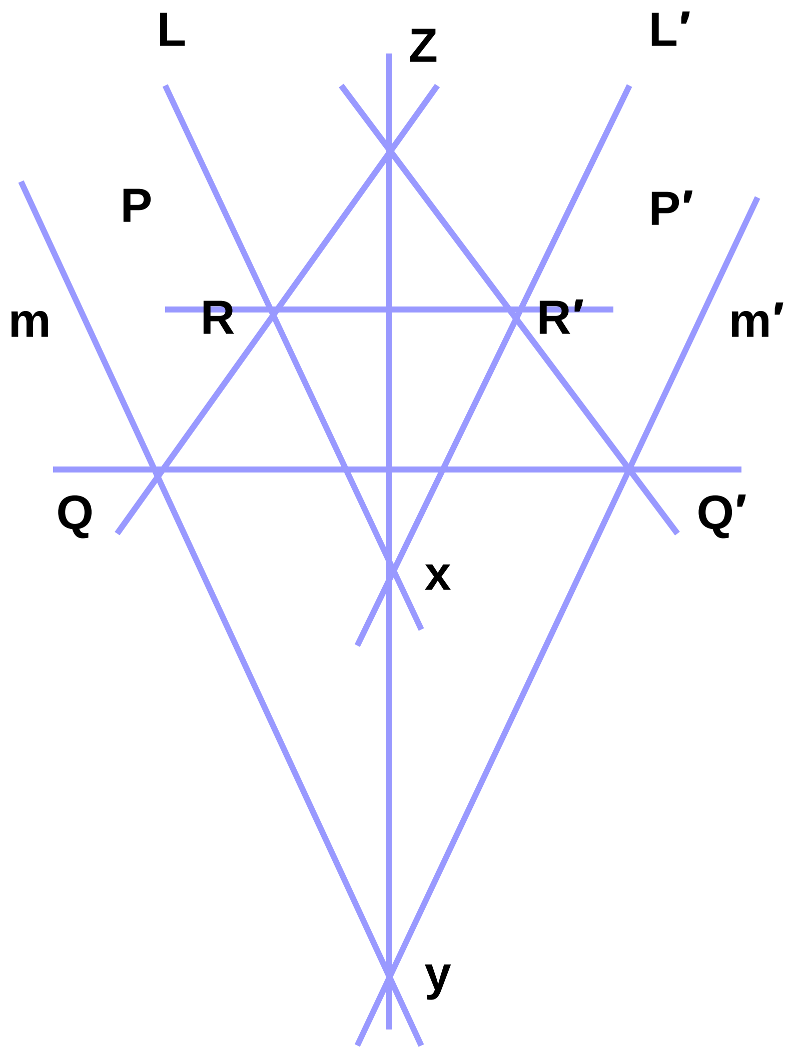


قضیه دزارگ در E^2

- قضیه 12 : فرض می کنیم RR′Q′Q یک ذوذنقه باشد. (QQ′||RR′) همچنین فرض می کنیم L و m خطهای موازی باشند که از Q و R می گذرند. نیز فرض می کنیم L′ و m′ خطهای موازی گذرنده از Q′ و R′ باشند. قرار می دهیم $x = L \cap L'$ و $y = m \cap m'$ و $z = QR \cap Q'R'$ در این صورت x، y و z روی یک خطند.(شکل اسلاید بعد را ببینید)

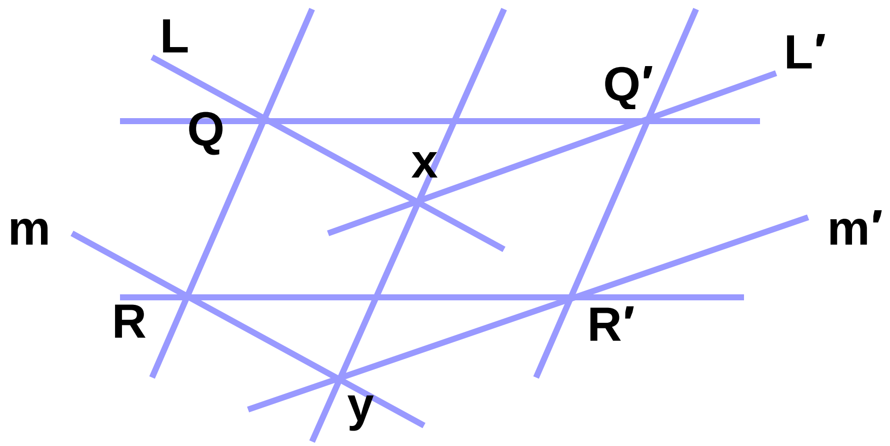
قضیه دزارگ در E^2

- شکل قضیه 12 :



قضیه دزارگ در E^2

- قضیه 13 : فرض کنید QRR′Q′ یک متوازی الاضلاع در E2 باشد (یعنی Q′R′||QR و QQ′||RR′) اگر L و m خطوط موازی گذرنده از Q و R و L′ و m′ خطوط موازی گذرنده از Q′ و R′ باشند و اگر $x = L \cap L'$ و $y = m \cap m'$ آنگاه xy موازی QR است.



گروه تصویری

- تعریف : نگاشت دو سویی $T : P^2 \rightarrow P^2$ را یک همخطی می نامیم اگروتنهااگر بخ ازای هرسه نقطه P، Q، R در P^2، نقاط TP، TQ و TR نیز در P^2 بریک خط باشند.
- قضیه 14 : اگر A ماتریسی 3×3 و نامنفرد باشد و تابع $\tilde{A} : P^2 \rightarrow p^2$ رابه صورت $\tilde{A}(\pi x) = \pi(Ax)$ تعریف کنیم، آنگاه $\tilde{A}$ یک همخطی روی P^2 است .

گروه تصویری

- قضیه 15 : مجموعه تمام همخطیهای P^2 یک گروه است .
- تعریف : گروه همخطیهای P^2 را گروه عمومی خطی تصویری صفحه تصویر حقیقی می نامیم وآن را با $PGL(2)$ نشان می دهیم.
- قضیه 16 : تابع $PGL(2) \rightarrow GL(3) : \theta$ را به صورت

$$\theta(A) = A^{\sim}$$

تعریف می کنیم. θ یک همریختی گروهاست.

قضیه اساسی هندسه تصویری

- فـرض کنـیم PQRS و P′Q′R′S′ دو چهـار ضـلعی در P^2 باشند. دراین صـورت تنها یـک $T\in PGL(2)$ وجـود دارد بـه طوری که

$$TP = P' \text{ و } TQ = Q' \text{ و } TR = R' \text{ و } TS = S'$$

- نتیجـه : فـرض کنیـد {P,Q,R} و {P′,Q′,R′} دودسـتـه از سـه نقطه نا همخط باشند. نیزفرض مـی کتیم کـه L خطـی باشد که هیچکدام از این نقاط برآن نیستند. دراین صـورت تنهـا یـک همخطـی تصـویری چـون T وجـود دارد بـه طـوری کـه TP = P′ و TQ =Q′ و TR = R′ و TL = L′ . ′

مروری بر همخطی تصویری

- درایـــن بخـــش برخـــی ازحقـــایق رادر مـــورد همخطیهـــای تصویری می آوریم.
- قضـیه 17 : هـر همخطـی تصـویری دسـت کـم دارای یـک نقطه ثابت ویک خط ثابت است.

مروری بر همخطی تصویری

- قضیه 18 : فرض کنیم نقطه P برخط L نباشد. دراین صورت گروه همخطیهایی که P و L را ثابت نگه می دارند با GL(2) یکریخت است . هر همخطی از این نوع را می توان بطور منحصر بفرد به صورت زیر نشان داد.

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad ad - bc \neq 0$$

مروری بر همخطی تصویری

- قضیه 19 : فرض می کنیم P و L به ترتیب یک نقطه و یا خط بر P2 باشند و $P \in L$. دراین صورت هرهمخطی تصویری که P و L راثابت نگه دارد به طور منحصر بفرد توسط ماتریس داده می شود. برعکس هرچنین ماتریسی یک همخطی

$$\begin{bmatrix} a & b & p \\ 0 & c & q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad ac \neq 0$$

تصویری معین می کند که P و L را ثابت نگه می دارد.

مروری بر همخطی تصویری

- قضیه 20 : تبدیل مذکور درقضیه 19 دقیقا دارای یک نقطه ثابت ویک خط ثابت است اگروتنهااگر $a = c = 1$ و $bq \neq 0$.
- قضیه 21 : یک همخطی تصویری با دو نقطه ثابت را می توان به صورت

$$\begin{bmatrix} a & 0 & p \\ 0 & c & q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نوشت. این گونه همخطیها دست کم دارای دو خط ثابتند.

مروری بر همخطی تصویری

- نتیجه : یک همخطی تصویری با دو نقطه ثابت را می توان به صورت

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & c & q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- نوشت. دراین نمایش، نقاط (1,0,0)، (0,1,0) نقاط ثابت وخطوط $x_1 = 0$ و $x_3 = 0$ خطوط ثابت این همخطی هستند.

مروری بر همخطی تصویری

- قضیه 22 : اگر $T : P^2 \rightarrow p^2$ یک همخطی تصویری باشد، به طوری که سه نقطه P، Q، R را بر خودشان تصویر کند، آنگاه ماتریس نمایشگر آن به صورت زیر است.

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & p \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad a \neq 0$$

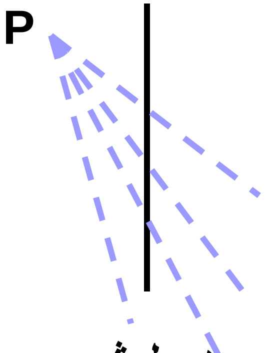
مروری بر همخطی تصویری

- تعریف : همخطی تصویری $T : P^2 \rightarrow P^2$ را یک پرسپکتیو با محور L ومرکز P می نامیم. درصورتی که T، هرنقطه L را و هرخط گذرنده از P را ثابت نگه دارد.
- نگاشت همانی $I : P2 \rightarrow P2$ را پرسپکتیو همانی می نامیم. هر پرسپکتیو دیگر دارای مرکز و محوری یگانه است.

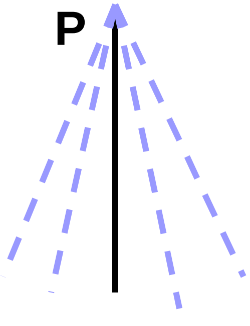
مروری بر همخطی تصویری

- تعریف : پرسپکتیوی که مرکزش برمحوری واقع باشد، یک بالابر نامیده می شود. واگر مرکز پرسپکتیوی بر محوری نباشد، آن را هومولوژی یا مانستگی می نامیم. بنابر قضیه فوق ماتریس متناظر با پرسپکتیو T به صورت زیر است .

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & p \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad a \neq 0$$



هومولوژی



بالابر

مروری بر همخطی تصویری

- قضیه 22: فرض می کنیم T به صورت فوق یک پرسپکتیو باشد در این صورت

1. اگر $a = 1$ و $p \neq 0$ آنگاه این پرسپکتیو یک بالابر است.
2. اگر $a = 1$ و $p = 0$ آنگاه T همانی است.
3. اگر $a \neq 0$ آنگاه T یک همولوژی است.

مروری بر همخطی تصویری

- همولوژی خاصی که متناظر با یک انعکاس آفین باشد، همولوژی توافقی (هارمونیک) نام دارد.
- انتخاب اصطلاح "همخطی پرسپکتیو" توسط قضایای زیر توجیه می شود.
- قضیه 24 : فرض کنیم که یک همخطی نابدیهی به مرکز P، نقطه X را به X′ تبدیل کند. دراین صورت P، X و X′ همخط اند.

مروری بر همخطی تصویری

- قضیه 25 : فرض کنید P یک نقطه و L یک خط باشد. همچنین فرض کنید نقاط x و x′ و p بریک خط باشند. اگر x و x′ بر L نباشند و متفاوت با p نیز باشند. آنگاه تنها یک همخطی پرسپکتیو به مرکز p و محور L وجود دارد که x را به x′ می نگارد.

قطبی

- فرض کنید b یک تابع با مقادیرحقیقی، متقارن، زوال ناپذیر و دوخطی روی E^3 باشد. اگر $\{e_1 , e_2 , e_3\}$ پایه ای برای R^3 باشد، آنگاه $b(x,y) = \sum_{i,j=1}^{3} x_i y_j b(e_i, e_j)$

$$= \sum_{i,j=1}^{3} b_{ij} x_i y_j = (x_1 \quad x_2 \quad x_3) B \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$= x^t By = < x, By >$$

قطبی

- که درآن $B = [\, b_{ij} \,] = [\, b(e_i,e_j) \,]$ رابطه $b^{\sim} \subset P^2 \times p^2$
با تعریف

$$b^{\sim} = \{\, (\pi x, \pi y) \mid b(\, x,y \,) = 0 \,\}$$

را یک رابطه قطبی (polarity) می نامیم. اگر $(\pi x, \pi y) \in b^{\sim}$ میگوییم πx و πy مزدوج اند. به ازای هر غ داده شده، بآسانی دیده می شود که مجموعه

$$\{\, \pi x : b(\, x,y \,) = 0 \,\}$$

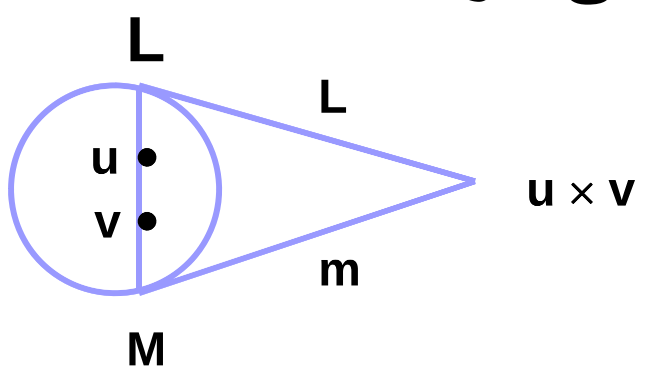
یک خط است. این خط را خط قطبی πy و πy را قطب این خط نسبت به b می نامیم.

قطبی

- قضیه 26 : فرض کنید خطهای قطبی نقاط P و Q واقع بر P^2 به ترتیب p و q باشند. دراین صورت P بر q است اگروتنهااگر Q بر p باشد.
- قضیه 27 : اگر P و Q دو نقطه خود مزدوج بر P^2 باشند، آنگاه PQ خود مزدوج نیست. یعنی خط گذرنده ازدو نقطه خود مزدوج، خود مزدوج نیست.

قطبی

- قضیه 28 : یک خط دقیقا شامل یک نقطه خود مزدوج است اگروتنهااگر خود مزدوج باشد.
- تعریف : فرض کنید ~b یک رابطه قطبی باشد که مقطع مخروطی G را به دست می دهد. خطی را که نسبت به ~b خود مزدوج باشد، مماس بر مقطع مخروطی G می نامیم. قطب این خط نقطه تماس نامیده می شود.



مقطع مخروطی خطوط مماس، قطب و قطبی

قطبی

- نتیجه : هرخط یک مقطع مخروطی را حداکثر دردو نقطه قطع می کند.
- تعریف : خطی که یک مقطع مخروطی را دو بار قطع کند، خط قاطع نامیده می شود.

حاصل ضرب خارجی

- اگر u و v بردارهایی در R^3 باشند بردار منحصر به فرد w متعلق به R^3 وجود دارد به طوری که به ازای هر $z \in R^3$ داریم :

$$b(w,z) = \det(z,u,v)$$

- W را حاصلضرب بیرونی (خارجی) u و v نسبت به b می نامیم و می نویسیم

$$w = u \times_b v$$

اگراشتباهی پیش نیاید، آن را بصورت $w = u \times v$ نیزنشان می دهیم.

حاصل ضرب خارجی

- اکنون نشان می دهیم

1. $b(u\times v, w) = b(u, v\times w)$
2. $b(u, u\times v) = b(v, u\times v)$

- قضیه 29 : فرض کنید πu و πv دونقطه در P^2 باشند. دراین صورت $\pi(u\times v)$ قطب خط گذرنده از πu و πv است.

حاصل ضرب خارجی

- تعریف : مثلث PQR در P^2 خود قطبی نامیده می شود اگر هرراس آن قطب ضلع مقابلش باشد. هرمثلث خود قطبی پایه ای چون $\{ e_1,e_2,e_3 \}$ به دست می دهد. به طوری که اگر $i \neq j$ آنگاه $b(e_i , e_j) = 0$ و $b(e_i , e_j) = \pm 1$

این پایه را یک پایه متعامد یکه نسبت به b می نامیم.

حاصل ضرب خارجی

- قضیه 30 :

1. اگر $\{ e_1 , e_2 , e_3 \}$ یک پایه متعامد یکه نسبت به b باشد.
انگاه درصورت لزوم، با قرار دادن $-e_3$ به جای e_3، داریم

$$e_1 \times e_2 = b(e_3 , e_3)e_3$$

$$e_2 \times e_3 = b(e_1 , e_1)e_1$$

$$e_3 \times e_1 = b(e_2 , e_2)e_2$$

2. به ازای هر b داده شده، تعداد 1- های موجود درمیان $b(e_i\ e_i)$ هامستقل ازانتخاب پایه متعامد یکه است.

حاصل ضرب خارجی

- تعریف : فرض کنید b یک تابع زوال ناپذیر، دوخطی ومتقارن است. فرض کنید $\{ e_1 , e_2 , e_3 \}$ یک پایه متعامد یکه نیبت به b باشد. اگرتعداد 1+ و 1-ها درمیان $b(e_i , e_j)$ هابه ترتیب برابر با r و s باشند، آنگاه جفت مرتب (r,s) را شاخص یا نشان b می نامیم.

حاصل ضرب خارجی

- مثـــال : شـــاخص تـــابع دوخطـــی متقـــارن وزوال ناپـــذیر $b:R^3 \to R^3$ با تعریف

$$b(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

برابر با (3,0) است ولی شاخص

$$b(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$$

برابر است با (2,1).

حاصل ضرب خارجی

- قضیه زیر که حاصلضرب برداری سه گانه را نسبت به b به دست می دهد. درمحاسبات نقش ویژه ای دارد.
- قضیه 31 : اگر (r,s) شاخص b باشد، آنگاه

$$(u \times v) \times w = (-1)^s \left(b(u,w)v - b(v,w)u \right)$$

پایان

فصل پنجم

هندسه طولی در P^2

فاصله و نامساوی مثلث

- تا کنون تنها ساختار وقوع صفحه تصویری رامطالعه کردیم. اکنون تابع فاصله رادر P^2 معرفی می کنیم.
- تعریف : فاصله نقطه های **P** و **Q** متعلق به **P^2** را با **d(P,Q)** نشان می دهیم وآن را به صورت زیرتعریف می کنیم :

$$d(P,Q) = \cos^{-1} | \langle x,y \rangle |$$

که درآن x و y نقاطی از S^2 اند به طوری که $\pi x = P$ و $\pi y = Q$

فاصله و نامساوی مثلث

- قضیه 1: اگر P ، Q و R سه نقطه متعلق به P^2 باشند، آنگاه

$$d(P,R) \leq d(P,Q) + d(q,R)$$

- قضیه 2 : سه نقطه P، Q و R متعلق به P^2 بریک خط واقع اند اگروتنهااگر :

1. $d(P,Q) + d(q,R) = d(P,R)$
2. $d(P,Q) + d(Q,R) + d(R,P) = \pi$

ایزومتری

- **تعریف** : نگاشت $T:P^2 \to P^2$ رایک ایزومتری می نامیم اگر به ازای هر P و Q متعلق به P^2 داشته باشیم

$$d(P,Q) = d(TP,TQ)$$

- **قضیه 3** : فرض کنید T یا ایزومتری P^2 باشد اگر P و Q و R سه نقطه واقع بریک خط باشند، آنگاه TP، TQ و TR بریک خط واقع اند.

ایزومتری

- ایزومتری های P^2 دررابطه نزدیکی با ایزومتریهای S^2 دارند.
- قضیه 4 : فرض کنید $P^2 \to P^2$: T یک ایزومتری باشد. دراین صورت ماتریس منحصربفرد $A \in SO(3)$ وجود دارد به طوری که

$$T = \tilde{A}$$

ایزومتری

- قضیه 5 : اگر T یک ایزومتری P^2 باشد به طوری که چهارنقطه $\pi\varepsilon_1$ ، $\pi\varepsilon_2$ و $\pi\varepsilon_3$ و $\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)$ را ثابت نگه می دارد، آنگاه T همانی است .

حرکت در P^2

- فرض کنیم L خطی در S2 باشد. دراین صورت، انعکاس نسبت به خط πL یک ایزومتری در P^2 است که به صورت زیر تعریف می شود.

$$\Omega_{\pi L} = \Omega^{\sim}_{L}$$

- قضیه 6 : $\Omega_{\pi L}$ هرنقطه به πL وقطب πL را ثابت نگه می دارد. $\Omega_{\pi L}$ هیچ نقطه دیگر P^2 راثابت نگه نمی دارد.

حرکت در P^2

- فرض کنید L خطی در P^2 و ξ قطب آن باشد. اگر m و n دوخط گذرنده بر ξ و Ω_m و Ω_n به ترتیب انعکاس های نسبت به خط های m و n باشد، حاصلضرب $\Omega_m\Omega_n$ را یک دوران حول ξ می نامیم. ازآنجا که هرخط گذرنده از ξ بر L عمود است. $\Omega_m\Omega_n$ را یک انتقال در امتداد L نیز می نامیم و $\Omega_m\Omega_n\Omega_L$ را یک لغزه می نامیم . اگر m و n عمود باشند، $\Omega_m\Omega_n$ را یک نیم دور می نامیم.

حرکت در P^2

- قضیه 7 : خطهای ثابت یک انعکاسف عبارتند از محورآن انعکاس وتمام خطوط عمود براین محور.
- قضیه 8 : دورانی که یک نیمدور یا همانی نباشد، دارای یک نقطه و یک خط ثابت منحصربفرد است. نقطه ثابت قطب این خط ثابت است.

حرکت در P^2

- قضیه 9 :

1. هر نیمدور یک انعکاس است وبر عکس هرانعکاس یک نیمدور می باشد.
2. هرلغزه یک دوران است.

- نتیجه : هرایزومتری P^2 یک دوران است.

حرکت در P^2

- تذکر : باآسانی می توان نشان داد که قضیه سه انعکاس وقضیه های نمایش دوران ها و انتقال ها در P^2 نیز برقرارند.
- قضیه سه انعکاس : فرض کنید πm، πn و πL سه خط متقارب درنقطه $\pi\varepsilon$ باشند. دراین صورت خط πk وجود دارد که ازنقطه $\pi\varepsilon$ می گذرد و

$$\Omega_{\pi m}\Omega_{\pi n}\Omega_{\pi L} = \Omega_{\pi k}$$

هندسه بیضوی

- هندسه P^2 ازدیرباز هندسه بیضوی نامیده می شود تاکنون، ویژگیهای وقوع ومفهوم رادراین هندسه بررسی کردیم و ایزومتریهای آن را طبقه بندی نمودیم. دیدیم که هندسه بیضوی ساده شده هندسه کروی است.
- تعریف : یک پاره خط در P^2 مجموعه به صورت πs است، که دران s پاره خطی در S^2 است طول πs برابر است با طول s. نقاط انتهایی πs نگاره های نقاط انتهایی s تحت π هستند.

هندسه بیضوی

- قضیه 10 :

1. هرجفت { A,B } ازنقاط P^2 نقاط انتهایی دو پاره خط در P^2 هستند. اجتماع این دوپاره خط، خط AB است و اشتراک آنها مجموعه { A,B } می باشد.

2. به ازای پاره خطی به طول L وبا نقاط انتهایی A و B داریم

اگر $L \leq \pi/2$ ، آنگاه $d(A,B) = L$

اگر $L > \pi/2$ ، آنگاه $d(A,B) = \pi - L$

هندسه بیضوی

- تعریف : پاره خطی به طول $\pi/2$ که یکی از نقاط انتهایی آن حذف شده باشد یک نیمخط (یا پرتو) نامیده می شود. انتهای حذف شده را مبدا نیمخط می نامیم.
- قضیه 11 : فرض می کنیم P و Q دونقطه متعلق به P^2 با $d(P,Q) < \pi/2$ باشند. دراین صورت یک نیمخط منحصربفرد با مبدا P و شامل Q وجود دارد. این نیمخط را با PQ نشان می دهیم.

هندسه بیضوی

- تعریف زاویه درهندسه بیضوی، مانند تعریف زاویه درسایر هندسه هاست. اندازه زاویه PQR ∠ برحسب رادیان، باانتخاب نماینده ای برای Q ونماینده های برای P و R بااین شرط که نزدیکترین نقاط به Q باشند، و محاسبه اندازه زاویه کروی حاصل به دست می آید.
- مفهوم نیمخط در صفحه P^2 وجود ندارد. با وجود این می توان داخل زاویه را تعریف کرد.

هندسه بیضوی

- یک مثلث در هندسه بیضوی پیکره ای به صورت $\pi\Delta$ است، که در آن Δ مثلثی کروی است بااین شرط که طول هرضاع ان بیشتر از $\pi/2$ نباشد.
- قضیه 12 : اگر P، Q و R سه نقطه ناهمخط در P^2 باشند، مثلثی منحصر بفرد با راسهای P، Q و R در P^2 وجود دارد. این مثلث اجتماع سه پاره خط است.

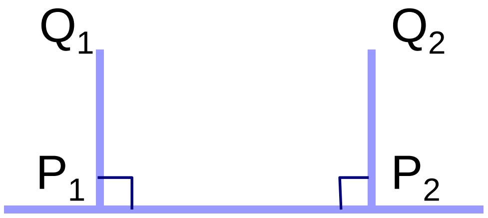
پایان

فصل ششم

صفحه هذلولوی

مقدمه

- دیدیم که صفحه تصویری جانشینی برای هندسه اقلیدسی است. جانشین دیگری رابرای هندسه اقلیدسی دراین فصل مورد بررسی قرار می دهیم. وجه تمایز این هندسه را در مثال زیر بیان می کنیم. پاره خطی چون P_1P_2 به صورت شکل زیر اختیار کنید، دوپاره خط مساوی P_1Q_1 و P_2Q_2 رابر P_1P_2 عمود کنید.



مقدمه

- درهندسه اقلیدسی E^2، طول پاره خط Q_1Q_2 مساوی با طول پاره خط P_1P_2 است. ولی درصفحه تصویری P^2، طول پاره خط Q_1Q_2 کوچکتر از طول پاره خط P_1P_2 است. درهندسه هذلولوی H^2، نشان خواهیم داد که طول Q_1Q_2 بزرگتر ازطول P_1P_2 است.

پیشنیازهای جبری

- صورت دوخطی ای که هندسه هذلولوی بران بنا خواهد شد به صورت زیر تعریف می شود.

$$b(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 – x_3y_3$$

- تعریف : بردار $v \in R^3$ رادرنظر می گیریم.

1. V را بردار فضا گونه می نامیم اگر $b(v,v)>0$ اگر $b(v,v) = 1$ ، v را یک برداریکه فضا گونه می نامیم $(1,0,0) = \varepsilon_1$ یک برداریکه فضا گونه است.

پیشنیازهای جبری

2. اگر $b(v,v) < 0$ ، v رابردار زمان گونه می نامیم. درصورتی که $b(v,v) = -1$ ، v را برداریکه زمان گونه می گوییم. $\varepsilon_3 = (0,0,1)$ مثالی ازیک برداریکه زمان گونه است.

3. اگر $b(v,v) = 0$ ، v را بردار نور گئنه می نامیم. $\varepsilon_3 - \varepsilon_1$ مثالی از یک بردار نور گونه است.

پیشنیازهای جبری

- "طول" بردار $v \in R^3$ (یعنی $|b(v,v)|^{1/2}$) را با $|v|$ نشان می دهیم بردار یکه درتساوی $|v|=1$ صدق می کنند. دراین فصل اصطلاح "متعامد یکه" رابه معنی متعامد یکه نسبت به b به کارمی بریم. توجه می کنیم که $\{\varepsilon_1 , \varepsilon_2 , \varepsilon_3\}$ متعامد یکه ایست. یعنی

$$| \varepsilon_1 | = | b(\varepsilon_1,\varepsilon_1) |^{1/2} = 1$$

$$| \varepsilon_2 | = | b(\varepsilon_2,\varepsilon_3) |^{1/2} = 1 \quad , \quad | \varepsilon_3 | = | b(\varepsilon_3,\varepsilon_3) |^{1/2} = 1$$

$$b(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = b(\varepsilon_2,\varepsilon_3) = b(\varepsilon_2,\varepsilon_1) = 0$$

پیشنیازهای جبری

- قضیه 1:

1. هرمجموعه متشکل ازسه برداریکه، متعامد (نسبت به b) یک پایه برای R^3 است.
2. هرپایه متعامد یکه دارای دو بردار فضا گونه ویک بردار زمان گونه است.
3. به ازای هرجفت $\{u,v\}$ ازبردارهای یکه متعامد مجموعه $\{u,v,u \times v\}$ یک پایه متعامد یکه است. (دراینجا حاصلضرب خارجی نسبت به b درنظر گرفته می شود).
4. به ازای هربردار یکه زمان گونه یا فضا گونه v، پایه متعامد یکه ای که شامل v باشد وجود دارد.

پیشنیازهای جبری

- قضیه 2:

1. اگر $\{ e_1 , e_2 , e_3 \}$ یک پایه متعامد یکه برای R^3 باشدف آنگاه برای هر $x \in R^3$ داریم

$$x = \sum_{i=1}^{3} b(x, e_i) b(e_i, e_i) e_i$$

2. فرض کنیم v بردار زمان گونه ای باشد، به طوری که $w \times v \neq 0$ و $b(v,w)=0$. دراین صورت w فضا گونه است.

پیشنیازهای جبری

- دیدیم که نا مساوی کشی-شوارتز نقش مهمی در هندسه های آفین و کروی دارد در دو قضیه زیر نامساوی کشی شوارتز را در هندسه هذلولوی ارائه می دهیم.
- قضیه 3 : اگر ξ و η دو بردار فضا گونه باشد به طوری که η × ξ زمان گونه است آنگاه

$$b(\xi,\eta)^2 < b(\xi,\xi)b(\eta,\eta)$$

پیشنیازهای جبری

- قضیه 4 : فرض کنید v و w دوبردار زمان گونه باشند. دراین صورت

$$b(v,w)^2 \geq b(v,v)b(w,w)$$

- نتیجه : اگر بردارهای v و w بردارهای یکه زمان گونه باشند، آنگاه $|b(v,w)| \geq 1$ حاصلضرب درونی یعنی $b(v,w)$ مثبت است اگروتنهااگر علامتهای $b(v,\varepsilon_3)$ و $b(w,\varepsilon_3)$ متفاوت باشند.

هندسه وقوع در H^2

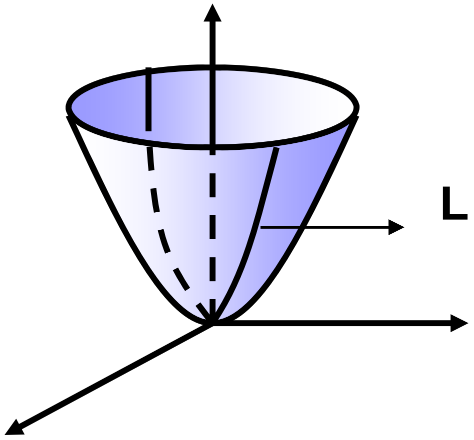
- هندسه هذلولوی H^2 به صورت زیر تعریف می شود.

$$H^2 = \{ x= (x_1,x_2,x_3)\in R^3 \mid x_3>0 , b(x,x) = -1 \}$$

لذا، H^2 به عنوان یک مجموعه، نیمه بالائی یک هذلولیوار دوپارچه است.

هندسه وقوع در H^2

- تعریف : فرض کنید ξ یک بردار یکه فضا گونه شبه فضا باشد. دراین صورت مجموعه $L = \{ x \in H^2 : b(\xi, x) = 0 \}$ را خط با برداریکه قائم (یا قطب) ξ می نامیم.



هندسه وقوع در H^2

- تذکر : مانند هندسه کروی، هرخط در H^2 مقطع H^2 با صفحه ای است که از مبدا R^3 می گذرد توجه کنید که همه صفحه های گذرنده از مبدا R^3، H^2 را قطع نمی کند بااین وصف اگر، ξ زمان گونه باشدف بنابر قضیه 1 می توان آن را به یک پایه متعامد یکه توسعه داد. بویژه، نقطه هایی چون $x \in H^2$ وجود دارند به طوری که $b(\xi, x) = 0$.

هندسه وقوع در H^2

- اکنون خطوط هندسه هذلولوی را به تفضیل مورد مطالعه قرار می دهیم.
- قضیه 5 : به ازای هر دونقطه P و Q متعلق به H^2، تنها یک خط در H^2 وجود دارد که شامل P، Q است. این خط را با PQ نشان می دهیم.

هندسه وقوع در H^2

- تعریف : فرض کنید L و m خطهایی با بردارهای قائم یکه ξ و η باشند. اگر :

1. $\eta \times \xi$ زمان گونه باشد.
2. $\eta \times \xi$ نور گونه باشد.
3. $\eta \times \xi$ فضا گونه باشد.

آنگاه L و m را به ترتیب متقاطع، موازی و فرا موازی می نامیم.

هندسه وقوع در H^2

- قضیه 6 : خطهای متقاطع، دقیقا یک نقطه تلاقی دارند. این نقطه تلاقی تنها نقطه ای از H^2 است که مضربی از $\xi \times \eta$ می باشد.

خطهای متعامد

- تعریف : دوخط با بردارهای متعامد یکه ξ و η را متعامد می نامیم اگر $b(\eta,\xi) = 0$
- قضیه 7 : اگر دو خط فراموازی باشند، آنگاه خط یکتایی چون γ وجود دارد که برهر دوی آنها عمود است، برعکس، اگر دو خط یک عمود مشترک داشته باشند، فراموازیند.

خطهای متعامد

- قضیه 8 :

1. اگر L و m متعامد باشند، متقاطعند.
2. اگر x نقطه ای و L خطی بر H^2 باشند، آنگاه تنها یک خط وجود دارد که از x گذشته و بر L عمود است.

- تعریف : نقطه F، محا تلاقی m و L را پای عمود از x به L می نامیم (به شرطی که x بر L نباشد)

دسته خطها

- تعریف : فرض کنید L و m خطهایی با بردارهای قائم یکه به ترتیب ξ و η باشند. مجموعه P متشکل ازتمام خطهایی چون n که بردار یکه اش ξ بر ξ×η عمود است. یک دسته خطوط می نامیم. P را برحسب این که ξ×η زمان گونه، نورگونه یا فضاگونه باشدف به ترتیب دسته خطوط متقاطع، موازی یا فراموازی می نامیم.
- تذکر :

1. مجموعه تمام خطهای H^2 که بریک خط عمودند، یک دسته خطوط فراموازیند
2. هرجفت ازخطوط H^2 یک دسته خطوط منحصر بفرد معین می کند.

فاصله در H^2

- تعریف : فاصله بین دونقطه $x,y \in H^2$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$d(x,y) = \cos^{-1}h(-b(x,y))$$

قضیه 9 : فرض می کنیم $\alpha(t) = (\cosh t)e_3 + (\sinh t)e_1$.

دراین صورت $d(\alpha(t_1), \alpha(t_2)) = |t_1 - t_2|$

فاصله در H^2

- تعریف: اگر $t_1 < t < t_2$ می گوییم $\alpha(t)$ بین $\alpha(t_1)$ و $\alpha(t_2)$ واقع است.
- اکنون که تعریف فاصله را درصفحه هذلولوی بیان کردیم. لازم است بدانیم که این فاصله درچه خواصی ازخواص فاصله درهندسه اقلیدسی صدق می کند. قضیه زیر بی درنگ ازتعریف نتیجه می شود.

فاصله در H^2

- قضیه 10 : اگر P و Q نقاطی در H^2 باشند، آنگاه

1. $d(P,Q) \geq 0$
2. $d(P,Q) = 0$ اگروتنهااگر $P = Q$
3. $d(P,Q) = d(Q,P)$

فاصله در H^2

- اکنون نامساوی مثلث را مورد توجه قرار می دهیم. اثبات این نامساوی درهندسه کروی، برضرب برداری در E^3 استوار بود. دراینجا ضرب برداری در صفحه هذلولوی مورد استفاده قرار می کیرد.
- قضیه 11 (نامساوی مثلث) : فرض کنید P، Q و R نقاطی در H^2 باشند. در این صورت داریم :

$$d(Q,R) \leq d(P,Q) + d(P,R)$$

وتساوی برقرار است اگروتنهااگر P، Q و R بریک خط و P بین Q و R واقع باشد.

ایزومتری های H^2

- نگاشت $T : H^2 \to H^2$ رایک ایزومتری H^2 می نامیم. اگر به ازای هر x وهر y متعلق به H^2 داشته باشیم

$$d(TX,Ty) = d(x,y)$$

همچون هندسه های E^2، S^2 و P^2 در H^2 نیز ایزومتریها همخطی را حفظ می کنند. بویژه، قضیه زیر را داریم.

- قضیه 12 : فرض کنید T یک ایزومتری H^2 باشد. دراین صورت P، Q و R در H^2 ، بریک خطند اگروتنهااگر TP، TQ و TR بریک خط باشند.

انعکاس

- فرض کنید α خطی در H^2 با بردار یکه قائم ξ باشد. برای هر $x \in R^3$ قرار می دهیم

$$\Omega_\alpha x = x - 2b(x,\xi)\xi$$

- قضیه 13 :

1. $\Omega^2_\alpha = 1$
2. Ω_α یک نگاشت دوسویی است از R^3 به R^3 است.
3. به ازای هرx وy متعلق به R^3، $\mathbf{b(\Omega_\alpha x , \Omega_\alpha y) = b(x,y)}$

انعکاس

- نتیجه : به ازای هرخط α در H^2 و هر نقطه $x \in R^3$ داریم

1. اگر x زمان گونه باشد، $\Omega_\alpha x$ نیززمان گونه است.
2. اگر x نورگونه باشد، $\Omega_\alpha x$ نیز نور گونه است.
3. اگر x فضا گونه باشد، $\Omega_\alpha x$ نیز فضاگونه است.
4. اگر x برداری یکه باشد، $\Omega_\alpha x$ نیز برداری یکه است.
5. اگر $x \in H^2$ ، آنگاه $\Omega_\alpha x \in H^2$.

انعکاس

- تعریف : به ازای هر خط α در H^2، تحدید Ω_α به H^2 را انعکاس نسبت به α می نامیم.
- قضیه 14: هرانعکاس یک ایزومتری H^2 است.
- قضیه 15 : فرض کنید β خطی در H^2 با بردار یکه قائم η باشد. دراین صورت

$$\Omega_\alpha \beta = \{ x \in H^2 \mid b(x, \Omega_\alpha \eta) = 0 \}$$

یعنی، اگر بردار یکه قائم خط β، η باشد، برداریکه قائم خط $\Omega_\alpha \beta$ برابر با $\Omega_\alpha \eta$ است.

انعکاس

- قضیه 16 :

1. فـرض کنیـد x نقطـه ای در H^2 باشـد. درایـن صـورت $\Omega\alpha x = x$ اگروتنهااگر $x \in \alpha$.
2. فـرض کنیـد β خطـی در H^2 باشـد. درایـن صـورت $\Omega_\alpha \beta = \beta$ اگروتنهااگر $\alpha = \beta$ یا $\beta \perp \alpha$.

حرکت H^2

- همچون گذشته، ایزومتری ای که حاصلضرب تعدادی متناهی ازانعکاسها باشد رایک حرکت می نامیم علاوه برانعکاس چهارنوع حرکت دیگر وجود دارند. خطهای α و β را در H^2 در نظر می گیریم.

اگر α و β درنقطه P متقاطع باشند، دراین صورت $\Omega_\alpha\Omega_\beta$ یک دوران حول P نامیده می شود.

حرکت H^2

- اگر α و β موازی باشند، آنگاه $\Omega_\alpha\Omega_\beta$ یک تغییر مکان موازی نامیده می شود.

اگر α و β فراموازی بوده وعمود مشترک آنها L باشد، $\Omega_\alpha\Omega_\beta$ را یک انتقال درامتداد L می نامیم.

یک لغزه در H^2، حاصلضرب یک انعکاس نسبت به L ویک انتقال درامتداد L است. خط L ومحور لغزه می نامیم.

دوران

- فرض کنید P نقطه دلخواهی متعلق به H^2 باشد. مجموعه دورانهای حول P رابا ROT(P) نشان می دهیم. می خواهیم ماتریسهای نمایشگر اعضای ROT(P) را به دست آوریم وثابت کنیم که ROT(P) گروهی یکریخت با SO(2) است.

دوران

- پایه متعامد یکه $\{e_1 , e_2 , e_3\}$ را چنان اختیار می کنیم که $P = e_3$. اگر α خطی باشد که از P می گذرد، می توان نوشت

$$\alpha = \{ x \mid b(x,\xi) = 0 \}$$

که درآن

$$\xi = (-\sin\theta)e_1 + (\cos\theta)e_2$$

دوران

- حال اگر β خط دیگری با قطب

$$\eta = (-\sin\varphi)e_1 + (\cos\varphi)e_2$$

باشد که از P می گذرد، آنگاه ماتریس Ω_β مانند ماتریس Ω_α است که درآن φ به جای θ قرار می گیرد. ماتریس $\Omega_\alpha\Omega_\beta$ عبارت است از :

$$\begin{bmatrix} \cos 2(\theta-\varphi) & -\sin 2(\theta-\varphi) & 0 \\ \sin 2(\theta-\varphi) & \cos 2(\theta-\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rot\ 2(\theta-\varphi) & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

دوران

- گروه تولید شده توسط انعکاسهای نسبت به خطوط گذرنده از P را با REF(P) نشان می دهیم. نگاشت $\Omega_\alpha \rightarrow \mathbf{ref}\theta$ یک یکریختی از REF(P) به روی O(2) به دست می دهد. تحت این یکریختی ROT(P) با SO(2) یکریخت می گردد.

دوران

- قضیه 17 (قضیه سه انعکاس) : فرض کنید α، β و γ خطوطی در H^2 باشند که از P می گذرد. دراین صورت خط چهارمی چون δ گذرنده از P وجود دارد، به طوری که

$$\Omega_\alpha \Omega_\beta \Omega_\gamma = \Omega_\delta$$

دوران

- قضیه نمایش دورانها به صورت زیردر می آید.
- قضیه 18 : فرض کنید P یک دوران حول P باشد. اگر L خطی گذرنده از P باشد، آنگاه خطهای m و m′ وجود دارند که از P می گذرند و

$$P = \Omega_L \Omega_m = \Omega_{m'} \Omega_L$$

H^2 بعنوان زیرمجموعه ای از P^2

- اکنون نشان می دهیم که صفحه هذلولوی را می توان یک زیرهندسه P^2 تلقی کرد. زیرمجموعه D^2 از P^2 را به صورت زیرتعریف می کنیم

$$D^2 = \{ \pi x : b(x,x) < 0 \}$$

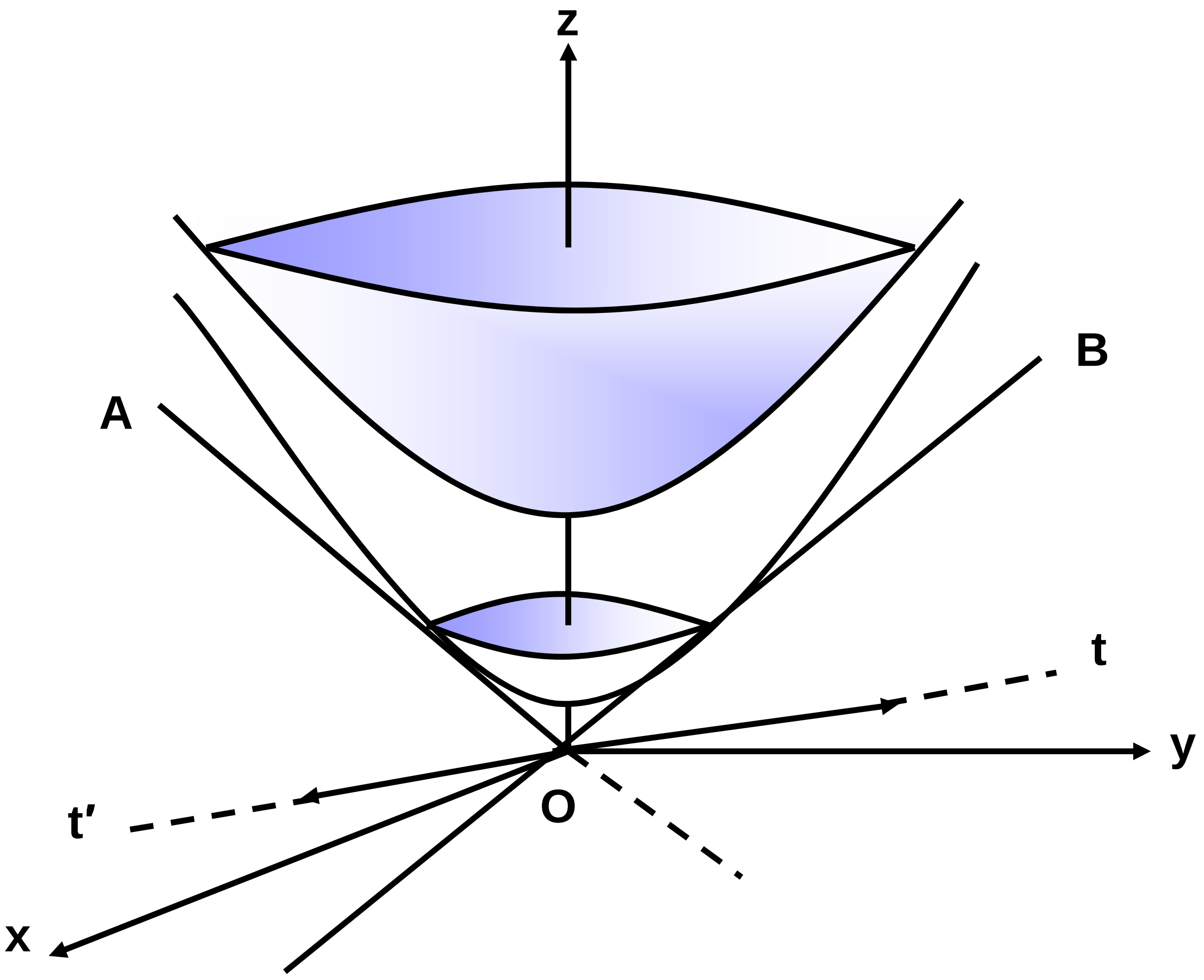
نقاط D^2 را می توان نقاط درونی مقطع مخروطی $b(x,x)=0$ تلقی کرد. سایرنقاط P^2 یعنی نقاط πx باشرط $b(x,x) > 0$، رانقاط خارجی D^2 می نامیم.

فرض کنید $\pi : R^3 - \{0\} \rightarrow P^2$ تابع تصویرطبیعی است.

H^2 بعنوان زیرمجموعه ای از P^2

- درشکل زیر مشاهده می کنیم که هرخطی از R^3 که ازمبدا مختصات بگذرد و $H^2 = \{ x : b(x,x) = -1 \}$ را در نقطه ای قطع کند، به نقطه ای در D^2 تصویر می گردد. هرخطی که روی مخروط $b(x,x)=0$ باشد، یعنی هر خطی که روی مخروط $x^2 + y^2 – z^2 = 0$ باشد، به نقطه ای روی مرز D^2 تصویر می گردد.
- تصویر اسلاید بعدی را ببینید.

H^2 بعنوان زیرمجموعه ای از P^2



H^2 بعنوان زیرمجموعه ای از P^2

- درواقع هرخطی که روی مخروط AOB رسم شود، توسط π به یک نقطه از مرز D^2 تصویر می گردد. وهر خطی که در داخل این مخروط رسم شود. یعنی هرخطی که H^2 را در نقطه ای قطع کند، به نقطه ای درداخل D^2 تصویر می گردد. ونیز تصویر خطی چون ot   t که خارج مخروط AOB واقع است، نقطه ای درخارج D^2 است.

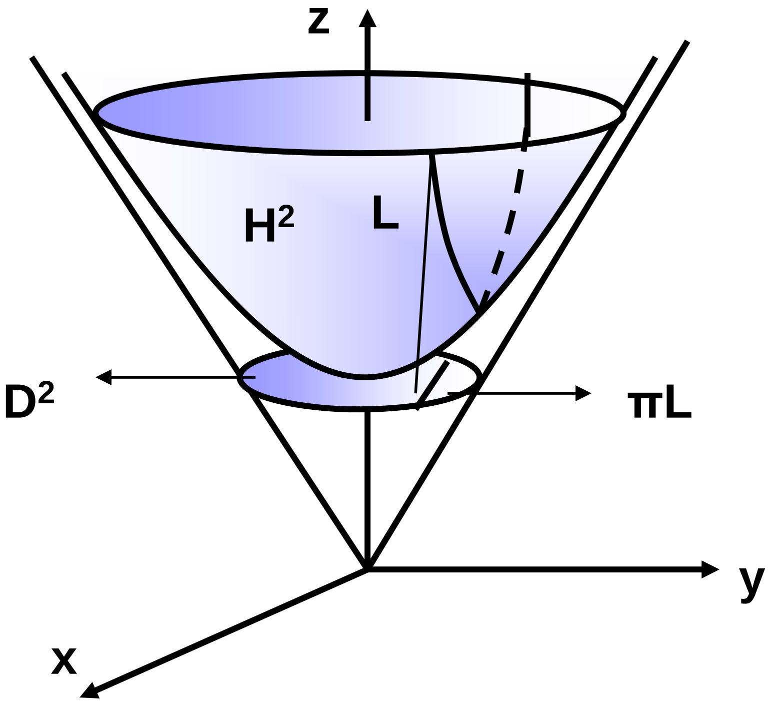
H^2 بعنوان زیرمجموعه ای از P^2

- قضیه 19 :

1. تصویرطبیعی $P^2 \to \{0\} - \pi : R^3$ تناظری دوسویی از H^2 به روی D^2 به دست می دهد.
2. به ازای هر نقطه $x \in P^2$ که خارج D^2 است، تنها یک جفت $\{ \xi, -\xi \}$ ازبردارهای یکه فضا گونه وجود دارد به طوری که $x = \pi(-\xi) = \pi\xi$. برعکس هر برداریکه فضا گونه، چنین نقطه ای رادرخارج D^2 معین می کند.
3. بردار $v \in R^3$ نورگونه است اگروتنهااگر πv روی مقطع مخروطی قرارگیرد.

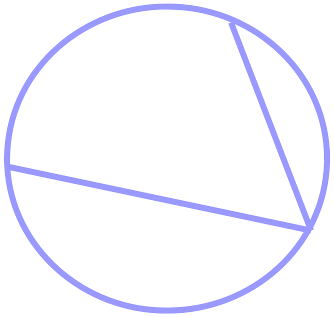
H^2 بعنوان زیرمجموعه ای از P^2

- قضیه 20 : درالگویی که درقضیه 19 توصیف شد، اگر L خطی در H^2 باشد آنگاه πL وتری درقرص D^2 است. نقاط انتهایی این وترمتعلق به هیچ یک از مجموعه های D^2 و πL نیستند.

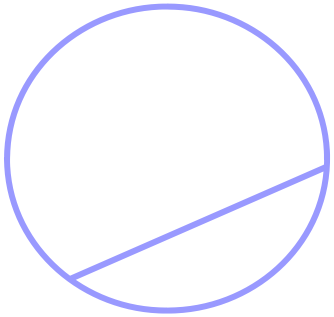


H^2 بعنوان زیرمجموعه ای از P^2

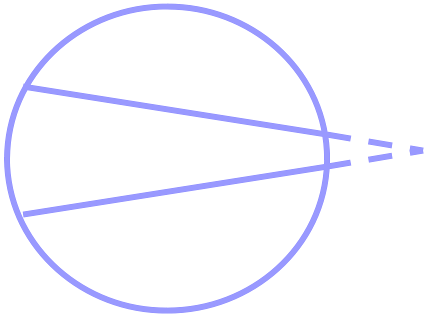
- تذکر : با توجه به آنچه که بیان شد، نمایش برخی ازمفاهیم H^2 را در D^2 درشکل های زیرمی آوریم.



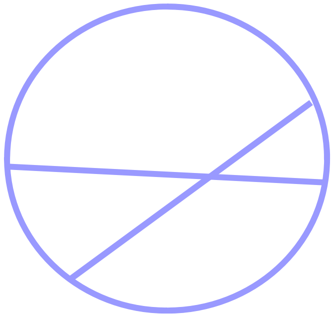
خطهای موازی



یک خط هذلولوی، وتری که نقاط انتهایی آن جزوخط نیستند.



خطهای فراموازی



خطهای متقاطع

H^2 بعنوان زیرمجموعه ای از P^2

- قضیه 21 : فرض کنید L_1 و L_2 خطهایی در H^2 باشند. دراین صورت

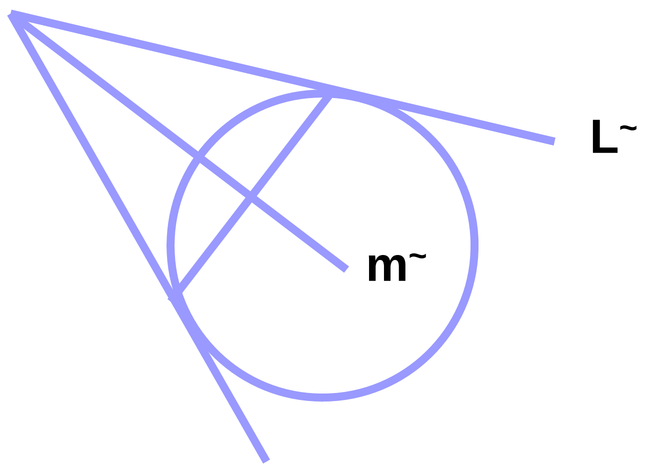
1. L_1 و L_2 متقاطع هستند اگروتنهااگر $\tilde{L}_1$ و $\tilde{L}_2$ در D^2 متقاطع باشند.
2. L_1 و L_2 موازیند اگروتنهااگر $\tilde{L}_1$ و $\tilde{L}_2$ درنقطه ای برمرز D^2 متقاطع باشند.
3. L_1 و L_2 فراموازیند اگروتنهااگر $\tilde{L}_1$ و $\tilde{L}_2$ درخارج D^2 متقاطع باشند.

H^2 بعنوان زیرمجموعه ای از P^2

- قضیه 22 : خطهای L_1 و L_2 متعامدند اگروتنهااگر $\tilde{L}_1$ و $\tilde{L}_2$ مزدوج باشند.
- قضیه 23 : فرض کنید L خطی در H^2، و P و Q محل تلاقی $\tilde{L}$ با مقطع مخروطی در P^2 باشند. دراین صورت قطب $\tilde{L}$ محل تلاقی خطهای مماس برمقطع مخروطی درنقاط P و Q است.

بعنوان زیرمجموعه ای از P^2 H^2

- نتیجه : خطهای m و L در H^2 متعامدند. اگروتنهااگر ~m ازقطب ~L بگذرد.



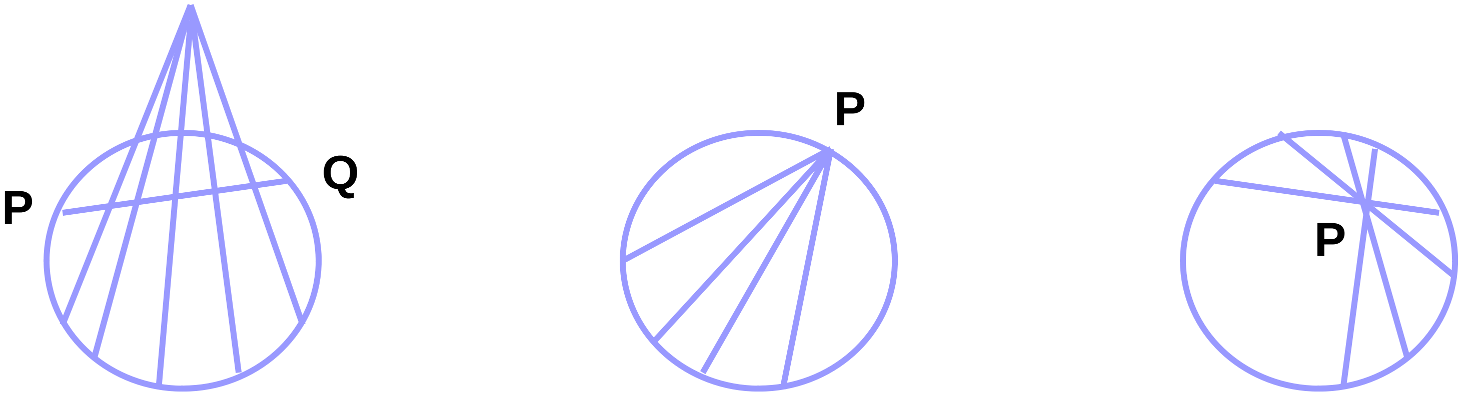
H^2 بعنوان زیرمجموعه ای از P^2

- قضیه 24 : هرنقطه P از P^2 یک دسته خطوط از H^2 به شرح زیرمعین می کند.

1. نقطه $P = \pi x \in D^2$ یک دسته خطوط گذرنده، از $x \in H^2$ را معین می کند.
2. نقطه $P = \pi v$ (که v نورگونه است) یک دسته خطوط موازی را در H^2 معین می کند.
3. نقطه $P = \pi \xi$ (که درآن ξ برداریکه فضا گونه است) یک دسته خطوط فراموازی را در H^2 معین می کند. عمود مشترک این دسته خطوط خط قطبی نظیرنقطه P است.

H^2 بعنوان زیرمجموعه ای از P^2

- شکل های قضیه قبل :



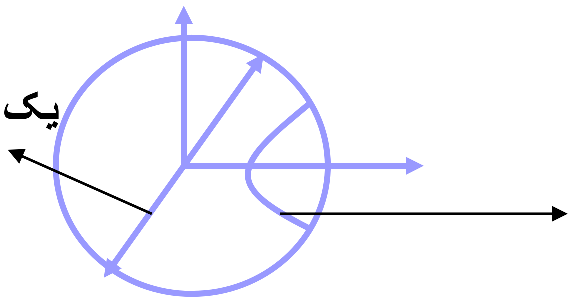
الف ب پ

H^2 بعنوان زیرمجموعه ای از P^2

- الگوی D^2 که دراین قسمت معرفی شد، الگوی کلاین برای هندسه هذلولوی نامیده می شود. دوالگوی دیگر ازاین هندسه منسوب به پوانگاره وجود دارد که درزیر به اختصار معرفی می شوند ثابت می شود که این الگوها دوبدو یکریختند.

H^2 بعنوان زیرمجموعه ای از P^2

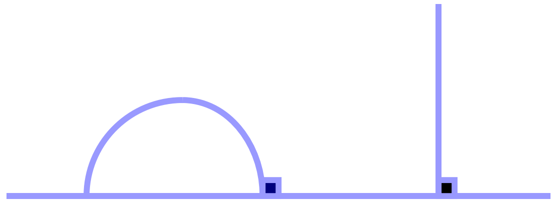
- الف : الگوی قرص درصفحه اقلیدسی xoy نقاط داخل دایره c به معادله $x^2 + y^2 = 1$ را نقاط صفحه هذلولوی می گیریم. هرقطر دایره c یا قسمتی از هردایره عمود بر c را که داخل c قرار داشته باشد، یک خط هذلولوی می نامیم.



ثابت می شود که این مجموعه ازنقاط وخطوط درتمام اصول هندسه هدلولوی صدق می کند این الگوی هندسه هذلولوی صدق می کند این الگوی هندسه هذلولوی راالگوی قرص پوانگاره می نامیم.

بعنوان زیرمجموعه ای از P^2 H^2

- ب : الگوی نیمصفحه فوقانی درصفحه xoy مجموعه نقاط $v = \{ (x,y) \mid y>0 \}$ راصفحه هذلولوی می گیریم. هرنیمخط اقلیدسی واقع بر v وعمود برمحور x، باهر نیمدایره واقع برv به مرکز واقع برمحور x رایک خط هذلولوی می نامیم.



ثابت می شود که این الگونیز درکلیه اصول هندسه هذلولوی صدق می کند. این الگو راالگوی نیمصفحه پوانگاره می نامیم. متذکر می شویم که درالگوهای پوانگاره اندازه گیری زاویه ها به طریق اقلیدسی صورت می گیرد.

تغییرمکان موازی

- فرض کنید P دسته خطوطی باشد که توسط دوخط موازی بابردارهـای قـائم یکـه ξ و η تعیـین مـی گـردد. باانتخـاب بردارهای یکه $e_1 = \xi$ و $e_3 \in H^2$ و $e_2 = e_3 \times e_1$ یـک پایه متعامد یکه برای R^3 درنظر می گیریم.

تغییرمکان موازی

- قضیه 25 : نسبت به پایه { e_1 , e_2 , e_3 } مذکور دربالا، فرض می کنیم دسته خطوط P شامل خطهای بابردارهای یکه قائم (1,0,0) و (1,μ,-μ) باشد، دراین صورت P شامل تمام خطوط بابردارهای یکه قائم (1,r,-r) است که درآن r در مجموعه اعداد حقیقی تغییر می کند.

تغییرمکان موازی

- قضیه 26 (قضیه سه انعکاس) : اگر α، β و γ سه خط متعلق به یک دسته خطوط باشند، آنگاه خط δ متعلق با این دسته خطوط موجود است، به طوری که

$$\Omega_\alpha \Omega_\beta \Omega_\gamma = \Omega_\delta$$

- قضیه 27 : فرض کنید P یک تغییرمکان موازی حاصل ازدسته خطوط P باشد اگر L خطی در P باشد، آنگاه خطهای m و m′ متعلق به P وجود دارند به طوری که

$$P = \Omega_L \Omega_m = \Omega_{m'} \Omega_L$$

انتقال

- فرض کنید P یک دسته خطوط فراموازی با عمود مشترک L باشد. فرض کنید e_1 یک برداریکه قائم بر L است. بردارفضا گونه e_2 وبردار زمان گونه e_3 راچنان اختیار می کنیم که $\{ e_1 , e_2 , e_3 \}$ یک پایه متعامد یکه برای R^3 باشد.

انتقال

- فرض کنید α یک خط دلخواه متعلق به P با برداریکه قائم $\xi = (a,b,c)$ باشد، دراین صورت داریم

$$\xi = ae_1 + be_2 + ce_3$$

$$b(\xi,e_1) = a + 0b - 0c = 0$$

$$a^2 + b^2 - c^2 = 1$$

انتقال

- اگر β خط دیگری ازدسته خطوط P باشد که توسط عدد v پارامتری می شود آنگاه با محاسبه ای ساده می توان دید:

$$\Omega_\alpha \Omega_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh 2k & \sinh 2k \\ 0 & \sinh 2k & \cosh 2k \end{bmatrix}$$

که درآن $k = u - v$.

انتقال

- قضیه 28 (قضیه سه انعکاس) : اگر α، β و γ سه خط متعلق به سک دسته خطوط فراموازی باشند، آنگاه خط δ متعلق به این دسته خطوط موجود استف به طوری که

$$\Omega_\alpha \Omega_\beta \Omega_\gamma = \Omega_\delta$$

- قضیه 29 (نمایش انتقالها) : فرض کنید P یک انتقال درامتداد خط L باشد اگر m خطی عمود بر L باشد، آنگاه خطهای α و α′ عمود بر L وجود دارند به طوری که

$$P = \Omega_m \Omega_\alpha = \Omega_{\alpha'} \Omega_{m'}$$

انتقال

- فرض کنید P یک دسته خطوط فراموازی و L عمود مشترک اعضای P باشد. گروه تولید شده توسط انعکاس های نسبت به خطوط P را با REF(P) نشان می دهیم فرض کنید TRANS(L) مجموعه انتقالهای درامتداد L باشد خصوصیات این مجموعه را بررسی کنید.

لغزه

- نسبت به پایه ای که دربخش قبل مورد استفاده قرار دادیم، ماتریس لغزه $\Omega_L T_k$ را به دست می آوریم.

$$\Omega_L \Omega_k = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh 2k & \sinh 2k \\ 0 & \sinh 2k & \cosh 2k \end{bmatrix}$$

حاصلضرب بیش از سه انعکاس

- درهر یک ازهندسه هایی که پیش از این مطالعه کرده ایم، هرحرکت را می توان به صورت دویا سه انعکاس نوشت. این مطلب در H^2 نیزصحیح است. چون ویژگی های وقوع در H^2 پیچیده ترند، دراثبات این مطلب باید حالتهای زیادی را درنظرگرفت. هدف این است که نشان دهیم هر چهار انعکاس Ω_δ، Ω_γ، Ω_β و Ω_α را می توان به صورت حاصلضرب دوانعکاس نوشت.

حاصلضرب بیش از سه انعکاس

- قضیه 30 : فرض کنید p یک نقطه و P یک دسته خطوط درH^2 باشند. دراین صورت، خطی متعلق به P وجود دارد که از p می گذرد. این خط منحصربفرد است مگردرحالتی که اعضای P از p بگذرد.

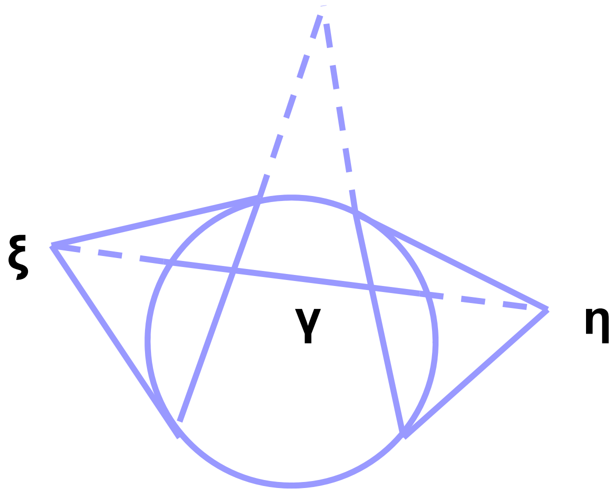
حاصلضرب بیش از سه انعکاس

- قضیه 31 : فرض کنید P_1 یک دسته خطوط موازی باشد، اگر $\gamma \in P_1$ و P_2 دسته خطوطی مشتمل برتمام خطهای عمود برخط γ باشد، آنگاه تنها یک خط وجود دارد که به هردو دسته خطوط متعلق است.
- قضیه 32 : هر دودسته متمایز ازخطوط موازی دارای خط مشترک منحصربفردی هستند.

حاصلضرب بیش از سه انعکاس

- تذکر : دودسته ازخطهای فراموازی دارای خط مشترک هستند، اگروتنهااگر عمود مشترک خطهای دسته اول وعمود مشترک خطهای دسته دوم خود فراموازی باشند. این مطلب بررسی این سوال را که چه موقعی دودسته خطوط دارای عضو مشترکند، کامل می کند. اکنون اطلاعات کافی برای حل مساله مطرح شده درابتدای این بخش دردست داریم. به شکل اسلاید بعد توجه کنید.

حاصلضرب بیش از سه انعکاس



شکل قضیه 7 : دودسته خطوط فراموازی با خط مشترک γ

- قضیه 33 : به ازای خطهای α، β، γ و δ خطهای u و v وجود دارند به طوری که

$$\Omega_\alpha \Omega_\beta \Omega_\gamma \Omega_\delta = \Omega_u \Omega_v$$

حاصلضرب بیش از سه انعکاس

- قضیه 34 : فرض کنید خطهای α، β و γ به هیچ دسته خطوط خاصی متعلق نباشد، دراین صورت $\Omega_\alpha\Omega_\beta\Omega_\gamma$ یک لغزه نابدیهی است.
- اکنون می توان قضیه رده بندی حرکتهای H^2 را به شرح زیربیان کرد.
- قضیه 35 : گروه حرکتهای H^2 مشتمل است برتمام انعکاسها ، دورانها، انتقالها و تغییرمکان های موازی ولغزه هرحرکت حاصل ضرب دو یا سه انعکاس مناسب است.

نقاط ثابت ایزومتریها

- ایزومتری $p = \Omega_\alpha \Omega_\beta$ درنظر بگیرید نقاط ثابت این ایزومتری جوابهای معادله $px = x$ یا $\Omega_\beta x = \Omega_\alpha x$ در H^2 هستند.
- قضیه 36 :

1. یک انتقال نابدیهی دارای نقطه ثابت نیست.
2. هردوران نابدیهی دقیقا دارای یک نقطه ثابت، به نام مرکز دوران است.

نقاط ثابت ایزومتریها

3. یک تغییرمکان موازی نابدیهی دارای نقطه ثابت نیست.
4. هرانعکاس، خطی ازنقاط ثابت به نام محور انعکاس دارد.
5. یک لغزه نابدیهی دارای نقطه ثابت نیست.

خطوط ثابت ایزومتریها

- اگر Ω_α انعکاسی باشد که بردار یکه قائم بر محورآن ξ است، آنگاه Ω_α خطهایی را که برداریکه قائم هریک از آنها دررابطه $\Omega_\alpha \varsigma = \pm \xi$ صدق می کنند، ثابت نگه می دارد. یعنی ς باید بر ξ عمود باشد یا $\xi \pm = \varsigma$

خطوط ثابت ایزومتریها

- قضیه 37 : اگر α و β دوخط متمایز در H^2 باشند، آنگاه ایزومتری $\Omega_\alpha\Omega_\beta$ درباره خط ثابت رفتاری به شرح زیردارد.

1. اگر α و β در نقطه p تلاقی کنند و $\beta \perp \alpha$ آنگاه هرخط گذرنده از p، توسط $\Omega_\alpha\Omega_\beta$ ثابت نگه داشته می شود دراین حالت $\Omega_\alpha\Omega_\beta$ نیمدورحول p است.
2. اگر α و β در p تلاقی کنند ولی برهم عمود نباشند، آنگاه $\Omega_\alpha\Omega_\beta$ دارای خط ثابتی نیست.

خطوط ثابت ایزومتریها

3. اگـــر α و β مـــوازی باشـــند، $\Omega_\alpha\Omega_\beta$ دارای خـــط ثابـــت نیست. لذا تغییرمکان موازی خط ثابت ندارد.
4. اگر α و β دارای عمـود مشـترک چـون p باشـند، آنگـاه $\Omega_\alpha\Omega_\beta$ خط L راثابت نگـه مـی دارد. ایـن ایزومتـری خـط ثابت دیگری ندارد.

- قضیه 38 : فرض کنید خط γ برخطـوط متمـایز α و β عمـود باشـد. درایـن صـورت خـط γ تنهـا خـط ثابـت لغـزه نابدیهی $\Omega_\alpha\Omega_\beta\Omega_\gamma$ است.

پاره خط، نیمخط، زاویه و مثلث

- نقطه p رادرنظرمی گیریم. مـی دانیم کـه هرخط گذرنـده از p را می توان به صورت پارامتری کرد

$$\alpha(t) = (\cosh t)p + (\sinh t)\xi$$

کـه درآن ξ بـردار فضـا گونـه مناسـبی اسـت. اگـر $L>0$ مجموعه $\alpha([0,L])$ رایک پاره خط بطول L می نامیم.

پاره خط، نیمخط، زاویه و مثلث

- قضیه 39 :

1. دونقطه متمایز A و B نقاط انتهایی دقیقا یک پاره خط هستند. این پاره خط رابا AB یا BA نشان می دهیم. طول AB برابربا d(A,B) است.
2. هرنیمخط دقیقا دارای یک مبدااست. به ازای هرجفت ازنقاط A و B دقیقا یک نیمخط با مبدا A وجود دارد که از B می گذرد این نیمخط رابا AB نشان می دهیم.

پاره خط، نیمخط، زاویه و مثلث

- تعریف : برداریکه فضاگونه ξ راکه درتعریف خط α ذکرشد، بردارجهت نیمخط ($[0, \infty]$)α می نامیم توجه می کنیم که $b(p,\xi) = 0$.
- تعریف : اگر L خطی با برداریکه قائم ξ باشد، مجموعه

$$\{ x \in H^2 \mid b(x,\xi)>0 \}$$

یک نیم خط بامرز L نامیده می شود.

پاره خط، نیمخط، زاویه و مثلث

- قضیه 40 : مرزهر نیمصفحه یک خط منحصربفرد است. هرخط مرز دونیم صفحه است. اجتماع این دونیم صفحه برابربا $L - H^2$ است. دونقطه متعلق به $L - H^2$ دریک نیمصفحه هستند، اگروتنهااگر پاره خط واصل آنها L راقطع نکند.
- تعریف : درون زاویه $\angle PQR$ اشتراک نیمصفحه بامرز QR وشامل p ونیم صفحه بامرز PQ وشامل R است. این تعریف درمورد زاویه نیمصفحه وزاویه صفر درست نیست. این زاویه ها درون ندارند.

پاره خط، نیمخط، زاویه و مثلث

- قضیه 41 : فرض کنید $A = \angle PQR$ زاویه ای باشد که درون دارد اگر ξ و η بردارهای جهت اضلاع این زاویه باشند، آنگاه درون آن مشتمل است برتمام نقاط x به طوری که بردارجهت نیم خط QX یک ترکیب خطی مثبت از ξ و η است. (یعنی اگر ς_x جهت نیمخط QX باشد آنگاه اعداد مثبت a و b وجود دارند به طوری که $\varsigma_x = a\xi + b\eta$.)

جمع زاویه ها

- قضیه 42 :

1. زاویه $A = \angle PQR$ ونقطه X رادرداخل آن را درنظر می گیریم. دراین صورت اندازه این زاویه برحسب رادیان مساوی است بااندازه زاویه های $\angle PQX$ و $\angle RQX$.
2. اگر $A = \angle PQR$ یک زاویه نیمصفحه و X نقطه ای ناواقع بر PQ باشد، آنگاه مجموع اندازه های زاویه های $\angle XQP$ و $\angle XQR$ برابراست با π.

جمع زاویه ها

- وقتی زاویه PQR∠ نیمصفحه است، ς رانمیتوان برحسب ξ و η نوشت البته چنین رابطه ای هم مورد نیازنیست تساوی مورد نیاز دراین حالت به تساوی زیر تبدیل می گردد.

$$\cos^{-1}b(\xi,\varsigma) + \cos^{-1}(-\xi,\varsigma) = \pi$$

این رابطه یکی از ویژگیهای تابع $\cos^{-1}$ است.

جمع زاویه ها

- تذکر : تمام تعریفهای اقلیدسی مربوط به پیکره های مستقیم الخط و ویژگیهای وابسته به آنها در H^2 نیزبرقرارند. با وجود این، به دلیل هندسه وقوع خاص H^2 ، پیکره های دیگری در H^2 امکان وجود دارند.

مثلث ومثلثات هذلولوی

- مطالعه مثاثها درهندسه هذلولوی آسانترازمطالعه انها در هندسه کروی یاهندسه بیضوی است. زیرا دراین هندسه پاره خطها صورت ساده ای دارند. درهندسه هذلولوی هر جفت ازنقاط متمایز، یک پاره خط منحصربفرد تعیین می کنند. لذا مانند E^2 می توانیم مثلث ΔPQR را به صورت اجتماع پاره خطهای PQ، QR و Pr تعریف می کنیم. هرمثلث دارای سه زاویه است. درون مثلث، اشتراک دورانهای زاویه های آن مثلث است.

مثلث ومثلثات هذلولی

- قضیه 43 : مثلث ABC را درنظر می گیریم اگر a و b و c به ترتیب اندازه اضلاع مقابل به زاویه های A، B و C باشند، آنگاه داریم :

$$\cos A = \frac{\cosh b \cosh c - \cosh a}{\sinh b \sinh c}$$

$$\frac{\sin A}{\sinh a} = \frac{2(\sinh s \sinh(s-a)\sinh(s-b)\sinh(s-c))^{1/2}}{\sinh a \sinh b \sinh c}$$

$$\cosh a = \frac{\cos A + \cos B coc C}{\sin B \sin C}$$

مثلث جانبی

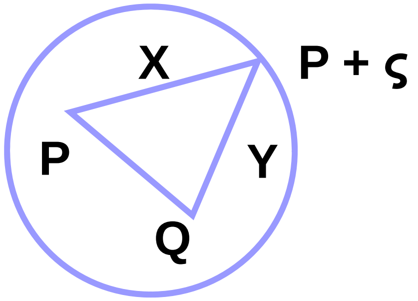
- هرخطی در H^2 متعلق به دودسته خطوط موازی است ولی هرنیمخط تنها یک دسته خطوط موازی تعیین می کند. درواقع اگر ς بردارجهت نیمخط PX باشد، آنگاه $p + \varsigma$ یک بردار نورگونه است با این خاصیت که

$$\{ \xi \mid b(\xi , p + \varsigma) = 0 \}$$

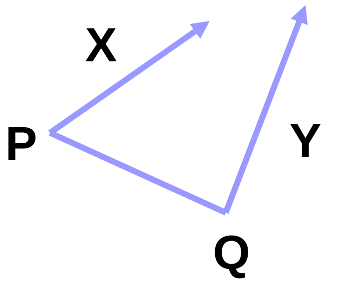
مجموعه بردارهای یکه متعامد بریک دسته خطوط منحصربفرد است(دسته خطوط دیگرکه خط PX به آن نیز تعلق دارد توسط $\varsigma - p$ تعیین می گردد.)

مثلث جانبی

- فرض کنید PQ یک پاره خط و PX و QY نیمخطهای موازی باشند که یک دسته خطوط را تعیین می کنند. دراین صورت اجتماع PQ واین دونیمخط رایک مثلث تک مجانبی می نامیم. مثلث تک مجانبی را می توان یک مثلث معمولی با یک راس در "بینهایت" تلقی کرد.

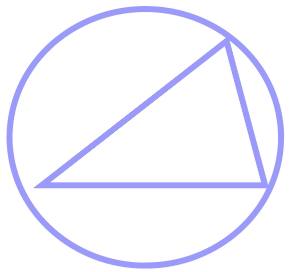


دومنظره از مثلث تک مجانبی

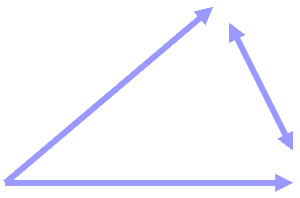


مثلث جانبی

- یک جفت نیمخط PX و PY همراه با خط مشترک دسته های خطوط موازی تعیین شده توسط هریک ازاین نیمخطها یک مثلث دومجانبی نامیده می شود.

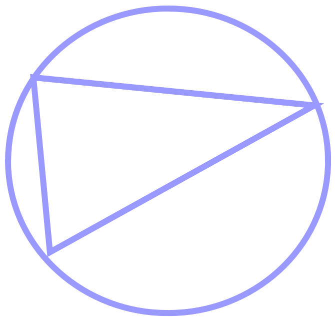


دوچشم انداز از مثلث دومجانبی

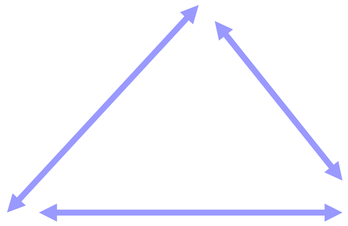


مثلث جانبی

- یک مثلث سه مجانبی مثلثی است که اضلاع آن خطهای دوبدو موازی اند.

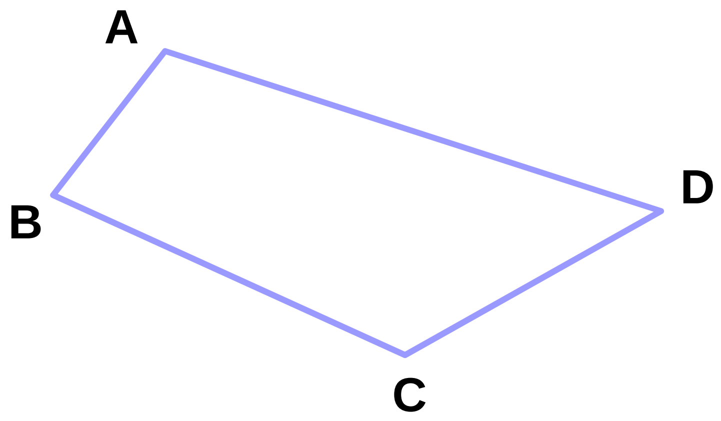


دو چشم انداز از مثلث سه مجانبی



چهارضلعی ها

- یک چهارضلعی محدب مانند ABCD اجتماع چهارپاره خط (ضلع) AB، BC، CD و DA است به طوری که هرضلع دریکی ازنیمصفحه هایی که توسط ضلع مقابلش معیین می گردد قرار دارد.



چهارضلعی محدب

چهارضلعی ها

- اگرچه درهندسه هذلولوی چهاضلعیهای محدب نمی توانند چهارزاویه قائم داشته باشند چندین چهارضلعی وجود دارد که همتای هذلولوی مستطیل تلقی می شوند چهارضلعی ساکری ABCD اولین آنهاست که دارای ویژگیهای زیر است :

$$D(A,B) = d(C,D) \quad , \quad AB \perp BC \quad , \quad CD \perp BC$$

چهارضلعی ساکری

چهارضلعی ها

- چهارضلعی لامبرت ABCD یکی دیگر از همتای هذلولوی مستطیل است. سه زاویه این چهارضلعی قائمه اند.

چهار ضلعی لامبرت

چهارضلعی های منتظم

- درهندسه هذلولوی یک چند ضلعی منتظم باهرتعداد ضلع رامیتوان بصورت زیر رسم کرد. برای مثال، اگربخواهیم یک چند ضلعی منتظم با n ضلع رسم کنیم، دوران

$$T = \Omega_\alpha \Omega_\beta = \begin{bmatrix} \cos 2(\theta - \varphi) & -\sin 2(\theta - \varphi) & 0 \\ \sin 2(\theta - \varphi) & \cos 2(\theta - \varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

چهارضلعی های منتظم

- راچنان انتخاب می کنیم که $2(\theta - \varphi) = 2\pi/n$ دراین صورت رتبه عضو

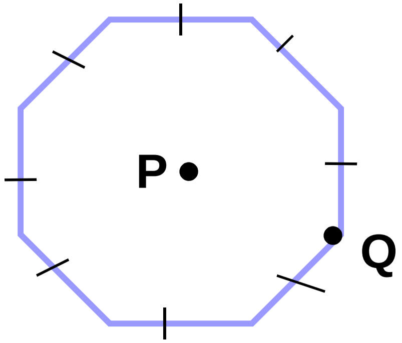
$$T = \begin{bmatrix} \cos\frac{2\pi}{n} & \sin\frac{2\pi}{n} & 0 \\ \sin\frac{2\pi}{n} & \cos\frac{2\pi}{n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

درگروه دورانهای هذلولوی برابربا n است حال اگر T، دوران حول نقطه P و Q نقطه دلخواهی به جز P باشد، آنگاه با توجه به این که T یک ایزومتری است نتیجه می گیریم که :

$$Q\ ,\ TQ\ ,\ \ldots\ ,\ T^{n-1}Q$$

چهارضلعی های منتظم

- رئوس یک n ضلعی منتظم هستند. شکل زیر را ببینید.



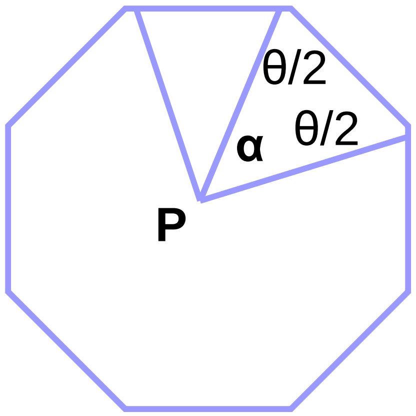
- گروه تقارن n ضلعی حاصل با گروه تقارن n ضلعی منتظم هندسه اقلیدسی یکسان است.

چهارضلعی های منتظم

- به طورکلی، باتوجه به این که مجموع زاویه های مثلث درهندسه هذلولوی کمتر از π است، نتیجه می گیریم که اگر θ اندازه زاویه n ضلعی منتظم باشد، آنگاه $2\pi + n\theta < n\pi$

وبنابراین $0 < \theta < (1 - 2/n)\pi$

عکس این مطلب هم درست است. یعنی به ازای هرθ، با شرط بالا می توان یک ضلعی منتظم با زاویه θ رسم کرد.



$$2\pi + n\theta = n\alpha + (\theta/2 + \theta/2) < n\pi$$

قضیه های قابلیت انطباق

- قضیه 44 : انعکاس منحصربفردی وجود دارد به طوری که یک جفت نقطه داده شده در H^2 را جابجا می کند.
- قضیه 45 : دقیقا دوانعکاس وجود دارد که یک جفت خطوط داده شده در H^2 راابا هم جابجا می کند

رده بندی ایزومتری های H^2

- هدف اصلی این بخش اثبات این مطلب است که هر ایزومتری H^2 یک حرکت در H^2 است. نخست چند قضیه درباره یگانگ می آوریم.
- قضیه 46 : فرض کنید ایزومتری T نقطه P وخط L را که از P می گذرد ثابت نگه می دارد. فرض کنید خط m از P گذشته در L عمود است. دراین صورت L خطی ازنقاط ثابت T یا $\Omega_m T$ است.

رده بندی ایزومتری های H^2

- قضیه 47 : فرض کنید T یک ایزرومتری H^2 است اگرT، خط L را نقطه به نقطه ثابت نگه دارد، آنگاه = T
  Ω_L یا T همانی است.

- قضیه 48 : هرایزومتری صفحه هذلولوی یک حرکت است.

رده بندی ایزومتری های H^2

- به طوری که درقضیه 25 دیدیم. حاصلضرب فوق را می توان به صورت حاصلضرب حداکثرسه انعکاس نوشت. این نکته را دراینجا می توان مستقیما مشاهده کرد. بنا بر قضیه 17، $T_2T_3T_4$ یک دوران حول P یا یک انعکاس نسبت به خطی است که از P می گذرد. بنابراین نتیجه می گیریم که $T = T_1(T_2T_3T_4)$ یک دوران، انعکاس، یا یک لغزه است. علاوه براین تمام اطلاعات لازم برای پیداکردن T_i ها مهیاست.
- نتیجه : هرایزومتری H^2 یک انعکاس، یک دوران، یک تغییرمکان موازی، یک انتقال، یا یک لغزه است.

دایره، دایره زمانی ومنحنی هم فاصله

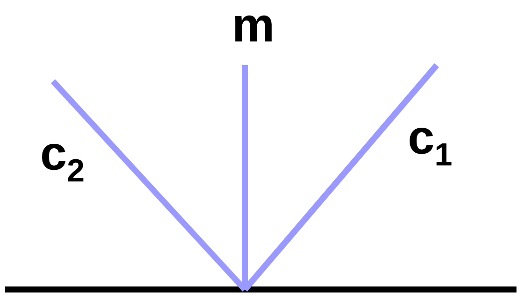
- تعریف : نقطه c وعدد $0 \geq r$ رادر نظر می گیریم مجموعه $\{ x \in H^2 \mid d(x,c) = r \} = P$ را دایره به مرکز c وشعاع r می نامیم.
- قضیه 49 : فرض کنید P دسته خطوط گذرنده ازنقطه c و p نقطه ای دلخواه باشد. دراین صورت مدار p تحت گروه REF(P) دایره به مرکز c وشعاع $r = d(p,c)$ است. برعکس هردایره به این صورت حاصل می شود.

دایره، دایره زمانی ومنحنی هم فاصله

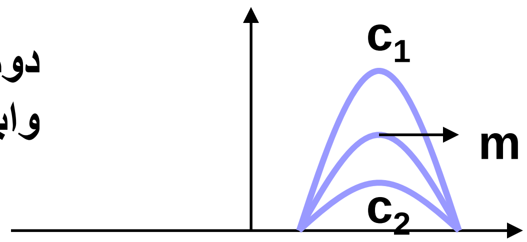
- تعریف : فرض کنید m یک خط و r عددی مثبت باشد. قسمتی ازمجموعه $\{ x \in H^2 : d(x,m) = r \}$ که دریکی ازنیمصفحه های تعیین شده توسط m قراردارد، یک منحنی همفاصله نامیده می شود خط m خود یک منحنی همفاصله با $r = 0$ است.

دایره، دایره زمانی ومنحنی هم فاصله

- تذکر : درشکا زیر، درالگوی نیمصفحه، پوانکاوه منحنیهای همفاصله وابسته به خط m را دردوحالت رسم کرده ایم.



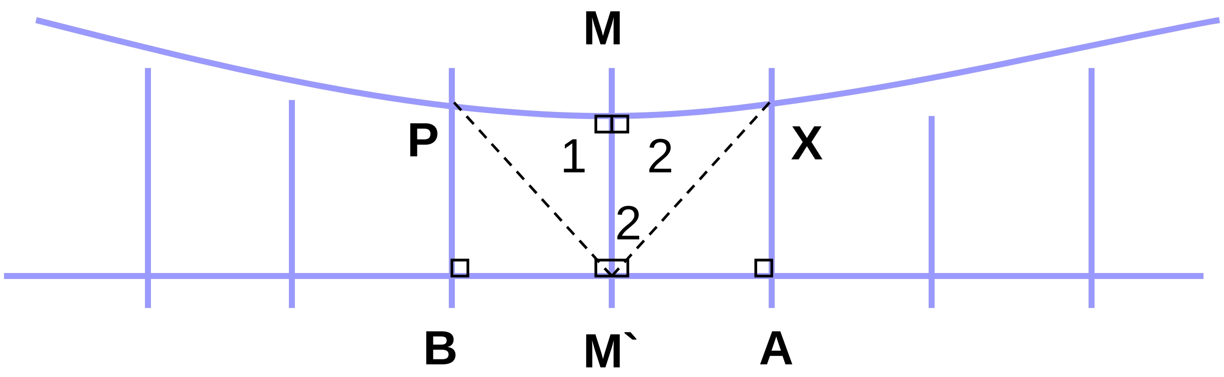
دومنحنی c_1, c_2 منحنی های همفاصله وابسته به خط m است.



توجه می کنیم که درحالت کلی، یک منحنی همفاصله یک "خط" خطی در H^2، نیست بلکه یک منحنی درآن است.

دایره، دایره زمانی ومنحنی هم فاصله

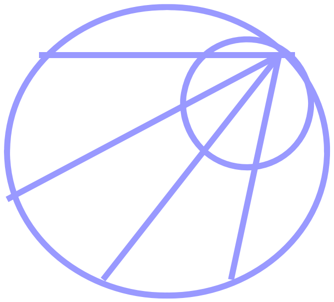
- قضیه 50 : فرض کنید، P دسته خطوط با عمود مشترک m و p نقطه ای دلخواه باشد. دراین صورت مدار p تحت REF(P) یک منحنی همفاصله است. برعکس هرمنحنی همفاصله با این صورت به دست می آید.



منحنی هم فاصله

دایره، دایره زمانی ومنحنی هم فاصله

- تعریف : فرض می کنیم P دسته ای ازخطوط موازی و p نقطه ای دلخواه باشد. مدار p تحت REF(P) را یک دایره زمانی می نامیم.
- تذکر : دایره زمانی را می توان حالت حدی دایره"به مرکز ∞ تلقی کرد درشکل زیریک دایره زمانی رادرالگوی کلاین مشاهده می کنید.



دایره زمانی

دایره، دایره زمانی ومنحنی هم فاصله

- قضیه 51 : فرض کنید v یک بردارغیر صفردر R^3 و a یک عدد حقیقی باشد. دراین صورت، مجموعه

$$\{ x \in H^2 \mid b(x,v) = a \}$$

تهی، دایره، منحنی هم فاصله یا دایره زمانی است.

برعکس هریک ازاین مجموعه ها معادله های به صورت **b(x,v) = a** دارد.

پایان

www.salampnu.com

سایت مرجع دانشجوی پیام نور

- ✓ نمونه سوالات پیام نور : بیش از ۱۱۰ هزار نمونه سوال همراه با پاسخنامه تستی و تشریحی
- ✓ کتاب ، جزوه و خلاصه دروس
- ✓ برنامه امتحانات
- ✓ منابع و لیست دروس هر ترم
- ✓ دانلود کاملا رایگان بیش از ۱۴۰ هزار فایل مختص دانشجویان پیام نور

www.salampnu.com