www.salampnu.com

ریاضی عمومی 1

رشته : زیست شناسی

تعداد واحد : 2

براساس کتاب جهانگیر چشم آور

انتشارات دانشگاه پیام نور

طراح پاورپوینت: رحمت سلطانی
عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه پیام نور شیراز

فهرست مطالب :

دانشگاه پیام نور

فصل اول

مجموعه‌ها و زیرمجموعه‌ها

منوی اصلی

طراح: رحمت سلطانی عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه پیام نور شیراز

هدف کلی

مفاهیم این فصل پیش نیازی برای فصلهای بعدی است.

هدفهای رفتاری

دانشجو پس از مطالعهٔ این فصل باید بتواند:

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

۱. ضمن درک مفهوم مجموعه، مجموعه‌های متناهی و نامتناهی، تساوی مجموعه‌ها، مفهوم زیر مجموعه‌ها و قابلیت مقایسه‌پذیری را بررسی کنند.

۲. عملهای اساسی در مجموعه‌ها مانند اجتماع و اشتراک، تفاضل، متمم را محاسبه کند.

منوی اصلی

۳. یک عدد مختلط داده شده را به‌صورت متعارف بنویسد.

۴. حاصل جمع، حاصلضرب، تفاضل و خارج‌قسمت دو عدد مختلط داده شده را به‌دست آورد.

۵. شکل مثلثاتی و هندسی و ریشهٔ یک عدد مختلط داده شده را به‌دست آورد.

منوی اصلی

۱.۱ مجموعه‌ها

در همهٔ شاخه‌های ریاضیات مجموعه یک مفهوم بنیادی و اساسی است. به‌طور شهودی، هر لیست خوب تنظیم شدهٔ مشخص، هر کلکسیون معین، یا هر دسته از اشیاء

منوی اصلی

مشخص به این معنا که هر کس بتواند بگوید چه شیئی در این لیست تنظیم شده یا این کلکسیون و یا این دسته است و چه شیئی نیست، یک مجموعه است. خواهیم دید

اشیائی که در یک مجموعه هستند هر چیزی می‌توانند باشند مانند: اعداد، افراد، حروف

ستارگان، کشورها و غیره. اشیاء تشکیل‌دهندهٔ هر مجموعه را عضوها (یا عنصرها)ی آن مجموعه می‌نامیم. در اینجا چند مثال خاص از مجموعه‌ها را می‌آوریم:

منوی اصلی

۱.۱.۱ مثال. الف) عددهای ۱, ۳, ۵, ۷, ...

ب) جوابهای معادلهٔ $x^{۲} - ۳x + ۲ = ۰$

ج) همهٔ رودخانه‌های موجود در کشور جمهوری اسلامی ایران

د) همهٔ مردمی که روی کرهٔ زمین زندگی می‌کنند

ه) حروف صدادار الفبای انگلیسی u, o, i, e, a

منوی اصلی

و) شهرهای پایتخت در آسیا

ز) کشورهای ایران، مصر، یونان

همان‌طوری که ملاحظه می‌کنید در این مثالها مجموعه‌هایی هستند که با لیست کردن یکایک عضوهایشان مشخص شده‌اند (مثالهای الف، ه، ز) و مجموعه‌هایی هستند که با

بیان خاصیتهایشان مشخص شده‌اند یعنی دستورهایی که معلوم می‌کند شئ خاصی عضو مجموعه موردنظر هست یا نه (مثالهای ب، ج، د، و).

منوی اصلی

۲.۱.۱ مثال. دسته‌هایی که مجموعه نیستند مانند

الف) دانش آموزانی که در سال آینده وارد دانشگاه می‌شوند.

ب) نمایندگان دورهٔ آیندهٔ مجلس شورای اسلامی

۲.۱ علامت‌گذاری

معمولاً مجموعه‌ها را با حروف بزرگ انگلیسی مانند $A, B, X, Y, \ldots$ نامگذاری می‌کنیم و حروف کوچک مانند $a, b, x, y, \ldots$ دلالت بر عضوهای این مجموعه‌ها می‌کنند.

منوی اصلی

عضوهای مجموعه‌هایی که با لیست کردن یکایک عضوهایشان مشخص شده‌اند

را درون یک جفت آکولاد قرار می‌دهیم و آنها را با کاما از یکدیگر جدا می‌کنیم مانند:

$$A = \{۱, ۲, ۳, \ldots\}$$

اما اگر بخواهیم مجموعه‌ای را با بیان خاصیت عضوهایش مشخص کنیم مانند مثال زیر عمل می‌کنیم.

منوی اصلی

مثال. اگر B مجموعهٔ اعداد زوج فرض شود، آنگاه می‌نویسیم:

$$B = \{x \mid \text{زوج است } x\}$$

هرگاه شئ x عضوی از مجموعهٔ A باشد می‌نویسیم $x \in A$ از طرف دیگر اگر x عضوی از مجموعه A نباشد می‌نویسیم $x \notin A$.

۱.۲.۱ مثال. الف) فرض کنید $A = \{a, e, i, o, u\}$ آنگاه $a \in A$ و $b \notin A$

ب) فرض کنید $B = \{x \mid \text{زوج است } x\}$ آنگاه $۲ \in B$ و $۳ \notin B$

منوی اصلی

۳.۱ مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعه‌ها ممکن است متناهی یا نامتناهی باشند. از نظر شهودی مجموعه‌ای متناهی

است که شامل تعداد معینی عضو باشد یعنی در شمارش عضوهای مختلف مجموعه، کار شمارش به پایان برسد. در غیر این صورت مجموعه نامتناهی است. در واقع یک

مجموعه ممکن است حتی هیچ عضوی نداشته باشد که در این صورت چنین

مجموعه‌ای را مجموعهٔ تهی و یا گاهی اوقات مجموعهٔ پوچ یا خالی می‌نامیم و آن را با علامت { } و یا $\varnothing$ نشان می‌دهیم.

منوی اصلی

۱.۳.۱ مثال. الف) فرض کنید A مجموعهٔ رودخانه‌های موجود در ایران باشد در این صورت A متناهی است.

ب) فرض کنید $B = \{1, 2, 3, \ldots\}$ در این صورت B نامتناهی است.

ج) فرض کنید $C = \{x \mid x^2 = 4 \text{ و } x \text{ فرد است}\}$ آنگاه C مجموعه‌ای تهی است.

منوی اصلی

۲.۳.۱ تمرین. کدام یک از مجموعه‌های زیر، مجموعهٔ تهی است؟

$A = \{x \mid x + ۲ = ۲\}$

$B = \{x \mid x \neq x\}$

$C = \{x \mid x^۲ = ۹$ و $۲x = ۴\}$

$D = \{x \mid$ x حرفی است از الفبا قبل از $a\}$

منوی اصلی

۴.۱ تساوی مجموعه‌ها

۱.۴.۱ تعریف. مجموعهٔ A را مساوی مجموعهٔ B می‌گویند اگر هر دو دارای عضوهای یکسان باشند یعنی هر عضوی که به A تعلق دارد به B هم متعلق باشد و هر عضوی به B تعلق دارد به A هم متعلق باشد و می‌نویسیم $A = B$ اگر A و B مساوی نباشند می‌نویسیم $A \neq B$ در این صورت یا عضوی در B وجود دارد که در A نیست و یا به عکس عضوی در A وجود دارد که در B نیست.

منوی اصلی

۲.۴.۱ مثال. فرض کنید $A = \{x \mid x^2 - 3x = -2\}$ و $B = \{1, 2\}$ و $C = \{2, 1, 1, 2\}$

آنگاه $A = B = C$

منوی اصلی

۵.۱ زیر مجموعه‌ها

مجموعهٔ A را یک زیر مجموعهٔ B گوییم و می‌نویسیم $A \subseteq B$ هرگاه هر عضو مجموعهٔ A عضوی از مجموعهٔ B باشد اگر $A \subseteq B$ ولی $A \neq B$ در این صورت A را یک زیرمجموعهٔ سرهٔ B می‌نامیم.

بنابراین می‌توان گفت دو مجموعهٔ A و B مساویند یعنی $A = B$ اگر و فقط اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ باشد.

منوی اصلی

۶.۱ قابلیت مقایسه

دو مجموعهٔ A و B را قابل مقایسه گویند اگر $A \subseteq B$ و یا $B \subseteq A$ باشد.

۱.۶.۱ مثال. الف) فرض کنید $A = \{a, b\}$ و $B = \{a, b, c\}$ آنگاه A قابل مقایسه با B است.

ب) فرض کنید $A = \{a, b\}$ و $B = \{b, c, d\}$ آنگاه A و B قابل مقایسه نیستند.

منوی اصلی

۷.۱ مجموعهٔ مجموعه‌ها

گاهی اوقات عضوهای یک مجموعه خود مجموعه هستند مثلاً مجموعهٔ همهٔ

زیرمجموعه‌های مجموعهٔ A در چنین حالتی به جای عبارت مجموعهٔ مجموعه‌ها،
عنوان خانوادهٔ مجموعه‌ها یا کلاس مجموعه‌ها و یا دسته‌ای از مجموعه‌ها نیز به کار برده

منوی اصلی

می‌شود. که برای پرهیز از ابهام معمولاً از حروف خطی بزرگ مانند $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots$ برای نمایش خانواده‌ها یا دسته‌های مجموعه‌ها استفاده می‌کنیم.

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

۱.۷.۱ مثال. الف) در هندسه معمولاً می‌گوییم «یک خانواده از خطها» یا یک خانواده از منحنیها، چون خطها و منحنیها خود مجموعه‌های نقاط هستند.

ب) مجموعهٔ {{۱} , {۲ , ۳} , {∅}} یک خانواده از مجموعه‌هاست.

منوی اصلی

۸.۱ مجموعه مرجع

هر جا که تئوری مجموعه‌ها به‌کار گرفته می‌شود همهٔ مجموعه‌های تحت بررسی، زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ ثابت محسوب می‌شوند این مجموعه را مجموعهٔ جهانی

یا مجموعهٔ مرجع یا مجموعهٔ کلی می‌نامیم. و آن را با U نمایش می‌دهیم.

منوی اصلی

۱.۸.۱ مثال. الف) در هندسهٔ مسطحه، مجموعهٔ مرجع شامل همهٔ نقاط صفحه است.

ب) در مطالعات مربوط به جمعیت انسانها، مجموعهٔ مرجع شامل همهٔ انسانهای دنیاست.

منوی اصلی

۹.۱ عملهای اساسی در مجموعه‌ها

در حساب معمولی جمع و تفریق و ضرب را آموختیم در اینجا نیز اعمال اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها را تعریف می‌کنیم یعنی مجموعه‌های جدیدی را نظیر یک زوج مجموعهٔ A و B می‌کنیم.

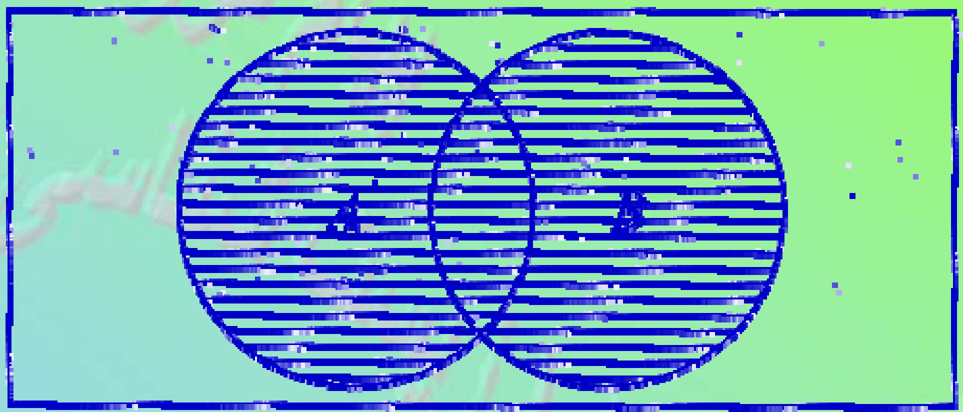
منوی اصلی

۱.۹.۱ تعریف (اجتماع دو مجموعه). اجتماع دو مجموعهٔ A و B ، مجموعهٔ همهٔ عضوهایی است که به A یا به B یا به هر دو تعلق دارند که با $A \cup B$ نمایش می‌دهند

یعنی: $A \cup B = \{x |$ $x \in A$ یا $x \in B$ یا (x متعلق به هر دو)$\}$.

منوی اصلی

۲.۹.۱ مثال. الف) در نمودار شکل زیر، $A \cup B$ را سایه زده‌ایم:



$A \cup B$ (ناحیه سایه خورده)

ب) فرض کنید P مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت و Q مجموعهٔ اعداد حقیقی منفی باشد آنگاه $P \cup Q$ شامل همهٔ اعداد حقیقی به جز صفر است.

منوی اصلی

۳.۹.۱ تبصره. الف) از تعریف اجتماع دو مجموعهٔ A و B مستقیماً نتیجه می‌شود که:

$$A \cup B = B \cup A$$

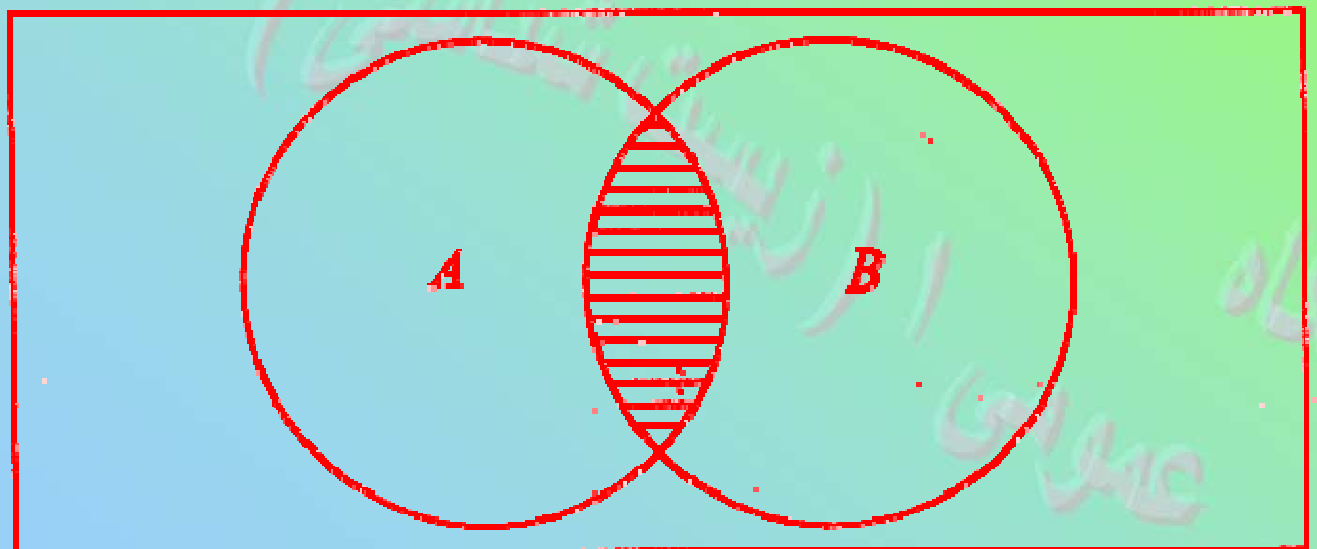
ب) بدیهی است که A و B هر دو همیشه زیر مجموعه‌های $A \cup B$ هستند یعنی:

$$A \subset (A \cup B) \text{ و } B \subset (A \cup B)$$

۵.۹.۱ تعریف (اشتراک دو مجموعه). اشتراک دو مجموعهٔ A و B مجموعهٔ همهٔ عضوهایی است که هم به A و هم به B تعلق دارند و با $A \cap B$ نمایش می‌دهند. یعنی:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ و } x \in B\}$$

۶.۹.۱ مثال. الف) در نمودار شکل زیر، $A \cap B$ را سایه زده‌ایم (سطحی که بین A و B مشترک است).



A ∩ B (ناحیه سایه خورده)

منوی اصلی

ب) فرض کنید $P = \{a, b, c, d\}$ و $Q = \{f, b, d, g\}$ در این صورت

$$P \cap Q = \{b, d\}$$

۷.۹.۱ تبصره. الف) از تعریف اشتراک دو مجموعه مستقیماً نتیجه می‌شود که:

$$A \cap B = B \cap A$$

منوی اصلی

ب) هر یک از مجموعه‌های A و B شامل $A \cap B$ به‌عنوان زیر مجموعه‌های خود هستند یعنی:

$$(A \cap B) \subset A \quad \text{و} \quad (A \cap B) \subset B$$

ج) اگر A و B هیچ عضو مشترکی نداشته باشند آنگاه آنها را مجموعه‌های

جدا از هم می‌نامیم. در این صورت $A \cap B = \varnothing$

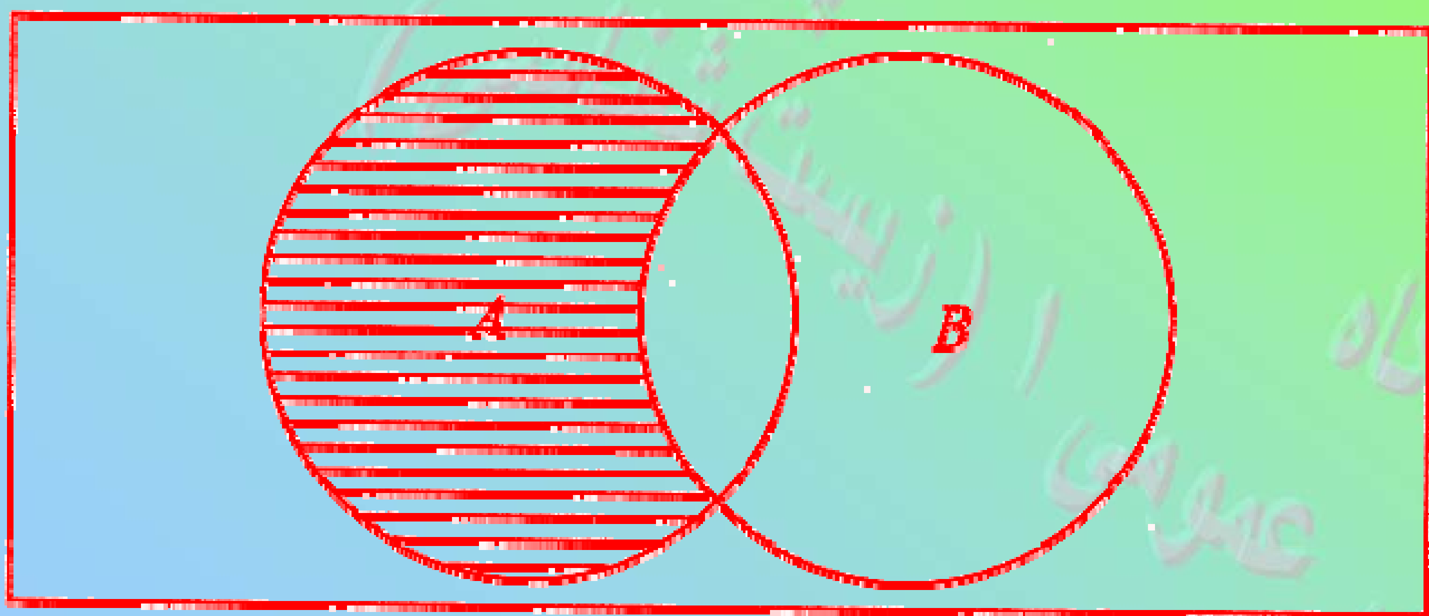
۹.۹.۱ تعریف (تفاضل دو مجموعه). تفاضل مجموعه‌های A و B مجموعهٔ عضوهایی است که به A تعلق دارند اما به B تعلق ندارند و با $A - B$ نشان می‌دهند یعنی:

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ و } x \notin B\}$$

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

۱۰.۹.۱ مثال. الف) در نمودار شکل زیر $A - B$ را سایه زده‌ایم (سطحی در A که هیچ قسمتی از B را ندارد)



$A - B$ (ناحیه سایه خورده)

منوی اصلی

ب) فرض کنید $\mathbb{R}$ مجموعهٔ اعداد حقیقی و $\mathbb{Q}$ مجموعهٔ اعداد گویا باشد آنگاه $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ شامل اعداد اَصَم است.

۱۱.۹.۱ تبصره. الف) $A-B$ زیر مجموعهٔ A است.

ب) مجموعه‌های $A-B$ و $A\cap B$ و $B-A$ دوبه‌دو جدا از هم هستند یعنی اشتراک هر دو تا از آنها مجموعهٔ تهی است.

منوی اصلی

۱۳.۹.۱ تعریف (متمم یک مجموعه). متمم مجموعه‌ای مثل A مجموعهٔ عضوهایی

است که به A تعلق ندارند یعنی اگر $A \subseteq U$ (U مجموعهٔ مرجع است) آنگاه $U - A$ را

منوی اصلی

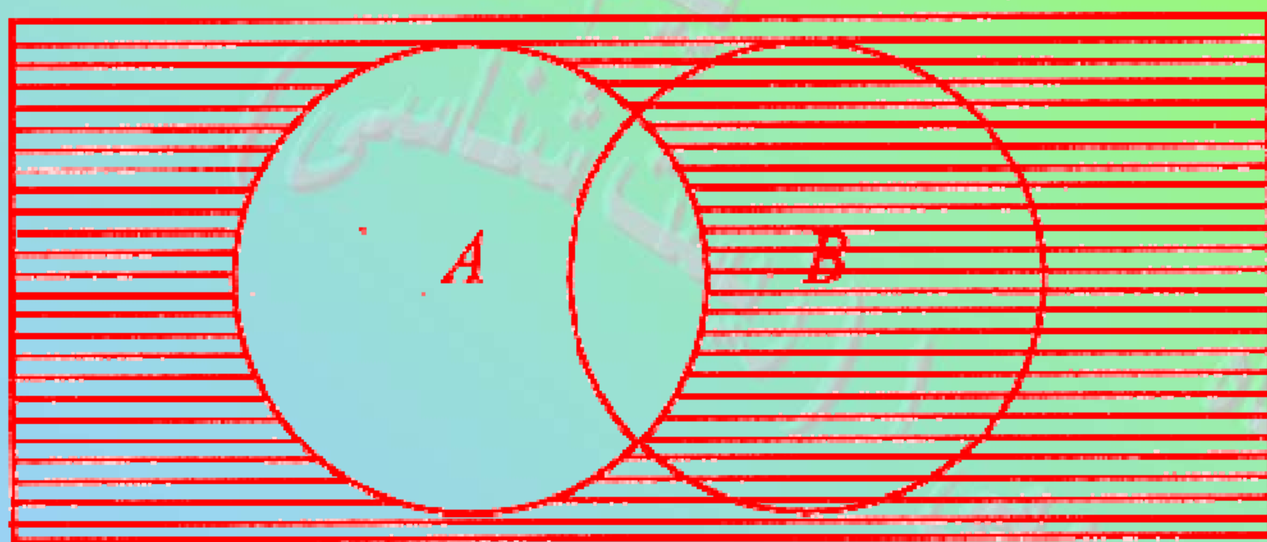
دانشگاه پیام نور

متمم A نسبت به U می‌نامیم و با A' نشان می‌دهیم یعنی:

$$A' = \{x \mid x \in U \text{ و } x \notin A\}$$

منوی اصلی

۱۴.۹.۱ مثال. الف) درنمودار شکل زیر متمم A را سایه‌زده‌ایم یعنی ناحیهٔ خارج از A را.



A' سایه خورده

ب) فرض کنید $U = \mathrm{N}$ و $E = \{۲, ۴, ۶, \ldots\}$ در این صورت $E' = \{۱, ۳, ۵, \ldots\}$

منوی اصلی

۱۵.۹.۱ تبصره. الف) متمم مجموعهٔ مرجع U مجموعهٔ تهی است و برعکس یعنی:

$U' = \varnothing$ و $\varnothing' = U$

ب) متمم متمم مجموعهٔ A خود A است یعنی:

$$(A')' = A$$

ج) $A - B = A \cap B'$

منوی اصلی

۱۰.۱ مجموعه‌های اعداد

گرچه نظریه مجموعه‌ها بسیار کلی است اما مجموعه‌های مهمی که در ریاضیات مقدماتی با آنها برخورد می‌کنیم مجموعه‌های اعدادند.

اعداد طبیعی. دستگاهی هستند که برای شمارش به کار می‌روند و به‌صورت زیر آن را نمایش می‌دهیم:

منوی اصلی

$$N = \{۱, ۲, ۳, \ldots\}$$

اعداد صحیح. مجموعهٔ اعداد صحیح که با Z نمایش می‌دهند به‌صورت زیر می‌باشد:

$$Z = \{\ldots, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, \ldots\}$$

منوی اصلی

و یک خاصیت مهم آن این است که نسبت به اعمال جمع و ضرب و تفریق بسته است.

یعنی مجموع، حاصلضرب و تفاضل دو عدد صحیح باز یک عدد صحیح است.

اعداد گویا. اعداد گویا اعدادی هستند که آنها را می‌توان به فرم خارج‌قسمت دو

عدد صحیح نمایش داد. مجموعهٔ اعداد گویا را با Q نمایش می‌دهند.

منوی اصلی

$$Q = \{ \frac{p}{q} \; ; p , q \in \mathbf{Z} \;\; و \;\; q \neq ۰ \}$$

اعداد گویا نه تنها نسبت به عملهای جمع و ضرب و تفریق بسته‌اند بلکه نسبت به عمل تقسیم هم بسته‌اند. (باستثنای تقسیم بر صفر).

اعداد گنگ. اعداد گنگ آن دسته اعدادی هستند که گویا نیستند مجموعهٔ اعداد گنگ را با Q' نمایش می‌دهیم.

منوی اصلی

اعـــداد حـــقیقی. مـــجموعهٔ اعـــداد حـقیقی در ریـاضیات از اهـمیت ویـژه‌ای برخوردارند و از مجموعهٔ اعداد گویا و گنگ تشکیل شده‌انـد و ایـن مـجموعه را بـا R نمایش می‌دهند. یکی از مهمترین خاصیتهای اعداد حقیقی این است که آنها را می‌توان به‌وسیله نقاط روی یک خط راست نمایش داد. مطابق شکل زیر نقطه‌ای را به‌نام مـبدأ انتخاب می‌کنیم تا صفر (۰) را نمایش دهد و سمت راست این نقطه برای نمایش اعداد مثبت و سمت چپ آن برای نمایش اعداد منفی به‌کار برده می‌شود. نکته قابل توجه این

منوی اصلی

است که هر نقطه فقط با یک عدد حقیقی منحصر بفرد و هر عدد حقیقی با یک نقطه منحصر بفرد نمایش داده می‌شود. این خط را خط حقیقی یا محور اعداد حقیقی می‌نامیم.

منوی اصلی

۱۱.۱ قدرمطلق

قدرمطلق یک عدد حقیقی x که آن را به‌صورت $|x|$ نمایش می‌دهند با فرمول زیر تعریف می‌شود:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{اگر} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{اگر} \quad x < 0 \end{cases}$$

منوی اصلی

بنابراین قدرمطلق هر عدد حقیقی همواره نامنفی است یعنی به‌ازای هر $x \in \mathbf{R}$ داریم؛

$|x| \geq 0$.

از نظر هندسی، روی خط حقیقی قدرمطلق x همان فاصلهٔ نقطهٔ x تا مبدأ یعنی

نقطهٔ o است. فاصلهٔ هر دو نقطه حقیقی a و b عبارت است از $|b - a| = |a - b|$.

منوی اصلی

۱۲.۱ فاصله‌ها

مجموعه‌های اعداد زیر را در نظر بگیرید:

$$A_۱ = \{x \mid a < x < b\}$$

$$A_۲ = \{x \mid a \leq x \leq b\}$$

$$A_۳ = \{x \mid a \leq x < b\}$$

$$A_۴ = \{x \mid a < x \leq b\}$$

طراح: رحمت سلطانی عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه پیام نور شیراز

این مجموعه‌ها را فاصله‌ها می‌نامیم در حالی که نقطهٔ a و b نقاط انتهایی هر فاصله است. توجه کنید که هر چهار مجموعه فقط شامل اعداد واقع بین a و b هستند با این استثنا که ممکن است شامل a و b یا فقط a یا فقط b هم بشوند. از نمادهای زیر نیز برای نمایش فواصل استفاده می‌شود:

$$A_۱ = (a , b) \quad , \quad A_۲ = [a , b] \quad , \quad A_۳ = [a , b) \quad , \quad A_۴ = (a , b]$$

منوی اصلی

۱.۱۲.۱ تبصره. مجموعه‌هایی به فرم:

$$A = \{x \ ; \ x < ۱\}$$

$$B = \{x \ ; \ x \geq ۲\}$$

$$C = \{x \ ; \ x \in \mathbf{R}\}$$

را فاصله‌های نامتناهی می‌نامند و به این صورت نمایش می‌دهند:

$$A = (-\infty, ۱) \quad , \quad B = [۲, +\infty) \quad , \quad C = (-\infty, +\infty)$$

منوی اصلی

۱۳.۱ مجموعه‌های کراندار و بی‌کران

فرض می‌کنیم A مجموعه‌ای از اعداد باشد آنگاه A را یک مجموعهٔ کراندار می‌گویند اگر A زیر مجموعه‌ای از یک فاصلهٔ متناهی باشد یعنی فاصله‌ای مانند $[a , b]$ موجود باشد به‌طوری که $A \subseteq [a , b]$ یک مجموعه را بی‌کران گویند هرگاه کراندار نباشد.

۱.۱۳.۱ مثال. الف) فرض کنید $A = \{۱ , \frac{۱}{۲} , \frac{۱}{۳} , \ldots\}$ در این صورت A کراندار است.
زیرا A زیر مجموعه‌ای از فاصلهٔ بستهٔ $[۰ , ۱]$ است.

ب) فرض کنید $B = \{۲ , ۴ , ۶ , \ldots\}$ در این صورت B بی‌کران است.

منوی اصلی

۲.۱۳.۱ تبصره. اگر مجموعهٔ A متناهی باشد آنگاه لزوماً کراندار خواهد بود اگر

مجموعه‌ای نامتناهی باشد ممکن است کراندار باشد و یا ممکن است بی‌کران باشد مانند مثالهای فوق .

منوی اصلی

۱۴.۱ حاصلضرب دکارتی

فرض کنید A و B دو مجموعه باشند مجموعهٔ حاصلضرب دکارتی A و B شامل تمام زوج‌های مرتب (a , b) است که در آن $a \in A$ و $b \in B$ و آن را با نماد $A \times B$ نمایش می‌دهیم.

$$A \times B = \{(a , b) ; a \in A , b \in B\}$$

منوی اصلی

زوج‌های مرتب با ویژگی زیر مشخص می‌شوند:

$(a, b) = (u, v)$ اگر و تنها اگر $a = u$ و $b = v$

به همین نحو می‌توان nتایی مرتب $(a_1, \ldots, a_n)$ را تعریف کرد.

منوی اصلی

۱.۱۴.۱ مثال. الف) فرض کنید $A = \{۱,۲,۳\}$ و $B = \{a , b\}$ آنگاه مجموعهٔ حاصلضرب $A \times B$ به‌صورت زیر است:

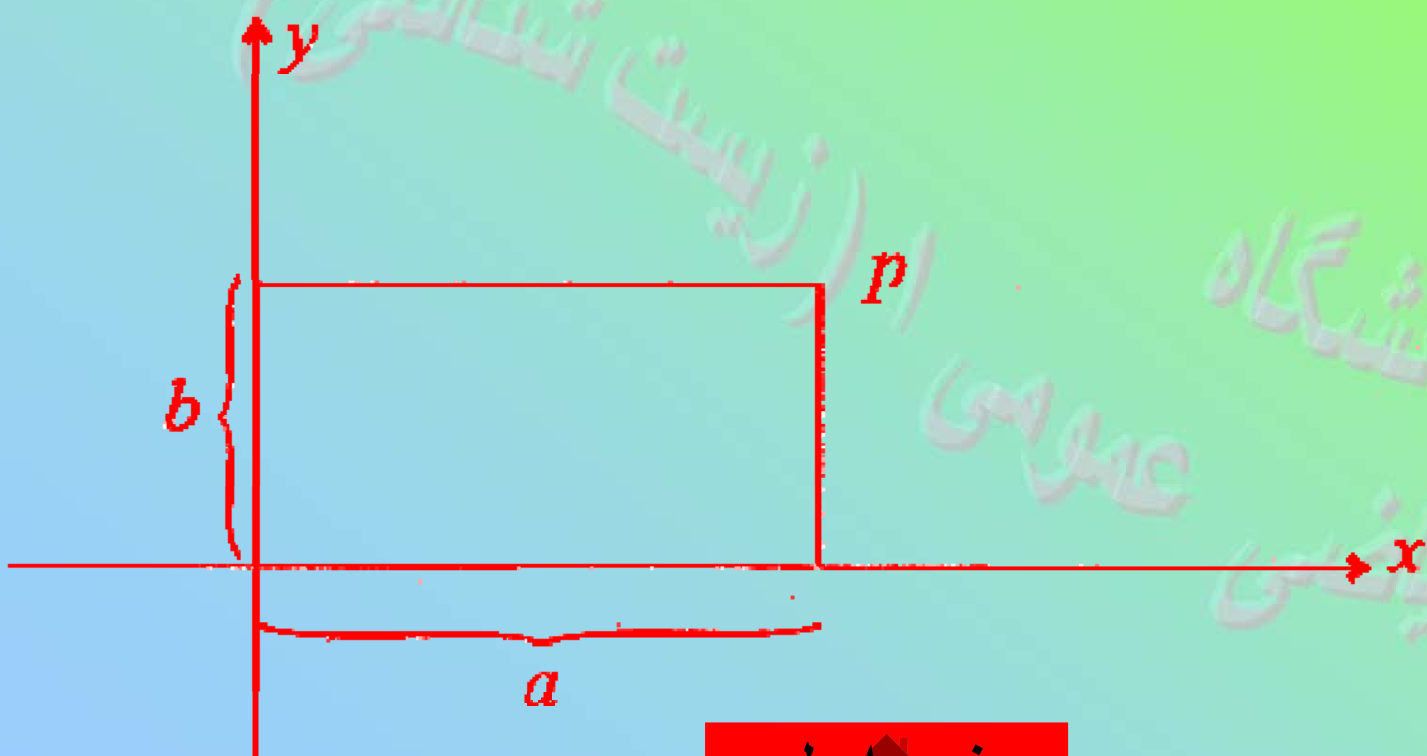
$$A \times B = \{(۱ , a) , (۱ , b) , (۲ , a) , (۲ , b) , (۳ , a) , (۳ , b)\}$$

ب) اگر $A = B = \mathbf{R}$ آنگاه $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ مجموعهٔ نقاط صفحه (صفحهٔ کارتزین) است

یعنی اگر دو خط عمود بر هم را در صفحه رسم کنیم و محل تلاقی آنها را نقطهٔ $(۰ , ۰)$ به‌نام مبدأ در نظر بگیریم آنگاه هر زوج مرتب (a , b) از اعداد حقیقی نقطه‌ای چون P از

منوی اصلی

صفحه را مشخص می‌کند و برعکس هر نقطه از این صفحه با یک زوج مرتب نمایش داده می‌شود. a و b را به‌ترتیب طول و عرض و زوج (a, b) را مختصات P می‌نامیم.



منوی اصلی

در این صورت یک دستگاه مختصات قائم (دکارتی) را در صفحه معرفی کرده‌ایم.

۲.۱۴.۱ تبصره. الف) اگر مجموعهٔ A دارای n عضو و مجموعهٔ B دارای m عضو باشد

آنگاه مجموعهٔ حاصلضرب $A \times B$ دارای nm عضو است. و اگر از دو مجموعهٔ A و B یکی تهی باشد آنگاه $A \times B$ هم مجموعهٔ تهی است.

منوی اصلی

ب) حاصلضرب دکارتی دو مجموعهٔ A و B خاصیت جابه‌جایی ندارند یـعنی:
$A \times B \neq B \times A$ مگر اینکه $A = B$ یا اینکه یکی از عاملها تهی باشد.

منوی اصلی

۱۵.۱ اعداد مختلط

ابتدا شرح مختصری در مورد منشأ اعداد مختلط خواهیم داشت. اگر ما تنها از اعداد صحیح مثبت اطلاع می‌داشتیم، معادلهٔ $x + 2 = 1$ را نمی‌توانستیم حل کنیم. معرفی

اعداد صحیح منفی است که ما را قادر به حل این معادله می‌کند. ولی اطلاع از همهٔ اعداد

منوی اصلی

صحیح برای حل معادلهٔ ۲ = ۱ + ۲x کافی نیست. و برای حل چنین معادلاتی نیاز به‌تعریف اعداد گویا داریم برای حل برخی از معادلات درجه دوم مانند معادلهٔ:

۰ = ۲ − $x^{۲}$ به اعداد گنگ نیاز داریم اگر یک مرحله فراتر رویم معادلات درجهٔ دومی موجودند که هیچ ریشهٔ حقیقی (گویا یا اصم) ندارند. معادلهٔ ۰ = ۱ + $x^{۲}$ دارای ریشهٔ

منوی اصلی

طراح: رحمت سلطانی عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه پیام نور شیراز

حقیقی نیست. زیرا که مربع هر عدد حقیقی غیرمنفی است. به‌منظور حل چنین معادلاتی می‌بایست عددی کشف کنیم که مربع آن ۱- گردد. این عدد که با $i = \sqrt{-1}$ نمایش داده می‌شود واحد موهومی نامیده می‌شود.

ساختن یک عدد برای حل یک معادله ویژه چندان منطقی نخواهد بود و برای آنکه کل بحث را در چارچوب دقیق‌تری قرار دهیم اعمالی شامل ترکیب اعداد حقیقی و واحدهای موهومی تعریف خواهیم کرد.

طراح: رحمت سلطانی عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه پیام نور شیراز

۱.۱۵.۱ تعریف. هر جفت مرتب (a , b) از اعداد حقیقی را یک عدد مختلط می‌نامیم و

آن را به صورت $a + bi$ نمایش می‌دهیم که این نمایش اعداد مختلط را صورت متعارف آن گوییم. عدد a را جزء حقیقی و عدد b را جزء موهومی عدد مختلط $a + bi$ می‌نامیم.

پس مجموعهٔ اعداد مختلط به‌عنوان مجموعهٔ همهٔ جفتهای مرتب از اعداد حقیقی تعریف می‌شود. مجموعهٔ اعداد مختلط را با C نمایش می‌دهیم. به این ترتیب هر یک از

جفتهای مرتب $(۱ , ۲)$, $(\pi , ۰)$ اعداد مختلط هستند و داریم:

منوی اصلی

$$C = \{a + bi \mid a, b \in \mathbf{R},\ i^{2} = -1\}$$

مفهوم تساوی و عملیات جمع و ضرب به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$(a_1, b_1) = (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 = a_2 \quad , \quad b_1 = b_2$$

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2 \quad , \quad b_1 + b_2)$$

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2 \quad , \quad a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

تعریف ضرب در اعداد مختلط طبیعی‌تر از آن است که به نظر می‌رسد. زیرا اگر شکل متعارفی اعداد مختلط را در نظر بگیریم و آنها را مانند اعداد حقیقی درهم ضرب کنیم و از رابطهٔ $i^{2} = -1$ استفاده کنیم داریم:

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

منوی اصلی

در این مورد چند نکته باید یادآوری شود. اول باید توجه داشت که عملیات رسمی برای

جمع و ضرب اعداد مختلط به عدد موهومی چون i وابسته نیست. به‌عنوان مثال $i^۲ = -۱$ را می‌توان به‌صورت $(۰ , ۱)(۰ , ۱) = (-۱ , ۰)$ بیان کرد و بدین‌ترتیب نماد i

صرفاً به‌منظور ساده‌نویسی معرفی شده است. همچنین توجه کنید که جفت مرتب $(a , ۰)$ نمایش‌دهندهٔ عدد حقیقی a است چون آن را می‌توان به‌صورت $a + ۰i$ نوشت

منوی اصلی

هر عدد مختلط به‌صورت $bi = bi + ۰$ را یک عدد موهومی می‌نامند.

روابط،

$$(a,\circ)(b,\circ)=(ab,\circ) \quad , \quad (a,\circ)+(b,\circ)=(a+b,\circ)$$

به‌ترتیب، جمع و ضرب در اعداد حقیقی هستند.

برخی خواص اساسی اعداد حقیقی عبارت‌اند از: خاصل جمع و حاصلضرب دو

منوی اصلی

عدد حقیقی، عددی حقیقی است و ترتیب انجام هر یک از این عملیات می‌تواند وارونه

گردد. یعنی برای اعداد حقیقی a و b قوانین جابه‌جایی:

$$a \cdot b = b \cdot a \quad , \quad a + b = b + a$$

منوی اصلی

قوانین انجمنی:

$$a+(b+c)=(a+b)+c \quad , \quad a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$$

و قوانین پخش‌پذیری:

$$a(b+c)=ab+ac$$

نیز برای همهٔ اعداد حقیقی a، b، c برقرارند اعداد ۰ و ۱ را به‌ترتیب اعضای خنثی جمع

منوی اصلی

و ضرب‌اند وارون جمعی عدد a برابر $-a$ و وارون ضربی عدد a $(a \neq 0)$ عدد حقیقی $\frac{1}{a} = a^{-1}$ است. آنچه با اهمیت است این است که اعداد مختلط نیز دارای خواص فوق

یعنی جابه‌جایی، انجمنی و پخش‌پذیری‌اند عضو خنثی عمل جمع $(0 , 0)$ و وارون

جمعی (a , b) برابر $(-a , -b)$ و وارون ضربی $(a , b) \neq (0 , 0)$ برابر با $\left[\frac{a}{a^2+b^2} , -\frac{b}{a^2+b^2}\right]$ است زیرا:

منوی اصلی

$$\frac{۱}{a+bi}=\frac{۱}{a+bi}\cdot\frac{a-bi}{a-bi}=\frac{a-bi}{a^{۲}-b^{۲}i^{۲}}=\frac{a-bi}{a^{۲}+b^{۲}}=\frac{a}{a^{۲}+b^{۲}}-\frac{b}{a^{۲}+b^{۲}}i$$

به‌عنوان مثال داریم:

$$\frac{۱}{۱+۲i}=\frac{۱}{۵}-\frac{۲}{۵}i$$

۲.۱۵.۱ مثال. عدد مختلط $\frac{۲+i}{۳-۲i}$ را به‌صورت متعارف بنویسید:

حل: $$\frac{۲+i}{۳-۲i}=\frac{۲+i}{۳-۲i}\cdot\frac{۳+۲i}{۳+۲i}=\frac{(۶-۲)+(۴+۳)i}{۹+۴}=\frac{۴+۷i}{۱۳}=\frac{۴}{۱۳}+\frac{۷}{۱۳}i$$

منوی اصلی

۳.۱۵.۱ تعریف. فرض کنید $z = a + bi$؛ مزدوج z را با $\bar{z}$ نمایش می‌دهیم و برابر با $\bar{z} = a - bi$ تعریف می‌کنیم. به‌عنوان مثال: $\overline{۳+۵i} = ۳ - ۵i$ و $\overline{۳i} = -۳i$ و $\bar{۲} = ۲$

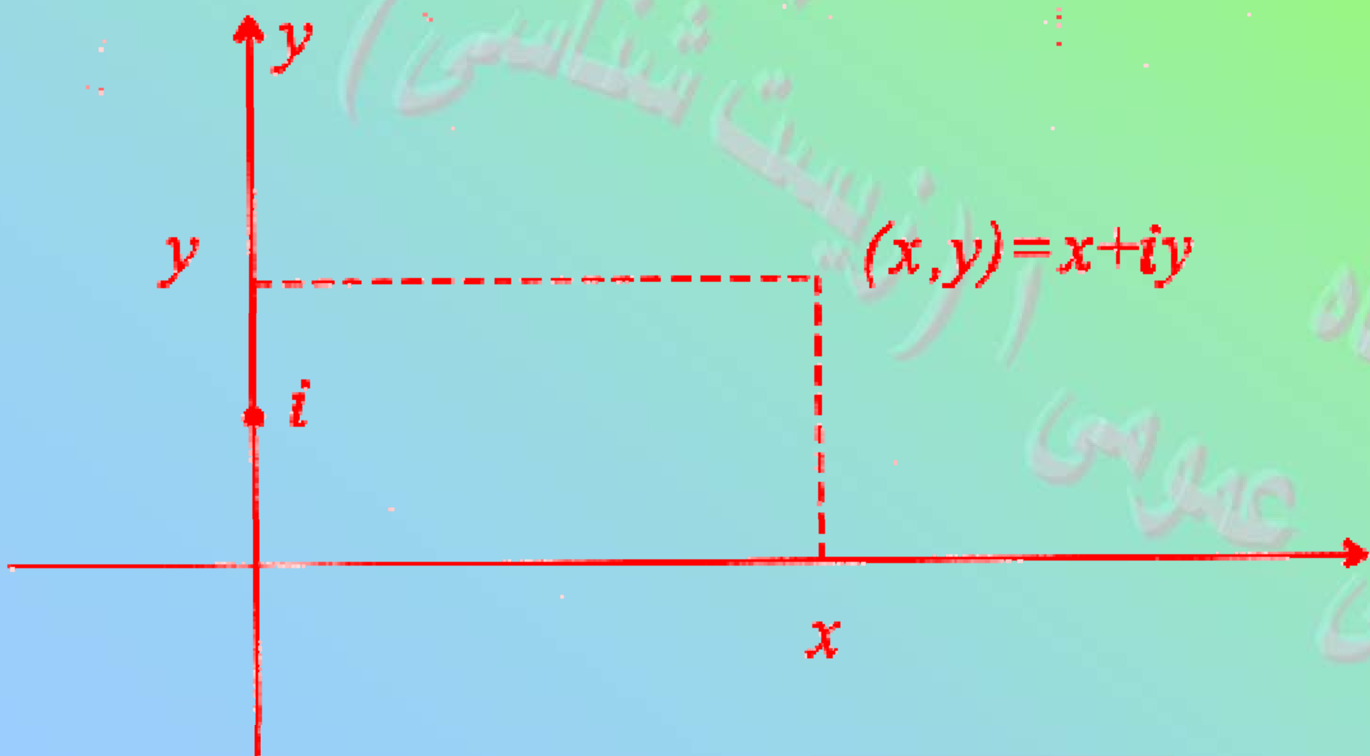
۵.۱۵.۱ نمایش هندسی اعداد مختلط

همان‌طور که عدد حقیقی x را می‌توان به‌وسیلهٔ یک نقطه بر یک خط نمایش داد هر عدد

مختلط $z = (x, y)$ را هم می‌توان با نقطه‌ای در صفحه نمایش داد (شکل زیر). هر عدد مختلط به یک و فقط یک نقطه از صفحه متناظر می‌گردد. ازاین‌رو عبارات عدد مختلط و

منوی اصلی

نقطه در صفحه معادل‌اند. محورهای x و y به‌ترتیب به محور حقیقی و محور موهومی موسوم‌اند. در حالی که صفحهٔ xy به صفحهٔ مختلط یا صفحهٔ z موسوم است.



منوی اصلی

۶.۱۵.۱ تعریف. قدرمطلق عدد مختلط $z = a + bi$ را با $|z|$ نمایش می‌دهیم و برابر با $|z| = \sqrt{a^۲ + b^۲}$ تعریف می‌کنیم. به‌عنوان مثال: $\sqrt{۵} = \sqrt{۱ + ۴} = |۱ + ۲i| = ۲, \sqrt{۴} = |-۲|$ پس برای هر عدد حقیقی x داریم $\sqrt{x^۲} = |x|$ و چون جذر مثبت راانتخاب می‌کنیم لذا $|x|$ همان قدرمطلق معمولی اعداد حقیقی است یعنی به‌ازای هر عدد حقیقی x $(x \in \mathbf{R})$ داریم:

$$\sqrt{x^۲} = |x| = \begin{cases} x & x \geq ۰ \\ -x & x < ۰ \end{cases}$$

منوی اصلی

قضایای زیر را بدون اثبات می آوریم:

۷.۱۵.۱ قضیه. برای اعداد مختلط z , z_1 , z_2 داریم:

الف) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

ب) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

ج) $\bar{\bar{z}} = z$

منوی اصلی

د) $z=\bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbf{R}$

ه) $z+\bar{z}=(2x, 0)$ (هرگاه $z=x+iy$)

و) $z-\bar{z}=(0, 2y)$ (هرگاه $\bar{z}=x-iy$)

ز) $z\bar{z}=|z|^2$

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

۸.۱۵.۱ قضیه. الف) به‌ازای هر $z \in C$ داریم $|z| \in R$ و $|z| \geq ۰$

ب) $z = ۰$ اگر و تنها اگر $|z| = ۰$

ج) $|z_۱ z_۲| = |z_۱|\,|z_۲|$

د) $|z_۱ + z_۲| \leq |z_۱| + |z_۲|$

منوی اصلی

لازم به ذکر است که با توجه به نمایش هندسی عدد مختلط $z = a + bi$ مقدار $|z|$ برابر با فاصلهٔ نقطهٔ z از مبدأ مختصات است. اگر $z_1 = a_1 + b_1 i$ و $z_2 = a_2 + b_2 i$ آنگاه:

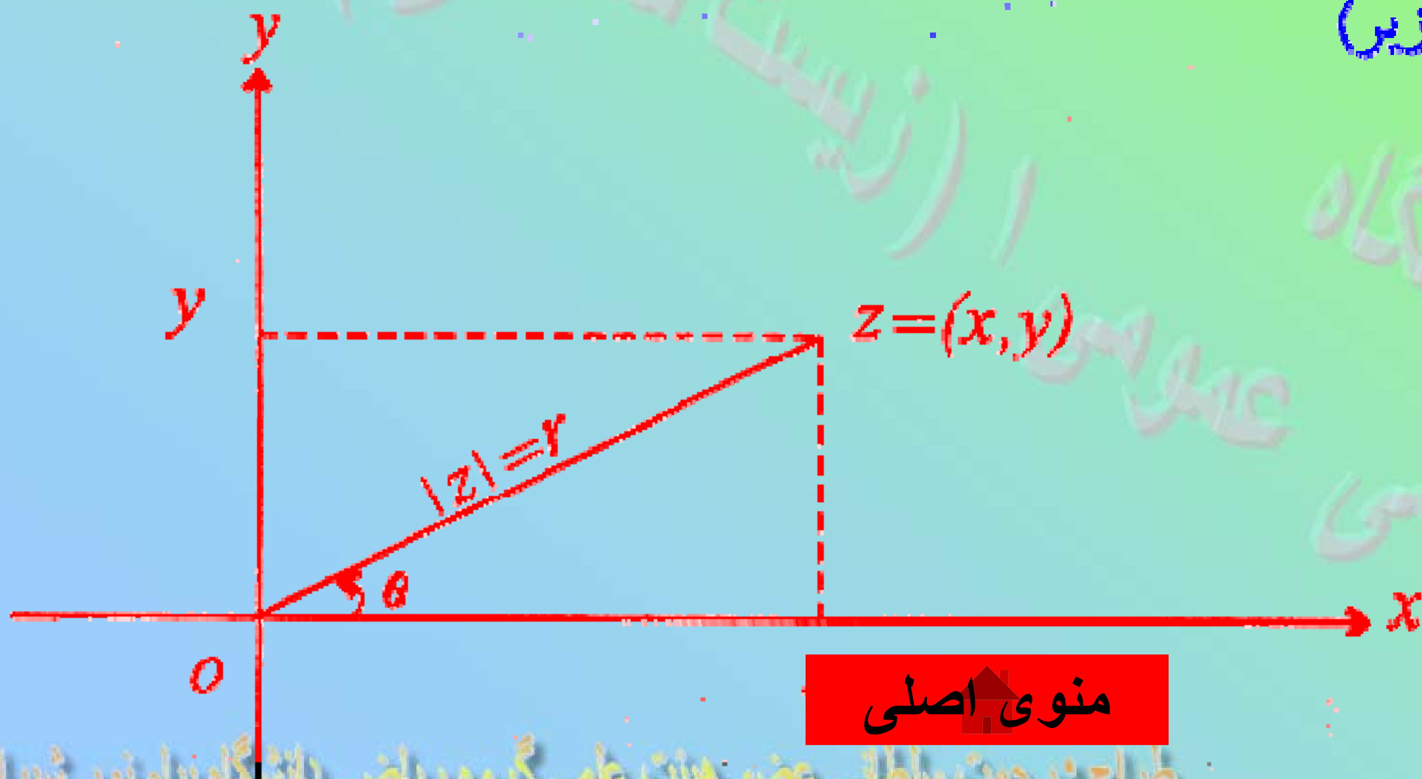
$$|z_2 - z_1| = |(a_2 - a_1) + (b_2 - b_1)i| = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2}$$

که همان فاصلهٔ نقطهٔ z_1 تا نقطهٔ z_2 در صفحه است.

منوی اصلی

۱۰.۱۵.۱ نمایش مثلثاتی اعداد مختلط

همان‌طور که قبلاً دیدیم هر عدد مختلط $z = a + bi$ را می‌توان توسط نقطه‌ای از صفحه نمایش داد. (شکل زیر)



منوی اصلی

اندازه‌ای از زاویه θ را که oz با محور حقیقی مثبت می‌سازد یک شناسه از z می‌نامند و آن را با $\arg z$ نمایش می‌دهند. بدین‌ترتیب نقطهٔ $z = (x, y)$ را می‌توان به یک

شکل جدید بیان کرد، $(r\sin\theta$ و $r\cos\theta)$. و این البته همان نمایش عدد مختلط z به شکل مثلثاتی است. چون $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ لذا:

$$x + yi = r(\cos\theta + i\sin\theta) \quad , \quad r = |z| = \sqrt{x^۲ + y^۲} \quad , \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$$

منوی اصلی

فرض کنید نمایش مثلثاتی z_1, z_2 به‌صورت زیر باشند:

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \quad , \quad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

در این صورت :

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[(\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2) + i(\sin\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_2 \cos\theta_1)]$$

$$= r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

منوی اصلی

با بیانی غیردقیق می‌توان گفت، شناسهٔ حاصلضرب دو عدد مختلط مخالف صفر برابر است با حاصل جمع شناسه‌های آنها یعنی: $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$

یک استدلال استقرایی نشان می‌دهد که اگر z_i دارای قدرمطلق r_i و شناسه θ_i باشد $(i = 1, 2, \cdots, n)$ آنگاه:

$$z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n \left[\cos(\theta_1 + \cdots + \theta_n) + i \sin(\theta_1 + \cdots + \theta_n)\right] \qquad (*)$$

حال اگر در فرمول (*) فرض کنیم که $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z$ داریم:

$$z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) \qquad (**)$$

برای $|z| = 1$ رابطهٔ (**) به رابطهٔ زیر تبدیل می‌گردد:

$$(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

که قضیه‌ای از دموآور است.

منوی اصلی

همچنین داریم:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}=\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)}$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\,\frac{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)}{\cos 0+i\sin 0}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$$

منوی اصلی

۱۲.۱۵.۱ ریشهٔ اعداد مختلط

رابطهٔ (**) محاسبهٔ ریشهٔ nام یک عدد مختلط را ممکن می‌سازد عدد مختلط z ریشهٔ nام z_0 است اگر چنانچه $z^n = z_0$ و می‌نویسیم $z = z_0^{\frac{1}{n}}$.

اگر $z_0 = r_0(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0)$ یک عدد مختلط باشد چگونه می‌توان یک عدد مختلط $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ را یافت به‌طوری که $z^n = z_0$ ؟

منوی اصلی

داریم:

$$r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r_0(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0)$$

چونکه برای هر عدد حقیقی α داریم $|\cos\alpha + i\sin\alpha| = 1$ در این صورت رابطهٔ فوق نتیجه می‌دهد که:

$$r^n = r_0 \quad \Rightarrow \quad |z| = r = r_0^{\frac{1}{n}}$$

منوی اصلی

$$n\theta = \theta_{\circ} + ۲k\pi \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\theta_{\circ} + ۲k\pi}{n}$$

لذا اعداد مختلط $z = z_{\circ}^{\frac{۱}{n}} = r_{\circ}^{\frac{۱}{n}} \left[\cos\frac{\theta_{\circ} + ۲k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta_{\circ} + ۲k\pi}{n} \right]$

به‌ازای $k = ۰, ۱, ۲, \cdots, n-۱$ ریشه‌های nام عدد مختلط $z_{\circ}$ هستند.

حال اگر قرار دهیم $z_{\circ} = ۱$ ریشه‌های nام واحد به‌دست می‌آیند اگر $z^n = ۱$

آنگاه:

$$z = \cos\frac{۲k\pi}{n} + i\sin\frac{۲k\pi}{n} \quad , \quad (k = ۰, ۱, \cdots, n-۱)$$

منوی اصلی

۱۳.۱۵.۱ مثال. ریشه‌های چهارم عدد مختلط $z=-1+0i$ را به‌دست آورید.

حـــــل: در ایـــنجا $x=-1$ و $y=0$ و $r=|z|=1$ لذا $-1=\cos\pi+i\sin\pi$

$$\sqrt[4]{-1}=\cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)$$ و $(k=0,1,2,3)$

با قرار دادن مقادیر k در رابطهٔ فوق ریشه‌ها به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ \frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

منوی اصلی

فصل دوم

رابطه و تابع

منوی اصلی

طراح: رحمت سلطانی عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه پیام نور شیراز

مقدمه

مفهوم تابع از مفاهیم اساسی و اصلی ریاضیات است. در بسیاری از موارد کاربردی مقدار یک کمیت ممکن است به مقدار کمیت دیگری بستگی داشته باشد مثلاً مقدار

آلودگی هوا در یک شهر بزرگ ممکن است به تعداد اتومبیلهایی که در آن رفت و آمد دارند بستگی داشته باشد. یا تقاضای مصرف کننده برای گوشت ممکن است به قیمت

جاری آن در بازار بستگی داشته باشد. رشد یک باکتری ممکن است به دمای هوای موجود بستگی داشته باشد این نوع بستگیها را اغلب می‌توان از لحاظ ریاضی به‌صورت تابع نشان داد.

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

هدف کلی

۱. درک مفهوم رابطه و تابع

۲. بررسی اعمال جبری روی توابع

۳. آشنایی با توابع مقدماتی

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

هدفهای رفتاری

دانشجو پس از مطالعهٔ این فصل باید بتواند:

۱. رابطه و تابع را تعریف کرده و تفاوت میان آن دو را بیان کند.

۲. برای هر دو تابع داده شده، حاصل جمع، تفاضل، حاصلضرب و خارج‌قسمت را محاسبه کند.

منوی اصلی

طراح: رحمت سلطانی عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه پیام نور شیراز

۳. برای تابع داده شده یک به یک و پوشا بودن آن را بررسی کند.

۴. برای دو تابع داده شده ترکیب آنها را به‌دست آورد.

۵. وارون تابع داده شده را در صورت وجود پیدا کند.

۶. برای یک تابع داده شده نمودار آن را رسم کند.

۷. در یک مسئله داده شده قوانین رشدنمایی و واپاشی‌نمایی را به‌کار ببرد.

۸. درجه را به رادیان و رادیان را به درجه تبدیل کند.

منوی اصلی

۱.۲ رابطه

۱.۱.۲ تعریف. فرض کنید A و B دو مجموعه باشند هر زیر مجموعه از $A \times B$ را یک رابطه از A به B می‌نامیم مثلاً اگر $A = \{a, b\}$, $B = \{۱, ۲, ۳\}$ آنگاه $\{(a, ۱), (b, ۲)\}$ و $A \times B$ رابطه‌هایی از A به B هستند.

۲.۱.۲ تعریف. مجموعهٔ عناصر اول زوجهای مرتب یک رابطه را دامنهٔ رابطه و مجموعهٔ عناصر دوم را بُرد رابطه می‌نامیم.

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

۳.۱.۲ مثال. روابط زیر را در نظر گرفته دامنه و برد هر کدام را تعیین کنید.

$$S_1 = \{(0,3),(0,4),(5,2)\}$$

$$S_2 = \{(x,y)\,|\,x^2+y^2=1\}$$

$$S_3\{(\varnothing,\{\varnothing\}\ ,(\{0\},0),(-\frac{1}{2},\sqrt{3})\}$$

منوی اصلی

حل:

$S_۱$ دامنه $= \{۰, ۵\}$ ، $S_۱$ برد $= \{۳, ۴, ۲\}$

$S_۲$ دامنه $= \{x \mid -۱ \leq x \leq ۱\}$ ، $S_۲$ برد $= \{y \mid -۱ \leq y \leq ۱\}$

$S_۳$ دامنه $= \{\varnothing, \{۰\}, -\frac{۱}{۲}\}$ ، $S_۳$ برد $= \{\{\varnothing\}, ۰, \sqrt{۳}\}$

از بین رابطه‌ها، دستهٔ خاصی هستند که اهمیت فوق‌العاده‌ای دارند و اینک به تعریف اینگونه رابطه‌ها می‌پردازیم

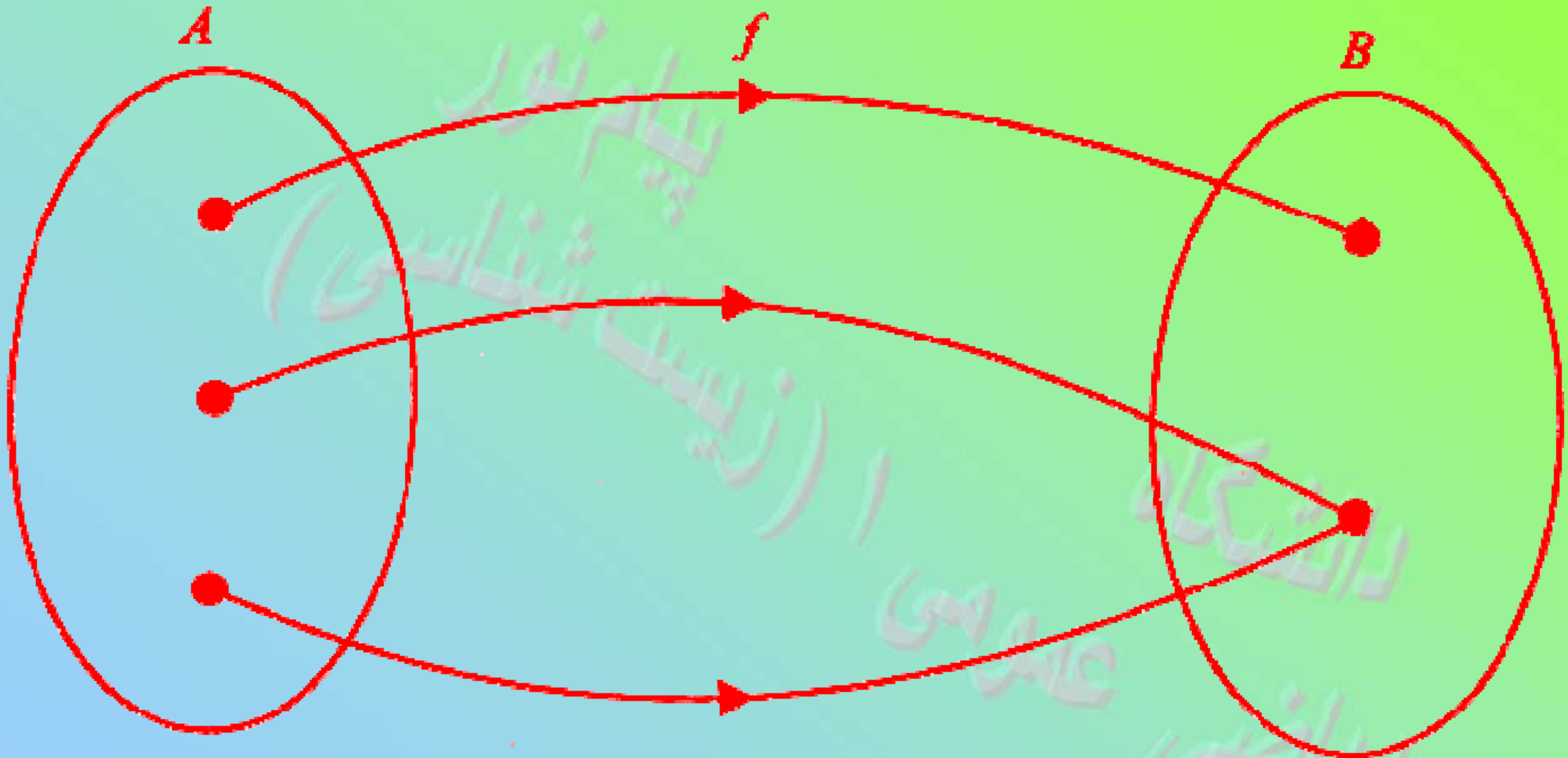
منوی اصلی

۵.۱.۲ تعریف. هر رابطهٔ $f \subseteq A \times B$ یک تابع از A به B است اگر متناظر با هر $x \in A$ یک و تنها یک $y \in B$ موجود باشد به‌طوری که $(x, y) \in f$ به‌عبارت دیگر تابع یک قاعده

است که به هر شیئ از مجموعهٔ A یک و فقط یک شیئ از مجموعه B را نسبت می‌دهد

این تعریف در شکل زیر نمایش داده شده است.

منوی اصلی



منوی اصلی

طراح: رحمت سلطانی عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه پیام نور شیراز

برای اکثر توابع این کتاب، مجموعه‌های A و B مجموعه‌هایی از اعداد حقیقی خواهند بود.

بنابراین تابع را می‌توان به‌صورت قاعده‌ای در نظر گرفت که اعداد «جدیدی» را به اعداد «قبلی» نسبت می‌دهد برای اینکه این قاعده تابع نامیده شود باید این خاصیت را

دارا باشد که یک و تنها یک عدد «جدید» به هر یک از اعداد «قبلی» نسبت دهد.

منوی اصلی

۶.۱.۲ مثال. برمبنای تابعی مفروض، عدد «جدید» با افزودن ۴ به مجذور عدد «قبلی»

حاصل می‌شود این تابع چه عددی را به ۳ نسبت می دهد؟

حل: عددی که این تابع به ۳ نسبت می‌دهد ۴ + ۳^{۲} یا ۱۳ است.

اغلب می‌توان تابع را با استفاده از فرمولهای ریاضی به‌صورت فشرده نوشت

منوی اصلی

معمولاً مرسوم است که x معرف عدد «قبلی» و y معرف عدد «جدید» باشد و سپس

معادله‌ای که x , y را به هم مربوط می‌سازد می‌نویسند مثلاً تابع مثال فوق را می‌توان به‌صورت معادلهٔ زیر نوشت:

$$y = x^۲ + ۴$$

حروف x , y را که در چنین معادلاتی ظاهر می‌شوند متغیر می‌نامند. مقدار عددی متغیر y را مقدار عددی متغیر x معین می‌کند به همین علت، معمولاً y را متغیر وابسته و x را متغیر مستقل می‌نامند.

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

۷.۱.۲ نماد تابعی

طریق دیگری برای نمایش تابع وجود دارد که کاربرد بیشتر و متنوع‌تری دارد. حرفی

مانند f را برای معرفی خود تابع انتخاب می‌کنیم و مقداری که تابع به x نسبت می‌دهد به

جای y با $f(x)$ نشان می‌دهیم.

اگر f تابعی از A به B باشد آنگاه A را دامنه و B را همدامنهٔ f می‌نامیم و

منوی اصلی

می‌نویسیم $f: A\rightarrow B$ با استفاده از این نماد تابعی مثال ۲-۱-۶ را می‌توان به‌طریق دیگری که در زیر می‌آید بیان کرد:

اگر $f(x) = x^{۲} + ۴$، $f(۳)$ را بیابید:

$$f(۳) = ۳^{۲} + ۴ = ۱۳$$

سهولت و سادگی این روش نمایش تابع مشهود است. کاربرد بیشتر نماد تابعی در مثالهای زیر نمایان است. ملاحظه می‌شود که حرفی غیر از f و x برای نمایش تابع و متغیر مستقل به‌کار برده شده است.

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

۸.۱.۲ مثال. اگر $g(t)=\sqrt{t-۲}$ مقادیر $g(۲۷)$ و $g(۱)$ و $g(۲)$ را (در صورت امکان) پیدا کنید.

$$g(۲۷)=\sqrt{۲۷-۲}=\sqrt{۲۵}=۵$$

$$g(۱)=\sqrt{۱-۲}=\sqrt{-۱}$$

$$g(۲)=\sqrt{۲-۲}=\sqrt{۰}=۰$$

می‌بینیم که $g(۱)$ تعریف نشده است زیرا اعداد منفی جذر حقیقی ندارند.

منوی اصلی

۹.۱.۲ مثال. مقادیر $f(-\frac{۱}{۲})$ و $f(۱)$ را با توجه به تعریف زیر پیدا کنید:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{x-۱} & x<۱\\ ۳x^{۲}+۱ & x\geq ۱\end{cases}$$

حل:

$$f(-\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{-\frac{۱}{۲}-۱}=\frac{۱}{-\frac{۳}{۲}}=-\frac{۲}{۳}$$

$$f(۱)=۳(۱)^{۲}+۱=۴$$

منوی اصلی

۲.۱.۰۱ مثال. دامنهٔ هر یک از توابع زیر را پیدا کنید:

الف) $f(x)=\frac{1}{x-3}$

ب) $g(x)=\sqrt{x-2}$

حل: دامنهٔ f از تمام اعداد حقیقی غیر از ۳ تشکیل شده است یعنی $\mathbf{R}-\{3\}$

دامنه g از تمام اعداد حقیقی که بزرگتر از یا مساوی ۲ هستند تشکیل شده است یعنی

منوی اصلی

$\{x \mid x \in \mathbf{R} , x \geq ۲ \}$

۱۲.۱.۲ تعریف. دو تابع f و g را مساوی می‌نامیم هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

۱. دامنهٔ f و g یکی باشند یعنی $D_f = D_g$

۲. رابطهٔ $f(x) = g(x)$ برای تمام xهای متعلق به دامنهٔ مشترک برقرار باشد $(x \in D_f = D_g)$

منوی اصلی

۱۳.۱.۲ مثال. دو تابع

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & x\neq 1 \\ -1 & x=1 \end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & x\neq 1 \\ 0 & x=1 \end{cases}$$

مساوی نیستند زیرا مقدار آنها در $x=1$ با هم برابر نیست.

$f(1)=-1\,,\ g(1)=0$

منوی اصلی

۱۵.۱.۲ توابع یک به یک

تابع $f(x)=x^{2}$ ، $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ را در نظر بگیرید. مقادیر f در نقاط $x=1$ و $x=-1$ عبارت‌اند از:

$$f(1)=1 \quad , \quad f(-1)=1$$

پس $f(1)=f(-1)$ از این رابطه نتیجه می‌گیریم که در دامنهٔ f عناصری متمایز مانند x_1 و x_2 مثلاً ۱ و ۱− وجود دارند به‌طوری که $f(x_1)=f(x_2)$. این موضوع را می‌توان

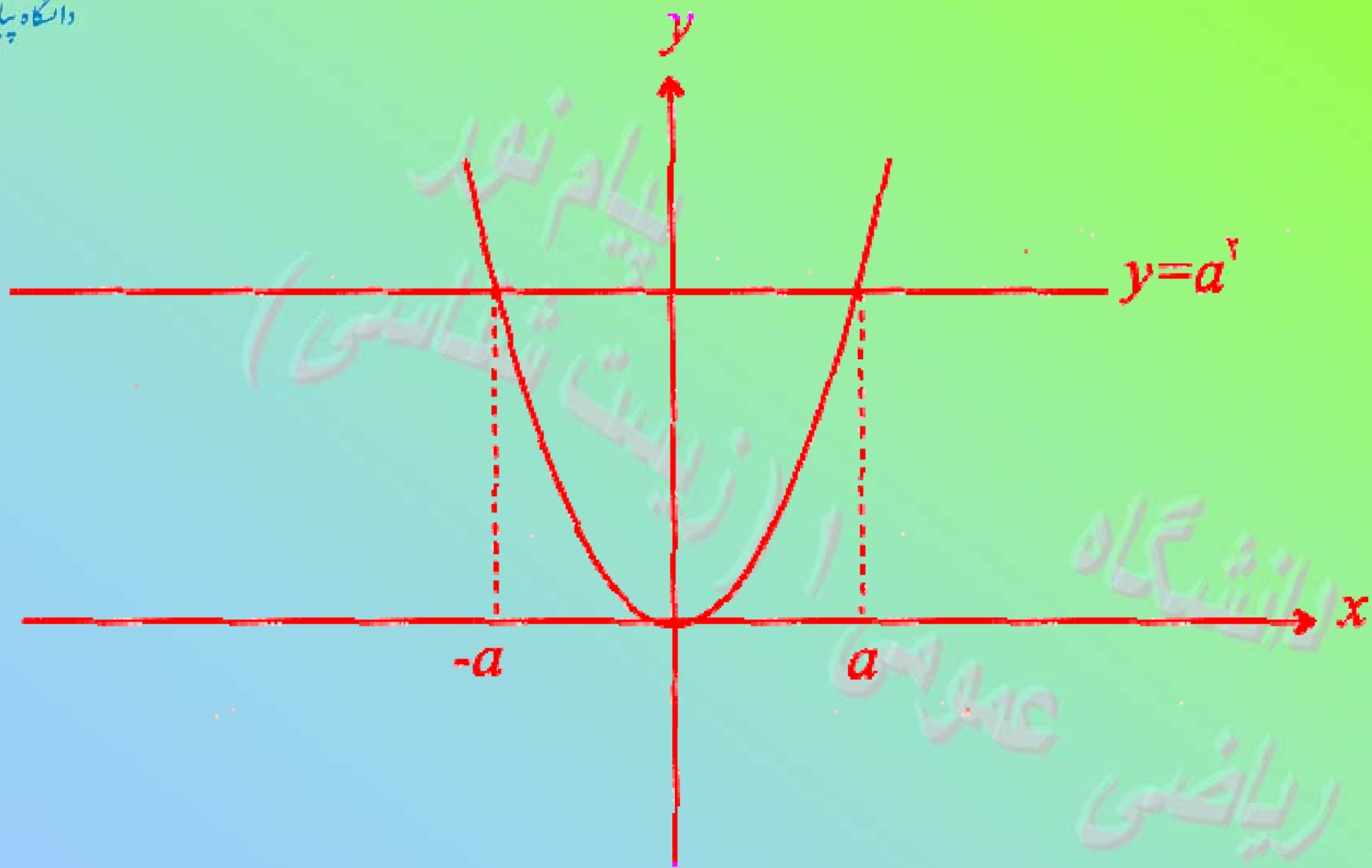
منوی اصلی

این‌طور بیان نمود که اگر b و a عناصری در دامنهٔ f باشند از تساوی $f(a)=f(b)$ تساوی $a=b$ نتیجه نمی‌شود زیرا اگر $f(a)=f(b)$ آنگاه $a^2=b^2$ که از آن

لزوماً نمی‌توان نتیجه گرفت $a=b$ چون ممکن است $a=-b$ باشد. این نتیجه را می‌توان از نظر هندسی تعبیر کرد. نمودار f را که در زیر رسم شده در نظر بگیرید:

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور



منوی اصلی

خط افقی $y = a^2$ نمودار f را در دو نقطه $x = a$ و $x = -a$ قطع می‌کند چون خط قاطع

افقی است در این صورت $f(a)$ و $f(-a)$ با هم مساوی است پس $f(a)$ تصویر نقاط متمایز $x = a$ و $x = -a$ است.

حال تابع $g(x) = x^3$ ، $g:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ را در نظر بگیرید فرض کنید $g(a) = g(b)$ پس

منوی اصلی

$a^3 = b^3$ در این صورت خواهیم داشت $a = b$ ، یعنی:

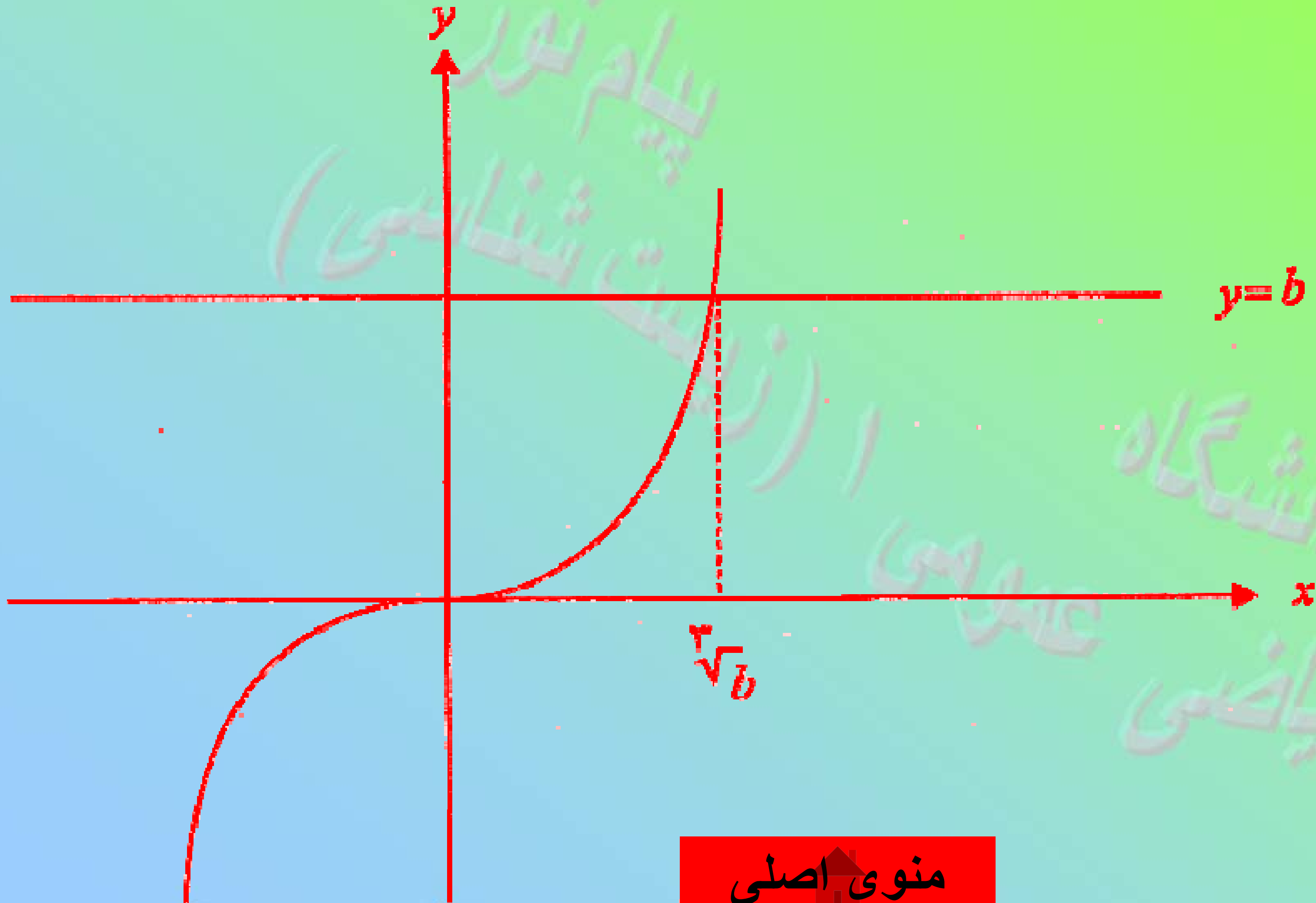
$$g(a) = g(b) \Rightarrow a = b$$

از نظر هندسی، نمودار g را که در زیر رسم شده در نظر بگیرید.

اگر $b \in \mathbb{R}$ باشد نمودار $g(x) = x^3$ خط افقی $y = b$ را فقط در یک نقطه قطع

منوی اصلی

می‌کند نقطه، $(b, \sqrt[3]{b})$ یعنی هر عدد b تصویر فقط یکی از عناصر دامنهٔ g یعنی $\sqrt[3]{b}$ است.



منوی اصلی

۱۶.۱.۲ تعریف. تابع $f:A\to B$ را یک به یک می‌نامیم هرگاه رابطهٔ زیر برای هر a و b متعلق به A برقرار باشد:

$$f(a)=f(b)\Rightarrow a=b$$

و یا $f:A\to B$ را یک به یک می‌نامیم هرگاه تصاویر نقاط متمایز در دامنهٔ f، متمایز باشند یعنی:

$$a\neq b\Rightarrow f(a)\neq f(b)$$

منوی اصلی

۱۸.۱.۲ تعریف (تصویر یک تابع). فرض کنید $f:A\to B$ یک تابع باشد مجموعهٔ تصاویر همهٔ عناصر A به‌وسیلهٔ f را تصویر A به‌وسیله f می‌نامند این مجموعه با نماد $f(A)$ نشان داده می‌شود پس:

$$f(A)=\{f(x)\,|\,x\in A\}$$

$f(A)$ را مجموعهٔ مقادیر f نیز می‌نامند چون هر $f(x)$ به B متعلق است داریم: $f(A)\subseteq B$

مثلاً تابع $f:\{۱,۲,۳\}\to\{a,b,c\}$ را که در زیر تعریف شده است در نظر بگیرید:

منوی اصلی

$$f(۱) = f(۲) = b \quad , \quad f(۳) = a$$

$$f(A) = \{f(۱), f(۲), f(۳)\} = \{a, b\}$$

c تصویر هیچ یک از نقاط یا عناصر A نیست به عبارت دیگر عنصری از A مانند x وجود ندارد به‌طوری که $c = f(x)$ پس $B \neq f(A)$ در بیان این مفهوم اصطلاحاً گوییم $f(A)$ مجموعهٔ B را نمی‌پوشاند و یا گوییم f پوشا نیست.

منوی اصلی

۱۹.۱.۲ تعریف. تابع $f:A\to B$ را پوشا می‌نامیم هرگاه داشته باشیم: $f(A) = B$

به‌عبارت دیگر f پوشاست اگر و فقط اگر برای هر عنصر $b \in B$ عنصری مانند $a \in A$ وجود داشته باشد به‌طوری که $b = f(a)$ باشد.

منوی اصلی

۲.۱.۲۰ مثال. الف) تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطهٔ: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{|x|} & x\neq 0\\ 2 & x=0\end{cases}$ پوشا

نیست زیرا $f(x)$ همیشه مثبت است و نمی‌تواند مقادیر منفی را اختیار کند

منوی اصلی

ب) تابع $f: R - \{0\} \to \{x \mid x > 0\}$ با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x^2}$ تابعی پوشاست زیرا:

اگر $y > 0$، از فرض $x = \frac{1}{\sqrt{y}}$ نتیجه می‌شود که:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y$$

منوی اصلی

۲۲.۱.۲ تعریف. تابع $f:A\to B$ را دوسویی گوییم هرگاه یک به یک و پوشا باشد.

۲۳.۱.۲ ترکیب توابع

اگر $f(x)=\frac{۲x}{۱+x^۲}$ باشد $f(\frac{۱}{۲})$ و $f(\frac{۱}{x})$ و $f(\sqrt{x})$ و $f(\frac{۱}{۲}x+۱)$ را محاسبه کنید

توابع زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x)=x^۲+۱ \quad ; \quad f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$$

منوی اصلی

$$g(x)=x^{۳} \quad ; \quad g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

می‌بینیم که دامنهٔ f اعداد حقیقی است و همدامنهٔ g نیز اعداد حقیقی است.

از طرفی برای هر عدد حقیقی x ، $x^{۲}+۱ \geq ۱$ است یعنی $f(\mathbf{R})=\{y : y \geq ۱\}$ در نتیجه $f(\mathbf{R}) \subseteq \operatorname{dom} g$ پس برای هر مقدار x ، $f(x)$ به‌دامنهٔ g تعلق دارد.

تابع f عدد x را به $x^{۲}+۱$ نسبت می‌دهد و تابع g هر عدد را به توان ۳ می‌رساند پس g عدد $x^{۲}+۱$ را به $(x^{۲}+۱)^{۳}$ مربوط می‌کند به شکل زیر نگاه کنید:

منوی اصلی

$$\begin{tikzcd} x \arrow[d, "f"'] & \\ x^2+1 \arrow[r, "g"'] & (x^2+1)^3 \end{tikzcd}$$

در نتیجه داریم:

$$g(f(x)) = g(x^2+1) = (x^2+1)^3$$

منوی اصلی

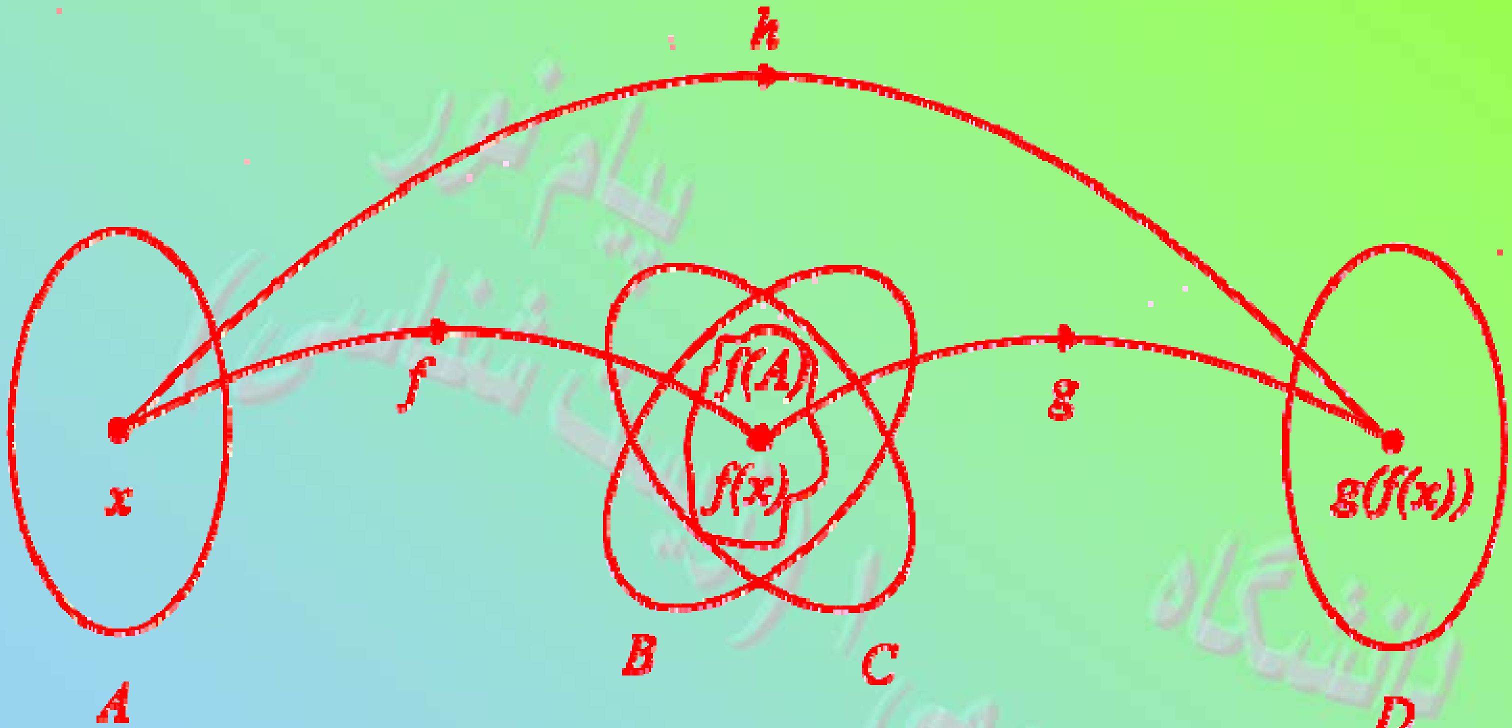
به کمک این عبارت می‌توان تابعی مانند h را که قلمرو آن دامنه f و برد آن همدامنه g باشد به‌صورت زیر تعریف کرد:

$$h(x)=(x^{۲}+۱)^{۳} \quad ; \quad h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$$

۲۴.۱.۲ تعریف. توابع $f:A\to B$ و $g:C\to D$ را در نظر بگیرید اگر $f(A)\subseteq C$ باشد تابع $h:A\to D$ را که با $h(x)=g(f(x))$ تعریف می‌شود ترکیب f و g می‌نامیم و با نماد

منوی اصلی

$g \circ f$ نمایش می‌دهیم:



منوی اصلی

۲۵.۱.۴ مثال. مطالعهٔ زیست محیطی ناحیهٔ مسکونی خاصی روشن ساخت که مقدار متوسط منواکسید کربن موجود در هوا هنگامی که جمعیت آن ناحیه x هزار نفر باشد معادل $f(x) = ۰٫۵x + ۱$ واحد است. برآورد شده است t سال آینده جمعیت ناحیه معادل $x(t) = ۱۰ + ۰٫۱t^{۲}$ هزار نفر خواهد بود.

الف) مقدار منواکسید کربن موجود در هوا را به‌صورت تابعی از زمان بنویسید.

ب) چه زمانی مقدار منواکسید کربن به ۶٫۸ واحد خواهد رسید؟

دانشگاه پیام نور

حل: الف) چون وابستگی مقدار منواکسید کربن به متغیر x با معادلهٔ $f(x)=0/5x+1$ بیان شده است و وابستگی x به متغیر t با معادلهٔ $x(t)=10+0/1t^2$ بیان شده است نتیجه می‌شود که تابع مرکب

$$f(x(t))=f(10+0/1t^2)=0/5(10+0/1t^2)+1=6+0/05t^2$$

مقدار منواکسید کربن موجود در هوا را به عنوان تابعی از متغیر t بیان می‌کند.

منوی اصلی

ب) $6 + 0/05t^2 = 6/8 \Rightarrow 0/05t^2 = 0/8$

$$\Rightarrow t^2 = 16 \Rightarrow t = 4$$

به‌عبارت دیگر ۴ سال آینده اندازهٔ منواکسید کربن موجود در هوا معادل ۶٫۸ واحد خواهد بود.

منوی اصلی

۲.۲ وارون یک تابع

تابع دوسویی $f:A\to B$ را در نظر بگیرید f را به‌صورت مجموعه‌ای از زوجهای مرتب می‌نویسیم:

$$f=\{(x,y)\,|\,y=f(x)\}$$

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

حال رابطه g را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$g = \{(y, x) \mid y = f(x)\}$$

پس عناصر g از تعویض مؤلفه‌های اول و دوم عناصر f به‌دست آمده‌اند. واضح است که g رابطه‌ای است از B به A می‌توان نشان داد که گاهی g یک تابع از B به A است

منوی اصلی

دراین‌صورت این تابع عمل تابع f را خنثی می‌کند یعنی اگر $f(a)=b$ آنگاه $g(b)=a$.

می‌توان نشان داد که زمانی g یک تابع از B به A است که f از A به B یک به یک و پوشا باشد.

منوی اصلی

۱.۲.۲ تعریف. فرض $f:A\to B$ دوسویی باشد در این صورت تابع $g:B\to A$ را وارون تابع f گوییم اگر:

الف) به‌ازای هر $a\in A$ ، اگر $f(a)=b$ آنگاه $g(b)=a$ یعنی $g(f(a))=a$

ب) به‌ازای هر $b\in B$ اگر $g(b)=a$ آنگاه $f(a)=b$ یعنی $f(g(b))=b$

منوی اصلی

۲.۲.۲ تذکر. می‌توان نشان داد که اگر f دوسویی باشد آنگاه وارون آن یکتاست ازاین‌رو وارون f را با f^{-1} نشان می‌دهیم.

منوی اصلی

۳.۲.۲ مثال. وارون تابع زیر را در صورت وجود پیدا کنید:

$$f(x)=\sqrt{x^{۲}+۱} \quad , \quad f:\{x \mid x\geq ۰\}\rightarrow\{x \mid x\geq ۱\}$$

حل: این تابع یک به یک است زیرا اگر $x_۱\in\{x \mid x\geq ۰\}$ و $x_۲\in\{x \mid x\geq ۰\}$ و $f(x_۱)=f(x_۲)$ باشد داریم:

منوی اصلی

$$\sqrt{x_1^2+1}=\sqrt{x_2^2+1}\Rightarrow x_1^2+1=x_2^2+1\Rightarrow x_1=\pm x_2$$

چون x_1 و x_2 غیرمنفی هستند پس تساوی $x_1=-x_2$ درست نیست بنابراین باید

$x_1=x_2$ باشد. f پوشا نیز هست زیرا اگر $y\in\{x \mid x\geq 1\}$ باشد، $y^2\geq 1$ خواهد بود با انتخاب $x=\sqrt{y^2-1}$ داریم:

منوی اصلی

$$f(x)=f(\sqrt{y^{2}-1})=\sqrt{(\sqrt{y^{2}-1})^{2}+1}=\sqrt{y^{2}}=|y|=y$$

بنابراین f وارون دارد، برای پیدا کردن وارون f، معادله $f(x)=y$ را برحسب x حل می‌کنیم.

$$\sqrt{x^{2}+1}=y \quad \Rightarrow \quad x=\sqrt{y^{2}-1} \rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt{x^{2}-1}$$

منوی اصلی

۳.۲ اعمال جبری روی توابع

تابع $f(x)=\frac{2x|x|}{x^2+1}+x\sin x$ را در نظر بگیرید دربارهٔ عبارت $f(x)$ به نکات زیر توجه کنید:

منوی اصلی

الف) $f(x)$ از جمع عبارتهای $x\sin x$ و $\frac{2x|x|}{x^2+1}$ تشکیل شده است.

ب) $x\sin x$ حاصلضرب عبارتهای x و $\sin x$ است.

ج) $\frac{2x|x|}{x^2+1}$ خارج‌قسمت عبارتهای $2x|x|$ بر x^2+1 است.

حال توابع g_1 و g_2 و g_3 و g_4 را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

منوی اصلی

$$g_1(x)=2x|x| \quad , \quad g_2(x)=x^2+1 \quad , \quad g_3(x)=x \quad , \quad g_4(x)=\sin x$$

در این صورت داریم:

$$f(x)=\frac{g_1(x)}{g_2(x)}+g_3(x)g_4(x)$$

منوی اصلی

۱.۳.۲ تعریف. توابع $f:A\to B$ و $g:C\to D$ را در نظر بگیرید:

برای هر $x\in A\cap C$ تعریف می‌کنیم:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

$$(fg)(x)=f(x)g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \quad , \quad (g(x)\neq 0)$$

دانشگاه پیام نور

۲.۳.۲ تذکر. الف) حاصلضرب f و g را که با نماد fg نشان داده می‌شود نباید با ترکیب $f\circ g$ اشتباه کرد.

ب) f^{-1} با $\frac{1}{f}$ یکی نیست.

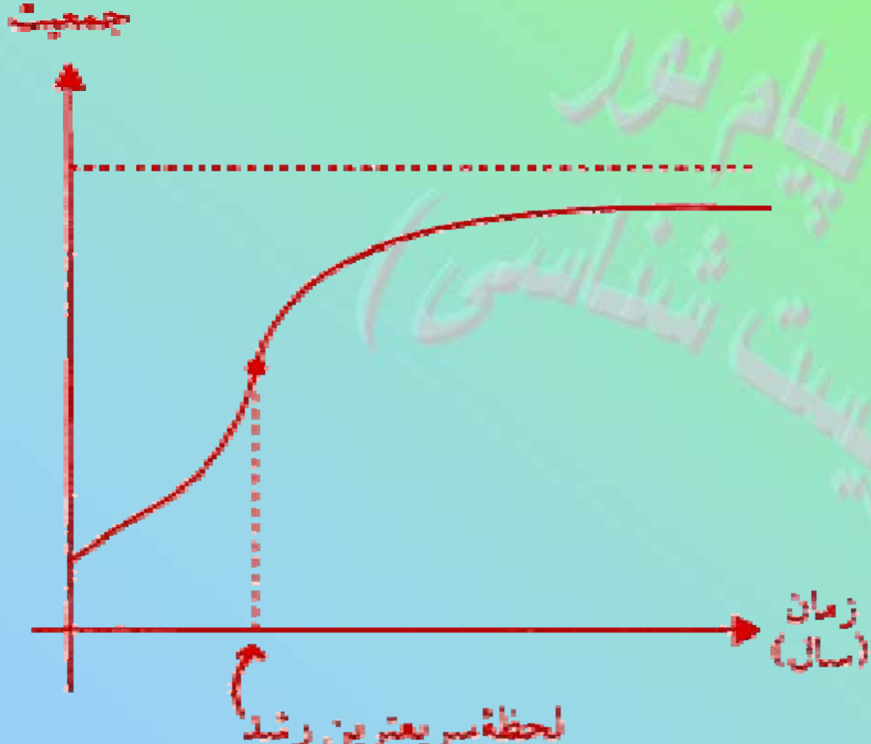
۴.۲ نمودار توابع

نمودارها اطلاعاتی را آشکار می‌سازند که ممکن است این اطلاعات با توصیف جبری چندان آشکار نباشد در شکل زیر دو نمونه از نمودارها را که وابستگی کمیتها را توصیف می‌کند رسم شده است.

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

(الف)تابع تولید



(ب)رشد کراندار جمعیت

منوی اصلی

نمودار شکل (الف) نوسان در کل تولیدات صنعتی کشور خاصی را طی یک دورهٔ چهارساله توصیف می‌کند ملاحظه می‌شود بالاترین نقطهٔ نمودار در حدود اواسط سال دوم و سوم روی می‌دهد که مبین آن است که اندازهٔ تولید در آن زمان بیشترین بوده است.

منوی اصلی

نمودار شکل (ب) رشد جمعیت را هنگامی که عوامل محیطی کران بالایی را بر اندازهٔ امکان‌پذیر جمعیت تحمیل می‌کند نشان می‌دهد این نمودار آشکار می‌سازد که در ابتدا رشد جمعیت در حال افزایش است و سپس هر چه اندازهٔ جمعیت به کران بالای آن نزدیکتر می‌شود از میزان رشد جمعیت کاسته می‌شود.

منوی اصلی

برای نمایش هندسی تابع $y = f(x)$ روش معمول این است که دستگاه مختصاتی رسم کنیم که واحدهای متغیر مستقل x بر محور افقی و واحدهای متغیر وابسته y بر محور عمودی نشانگذاری شده باشد.

منوی اصلی

حال مجموعهٔ تمامی نقاط (x,y) به قسمی که x متعلق به دامنهٔ تابع باشد و رابطهٔ $y = f(x)$ برقرار باشد، نمودار تابع $y = f(x)$ را تشکیل می‌دهد. روش مقدماتی برای رسم نمودار توابع، رسم نقطه‌ای است که می‌توان نمودار توابع را به‌طور تقریبی رسم کرد. بدین صورت که:

منوی اصلی

۱. از دامنهٔ f مقادیری برای x انتخاب کنید و به‌ازای این مقادیر، مقادیر $y = f(x)$ را محاسبه کرده و در جدولی بنویسید.

۲. نقاط محاسبه شدهٔ (x, y) را رسم کنید.

۳. این نقاط را با استفاده از منحنی به هم وصل کنید.

منوی اصلی

۱.۴.۲ مثال. نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$f(x)=\begin{cases} ۲x & ۰\le x<۱ \\ \frac{۲}{x} & ۱\le x<۴ \\ ۳ & x\ge ۴ \end{cases}$$

منوی اصلی

حل: برای تشکیل جدول مقادیر تابع به‌ازای $0 \le x < 1$ از $f(x) = 2x$، به‌ازای $1 \le x < 4$ از $f(x) = \frac{2}{x}$ و به‌ازای $x \ge 4$ از $f(x) = 3$ استفاده می‌کنیم.

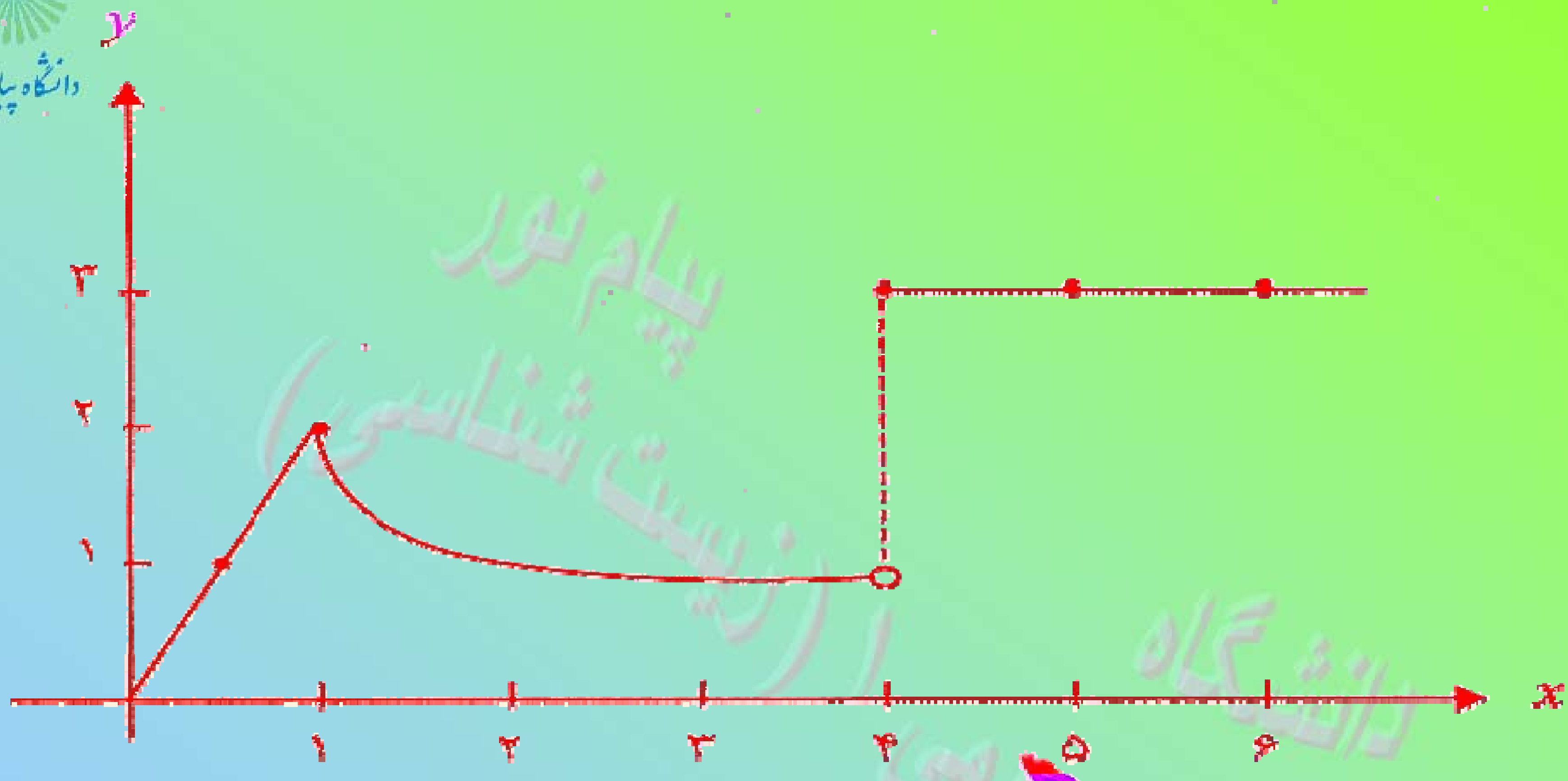
x	۰	$\frac{1}{2}$	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$f(x)$	۰	۱	۲	۱	$\frac{2}{3}$	۳	۳	۳

منوی اصلی

سپس با ترسیم نقاط $(x, f(x))$ نمودار تابع را مانند شکل زیر رسم کنید. (توجه کنید که درحالت کلی، هرچه نقاط بیشتری را رسم کنیم نمودار دقیقتری به‌دست می‌آوریم).

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور



در این قسمت به بیان مختصری دربارهٔ توابع مقدماتی می‌پردازیم.

منوی اصلی

طراح: رحمت سلطانی عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه پیام نور شیراز

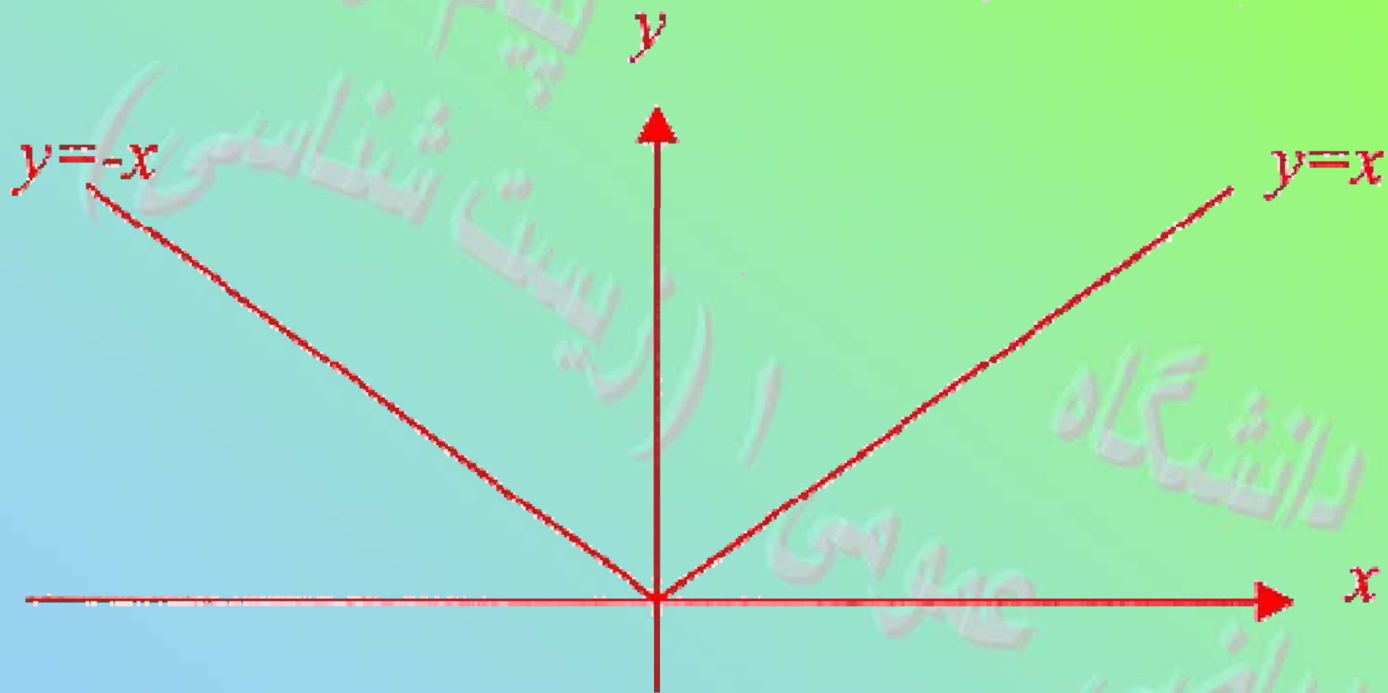
۵.۲ تابع قدرمطلق

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & ; \quad x > ۰ \\ ۰ & ; \quad x = ۰ \\ -x & ; \quad x < ۰ \end{cases}$$

منوی اصلی

به‌عنوان مثال $|2| = 2$ و $|-2| = -(-2) = 2$ و $|\pi - 4| = -(\pi - 4) = 4 - \pi$

و نمودار آن به شکل زیر است:



منوی اصلی

۱.۵.۲ مثال. نمودار تابع $f(x) = |x - ۱|$ را رسم کنید.

حل:

$$f(x) = |x - ۱| = \begin{cases} x - ۱ & x - ۱ > ۰ \\ ۰ & x - ۱ = ۰ \\ -(x - ۱) & x - ۱ < ۰ \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x - ۱ & x > ۱ \\ ۰ & x = ۱ \\ -x + ۱ & x < ۱ \end{cases}$$

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

منوی اصلی

طراح: رحمت سلطانی عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه پیام نور شیراز

۶.۲ تابع جزء صحیح

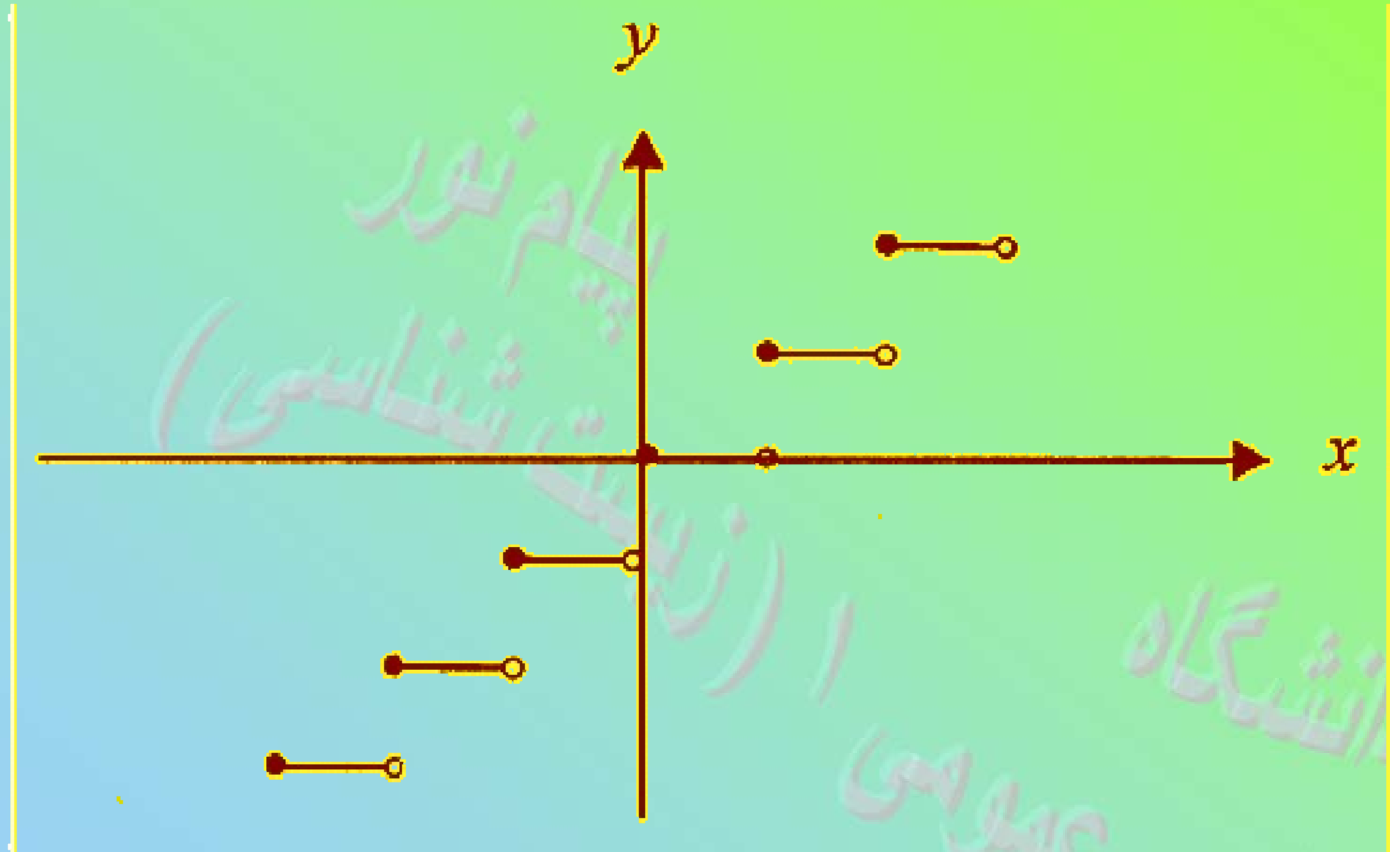
تابع جزء صحیح را که با $f(x) = [x]$ نشان می‌دهیم برای هر عدد حقیقی x عبارت است از بزرگترین عدد صحیح نا بیشتر از x به‌عنوان مثال: $[۱٫۴] = ۱$ ، $[\pi] = ۳$ ، $[-۴٫۱] = -۵$, $[-۳] = -۳$ و به‌طور کلی به‌ازای هر عدد حقیقی x ، دو عدد صحیح متوالی n و $n + ۱$ وجود دارند که $n \leq x < n + ۱$ و لذا:

طراح: رحمت سلطانی عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه پیام نور شیراز

$$n \leq x < n+1 \quad \Rightarrow \quad [x] = n$$

نمودار تابع $f(x) = [x]$ به‌صورت پله‌ای است که در شکل زیر قسمتی از آن رسم شده است.

منوی اصلی



منوی اصلی

۷.۲ تابع توانی

تابعی به‌صورت $f(x)=x^n$ را که در آن n عددی حقیقی است تابع توانی نامیده

می‌شود مثلاً:

منوی اصلی

$$f(x)=x^{\frac{1}{2}} \quad , \quad f(x)=x^{-3} \quad ; \quad f(x)=x^{2}$$

همگی توابع توانی هستند همچنین $f(x)=\frac{1}{x^{2}}$ و $f(x)=\sqrt[3]{x}$ توابع توانی هستند زیرا می‌توان آنها را به‌صورت $f(x)=x^{-2}$ و $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ نوشت.

منوی اصلی

۸.۲ چند جمله‌ایها

چند جمله‌ای تابعی است به‌صورت $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ که در آن n عدد

صحیح غیرمنفی و $a_0, a_1, \cdots, a_n$ مقادیر ثابت هستند اگر $a_n \neq 0$ عدد صحیح n درجهٔ چند جمله‌ای نامیده می‌شود. برای مثال تابع $f(x)=3x^5-6x^2+7$ یک چندجمله‌ای درجهٔ ۵ است.

منوی اصلی

۹.۲ توابع گویا

تابعی راکه از تقسیم دو چندجمله‌ای حاصل می‌شود تابع گویا می‌نامند مثلاً تابع

$f(x)=\frac{x^{2}+x-2}{x-2}$ یک تابع گویا می‌باشد تابع $f(x)=1+\frac{1}{x}$ نیز یک تابع گویاست زیرا آن را می‌توان به‌صورت $f(x)=\frac{x+1}{x}$ نوشت.

منوی اصلی

۱۰.۲ توابع خطی

در بسیاری از موارد میزان تغییر یک کمیت نسبت به کمیت دیگر عدد ثابتی می‌باشد

منوی اصلی

مثال زیر را در نظر بگیرید: هزینهٔ کل تولیدکننده‌ای شامل ۲۰۰ دلار بابت مخارج ثابت عمومی و ۵۰ دلار بابت تولید هر واحد می‌باشد هزینهٔ کل را به‌صورت تابعی از تعداد واحدهای تولید شده بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.

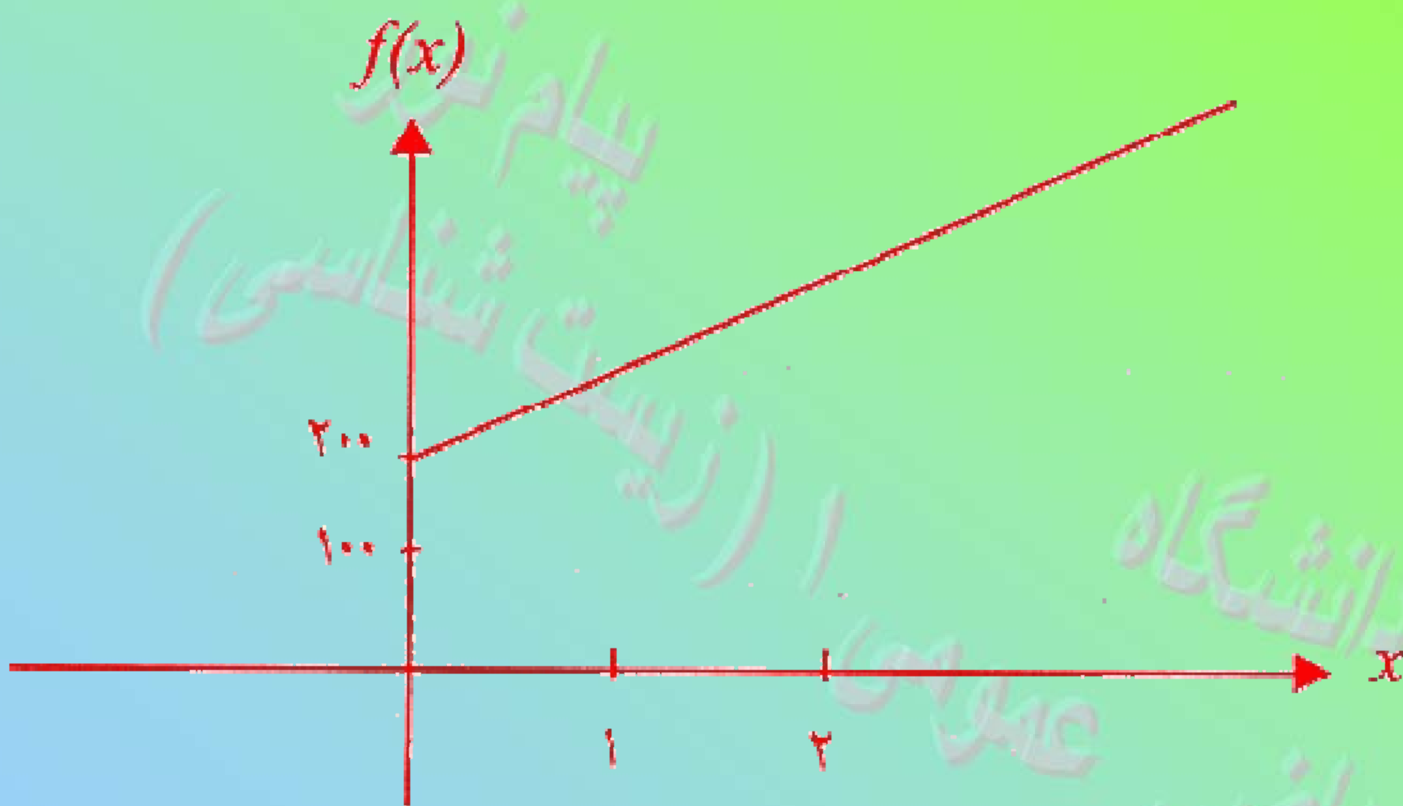
حل: اگر تعداد واحدهای تولید شده را x و هزینهٔ کل را $f(x)$ بنامیم داریم:

مخارج ثابت عمومی + (تعداد واحدها) (هزینهٔ تولید یک واحد) = هزینهٔ کل

$$f(x) = ۵۰x + ۲۰۰$$

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور



منوی اصلی

در نمودار شکل فوق هزینهٔ کل با میزان ۵۰ دلار در واحد، افزایش می‌یابد. در

نتیجه نمودار آن در شکل خط راستی است که به‌ازای ۱ واحد افزایش در x ، ۵۰ واحد صعود می‌کند. در حالت کلی، تابعی که مقدار آن نسبت به متغیر مستقل با میزان ثابتی

منوی اصلی

تغییر کند تابع خطی نامیده می‌شود چنین تابعی به این دلیل خطی نامیده مـی‌شود کـه نمودار آن خط راست است. به‌عبارت دیگر تابع خطی تابعی است به‌صورت:

$$f(x) = a_0 + a_1 x$$

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

که در آن a_0 و a_1 مقادیر ثابتی هستند. مثلاً توابع $f(x)=\frac{3}{2}+2x$ و $f(x)=-5x$ و

$f(x)=12$ همگی خطی هستند توابع خطی را معمولاً به‌صورت $f(x)=mx+b$ می‌نویسند که در آن m و b مقادیر ثابت هستند.

برای آشنایی بیشتر با توابع خطی مطالب زیر را در رابطه با خط راست بیان می‌کنیم:

منوی اصلی

۱.۱۰.۲ خط راست

نمودار هر تابع به‌صورت $y = mx + b$ یا $f(x) = mx + b$ که در آن $m, b \in \mathbf{R}$ یک خط

راست است. و عدد m را شیب یا ضریب زاویه‌ای این خط می‌نامیم. اگر $m = 0$ خط

$y = b$ افقی (موازی با محور x) است. هر خط نا قائم چون l ، نمودار یک تابع به‌صورت

منوی اصلی

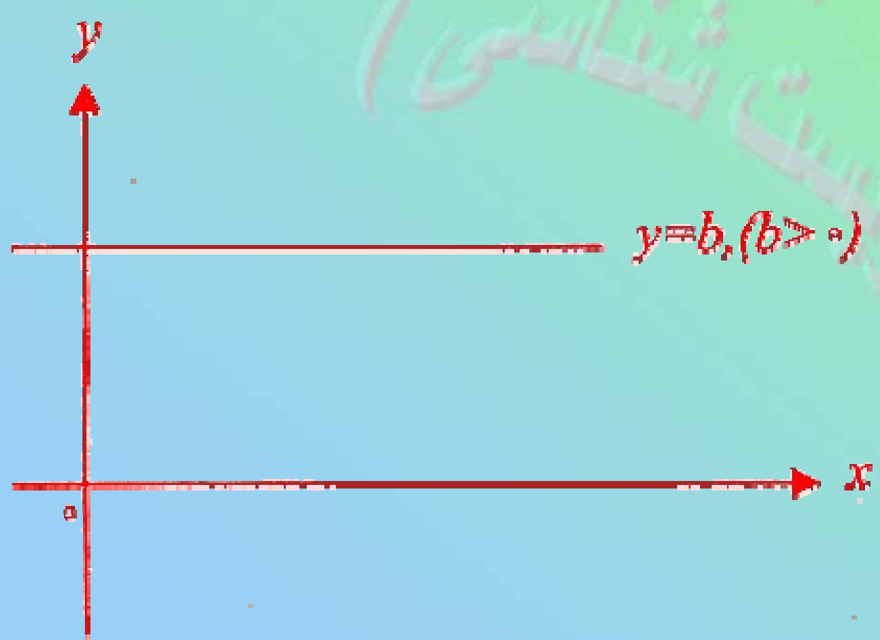
طراح: رحمت سلطانی عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه پیام نور شیراز

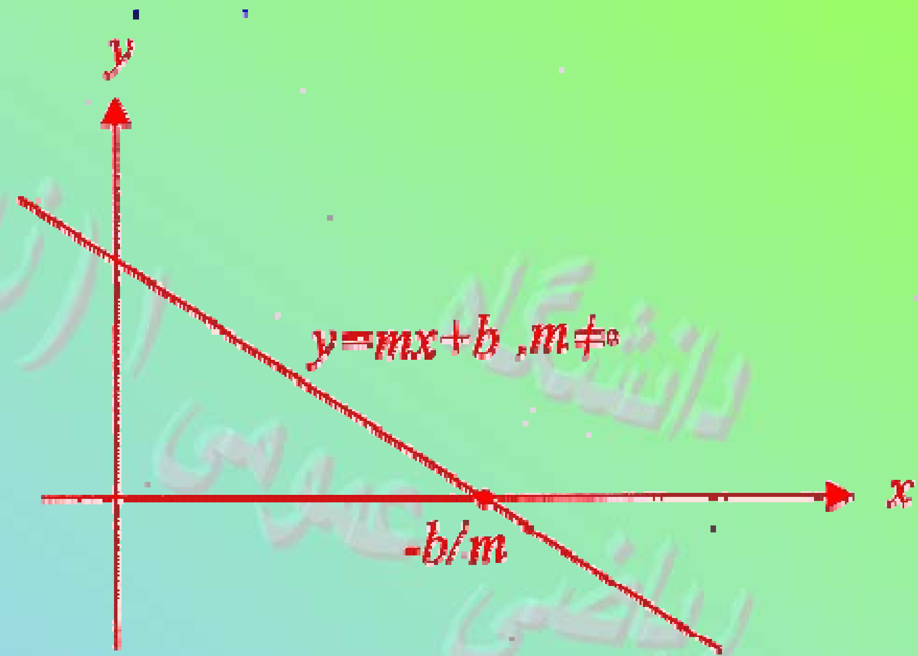
$y = mx + b$ است. حال اگر $P(x_1, y_1)$ و $Q(x_2, y_2)$ دو نقطه از خط l باشند آنگاه نقطهٔ (x, y) بر خط l واقع است اگر و فقط اگر $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$ که می‌توان آن را به‌صورت سادهٔ زیر نوشت:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

منوی اصلی

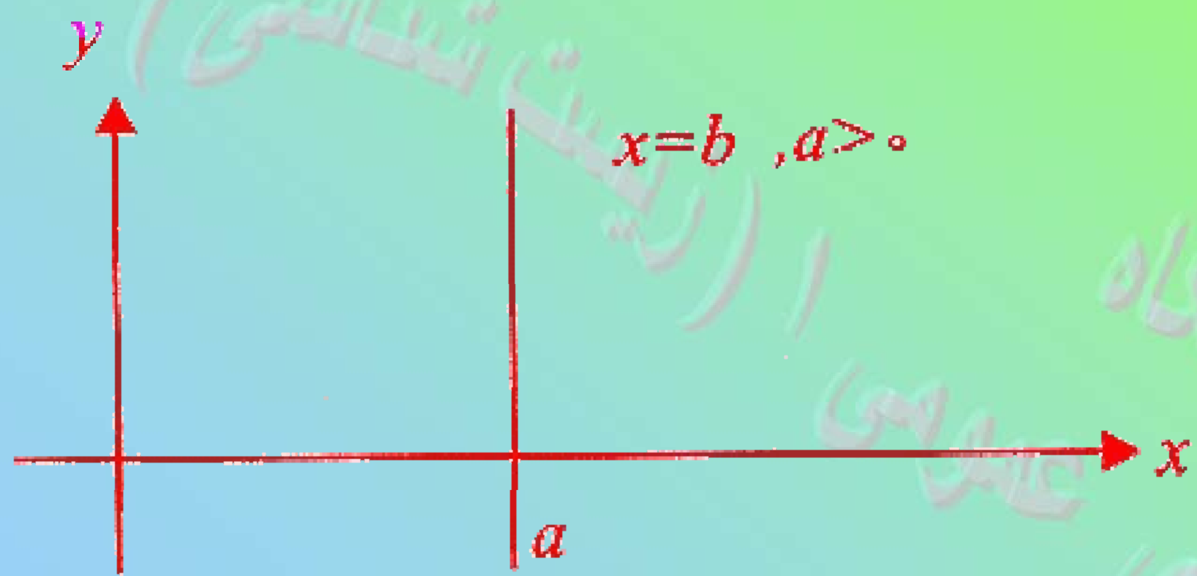
که در آن $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ شیب خط l می‌باشد. بنابراین خط l دارای نمودار $f(x)=mx+b$ است که در آن $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ و $b=y_1-mx_1$.





منوی اصلی

نمودار معادلهٔ $x = a$ که در آن a عددی ثابت است مجموعهٔ نقاط $\{(a,y)\,|y \in R\}$ در صفحه است که دیده می‌شود که این نمودار یک خط قائم است.



منوی اصلی

بدیهی است که خط قائم $x = a$ نمودار یک تابع نیست زیرا مثلاً مختصهای اول دو نقطهٔ $(a , ۱)$ و $(a , ۲)$ از این خط یکسان‌اند که این مطلب متناقض با تعریف تابع است.

همچنین برای خطهای قائم شیب تعریف نمی‌کنیم زیرا اگر $(a,y_۱)$ و $(a,y_۲)$ را در فرمول مربوط به شیب قرار دهیم در این صورت مخرج کسر صفر می‌شود.

منوی اصلی

۲.۱۰.۲ تذکر. روشن است که با توجه به تعریف تابع، نمودار C در صفحه xy نمودار یک تابع است اگر و تنها اگر هر خط قائم l این نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

۱۱.۲ تابع نمایی

تابع نمایی، تابعی است به‌صورت $f(x)=a^x$ که در آن، a عددی ثابت و مثبت است.

در این نوع توابع متغیر مستقل x را نما و عدد ثابت و مثبت a را پایهٔ تابع می‌نامند.

منوی اصلی

توابع نمایی در ریاضیات کاربردی دارای نقش اساسی است. از توابع نمایی در بهداشت عمومی برای بررسی شیوع بیماریهای مسری، در جمعیت نگاری برای تخمین جمعیت، در امور مالی برای محاسبهٔ دارایی، در روان‌شناسی برای مطالعهٔ فرایند یادگیری، استفاده می‌شود. در اینجا برخی از تعاریف و قوانین توانها را که در رابطه با توابع نمایی مورد استفاده قرار می‌گیرند در زیر به‌طور خلاصه ذکر می‌کنیم.

منوی اصلی

به‌ازای مقادیر گویای n، $a^n \ (a>0)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

توانهای صحیح: اگر n عددی صحیح و مثبت باشد آنگاه:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ مرتبه}}$$

توانهای کسری: اگر m و n صحیح و مثبت باشند آنگاه:

$$a^{\frac{n}{m}} = (\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a^n}$$

توانهای منفی:

$$a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{a^n}$$

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

توان صفر:

$$a^{0} = 1$$

به‌عنوان مثال:

منوی اصلی

$$3^{-4}=\frac{1}{3^4}=\frac{1}{81}$$

$$3^4=3\cdot3\cdot3\cdot3=81$$

$$4^{\frac{3}{2}}=(\sqrt{4})^3=2^3=8$$

$$4^{\frac{1}{2}}=\sqrt{4}=2$$

$$27^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{27^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{(\sqrt[3]{27})^2}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$$

منوی اصلی

۱.۱۱.۲ قوانین توانها

$$(a^r)^s = a^{rs}$$

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$a^r a^s = a^{r+s}$$

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

به‌عنوان مثال:

$$(۲^{-۲})^{۳}=۲^{-۶}=\frac{۱}{۲^{۶}}=\frac{۱}{۶۴}$$

$$\frac{۳^{۳}}{(۳^{\frac{۱}{۳}})(۳^{\frac{۲}{۳}})}=\frac{۳^{۳}}{۳^{\frac{۱}{۳}+\frac{۲}{۳}}}=\frac{۳^{۳}}{۳^{۱}}=۳^{۲}=۹$$

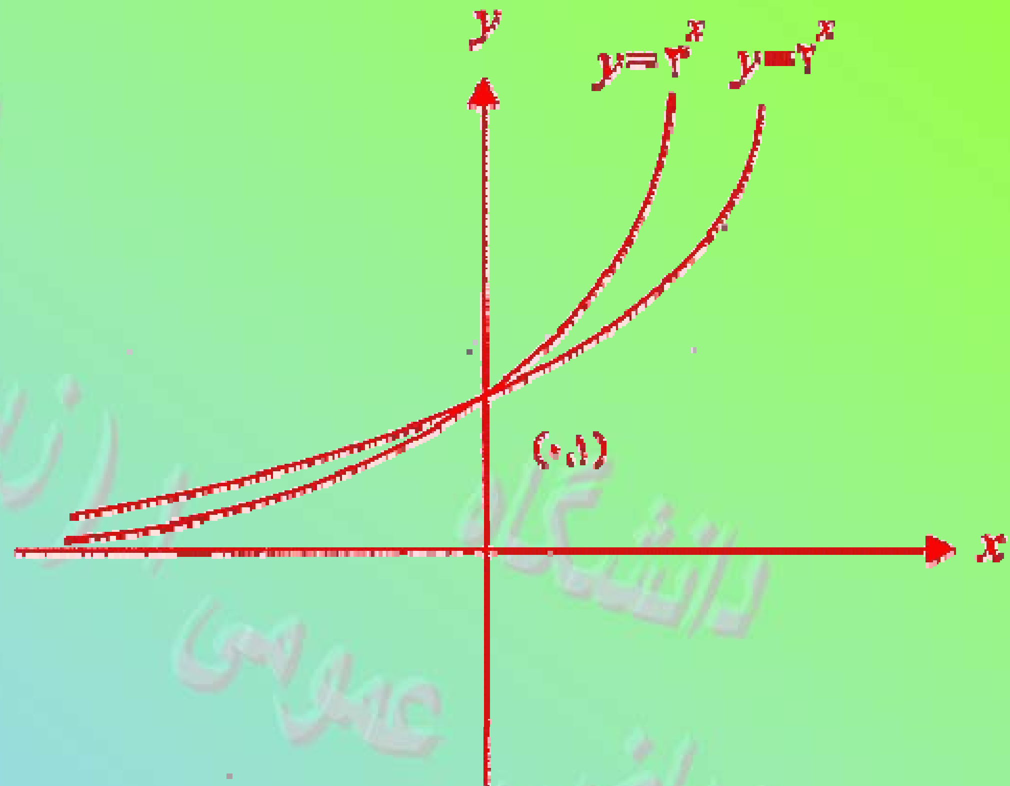
۲.۱۱.۲ نمودار توابع نمایی

یک راه برای رسم تقریبی توابع نمایی این است که با دادن مقادیر مختلف به x، مقدار تابع را بیابیم و رفتار تابع را هنگامی که x افزایش و یا کاهش می‌یابد تعیین کنیم. در اشکال زیر نمودار چهار تابع نمایی رسم شده است.

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

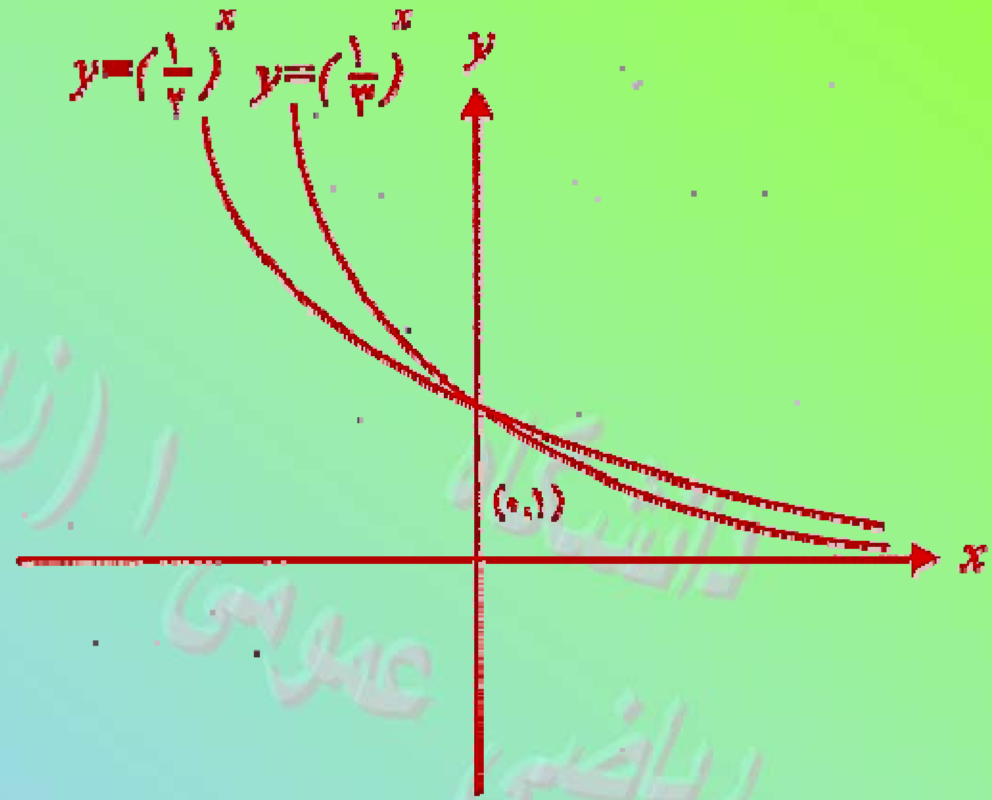
x	۲^x	۳^x
-۲	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۹}$
-۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۳}$
۰	۱	۱
۱	۲	۳
۲	۴	۹



منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

x	$(\frac{1}{۲})^x$	$(\frac{1}{۳})^x$
-۲	۴	۹
-۱	۲	۳
۰	۱	۱
۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۳}$
۲	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۹}$



منوی اصلی

۳.۱۱.۲ عدد e

در مباحث تئوریک ریاضیات عالی ثابت می‌شود که عبارت $(1+\frac{1}{n})^n$ هنگامی که n بدون کران افزایش می‌یابد دارای حد معینی بین ۲ و ۳ می‌باشد. بدون وارد شدن به

اینگونه مباحث می‌توان با استفاده از ماشین حساب مقدار تقریبی عبارت فوق را با تکمیل کردن جدول زیر به‌دست آورد:

منوی اصلی

n	۱	۲	۵	۱۰	۱۰۰
$(1+\frac{1}{n})^n$	۲٫۰۰۰	۲٫۲۵۰	۲٫۴۸۸	۲٫۵۹۴	۲٫۷۰۵

طراح: رحمت سلطانی عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه پیام نور شیراز

هنگامی که n بدون کران افزایش می‌یابد عبارت $(1+\frac{1}{n})^n$ به عددی میل می‌کند

که مقدار دقیق آن را با e نمایش می‌دهند. این عدد از مهمترین و مفیدترین اعداد

درریاضیات است. که در مسائل کاربردی در اکثر توابع نمایی به‌عنوان پایهٔ آن ظاهر

می‌شود.

منوی اصلی

۴.۱۱.۲ مدلهای نمایی:

توابعی که توانهایی از e را شامل می‌شوند نقش مهمی در ریاضیات کاربردی دارا هستند که در زیر چند نمونه از آنها را بررسی می‌کنیم:

منوی اصلی

۵.۱۱.۲ رشد نمایی

کمیت $Q(t)$ راکه براساس قانون $Q(t)=Q_{0}e^{kt}$ که در آن Q_{0} و k مقادیر ثابت و مثبت

می‌باشند افزایش می‌یابد، گویند از قانون رشد نمایی پیروی می‌کند. مثلاً در غیاب محدودیتهای محیطی، جمعیت به‌صورت نمایی رشد می‌کند. قابل توجه است که

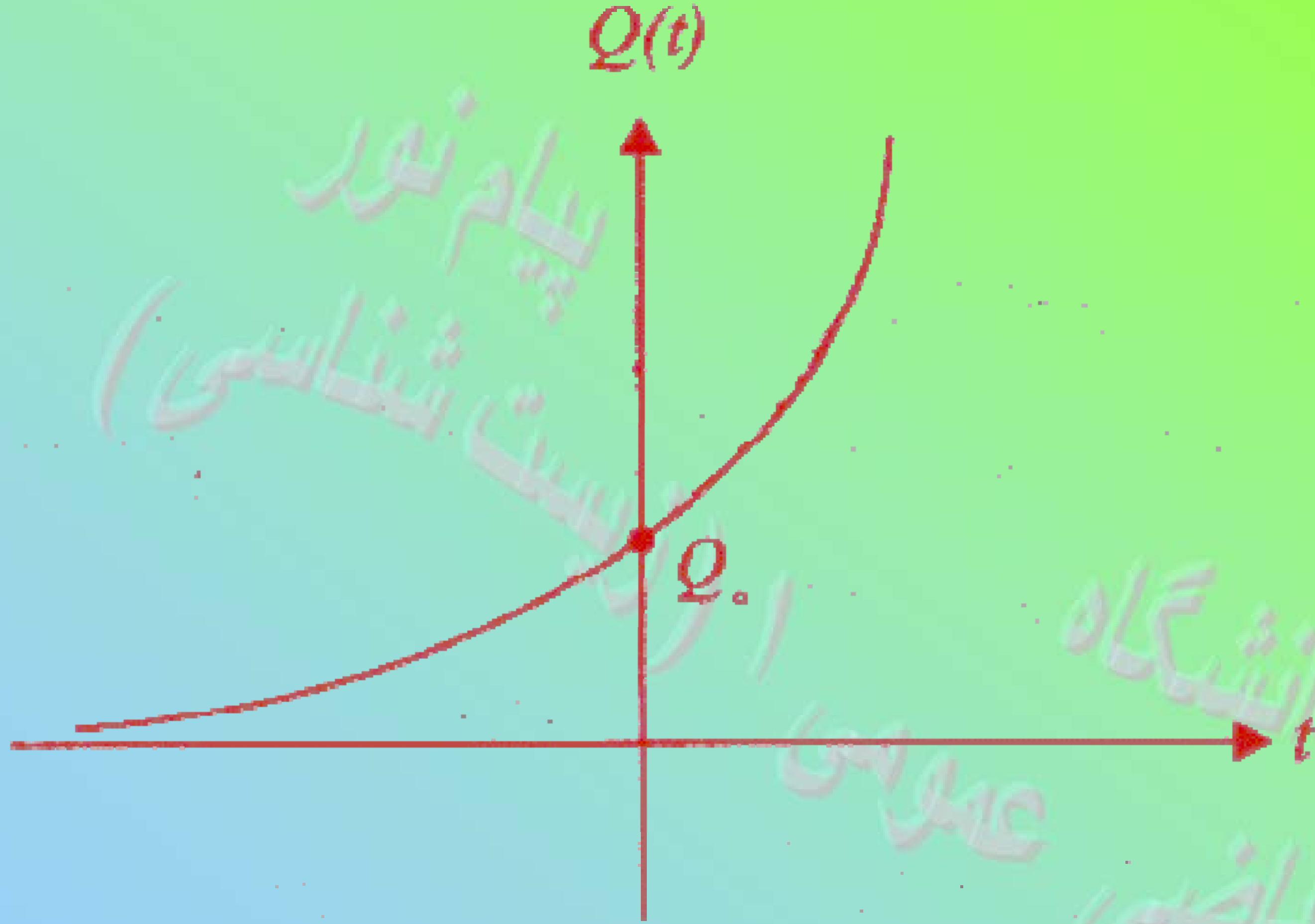
منوی اصلی

کمیتهایی که به‌صورت نمایی رشد می‌کنند از آن ویژگی برخوردارند که میزان رشد آنها متناسب با اندازهٔ آنها می‌باشد. و اینکه، درصد میزان تغییر آنها ثابت است. همچنین در رابطهٔ فوق Q_0 برابر با مقدار اولیهٔ $Q(0)$ است.

برای رسم تابع $Q(t)=Q_0e^{kt}$ توجه کنید که $Q(t)$ همواره مثبت است و $Q(0)=Q_0$ و اینکه با افزایش بدون کران t ، $Q(t)$ بدون کران افزایش می‌یابد.

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور



منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

۶.۱۱.۲ **مثال.** زیست‌شناسان دریافته‌اند تحت شرایط خاص، تعداد باکتریها در یک کشت باکتریایی به‌صورت نمایی رشد می‌کند. فرض کنید در یک کشت باکتریایی، ابتدا ۲۰۰۰ باکتری وجود داشته باشد و ۲۰ دقیقه بعد تعداد باکتریها، به ۶۰۰۰ رسیده باشد چه تعداد باکتری در پایان ساعت اول موجود خواهد بود؟

حل: فرض کنید $Q(t)$ تعداد باکتریهای موجود در پایان t دقیقه اول باشد چونکه تعداد باکتریها به‌صورت نمایی رشد می‌کند و در ابتدا تعداد ۲۰۰۰ باکتری موجود است، $Q(t)$ تابعی به‌صورت زیر می‌باشد:

$$Q(t) = ۲۰۰۰\, e^{kt}$$

منوی اصلی

و چون در پایان ۲۰ دقیقه اول تعداد باکتری ۶۰۰۰ باکتری موجود می‌باشد نتیجه می‌شود که:

$$\boxed{6000 = 2000\, e^{20k}}$$

یا

$$\boxed{e^{20k} = 3}$$

منوی اصلی

برای محاسبهٔ تعداد باکتریها در پایان ساعت اول (۶۰ دقیقه) باید $Q(۶۰)$ را محاسبه کنیم داریم:

$$Q(۶۰) = ۲۰۰۰e^{۶۰k} = ۲۰۰۰(e^{۲۰k})^{۳} = ۲۰۰۰(۳^{۳}) = ۵۴۰۰۰$$

به‌عبارت دیگر تعداد ۵۴۰۰۰ باکتری در پایان ساعت اول موجود خواهد بود.

منوی اصلی

۷.۱۱.۲ کاهش نمایی

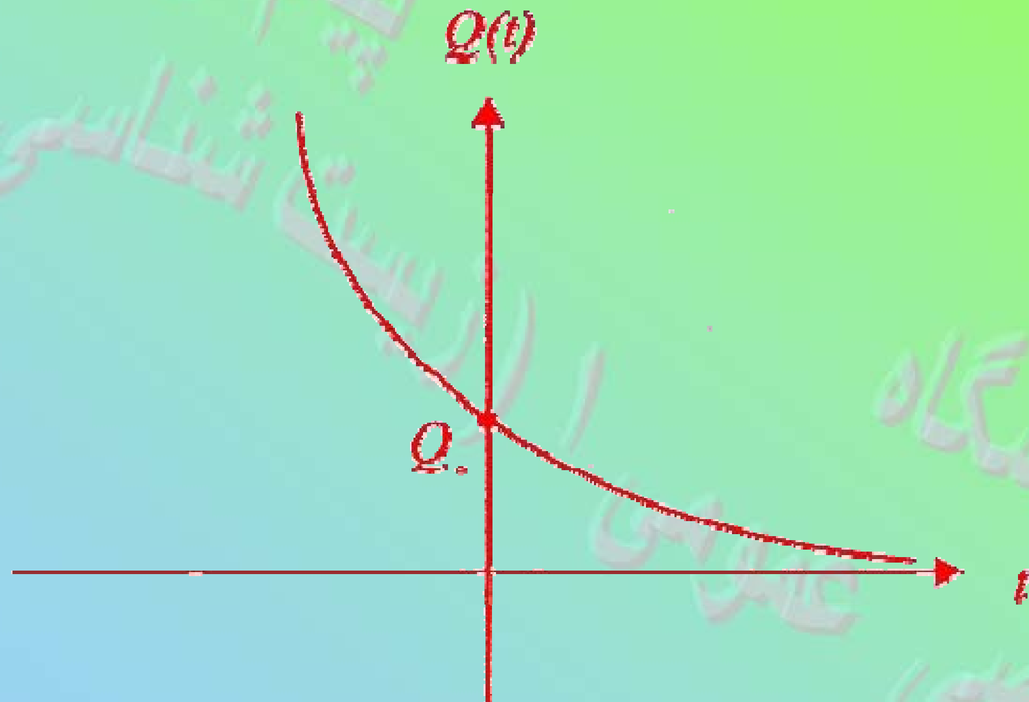
کمیت $Q(t)$ را که براساس قانون $Q(t)=Q_0e^{-kt}$ کاهش می‌یابد که در آن Q_0 و k مقادیر ثابت و مثبت هستند، گویند از قانون واپاشی نمایی یا کاهش نمایی پیروی می‌کند.

منوی اصلی

مثلاً واپاشی مواد رادیواکتیو به‌صورت نمایی است. فروش بسیاری از محصولات هنگامی که تبلیغات برای فروش آن قطع شده باشد به‌صورت نمایی کاهش می‌یابد. توابعی که به‌صورت نمایی کاهش می‌یابد دارای این ویژگی هستند که میزان کاهش آنها متناسب با اندازهٔ آنها می‌باشد.

منوی اصلی

نمودار $Q(t)=Q_{\circ}e^{-kt}$ که به‌صورت نمایی کاهش می‌یابد به‌صورت زیر است.



منوی اصلی

۸.۱۱.۲ مثال. نوعی ماشین‌آلات صنعتی بر اثر استفاده مستهلک می‌شود به‌گونه‌ای که قیمت آن بعد از t سال با تابع $Q(t)=Q_{\circ}e^{-\circ/\circ\text{۴}t}$ داده می‌شود بعد از ۲۰ سال قیمت ماشین‌آلات معادل ۸۹۸۶٫۵۸ دلار خواهد بود قیمت فعلی آن را تعیین کنید.

حل: هدف یافتن $Q_{\circ}$ است. چون $Q(\text{۲۰}) = \text{۸۹۸۶٫۵۸}$ پس:

منوی اصلی

حل: هدف یافتن Q_0 است. چون $Q(۲۰) = ۸۹۸۶٫۵۸$ پس:

$$Q_0 e^{-۰٫۰۸t} = ۸۹۸۶٫۵۸$$

$$Q_0 = ۸۹۸۶٫۵۸ e^{۰٫۰۸t} \simeq ۲۰٫۰۰۰ \text{ دلار}$$

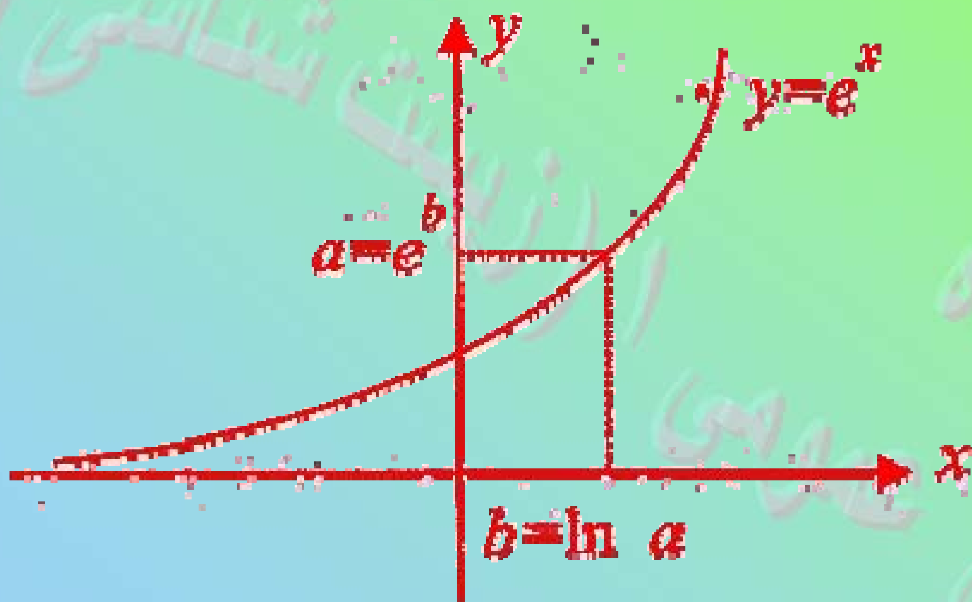
منوی اصلی

۱۲.۲ لگاریتم طبیعی

در بسیاری از مسائل کاربردی، به‌ازای عدد معین a باید عدد b را به‌گونه‌ای بیابید که رابطهٔ $a=e^{b}$ برقرار باشد. عدد b را لگاریتم طبیعی a می‌نامند و آن را با نماد $\ln a$ نشان می‌دهند. بنابراین:

منوی اصلی

$b = \ln a$ اگر و فقط اگر $a = e^b$



منوی اصلی

۲.۱۲.۱ مثال. مقادیر زیر را حساب کنید:

الف) $\ln e$ ‏ ب) $\ln 1$ ‏ ج) $\ln\sqrt{e}$

حل: الف) چون $e^1 = e$ طبق تعریف داریم: $\ln e = 1$

ب) چون $e^0 = 1$ طبق تعریف داریم: $\ln 1 = 0$

منوی اصلی

ج) $\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}}$ طبق تعریف داریم: $\ln\sqrt{e} = \frac{1}{2}$

د) مقدار $\ln 2$ عدد منحصر بفرد b است به گونه‌ای که $e^b = 2$. روش جبری ساده‌ای برای محاسبهٔ این مقدار وجود ندارد. لذا باید از ماشین حساب یا جدول لگاریتم برای یافتن آن استفاده کرد خواهیم داشت:

$$\ln 2 \simeq 0/69315$$

منوی اصلی

۲.۱۲.۲. رابطهٔ بین e^x و $\ln x$

در مثال زیر دو رابطهٔ مهم را که نشان می‌دهد توابع لگاریتمی و نمایی یکدیگر را خنثی می‌کنند به‌دست می آوریم:

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

۳.۱۲.۲ مثال. عبارتهای زیر ساده کنید:

الف) $e^{\ln x}\ (x > 0)$

ب) $\ln e^{x}$

حل: الف) طبق تعریف، $\ln x$ برابر با عدد منحصر بفرد b است که به‌ازای آن رابطهٔ $x = e^{b}$ برقرار است بنابراین $e^{\ln x} = e^{b} = x$.

منوی اصلی

ب) طبق تعریف $\ln e^x$ برابر با عدد منحصر بفرد b است که به‌ازای آن رابطهٔ $e^x = e^b$ برقرار است.بدیهی است که باید داشته باشیم $x = b$ بنابراین $\ln e^x = x$.

مثال فوق نشان می‌دهد که توابع نمایی و لگاریتمی معکوس یکدیگرند. در حالت کلی دو تابع f ، g را که به‌ازای آنها روابط $f(g(x)) = x$ و $g(f(x)) = x$ برقرار باشد معکوس یکدیگر می‌نامند.

از روابط معکوس بین e^x و $\ln x$ برای حل معادلات می‌توان استفاده کرد.

منوی اصلی

۴.۱۲.۲ مثال. هر یک از معادلات زیر را حل کنید:

الف) $۳ = e^{۲۰x}$

ب) $۲\ln x = ۱$

حل: الف) از طرفین معادله لگاریتم می‌گیریم به‌دست می‌آوریم:

$\ln ۳ = \ln e^{۲۰x}$ یا $\ln ۳ = ۲۰x$

منوی اصلی

برای به‌دست آوردن x (با استفاده از ماشین حساب یا جدول لگاریتم):

$$x=\frac{\ln ۳}{۲۰}\simeq\frac{۱٫۰۹۸۶}{۲۰}\simeq ۰٫۰۵۴۹$$

ب) داریم:

$$\boxed{\ln x=\frac{۱}{۲}}$$

منوی اصلی

حال با به‌کارگیری تابع نمایی داریم:

$$e^{\ln x} = e^{\frac{۱}{۲}} \quad \text{یا} \quad x = e^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{e} \simeq ۱٫۶۴۸۷$$

منوی اصلی

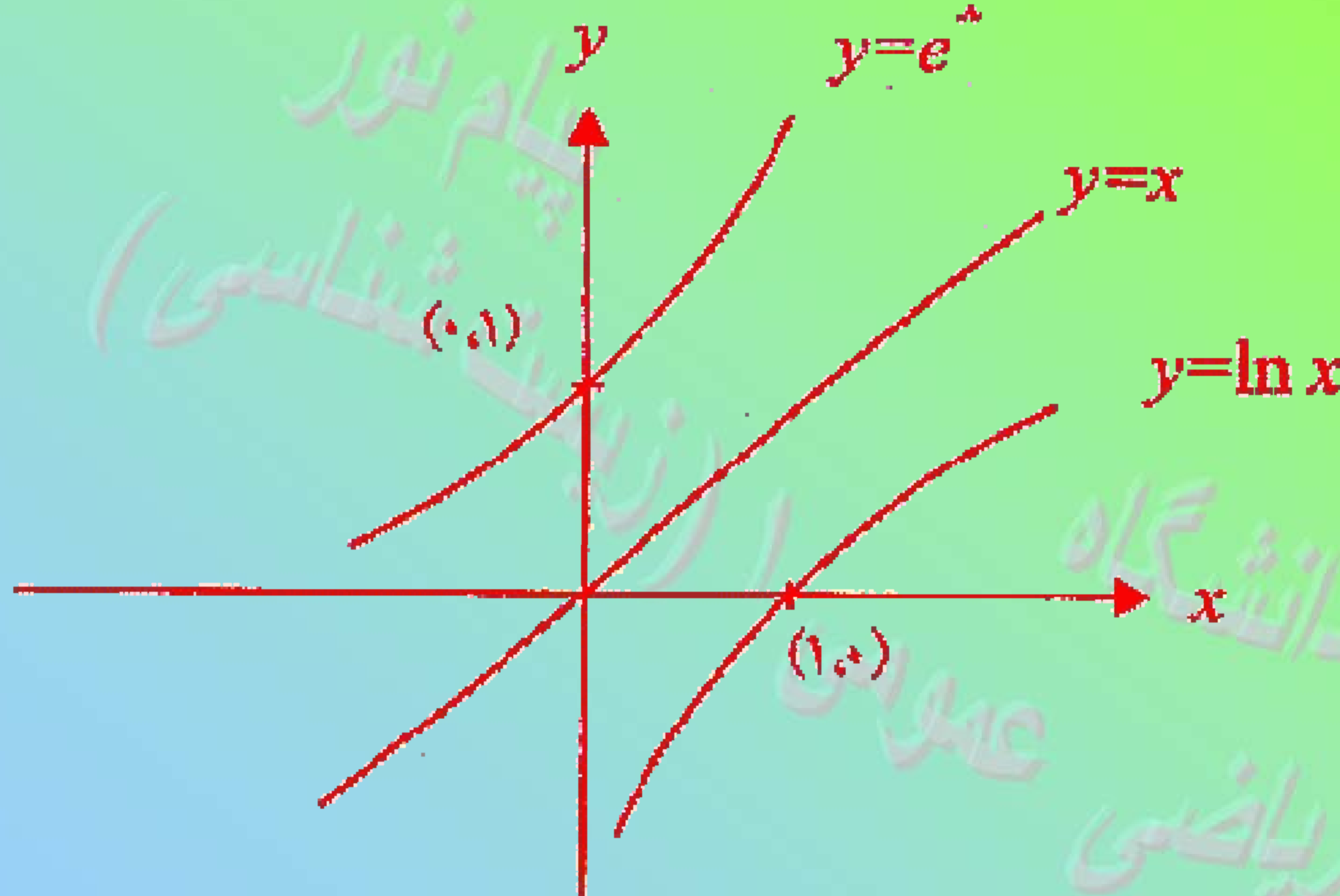
۵.۱۲.۲ نمودار $\ln x$

روش ساده‌ای برای رسم نمودار تابع لگاریتمی $y = \ln x$ با استفاده از نمودار تابع نمایی $y=e^x$ وجود دارد. این روش براساس این ویژگی هندسی قرار دارد که نقطهٔ (b , a)

منوی اصلی

قرینهٔ نقطهٔ (a , b) نسبت به خط $y = x$ می‌باشد اگر نقطهٔ (a , b) بر نمودار $y = e^x$ واقع باشد آنگاه با استفاده از ویژگیهای تابع معکوس می‌توان نشان داد که نقطه (b , a) بر نمودار $y = \ln x$ واقع است بنابراین نمودار تابع $y = \ln x$ قرینهٔ نمودار تابع $y = e^x$ نسبت به خط $y = x$ می‌باشد.

منوی اصلی



منوی اصلی

۶.۱۲.۲ ویژگیهای لگاریتم طبیعی

بااستفاده از قوانین توانها می‌توان ویژگیهای مهم زیر را برای لگاریتم طبیعی به‌دست آورد:

$$\ln(uv) = \ln u + \ln v$$

$$\ln\frac{u}{v} = \ln u - \ln v$$

$$\ln u^{v} = v\ln u$$

منوی اصلی

۷.۱۲.۴ مثال. الف) اگر $\ln a = ۳$ و $\ln b = ۷$ آنگاه $\ln\sqrt{ab}$ را به‌دست آورید.

ب) نشان دهید که $\ln\frac{۱}{x} = -\ln x$

ج) اگر $e^{۳} = ۲^{x}$ آنگاه x را بیابید.

حل:

الف) $\ln\sqrt{ab} = \ln(ab)^{\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۲}\ln(ab) = \frac{۱}{۲}(\ln a + \ln b) = \frac{۱}{۲}(۳+۷) = ۵$

ب) $\ln\frac{۱}{x} = \ln ۱ - \ln x = ۰ - \ln x = -\ln x$

منوی اصلی

ج) از طرفین معادله لگاریتم بگیرید داریم:

$$\ln ۲^x = \ln e^۳ \Rightarrow x \ln ۲ = ۳ \Rightarrow x = \frac{۳}{\ln ۲} \simeq ۴٫۳۳$$

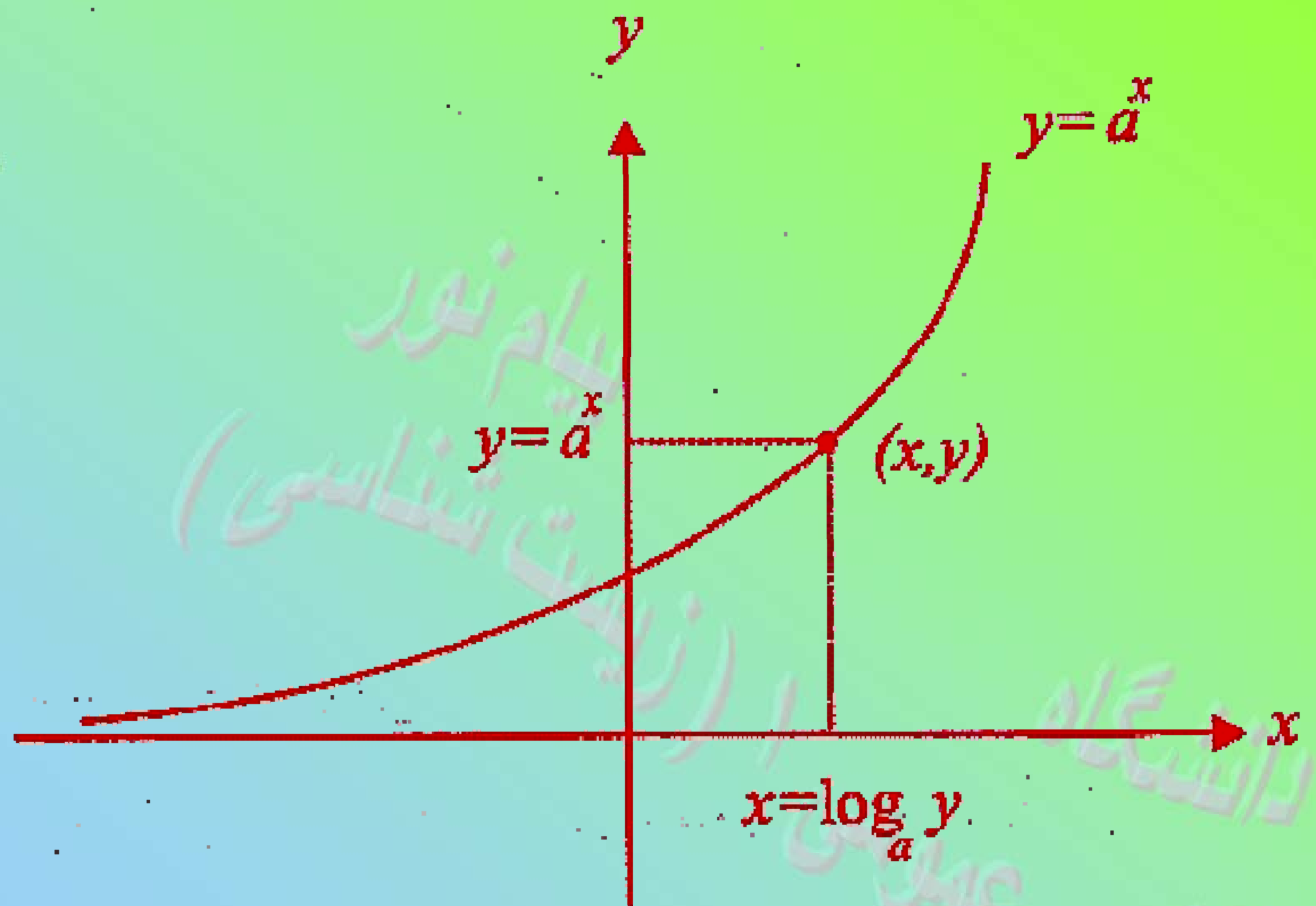
۸.۱۲.۲ لگاریتم در مبناهای دیگر

در بحث زیر شباهت میان لگاریتم طبیعی و لگاریتمی که در دبیرستان خوانده‌اید ذکر شده است: نمودار تابع نمایی $y = a^x$ به‌ازای $a > ۱$ (شکل زیر) نشان می‌دهد که

منوی اصلی

به‌ازای هر عدد مثبت y عدد منحصر بفرد x وجود دارد به‌گونه‌ای $y=a^x$ این توان x را لگاریتم y در مبنای a می نامند و با نماد $x=\log_a y$ نشان می دهند بنابراین $x=\log_a y$ اگر و فقط اگر $y=a^x$ لگاریتمی که در دبیرستان برای تسهیل محاسبات عددی به‌کار می‌بردید

منوی اصلی



لگاریتم در مبنای ۱۰ بوده است. لگاریتم طبیعی در مبنای e می‌باشد. به دلیل اهمیت تابع نمایی e^x، لگاریتم طبیعی معمولاً در مسائل کاربردی ظاهر می‌شود. به‌طریق

منوی اصلی

طراح: رحمت سلطانی عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه پیام نور شیراز

تجربی تعیین شده است که اکثر مواد رادیواکتیو به‌صورت نمایی وامی‌پاشند به‌گونه‌ای که مقداری از جرم اولیهٔ Q_0 که بعد از t سال باقی می‌ماند با تابعی به‌صورت $Q(t)=Q_0 e^{-kt}$ داده می‌شود. مقدار ثابت و مثبت k میزان واپاشی را بیان می‌کند ولی

منوی اصلی

معمولاً این میزان را با تعیین زمان t که برای واپاشی نیمی از جرم لازم است بیان می‌کنند.

این زمان را نیمه عمر مادهٔ رادیواکتیو می‌نامند. مثال زیر رابطهٔ بین نیمهٔ عمر و k را نشان می‌دهد.

منوی اصلی

۹.۱۲.۲ مثال. نشان دهید مادهٔ رادیواکتیوی که براساس فرمول $Q(t)=Q_0 e^{-kt}$ وامی‌پاشد دارای نیمهٔ عمری معادل $t=\frac{\ln 2}{k}$ است.

حل: هدف یافتن مقداری از t است که به‌ازای آن $Q(t)=\frac{1}{2}Q_0$ یعنی:

$$\frac{1}{2}Q_0=Q_0 e^{-kt}\Rightarrow \ln\frac{1}{2}=-kt$$

بنابراین نیمه عمر برابر است با:

$$t=\frac{-\ln\frac{1}{2}}{k}=\frac{\ln 2}{k}$$

منوی اصلی

۱۳.۲ توابع مثلثاتی

توابع مثلثاتی توابعی هستند که به‌طور گسترده‌ای در علوم طبیعی برای مطالعهٔ پدیده‌های تناوبی از قبیل ارتعاشات، حرکت تناوبی سیارات مطالعهٔ حرکات موجی، صوت و جریان متناوب مورد استفاده قرار می‌گیرد.

منوی اصلی

طراح: رحمت سلطانی عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه پیام نور شیراز

بنابراین اینگونه توابع لزوماً ارتباط طبیعی با مفهوم زاویه ندارند و به‌گونه‌ای تعمیم داده شده‌اند که دامنهٔ آنها مجموعه‌هایی از اعداد حقیقی‌اند نه صرفاً مجموعهٔ زاویه‌ها.

منوی اصلی

۱.۱۳.۲ زاویه

اگر نیم خطی منطبق بر نیم خط دیگر حول مبدأ مشترکشان در صفحه دوران کند زاویه پدید می‌آید اگر دوران در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت باشد زاویهٔ حاصله را زاویهٔ مثبت و اگر دوران در جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد زاویهٔ حاصله را منفی گویند.

منوی اصلی

یونانیان باستان زاویه را برحسب درجه، دقیقه و ثانیه اندازه‌گیری می‌کردند این واحدها امروز نیز در دریانوردی، نقشه‌برداری و اندازه‌گیری عملی زاویه به‌کار می‌روند ولی در حساب دیفرانسیل و انتگرال واحد رادیان برای اندازه‌گیری زاویه مناسبتر است

منوی اصلی

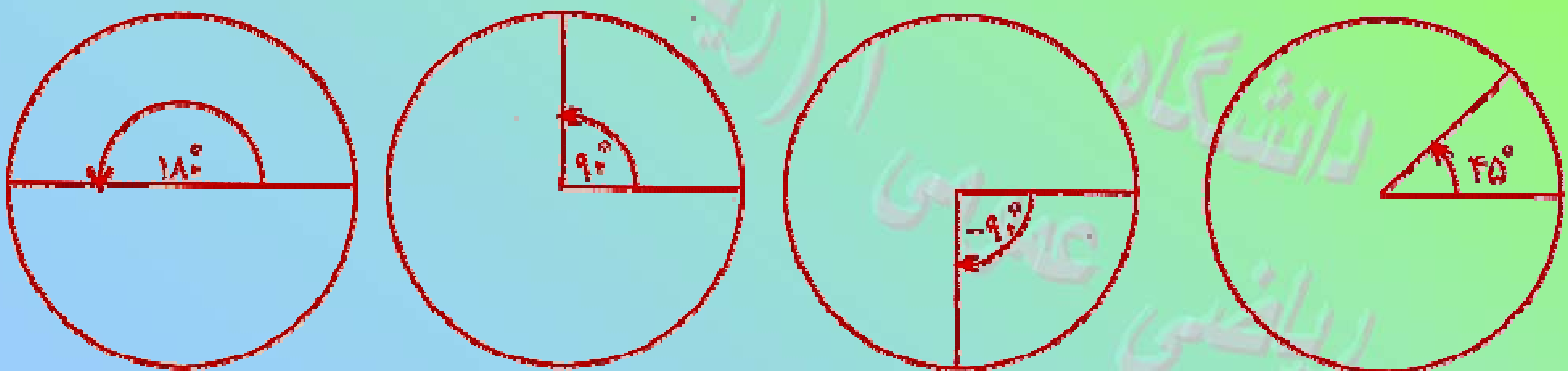
زیرا فرمولهای مشتقگیری و انتگرالگیری تابعهای مثلثاتی ساده‌تر می‌شوند.

یادآوری می‌کنیم که ۱ درجه دورانی معادل $\frac{۱}{۳۶۰}$ دایره است. بنابراین مثلاً یک

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

دوران کامل در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت معادل °۳۶۰ می‌باشد. نصف دوران کامل در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت °۱۸۰ است. تعدادی از زوایای مهم در شکل زیر رسم است:



منوی اصلی

طراح: رحمت سلطانی عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه پیام نور شیراز

در هر دایرهٔ به شعاع r اندازهٔ زاویهٔ مرکزی مقابل به هر کمان به طول r برابر یک رادیان تعریف می‌شود (شکل زیر) از آنجا که پیرامون این دایره $2\pi r$ است، لذا یک دور

کامل دایره برابر با 2π رادیان می‌باشد یعنی 2π رادیان = 360° به همین صورت π رادیان = 180° و $\frac{\pi}{2}$ رادیان = 90° و $\frac{\pi}{180}$ رادیان = 1° .

منوی اصلی

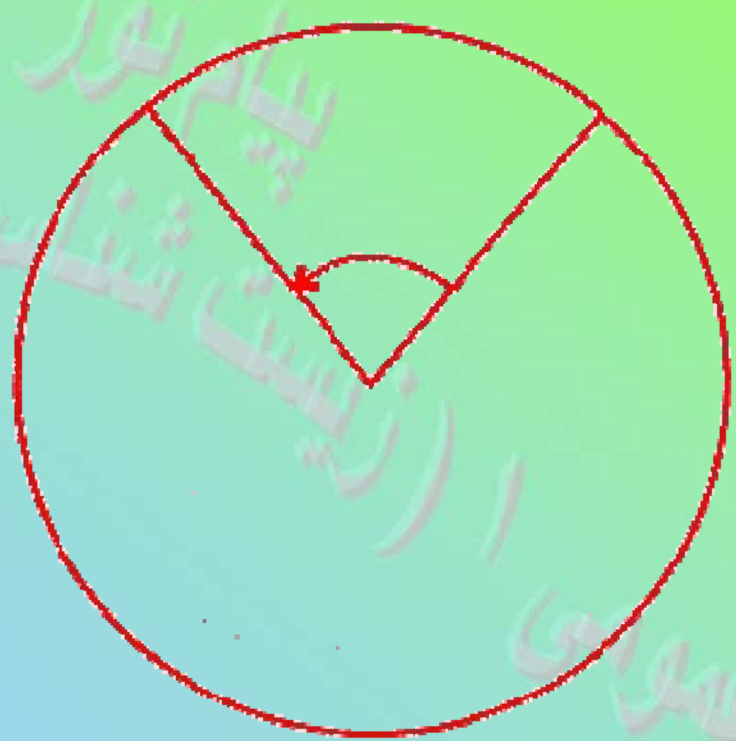
طراح: رحمت سلطانی عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه پیام نور شیراز

بنابراین اگر D و R به‌ترتیب نمایش درجه و رادیان باشند آنگاه: $\frac{R}{2\pi} = \frac{D}{360}$ لذا

یک رادیان برابر با $\frac{180}{\pi}$ (تقریباً ۳ر۵۷) درجه است.

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور



یک رادیان

منوی اصلی

۲.۱۳.۲ مثال. الف) ۴۵° را به رادیان تبدیل کنید.

ب) $\frac{\pi}{۶}$ رادیان را به درجه تبدیل کنید.

حل: الف) از تناسب $\frac{R}{\pi} = \frac{۴۵}{۱۸۰}$ نتیجه می‌شود که: $R = \frac{\pi}{۴}$ یعنی ۴۵° برابر $\frac{\pi}{۴}$ رادیان است.

ب) از تناسب $\frac{\pi/۶}{\pi} = \frac{D}{۱۸۰}$ نتیجه می‌شود که: $D = ۳۰$ یعنی $\frac{\pi}{۶}$ رادیان برابر با ۳۰° است.

منوی اصلی

۴.۱۳.۲ توابع سینوس و کسینوس

با تشکیل زاویه‌های با بیش از یک دور (در جهت مثبت یا منفی) می‌توان زاویه‌ها:
به‌اندازهٔ دلخواه (نه لزوماً بین -۲π و ۲π) را رسم کرد به هر یک از این زاویه‌ها انداز
کمان روبروی آنها را نسبت می‌دهیم (که ممکن است بیش از محیط دایره باشد
بدین‌صورت تناظری یک به یک بین اندازهٔ زاویه‌ها برحسب رادیان و اعداد حقیقی

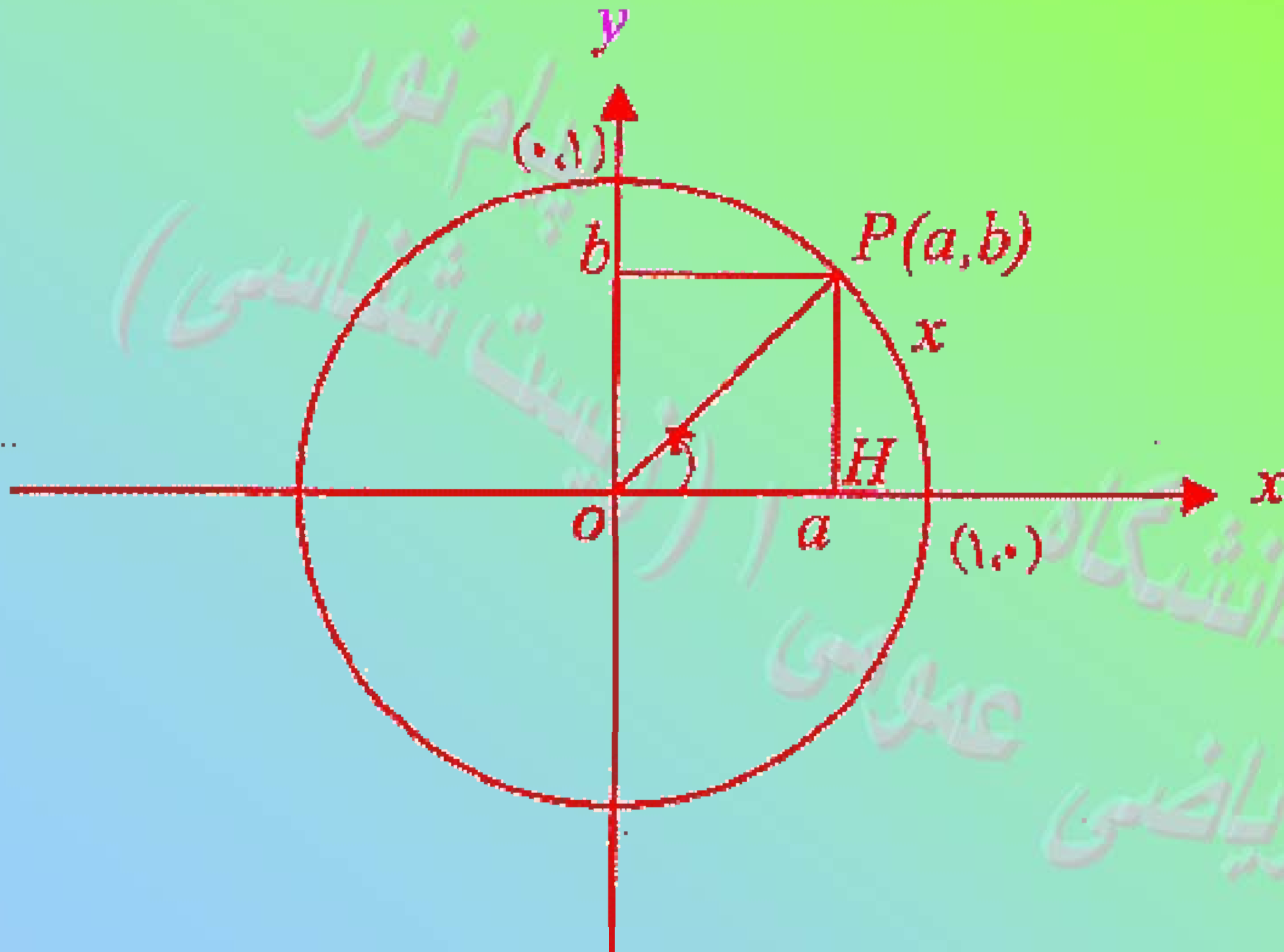
منوی اصلی

به‌دست می‌آوریم بنابراین تابعهای مثلثاتی را می‌توان تابعهایی از اعداد حقیقی نه صر
تابعهایی از زاویه‌ها در نظر گرفت.

به‌ازای هر عدد حقیقی x زاویه‌ای به‌اندازهٔ x رادیان در دستگاه مختصات در نه
می‌گیریم. محل تلاقی ضلع انتهایی این زاویه با دایره را P می‌نامیم.

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور



منوی اصلی

اگر مختصات P را (a , b) بنامیم آنگاه سینوس و کسینوس x به‌ترتیب به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

منوی اصلی

$$\cos x = a \quad , \quad \sin x = b$$

روشن است که دامنهٔ تابعهای $\sin x$ و $\cos x$ مجموعهٔ اعداد حقیقی R است اما چون شعاع دایره برابر یک است لذا برد این دو تابع بازهٔ بستهٔ $[-1 , 1]$ است یعنی $-1 \le \cos x \le 1$ و $-1 \le \sin x \le 1$ یا با استفاده از نماد قدر مطلق می‌توان نوشت:

منوی اصلی

$|\cos x| \leq ۱$ و $|\sin x| \leq ۱$

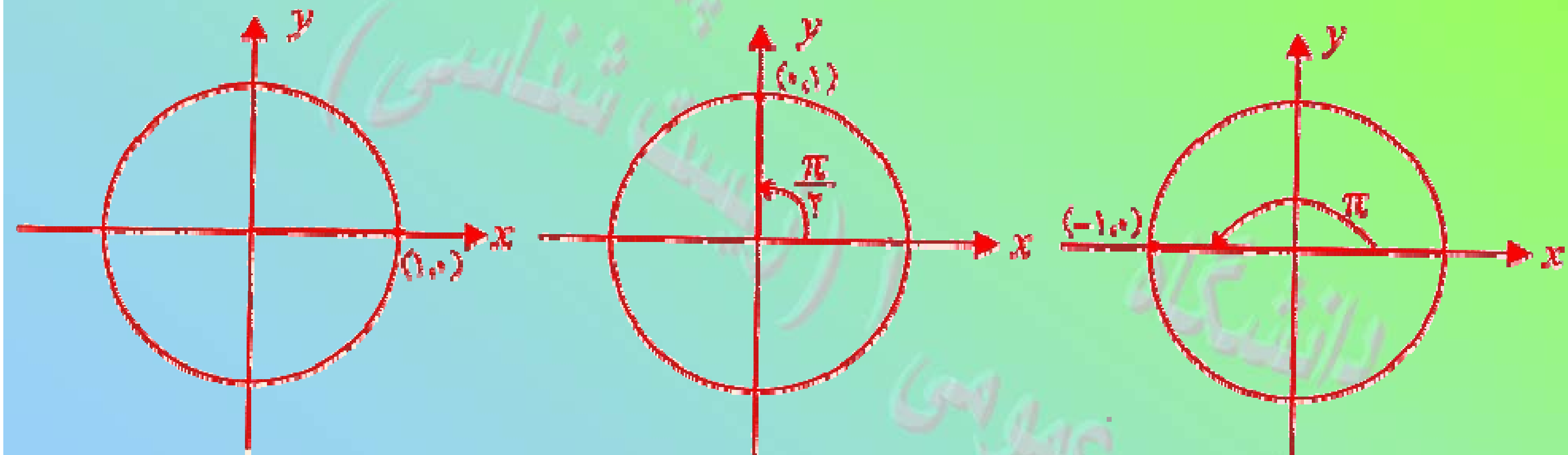
به‌عنوان مثال مقادیر سینوس و کسینوس مضربهای $\frac{\pi}{۲}$ را می‌توان از روی شکل زیر دید
که در جدول زیر خلاصه شده است:

منوی اصلی

x	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
$\cos x$	۱	۰	−۱	۰	۱
$\sin x$	۰	۱	۰	−۱	۰

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

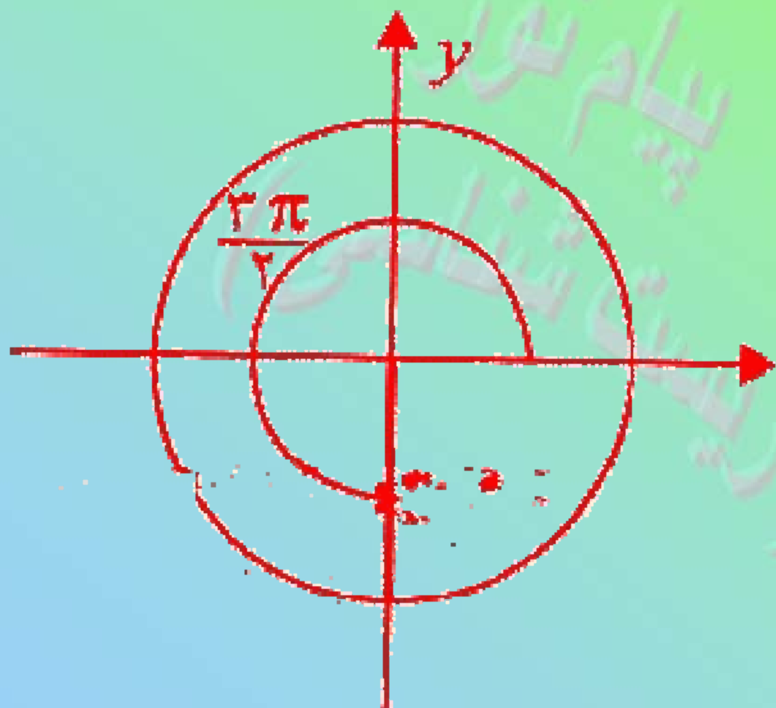


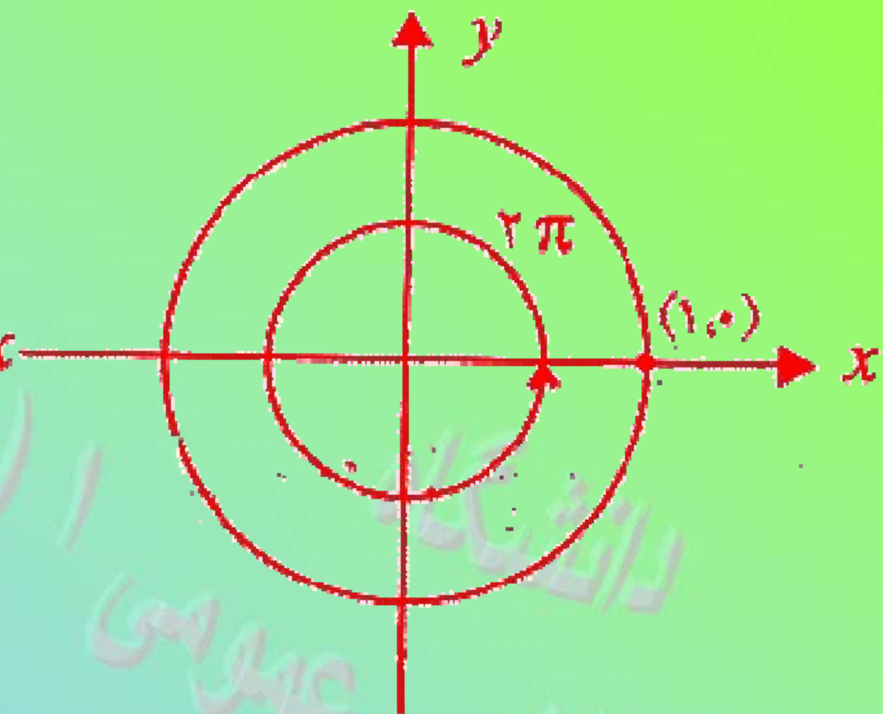
$\cos ۰ = ۱$ ، $\sin ۰ = ۰$ $\qquad$ $\cos \frac{\pi}{۲} = ۰$ ، $\sin \frac{\pi}{۲} = ۱$ $\qquad$ $\cos\pi = -۱$ ، $\sin \pi = ۰$

منوی اصلی

طراح: رحمت سلطانی عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه پیام نور شیراز

دانشگاه پیام نور





$\cos \frac{3\pi}{2} = 0$ ، $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$ $\cos 2\pi = 1$ ، $\sin 2\pi = 0$

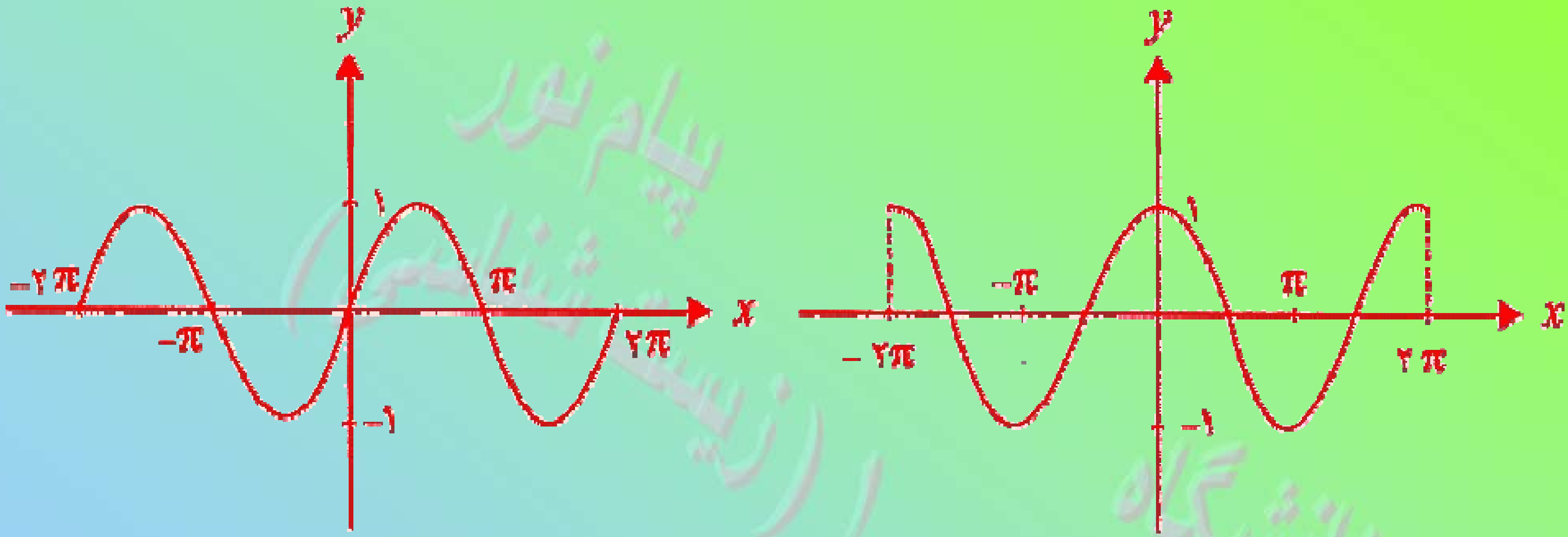
منوی اصلی

همچنین با استفاده از مثلث قائم‌الزاویه OPH (شکل صفحهٔ قبل) داریم (قضیهٔ فیثاغورث):

$$\sin^{۲} x + \cos^{۲} x = ۱$$

قسمتي از نمودارهای تابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$ در زیر رسم شده‌اند:

منوی اصلی



$y=\sin x$ $y=\cos x$

منوی اصلی

چون زاویهٔ دوران یک دوران کامل ۲π رادیان است نتیجه می‌شود که:

$$\sin(x + ۲\pi) \sin x \quad , \quad \cos(x + ۲\pi) = \cos x$$

منوی اصلی

به‌عبارت دیگر سینوس و کسینوس توابعی متناوب با دورهٔ تناوب 2π می‌باشند همچنین:

$$\cos(-x) = \cos x \quad , \quad \sin(-x) = -\sin x$$

منوی اصلی

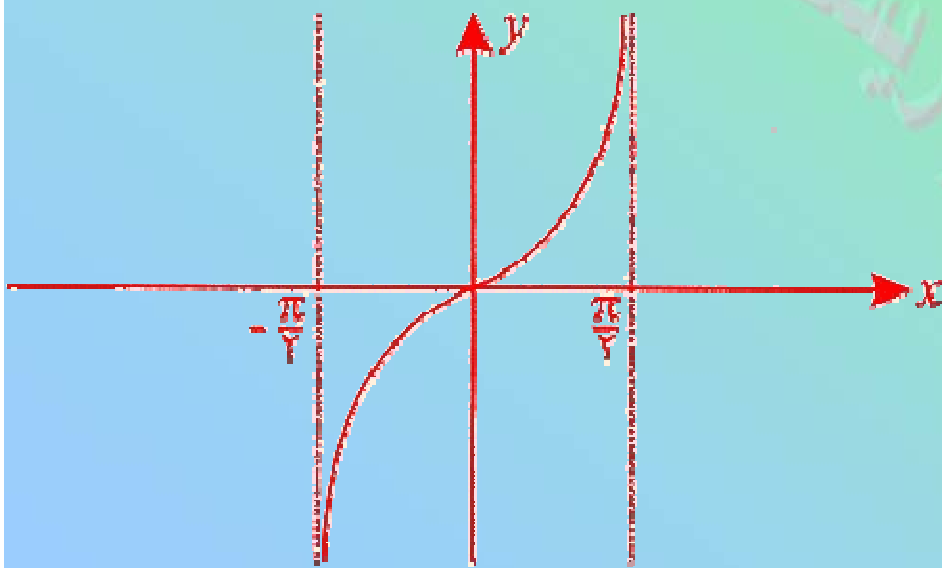
۶.۱۳.۲ توابع مثلثاتی دیگر

چهار تابع مثلثاتی دیگر را به‌صورت زیر برحسب توابع سینوس و کسینوس تعریف می‌کنیم:

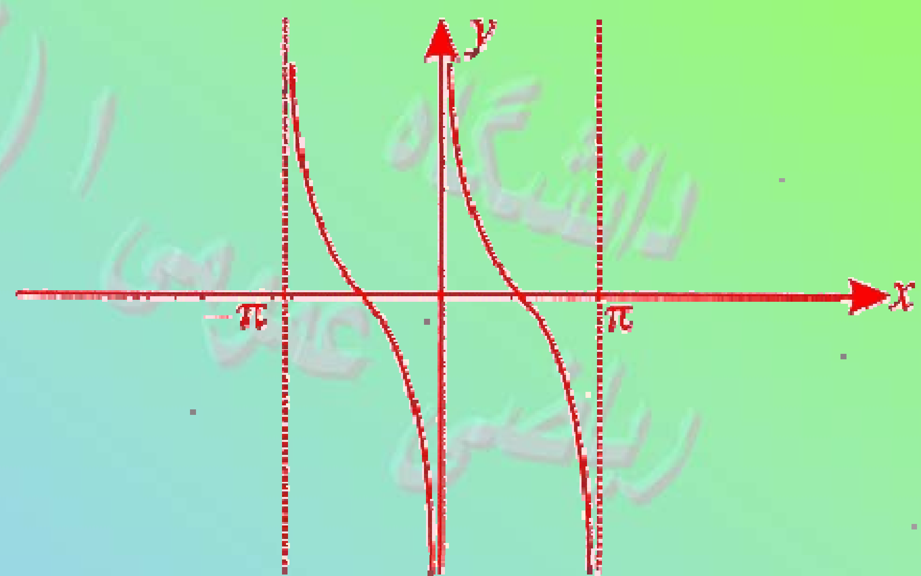
$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad , \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad , \quad \sec x = \frac{1}{\cos x} \quad , \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

منوی اصلی

قسمتهایی از نمودار این توابع در زیر رسم شده است:



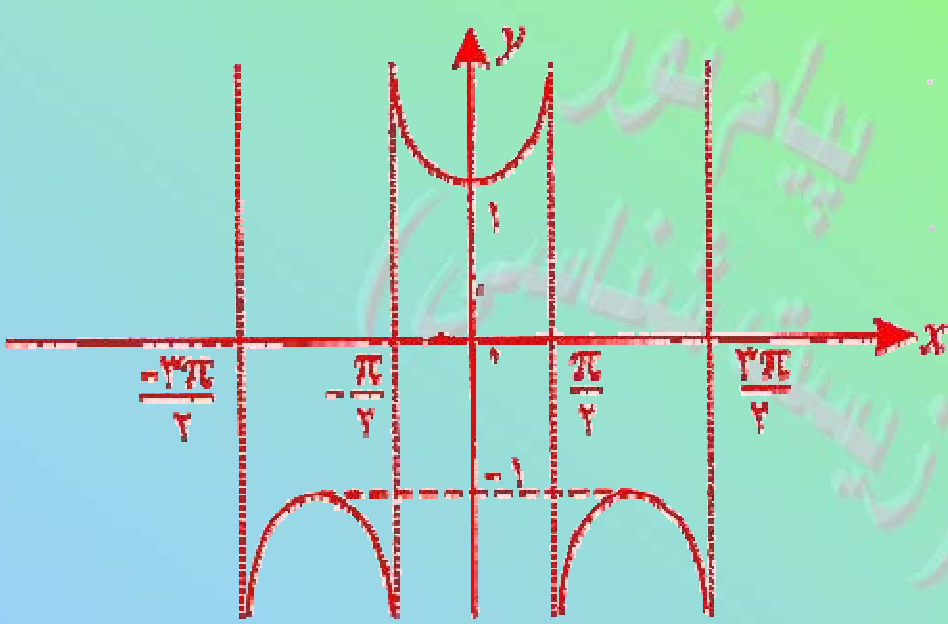
$y = \mathrm{tg}\, x$



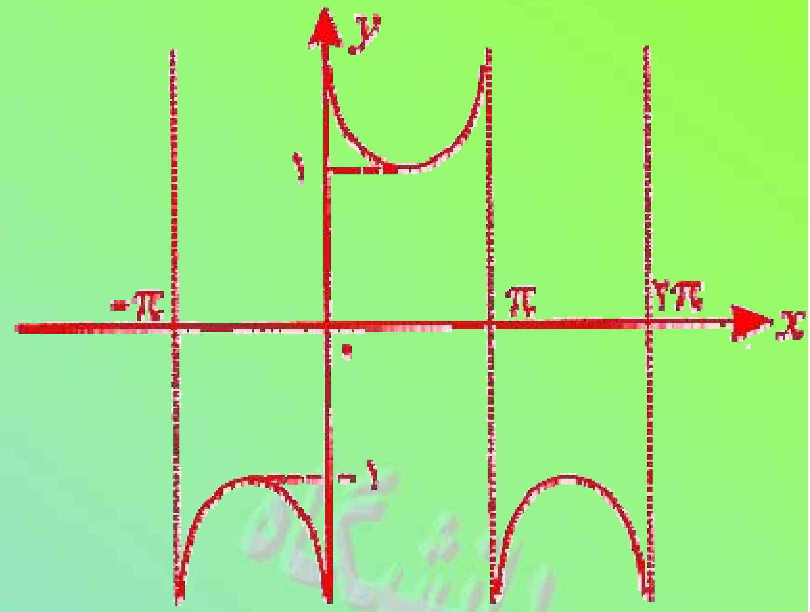
$y = \mathrm{cotg}\, x$

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور



$y = \sec x$



$y = \csc x$

منوی اصلی

۷.۱۳.۲ تمرین. عبارتهای زیر را محاسبه کنید:

$$\operatorname{tg}\pi \quad , \quad \operatorname{cotg}\frac{\pi}{۲} \quad , \quad \sec(-\pi) \quad , \quad \csc\left(\frac{-۵\pi}{۲}\right)$$

منوی اصلی

۸.۱۳.۲ اتحادهای مثلثاتی

معادله‌ای که به‌ازای جمیع مقادیر متغیر (یا متغیرهای آن) برقرار باشد اتحاد نامیده می‌شود اتحادهایی که شامل توابع مثلثاتی باشند اتحادهای مثلثاتی نامیده می‌شوند. قبل از این با چندین اتحاد مثلثاتی آشنا شدید مثلاً فرمولهای:

$$\cos(-x) = \cos x \quad , \quad \sin(-x) = -\sin x \quad , \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

فرمولهای سینوس و کسینوس مجموع دو زاویه و فرمولهای دو برابر زاویه را در زیر بدون اثبات ذکر می‌کنیم:

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\sin ۲x = ۲\sin x \cos x$$

$$\cos ۲x = \cos^۲ x - \sin^۲ x = ۲\cos^۲ x - ۱ = ۱ - ۲\sin^۲ x$$

منوی اصلی

همچنین می‌توان نشان داد که اگر زاویهٔ بین خط غیرقائم l و محور xها در جهت مثبت برابر با θ باشد آنگاه ضریب زاویه‌ای خط l برابر با $\operatorname{tg}\theta$ است. به همین نحو با استفاده از اتحادهای مثلثاتی داریم:

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg}x \pm \operatorname{tg}y}{1 \mp \operatorname{tg}x \operatorname{tg}y}$$

منوی اصلی

همین‌طور می‌توان نشان داد که اگر شیبهای دو خط $l_۱$ و $l_۲$ به‌ترتیب برابر با $m_۱$ و $m_۲$ باشد و زاویهٔ بین این دو خط در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت برابر با θ باشد آنگاه:

$$\operatorname{tg}\theta=\left|\frac{m_۲-m_۱}{۱+m_۱m_۲}\right|$$

منوی اصلی

۹.۱۳.۲ مثال. فرض کنید معادلات l_1 و l_2 به‌صورت زیر باشند:

$$2y + 5x = 17 \qquad , \qquad y - 2x = 2$$

تانژانت زاویهٔ θ از l_1 به l_2 را بیابید.

حل: از معادلات l_1 و l_2 معلوم می‌شود که $m_1 = 2$ و $m_2 = \frac{-5}{2}$ لذا:

$$tg\theta = \left| \frac{\frac{-5}{2} - 2}{1 + 2(\frac{-5}{2})} \right| = \frac{9}{8}$$

منوی اصلی

۱۴.۲ توابع هذلولوی

در این قسمت ترکیبهای به‌خصوصی از توابع نمایی e^{x} و e^{-x} راکه توابع هذلولوی یا هیپربولیک[۱] نامیده می‌شود بررسی می‌کنیم.

منوی اصلی

رفتار اینگونه توابع از جنبه‌هایی مشابه رفتار توابع مثلثاتی است یعنی رابطهٔ این توابع با هذلولیهای خاصی، مشابه رابطهٔ توابع مثلثاتی با دایرهٔ واحد است. همان‌طور که می‌توان $\cos x$ و $\sin x$ را به سادگی با مختصات نقطه (a, b) واقع بر دایرهٔ به شعاع یک به معادلهٔ $a^2+b^2=1$ یکی دانست یعنی با تعریف مناسب x می‌توان قرار داد $a=\cos x$ و

منوی اصلی

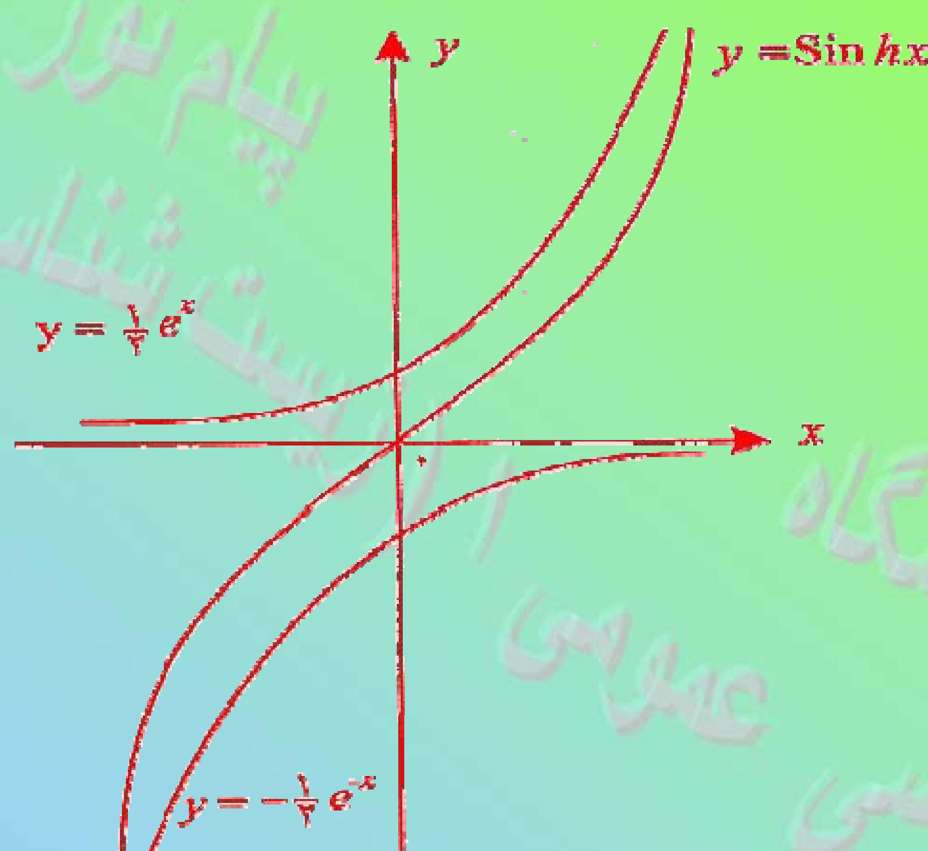
$b = \sin x$ بـه همان‌گونه امکان دارد که کسینوس هذلولوی $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{۲}$ و سینوس هذلولوی $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{۲}$ را با مختصات نقطهٔ (a, b) واقع بر هذلولی یکانی $a^۲ - b^۲ = ۱$ یکی فرض کرد. به‌همین ترتیب توابع هذلولوی دیگر به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\operatorname{tgh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad , \quad \operatorname{cotgh} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad , \quad \operatorname{sech} x = \frac{۱}{\cosh x} = \frac{۲}{e^x + e^{-x}}$$

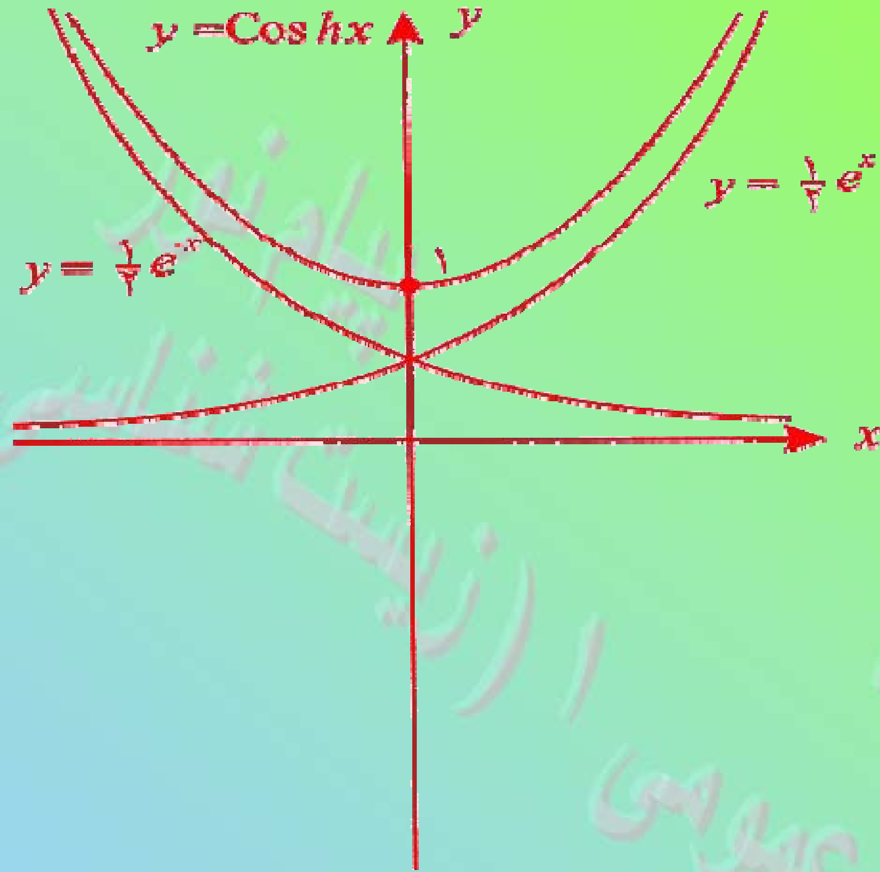
$$\operatorname{csch} x = \frac{۱}{\sinh x} = \frac{۲}{e^x - e^{-x}}$$

منوی اصلی

نمودار توابع $\sinh x$ و $\cosh x$ در شکل زیر رسم شده‌اند:



منوی اصلی



مانند توابع مثلثاتی اتحادهای زیر نیز برای توابع هذلولوی برقرار است:

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

$$\cos h(-x) = \cos hx \quad , \quad \sin h(-x) = -\sin hx$$

$$\sin h(x+y) = \sin hx \ \cos hy + \cos hx \ \sin hy$$

$$\cos h(x+y) = \cos hx \ \cos hy + \sin hx \ \sin hy$$

$$\sin h2x = 2\sin hx \cos hx$$

$$\cos h2x = \cos h^2 x + \sin h^2 x$$

منوی اصلی

فصل سوم

حد و پیوستگی

منوی اصلی

مقدمه

در این فصل مفاهیم حد و پیوستگی را بیان می‌کنیم. این مفاهیم در درس ریاضیات بنیادی مطرح می‌شوند زیرا در مباحث اصلی حساب و دیفرانسیل و انتگرال، یعنی مشتق و انتگرال اساسی‌اند. با آنکه حد و پیوستگی ماهیتی نسبتاً نظری دارند، آنها را حتی‌الامکان به‌طور ملموس و با شکل ارائه می‌دهیم. به‌علاوه آنها را در بررسی خطوط مماس بر منحنیهای مختلف و نیز در مفهوم سرعت یک جسم به‌کار خواهیم برد.

منوی اصلی

هدف کلی

آشنایی با مفهوم حد و پیوستگی و بررسی برخی کاربردهای آنها

هدفهای رفتاری

دانشجو پس از مطالعهٔ این فصل باید بتواند:

منوی اصلی

۱. مفهوم‌های حد، حد چپ و حد راست یک تابع را در یک نقطه بیان کرده و مقدار هر یک را در صورت وجود محاسبه کند.

۲. رابطهٔ بین حدهای چپ و راست و حد یک تابع را در یک نقطه بیان کرده و به‌کار برد.

۳. قضیه‌های مربوط به حد تابع در یک نقطه را بیان کرده و به‌کار برد.

۴. حد توابع مثلثاتی داده شده را در یک نقطه محاسبه کند.

منوی اصلی

۵. حد توابع در بی‌نهایت را تعریف کرده و در صورت وجود حد آن را محاسبه کند.

۶. مفهوم حدهایی را که بی‌نهایت می‌شوند بیان کرده و آن حدها را تعیین کند.

۷. مجانب‌های قائم و افقی را برای یک تابع داده شده در صورت وجود محاسبه کند.

منوی اصلی

۸. پیوستگی تابع را در یک نقطه و بر یک بازهٔ باز یا بازهٔ بسته تعریف کند و در مورد پیوستگی توابع داده شده تحقیق کند.

۹. قضیه‌های پیوستگی را بیان کرده و به‌کار برد.

منوی اصلی

۱.۳ حد

تابع f را با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{x^{۱}+x-۲}{x-۱}$ در نظر بگیرید. با اینکه تابع $f(x)$ در $x=۱$ نامعین است، می‌توان مقادیر $f(x)$ را به‌ازای مقادیر x که به‌تدریج چه از سمت چپ و چه از سمت راست به عدد ۱ نزدیک می‌شود ارزشیابی کرد. به جدول زیر توجه کنید:

x از سمت راست به ۱ نزدیک می‌شود ← → x از سمت چپ به ۱ نزدیک می‌شود

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

x	۰٫۸	۰٫۹	۰٫۹۵	۰٫۹۹	۰٫۹۹۹	۱	۱٫۰۰۱	۱٫۰۱	۱٫۰۵	۱٫۱
$f(x)$	۲٫۸	۲٫۹	۲٫۹۵	۲٫۹۹	۲٫۹۹۹		۳٫۰۰۱	۳٫۰۱	۳٫۰۵	۳٫۱۰

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

مقادیر تابع در این جدول نشان می‌دهد هنگامی که x به عدد ۱ نزدیک و نزدیکتر می‌شود، مقدار $f(x)$ به سوی ۳ میل می‌کند این رفتار تابع را می‌توان به این صورت توصیف کرد که «حد $f(x)$ هنگامی که x به ۱ میل می‌کند، برابر با ۳ است»، و به‌طور خلاصه چنین نوشته می‌شود:

$$\lim_{x \to ۱} f(x) = ۳$$

منوی اصلی

بنابراین می‌توان گفت:

اگر با نزدیک و نزدیکتر شدن x (از هر دو سمت) به c، مقدار $f(x)$ بـه L نـزدیک و نزدیکتر شود آنگاه L، حد $f(x)$ است هنگامی که x به c میل می‌کند، و این مفهوم را با علامت زیر می‌نویسیم:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

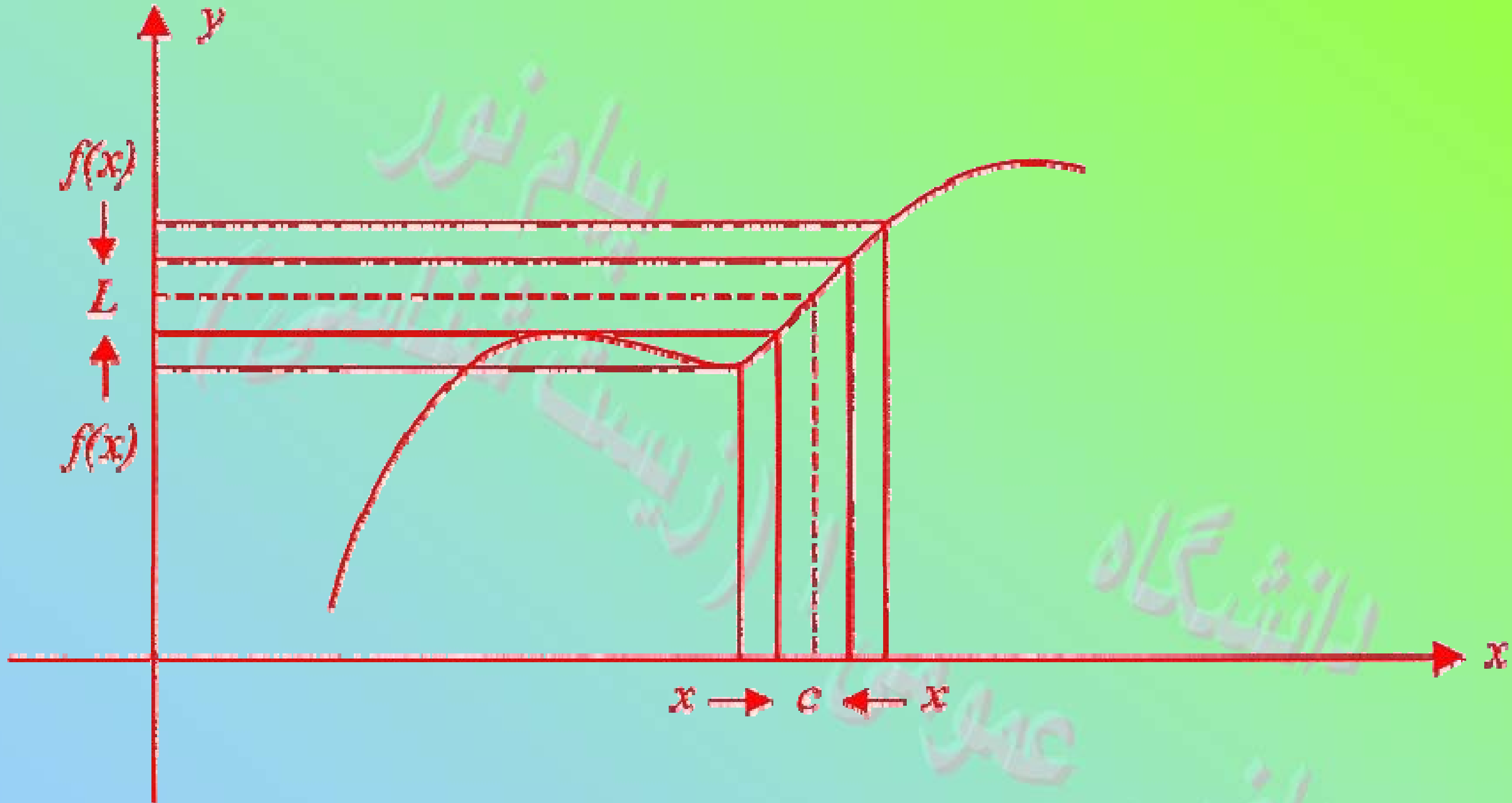
منوی اصلی

۱.۱.۳ تعبیر هندسی حد

از لحاظ هندسی، عبارت $\lim_{x \to c} f(x) = L$ به این معنی است که هنگامی x به c میـل می‌کند، مختص دوم نقاط (x, y) واقع بر نمودار $y = f(x)$ به L میل می‌کند (شکل زیر).

منوی اصلی

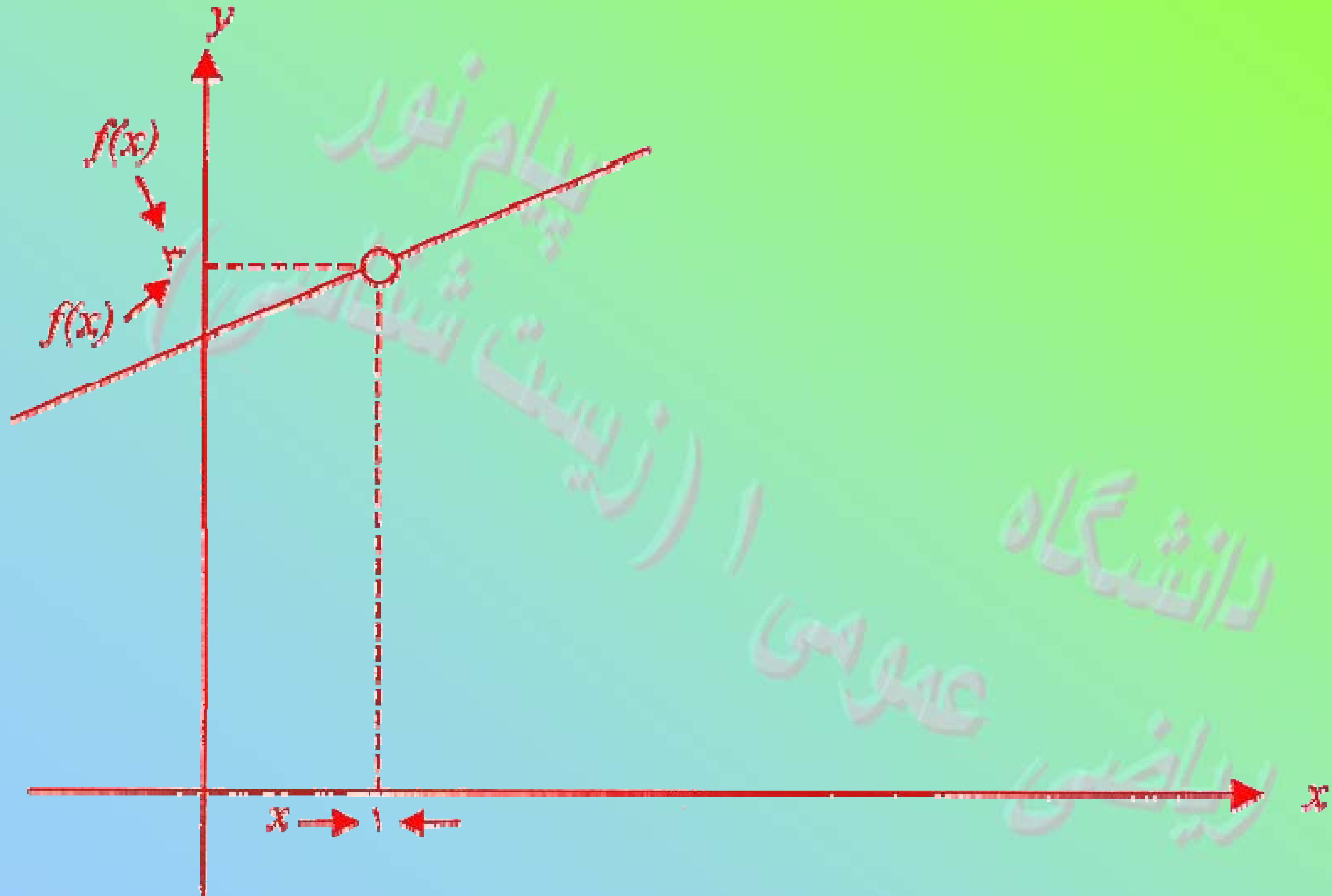
دانشگاه پیام نور



منوی اصلی

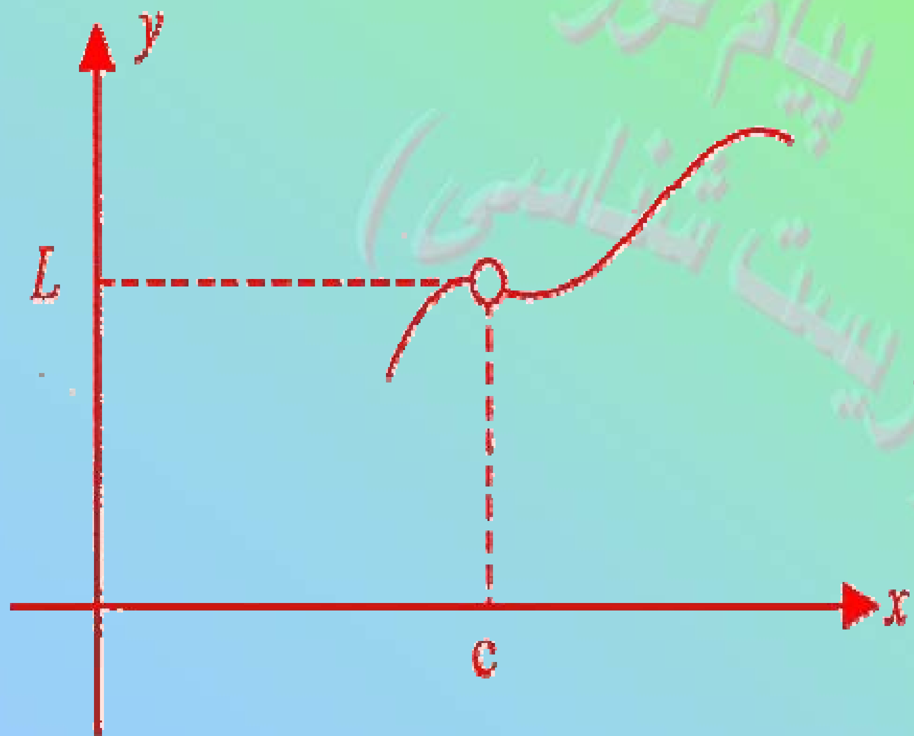
مثلاً نمودار تابع $f(x)=\frac{x^{2}+x-2}{x-1}$ خطی با نقطهٔ «خالی» در $(1,3)$ می‌باشد که هنگامی x از هر دو سمت به ۱ میل می‌کند نقاط (x,y) نمودار، به این نقطهٔ خالی میل می‌کنند (شکل زیر).

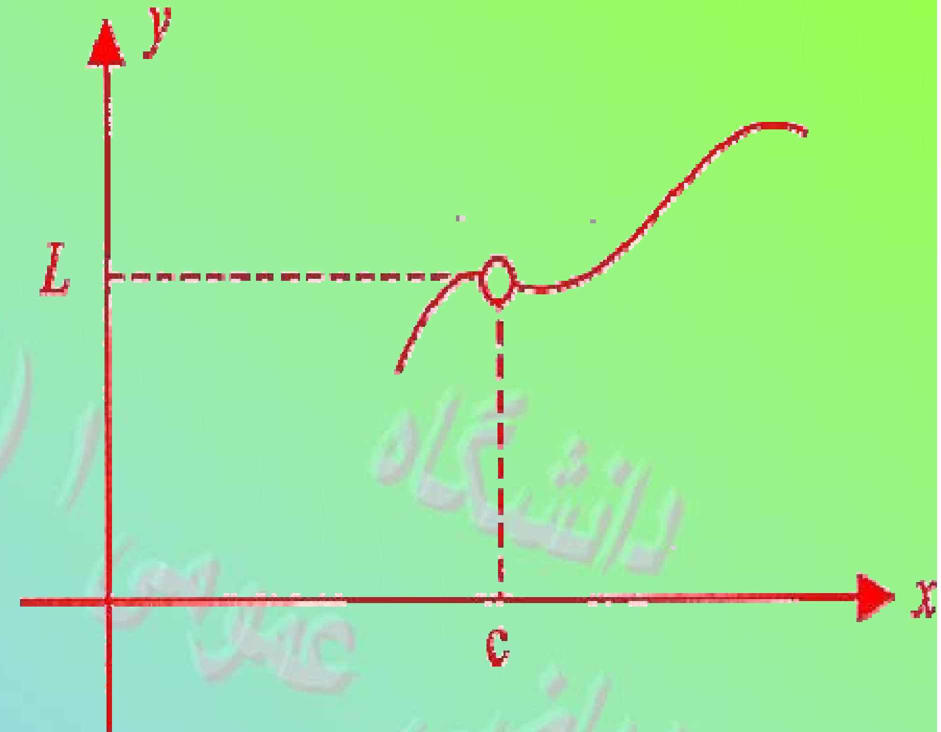
منوی اصلی



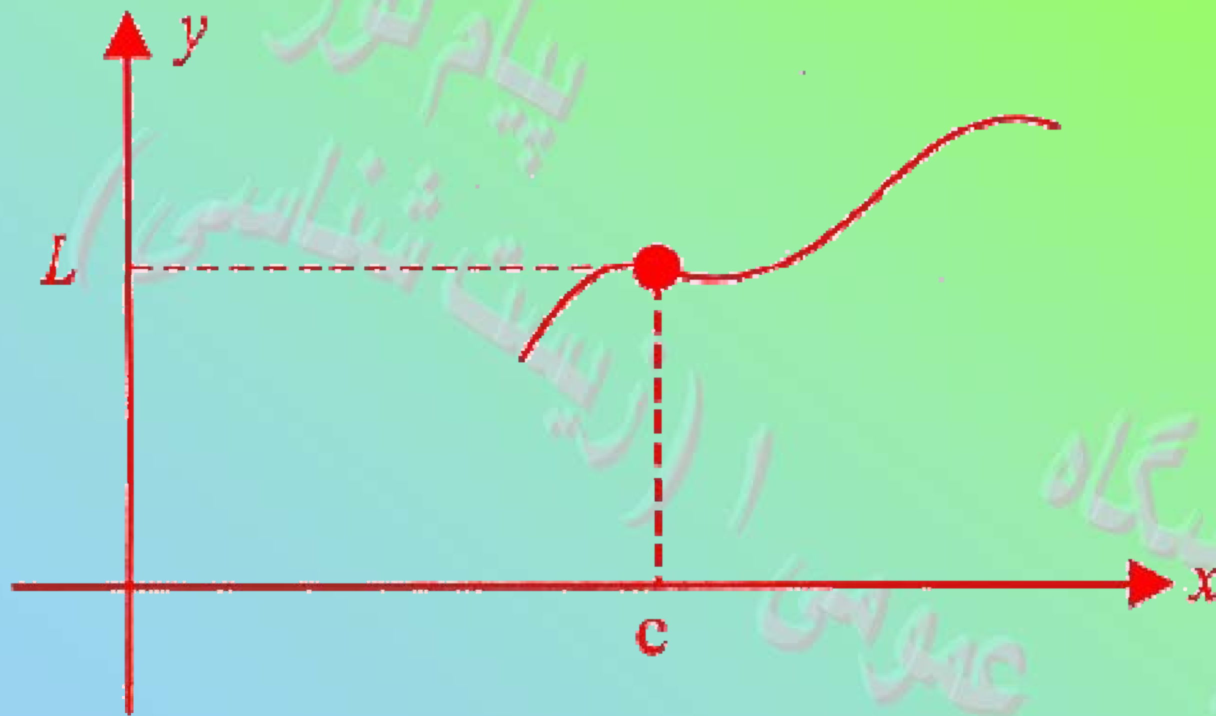
منوی اصلی

طراح: رحمت سلطانی عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه پیام نور شیراز





منوی اصلی



منوی اصلی

شکل زیر نمودار دو تابع راکه حد آنها در c وجود ندارد، نشان می‌دهد. در شکل

(الف) حد تابع در c وجود ندارد زیرا هنگامی که x از سمت راست به c میل می‌کند،

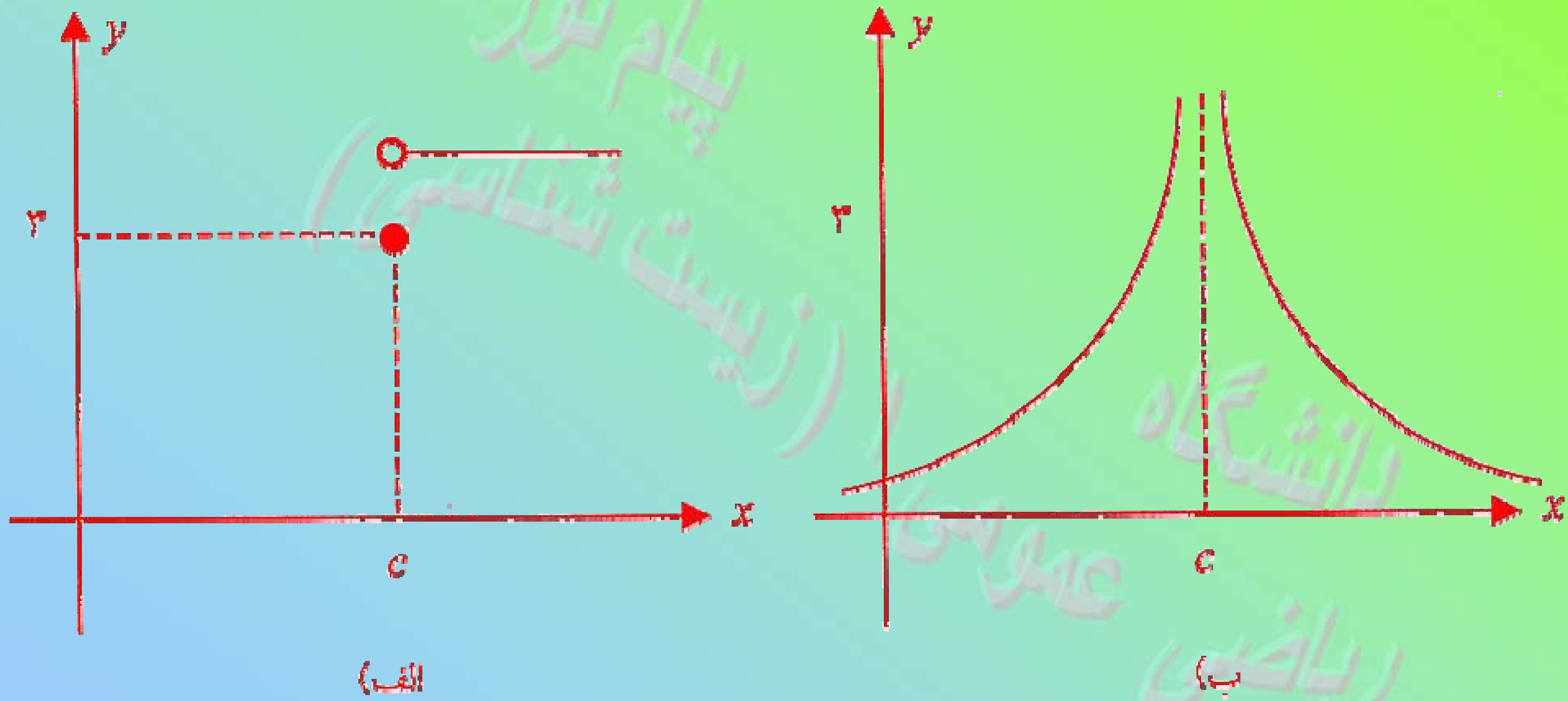
$f(x)$ به ۵ میل می‌کند و هنگامی که x از سمت چپ به c نزدیک می‌شود $f(x)$ به ۳ میل

منوی اصلی

می‌کند. تابع شکل (ب) نیز در c حد ندارد، زیرا هنگامی که x به c میل می‌کند مقدار $f(x)$ بدون کران افزایش می‌یابد و به هیچ عدد متناهی میل نمی‌کند در این حالت گفته می‌شود که تابع f در c دارای حد بی‌نهایت است که بعداً مفصلاً دربارهٔ آن توضیح خواهیم داد.

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور



دو تابع که $\lim f(x)$ وجود ندارد

منوی اصلی

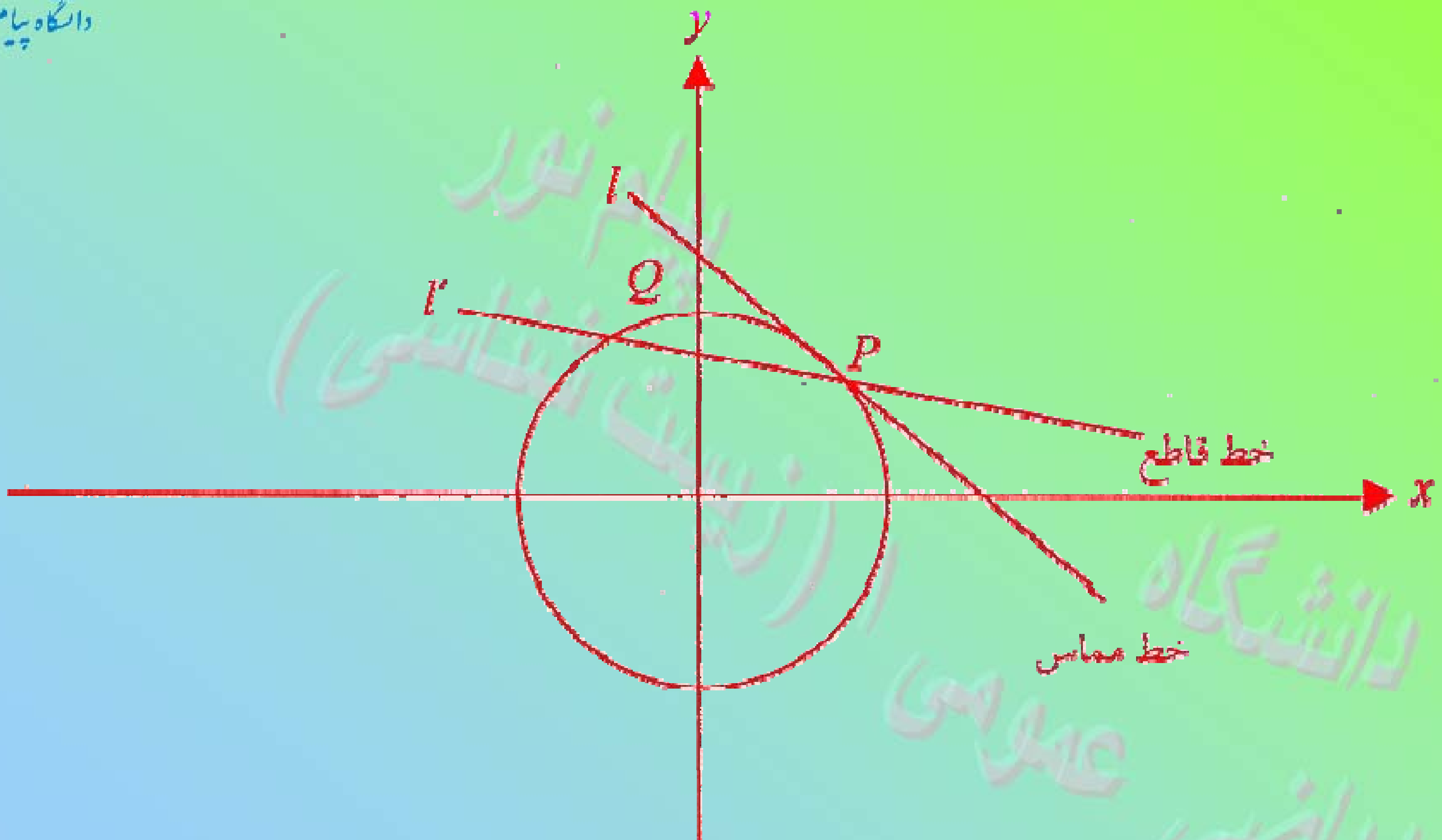
۲.۱.۳ خطوط مماس

خطوط مماس از قدیم الایام مورد توجه ریاضیدانان بوده‌اند. اقلیدس خط مماس بـ
دایره را خطی می‌گرفت که با دایره فقط در یک نقطه تماس داشته باشد.

منوی اصلی

خط مماس بر دایره در نقطه P را می‌توان به طریقی دیگر توصیف کرد. هرگاه Q نقطهٔ دیگری از دایره باشد آنگاه خط واصل بین P و Q را خط قاطع می‌نامیم (شکل زیر) معلوم می‌شود که خط مماس بر دایره در P حد خطوط قاطع ماربر P است به این معنی که وقتی Q به P نزدیک می‌شود شیب خط قاطع به شیب خط مماس نزدیک می‌گردد.

منوی اصلی



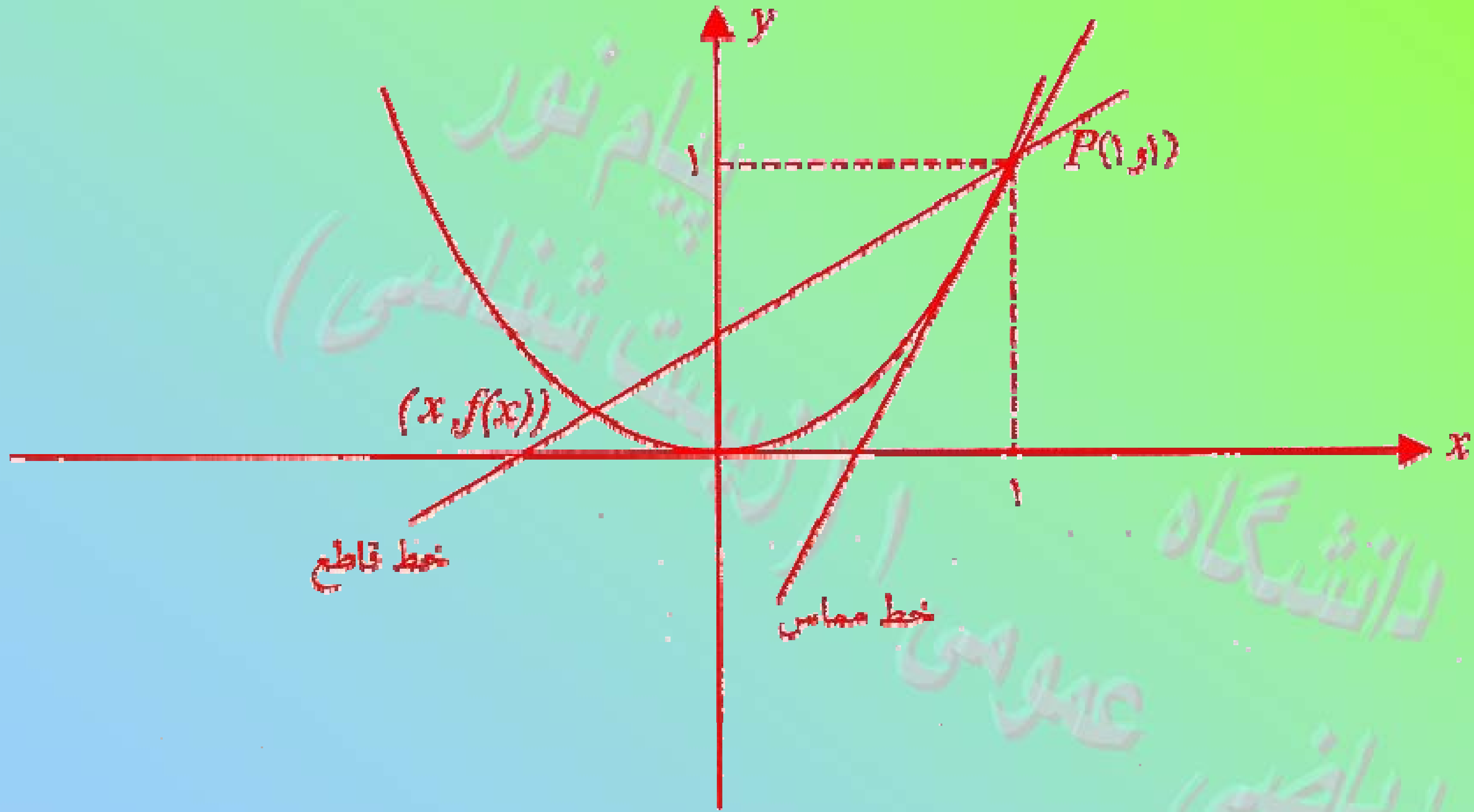
به‌عبارت دیگر هرچه Q روی دایره به P نزدیک و نزدیکتر شود، خط l' به l

منوی اصلی

نزدیک و نزدیکتر می‌شود البته این خاصیت خط مماس روشی برای یافتن معادلهٔ خط مماس به‌دست می‌دهد (حتی اگر منحنی مربوطه دایره نباشد). پیش از تعریف کلی خط مماس بر نمودار یک تابع، ابتدا حالت خاص $f(x) = x^۲$ را در نظر گرفته و نقطهٔ $(۱,f(۱)) = (۱,۱)$ را نقطهٔ P می‌گیریم که می‌خواهیم خط مماس را در آن تعریف کنیم (شکل زیر).

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور



منوی اصلی

طراح: رحمت سلطانی عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه پیام نور شیراز

دانشگاه پیام نور

هرگاه $(x, f(x))$ نقطهٔ دیگری از نمودار f باشد، آنگاه شیب خط قاطع مار بر $(۱ , ۱)$ و $(x , f(x))$ عبارت است از:

$$\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\frac{x^۲-۱}{x-۱}=\frac{(x-۱)(x+۱)}{x-۱}=x+۱ \qquad (x\neq ۱)$$

منوی اصلی

وقتی که x به ۱ نزدیک می‌شود شیب خط قاطع به ۲ نزدیک و نزدیکتر می‌گردد. یعنی خط قاطع شیب بیشتری می‌یابد.

به‌طور کلی هرگاه f یک تابع باشد، آنگاه شیب خط قاطع ماریر $(a, f(a))$ و نقطهٔ دیگر $(x, f(x))$ روی نمودار f عبارت است از:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

منوی اصلی

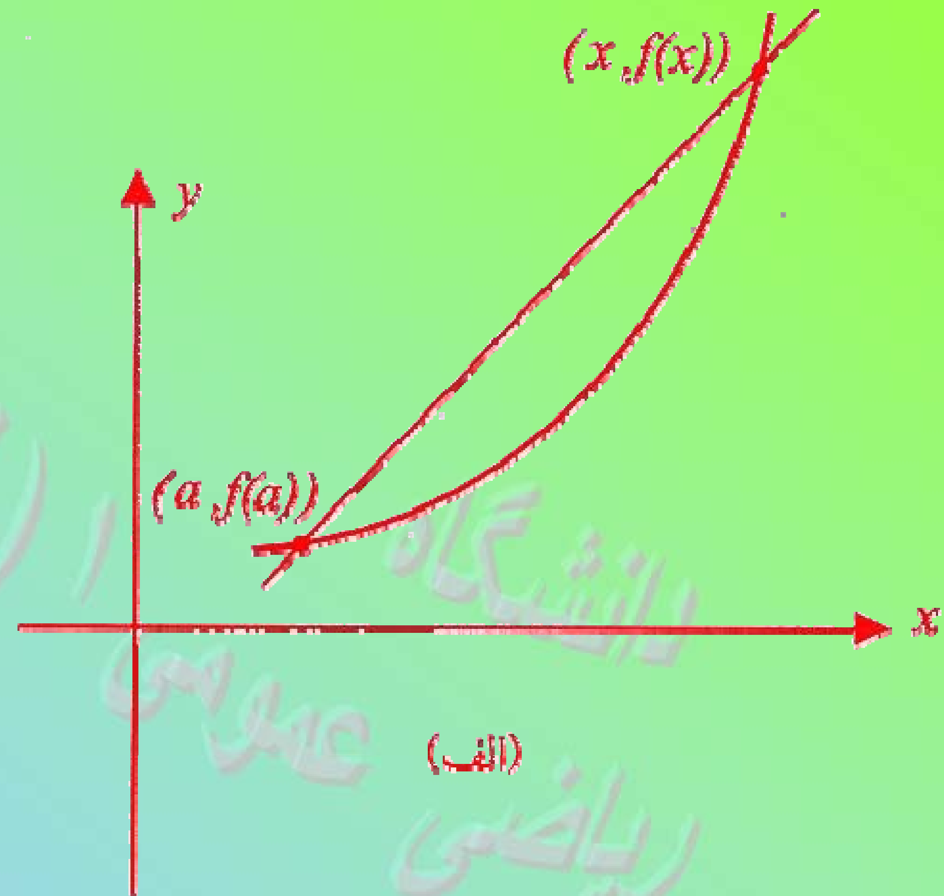
(شكل (الف) در قسمت زير را ببينيد). در حالتي كه حد $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ وقتي كه x به a

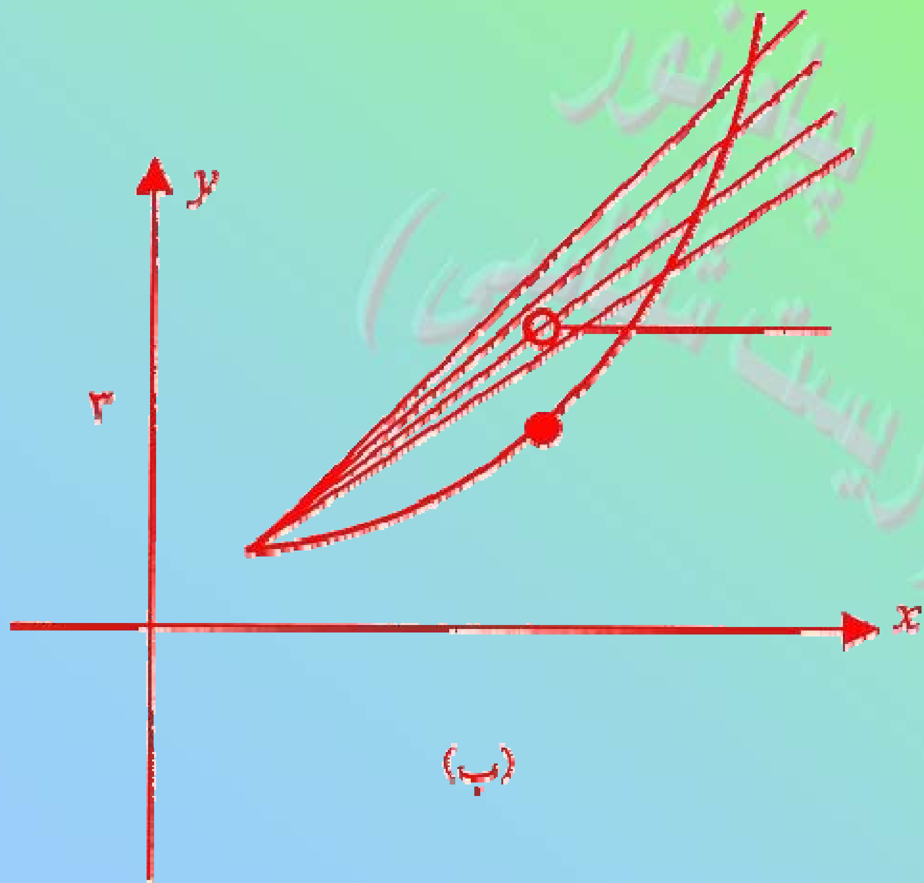
نزديک شود وجود داشته باشد (شكل (ب)) خط مماس بر نمودار f در $(a, f(a))$ را

خط مارير $(a, f(a))$ به شيب $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ تعريف مي‌كنيم.

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

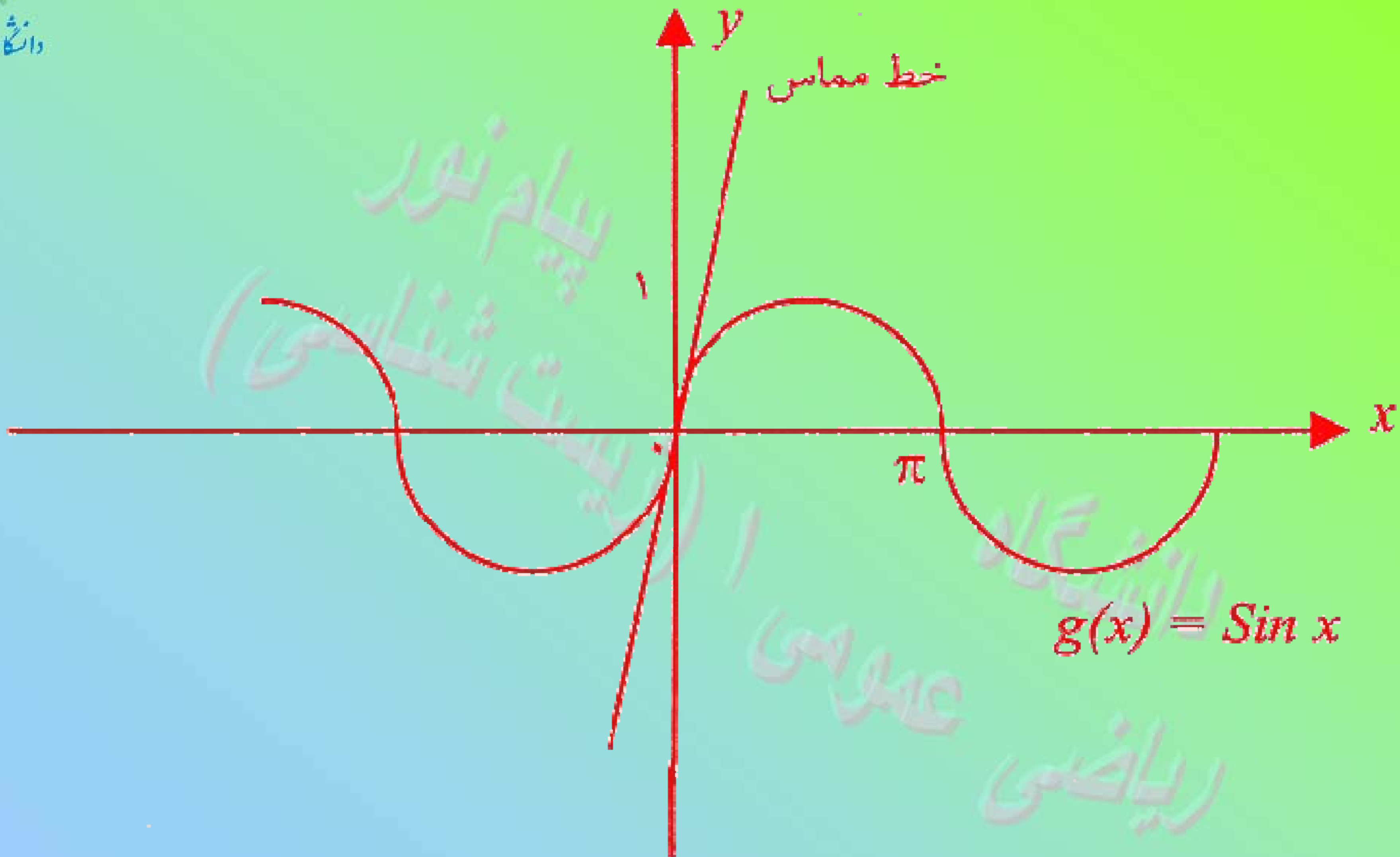




منوی اصلی

ممکن است که چنین به نظر آید که حد فوق همیشه به روشهای بالا یعنی هندسی قابل محاسبه‌اند یعنی عوامل در صورت و مخرج را حذف کرده و آن را حساب می‌کنیم ولی این کار همیشه میسر نیست مثلاً فرض کنید $g(x) = \sin x$ و خط مماس بر نمودار g در $(0\ ,\ 0)$ را در نظر می‌گیریم (شکل زیر):

منوی اصلی



منوی اصلی

بنابر بحث فوق شیب خط مماس مورد بحث عبارت است از:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$$

منوی اصلی

در اینجا راهی برای حذف جملات صورت و مخرج نیست چون $\sin x$ با نزدیک شدن x به ۰ خود نیز به ۰ نزدیک می‌شود و خارج قسمت $\frac{\sin x}{x}$ ظاهراً به $\frac{0}{0}$ نزدیک می‌گردد ولی می‌دانیم که $\frac{0}{0}$ مبهم است. بنابراین اگر این حد موجود باشد بایستی به روشی دیگر آن را محاسبه کرد. چون راه سادهٔ نوشتن $\frac{\sin x}{x}$ برای رسیدن به حد را نمی‌دانیم از ماشین حساب برای یافتن مقادیر $\frac{\sin x}{x}$ به‌ازای چند مقدار x نزدیک ۰ استفاده می‌کنیم:

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

x	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳۰}$	$\frac{\pi}{۱۸۰}$	$\frac{\pi}{۹۰۰۰}$
$\frac{\sin x}{x}$	۰٫۹۰۰۳۱۶	۰٫۹۹۸۱۷۳	۰٫۹۹۹۹۴۹	۰٫۹۹۹۹۹۹۹۸

چون $\sin(-x) = -\sin x$ پس

به ازای $x \neq ۰$ ، $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x}$

منوی اصلی

لذا مقادیر به‌ازای $\frac{-\pi}{9000}$ ، $\frac{-\pi}{180}$ ، $\frac{-\pi}{30}$ ، $\frac{-\pi}{4}$ همان مقادیر فوق است از جدول فوق ممکن است حدس بزنید که $\frac{\sin x}{x}$ با نزدیک شدن x به ۰، به ۱ نزدیک می‌شود یعنی:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

حدس شما کاملاً درست که اثبات آن را بعد از قضیه ۳-۲-۱۰ می‌توان بیان کرد.

منوی اصلی

۳.۱.۳ سرعت

عبارت $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ در مطالعهٔ سرعت نیز ظاهر می‌شود. فرض کنید یک موشک از زمین پرتاب شده و به‌طور قائم بالا برود اگر موشک در بازهٔ زمانی ۲ دقیقه‌ای ۳۶ مایل طی کند سرعت متوسط در این بازه ۱۸ مایل بر دقیقه است. به‌طور کلی سرعت متوسط موشک در هر بازهٔ زمانی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{سرعت متوسط} = \frac{\text{مسافت پیموده شده}}{\text{زمان سپری شده}}$$

منوی اصلی

به جای یافتن سرعت متوسط می‌خواهیم سرعت در هر لحظهٔ (که گاهی سرعت لحظه‌ای نیز گفته می‌شود) را حساب کنیم. این عددی است که از روی سرعت سنج خوانده می‌شود یک راه محاسبهٔ آن به‌صورت حد سرعتهای متوسط است. بالاخص

منوی اصلی

فرض کنید $f(t)$ ارتفاع موشک (به مایل)، t دقیقه پس از پرتاب باشد. هرگاه t بزرگتر از ۲ باشد آنگاه مسافت پیموده شده در بازهٔ از ۲ تا t مساوی $f(t)-f(۲)$ بوده و زمان سپری‌شده $t-۲$ است. در نتیجه سرعت متوسط در بازهٔ زمانی از ۲ تا t مساوی است با:

$$\frac{f(t)-f(۲)}{t-۲}$$

منوی اصلی

هر قدر t به ۲ نزدیکتر باشد، انتظار است که سرعت متوسط به سرعت در ۲ نزدیکتر باشد. لذا، طبیعی است که سرعت موشک در لحظهٔ ۲ را مساوی: $\lim_{t \to 2} \frac{f(t)-f(2)}{t-2}$ تعریف کنیم.

به‌طور کلی، سرعت $v(t_\circ)$ جسمی که به خط مستقیم و با موضع $f(t)$ در زمان t حرکت می‌کند در لحظهٔ $t_\circ$ چنین تعریف می‌شود:

$$v(t_\circ) = \lim_{t \to t_\circ} \frac{f(t)-f(t_\circ)}{t-t_\circ}$$

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

برای توضیح رابطهٔ فوق، فرض کنید موشکی به‌طور قائم بالا رود و $f(t)$ ارتفاع آن (به مایل) t دقیقه پس از پرتاب باشد به‌طوری که $f(t)=t^{۲} \quad , \quad ۰ \le t \le ۲$

در این صورت سرعت $v(۱)$ موشک در لحظهٔ $t=۱$ عبارت است از:

$$v(۱)=\lim_{t\to ۱}\frac{f(t)-f(۱)}{t-۱}=\lim_{t\to ۱}\frac{t^{۲}-۱}{t-۱}=۲$$

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

۵.۱.۳ تعریف حد

در قسمت قبل حدود به‌صورت غیرصوری مطرح شدند. در بعضی حالات توانستیم حدود را به‌آسانی به‌دست آوریم ولی وقتی کوشیدیم موجودیت $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ را اثبات کنیم به محاسبهٔ $\frac{\sin x}{x}$ به‌ازای چند مقدار x نزدیک o رسیدیم با این محاسبات حدس زدیم که حد وجود دارد و مقدارش را حدس زدیم عدم قطعیت در حد فوق ما را به جستجوی تعریف صوری حد می‌کشاند.

منوی اصلی

طراح: رحمت سلطانی عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه پیام نور شیراز

در تنظیم تعریف دقیق $\lim_{x \to a} f(x)$ می‌خواهیم f بتواند در a بدون تعریف باشد به‌عنوان مثال قبلاً دیدیم که $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ ولو اینکه $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$ در ۱ تعریف نشده است، موجود و مساوی ۲ است.

منوی اصلی

اگر f در a تعریف شده باشد می‌خواهیم تعریف $\lim_{x \to a} f(x)$ از مقدار $f(a)$ مستقل باشد. برای توضیح این امر تابع f با تعریف $f(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$ را در نظر بگیرید. توجه داریم که $f(0) = 2$. ولی اگر f در 0 تعریف نشده بود فقط تنها مقدار ۱ را داشت که از آن برآمد که $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ در نتیجه، تعریفی از $\lim_{x \to a} f(x)$ را

منوی اصلی

می‌خواهیم که از مقدار $f(a)$ مستقل باشد.

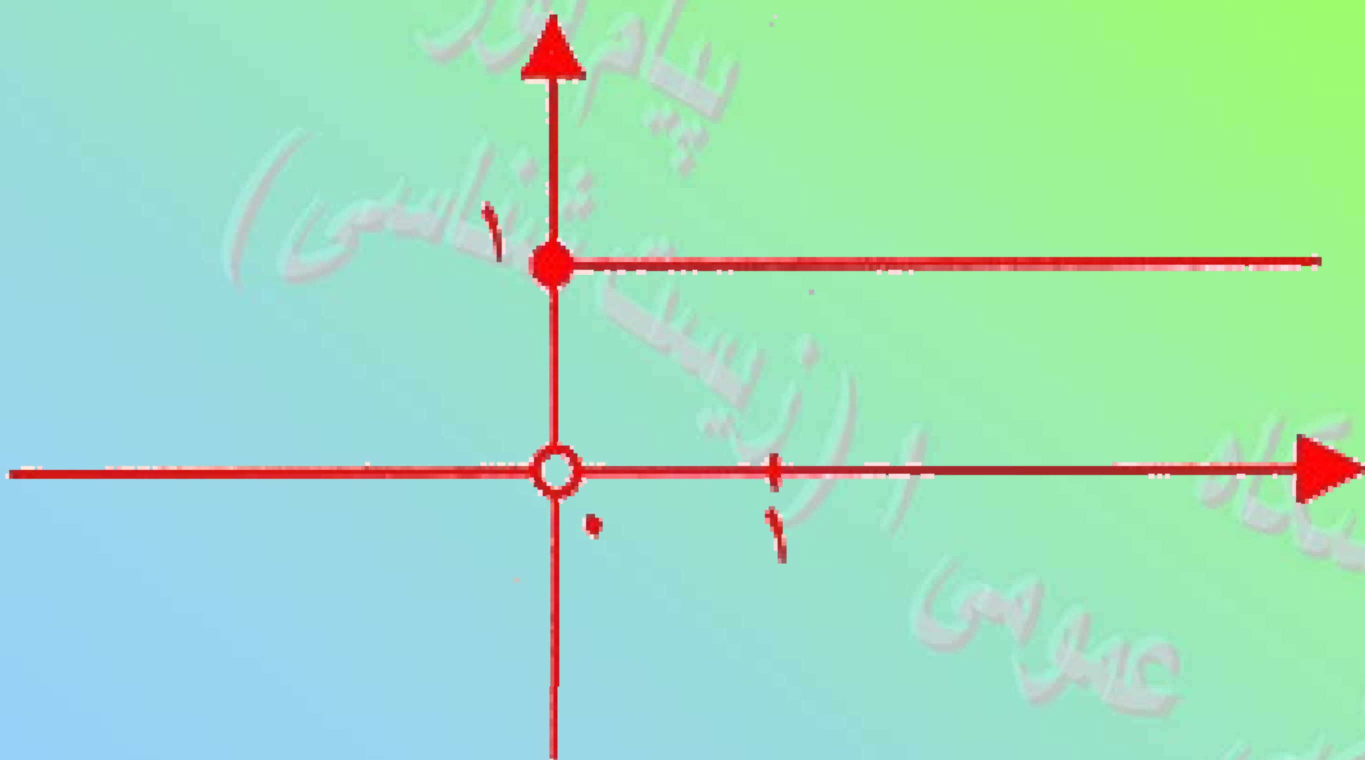
بالاخره اگر $\lim_{x \to a} f(x)$ موجود باشد می‌خواهیم حد منحصر بفرد باشد. حدود مطرح شده تا اینجا این خاصیت را دارند.

حال تابع زیر را که در شکل رسم شده است در نظر بگیرید:

$$f(x) = \begin{cases} ۰ & x < ۰ \\ ۱ & x \geq ۰ \end{cases}$$

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور



منوی اصلی

آیا وقتی که x به ۰ نزدیک می‌شود، f دارای حد است؟ توجه کنید که در هر بازهٔ حول ۰ مثلاً ($\frac{1}{1000}$ و $\frac{-1}{1000}$) تابع هر دو مقدار ۰ و ۱ را می‌گیرد. لذا ۰ و ۱ هر دو نامزد حد می‌باشند چون می‌خواهیم f در ۰ فقط یک حد داشته باشد، ظاهراً f در ۰ حد نخواهد داشت.

منوی اصلی

حال برای تنظیم تعریف دقیق حد آماده‌ایم. با این تعریف می‌توانیم تصمیم بگیریم که یک تابع در نقطه‌ای خاص حد دارد یا نه و در صورت داشتن این حد چه باید باشد؟

قبلاً گفتیم که L حد $f(x)$ است، اگر وقتی x به a نزدیک می‌شود، $f(x)$ به L نزدیک شود. ولی معنی دقیق نزدیک شدن $f(x)$ به L با نزدیک شدن x به a چیست؟

منوی اصلی

شکل صفحهٔ بعد مطلب فوق را در دو حالت توضیح می‌دهد. اگر دقت کنید برای آنکه فاصلهٔ $f(x)$ تا L کمتر از ۱ باشد (شکل قسمت (آ)) کافی است x از بازهٔ نموده شدهٔ I حول a اختیار گردد.

منوی اصلی

حال اگر بخواهیم فاصلهٔ $f(x)$ از L کمتر از $\frac{1}{2}$ باشد (شکل قسمت (ب)) بازهٔ J را حول a خواهیم داشت. به‌طور کلی، هر قدر x به a نزدیکتر باشد، $f(x)$ به L نزدیکتر خواهد بود.

منوی اصلی

برای آنکه مطالب فوق بی‌ابهام باشد ابتدا حرف یونانی ε (اپسیلون) را نمایش میزان نزدیکی مطلوب $f(x)$ به L می‌گیریم. در این صورت می‌توان مطالب فوق را به شکل زیر نوشت:

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

می‌خواهیم به‌ازای $\varepsilon > 0$ عدد x $(x \neq a)$ به‌اندازه‌ای به a نزدیک باشد که فاصلهٔ بین $f(x)$ و L کمتر از ε باشد.

به‌محض انتخاب $\varepsilon > 0$ می‌توان حرف یونانی δ (دلتا) را میزان نزدیکی x به a گرفت تا فاصلهٔ بین $f(x)$ و L کمتر از ε باشد. حال می‌توان این مطلب را به‌صورت زیر نوشت:

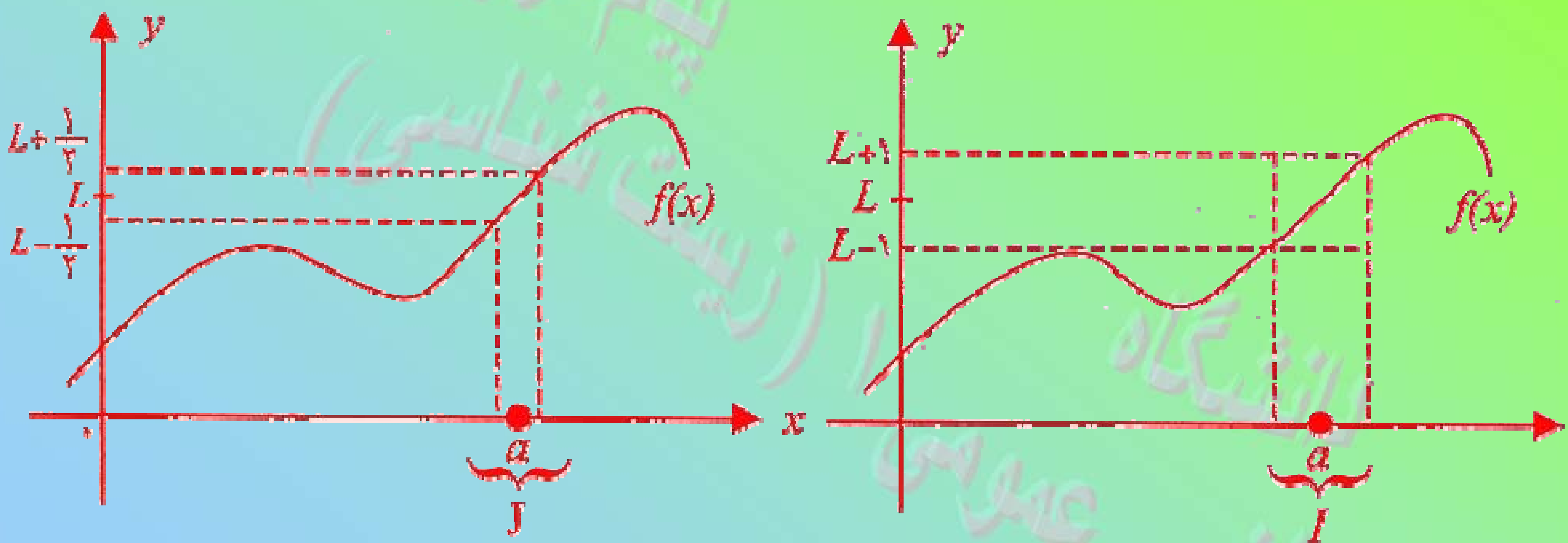
منوی اصلی

به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند $\delta > 0$ باشد، به‌طوری که

هرگاه فاصلهٔ بین x و a کوچکتر از δ بوده و $x \neq a$، (*)

آنگاه فاصلهٔ بین $f(x)$ و L کوچکتر از ε باشد.

منوی اصلی



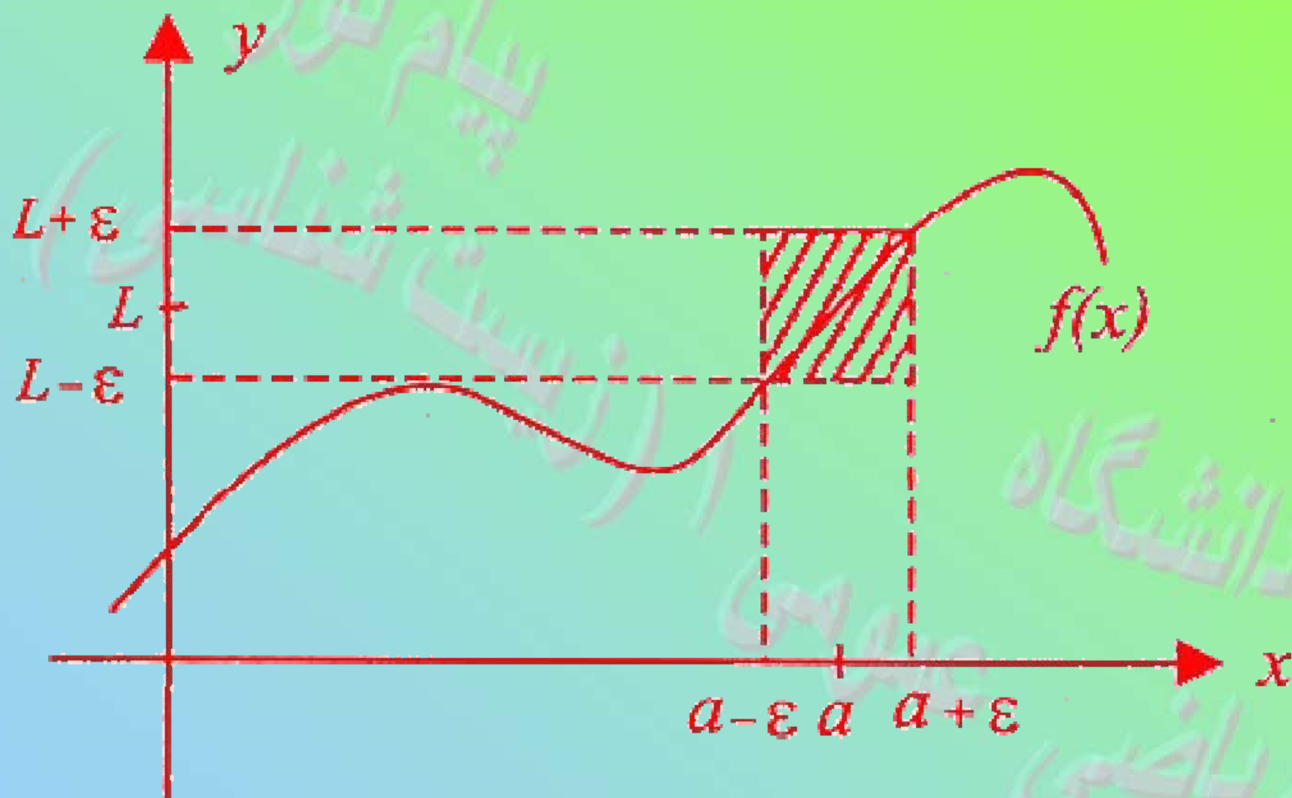
(الف)

(ب)

منوی اصلی

شکل زیر شرط (*) را به تصویر کشیده است. عدد ε دلخواه است سپس δ طوری اختیار می‌شود که شرط (*) برقرار شود، یعنی هرگاه فاصلهٔ بین x و a کوچکتر از δ بوده و $x \neq a$، آنگاه نقطهٔ $(x, f(x))$ در مستطیل سایه‌دار شکل زیر قرار دارد.

منوی اصلی



منوی اصلی

برای آنکه شرط (*) را به شکل نهایی در آوریم ملاحظه می‌کنیم که فاصلهٔ بین $f(x)$ و L وقتی کوچکتر از ε است که $|f(x) - L| < \varepsilon$. به‌علاوه $x \neq a$ و فاصلهٔ بین x و a وقتی کوچکتر از δ است که $0 < |x - a| < \delta$ لذا می‌توان شرط (*) را به‌صورت زیر بازنویسی کرد: به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند $\delta > 0$ باشد به‌طوری که:

هرگاه $0 < |x - a| < \delta$، آنگاه $|f(x) - L| < \varepsilon$ ، (**)

منوی اصلی

برای آنکه $f(x)$ در (**) معنی داشته باشد باید هر وقت $0 < |x-a| < \delta$ ، x در قلمرو f باشد به این دلیل در تعریف حد $f(x)$ وقتی x به a نزدیک می‌شود باید قلمرو f شامل همهٔ نقاط بازهٔ بازی حول a (جز احتمالاً خود a) باشد. پس می‌توان تعریف صوری زیر را بیان کرد:

منوی اصلی

۶.۱.۳ تعریف. فرض کنید تابع f در هر نقطه از بازهٔ بازی شامل a (جز احتمالاً خود a) تعریف شده باشد. در این صورت، عدد L را حد f در a می‌نامیم، اگر به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند $\delta > 0$ باشد به‌طوری که:

هرگاه $0 < |x-a| < \delta$ ، آنگاه $|f(x) - L| < \varepsilon$

و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

منوی اصلی

در این صورت می‌گوییم حد f در a وجود دارد یا f در a حد دارد یا $\lim_{x \to a} f(x)$ موجود است. از تعریف ۳-۱-۶ معلوم می‌شود که یک تابع در a می‌تواند حداکثر یک حد داشته باشد. برای نشان دادن طرز استفاده از تعریف ۳-۱-۶ در اثبات وجود حدها، آن را در مثالهای زیر به کار خواهیم برد.

منوی اصلی

مثال ۱. به فرض آنکه a و c دو عدد دلخواه باشند نشان دهید که:

$$\lim_{x \to a} c = c$$

حل: $\lim_{x \to a} c$ یعنی $\lim_{x \to a} f(x)$ که در آن به‌ازای هر x، $f(x) = c$.

فرض کنید $\varepsilon > 0$ داده شده باشد باید $\delta > 0$ را طوری بیابیم که:

اگر $0 < |x - a| < \delta$، آنگاه $|f(x) - c| < \varepsilon$

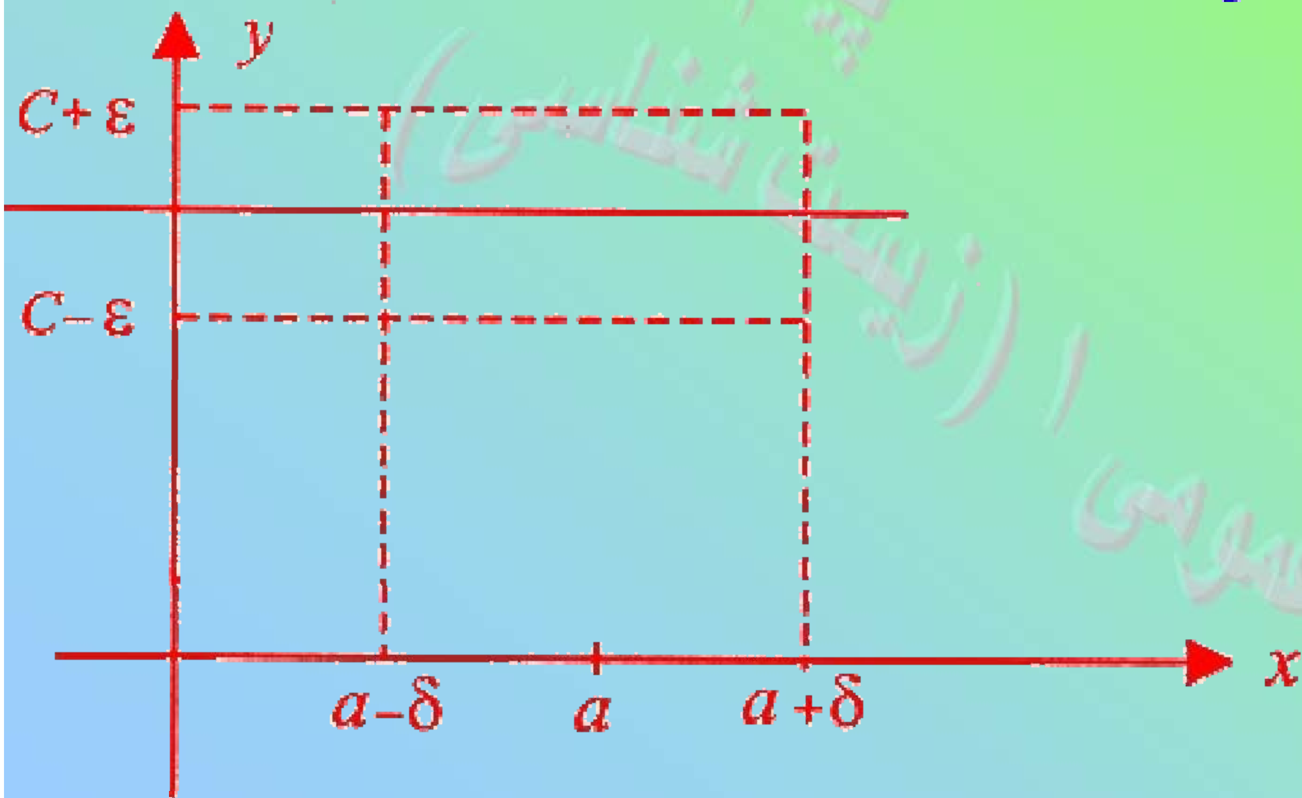
اما اگر کمی دقت کنید می‌بینید که:

$$|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$$

منوی اصلی

به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ همواره برقرار است.

لذا در این حالت می‌توان δ را هر عدد مثبت گرفت.



منوی اصلی

از مثال فوق معلوم می‌شود که:

$$\lim_{x \to -۲} (-\pi) = -\pi \quad , \quad \lim_{x \to -\sqrt{۲}} \frac{\pi}{۱۷} = \frac{\pi}{۱۷} \quad , \quad \lim_{x \to ۳} ۱ = ۱$$

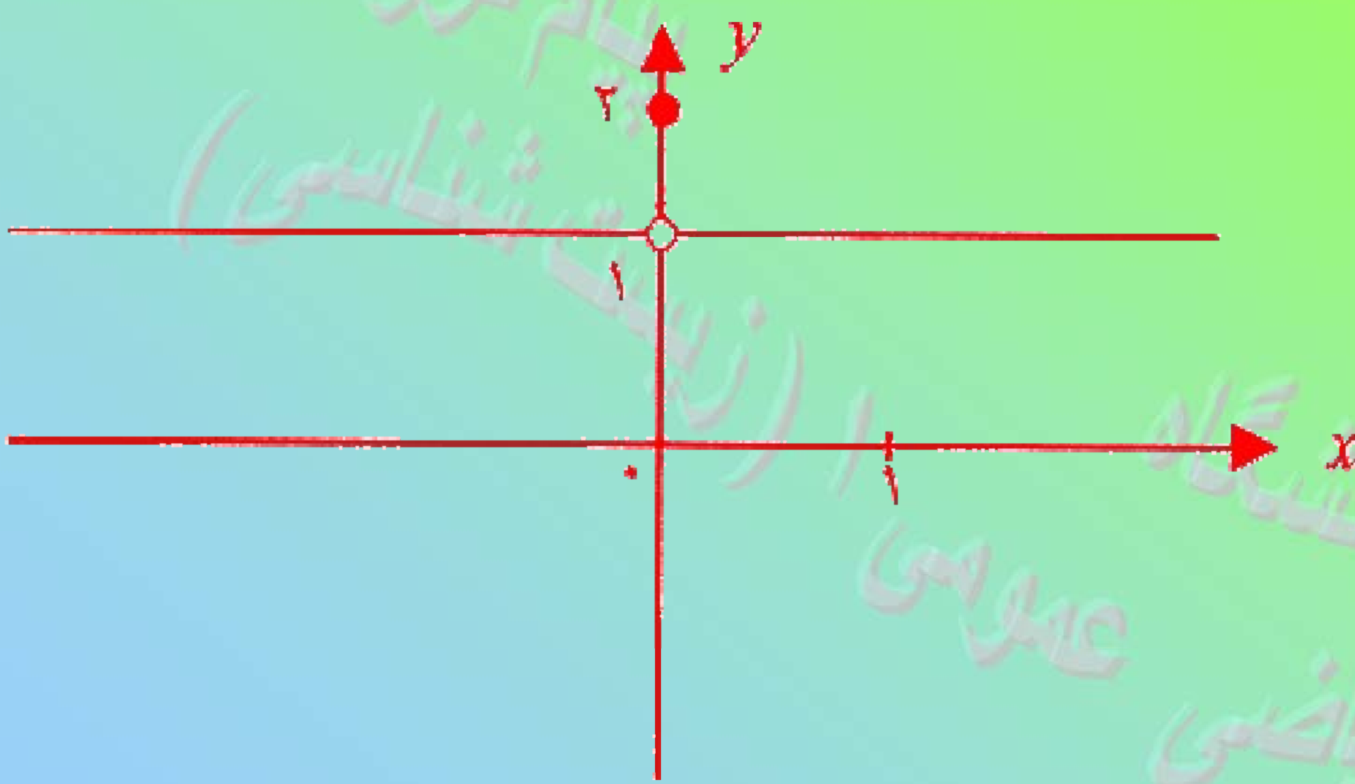
چون حد تابع f در a به مقدار f در a (در صورت وجود) بستگی ندارد در مثال ۱ نیز معلوم می‌شود که اگر f تابع با تعریف زیر باشد:

$$f(x) = \begin{cases} ۱ & x \neq ۰ \\ ۲ & x = ۰ \end{cases}$$

داریم:

$$\lim_{x \to ۰} f(x) = \lim_{x \to ۰} ۱ = ۱$$

منوی اصلی



منوی اصلی

مثال ۲. نشان دهید که:

$$\lim_{x \to a} x = a$$

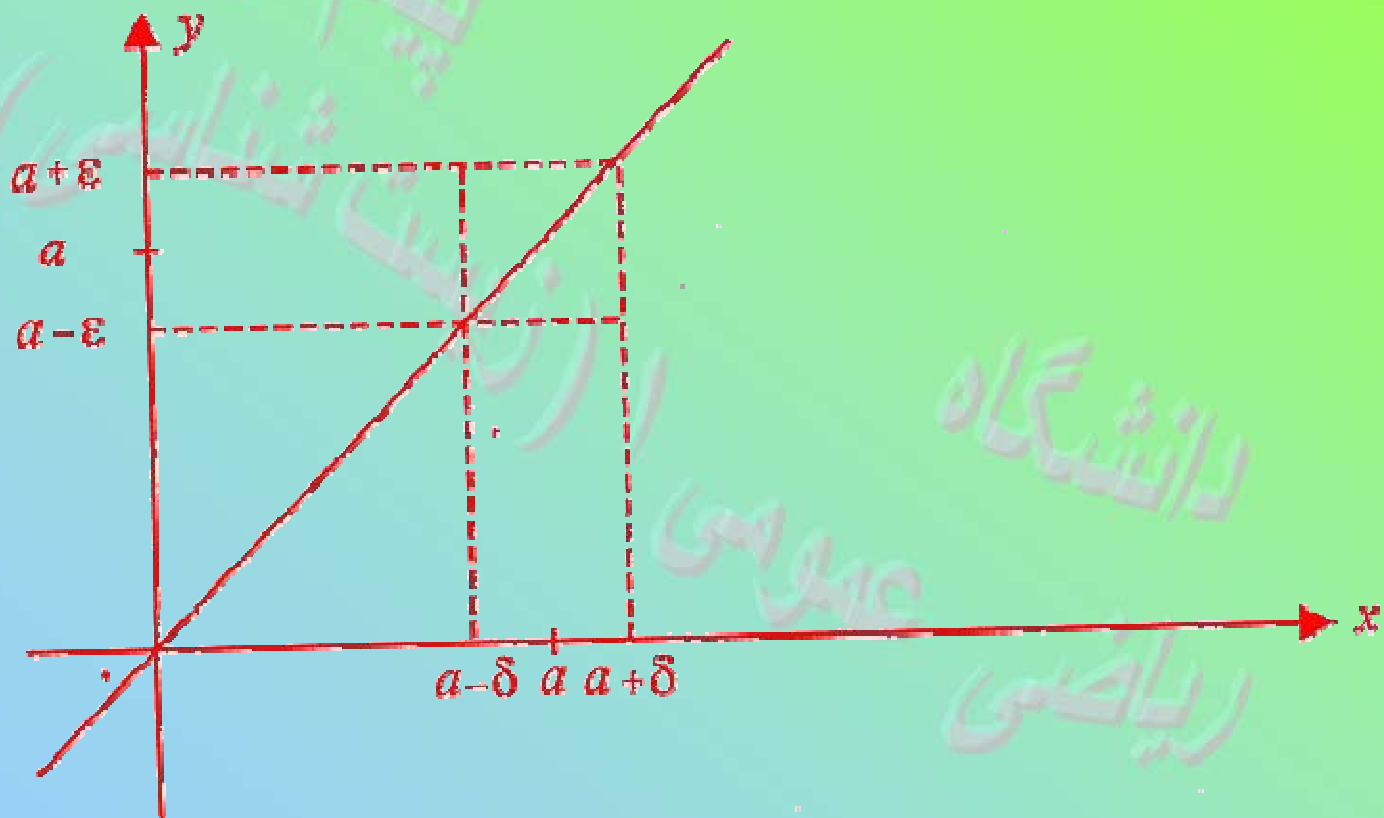
حل: در اینجا به‌ازای هر x، $f(x) = x$. باید عدد $\delta > 0$ را چنان یافت که

اگر $0 < |x-a| < \delta$، داشته باشیم $|x-a| < \varepsilon$

در اینجا δ را می‌توان ε گرفت زیرا:

هرگاه $0 < |x-a| < \delta = \varepsilon$ آنگاه $|x-a| < \varepsilon$

منوی اصلی



منوی اصلی

از مثال ۲ معلوم می‌شود که:

$$\lim_{x \to -\sqrt{۲}} x = -\sqrt{۲} \quad , \quad \lim_{x \to ۴\pi} x = ۴\pi$$

حال که مفهوم حد در تعریف ۳-۱-۶ معرفی شد، خط مماس بر نمودار f در $(a, f(a))$ را خط ماربر $(a, f(a))$ به شیب m_a که:

$$m_a = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

منوی اصلی

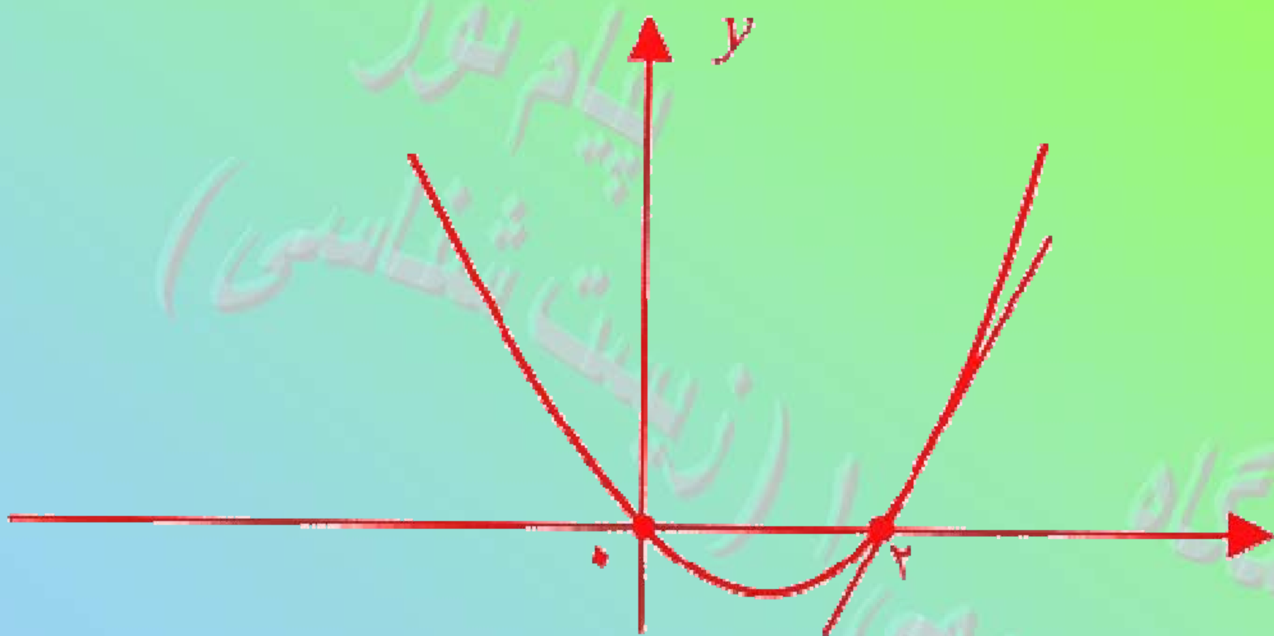
در صورت وجود حد تعریف می‌کنیم. در این صورت:

$$y-f(a)=m_a(x-a)$$

معادلهٔ خط مماس بر نمودار f در $(a, f(a))$ می‌باشد.

مثال ۳. معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=x^{۲}-۲x$ را در نقطهٔ $(۲, ۰)$ بیابید.

منوی اصلی



منوی اصلی

حل: شیب خط مماس در نقطهٔ $(۲ , ۰)$ مساوی است با $\lim\limits_{x \to ۲} \frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}$ مشروط بر اینکه این حد موجود باشد. لیکن،

$$\lim_{x \to ۲} \frac{f(x)-f(۲)}{x-۲} = \lim_{x \to ۲} \frac{(x^۲-۲x)-۰}{x-۲} = \lim_{x \to ۲} \frac{x(x-۲)}{x-۲} = \lim_{x \to ۲} x = ۲$$

چون خط مماس از نقطهٔ $(۲ , ۰)$ می‌گذرد پس معادلهٔ خط مماس عبارت است از:

$$y = ۲(x-۲)$$

منوی اصلی

مثال ۴. فرض کنید $f(x) = (x - ۱۶)/(\sqrt{x} - ۴)$ مقدار $\lim_{x \to ۱۶} f(x)$ را بیابید.

حل: توجه کنید که عدد ۱۶ در دامنهٔ f نیست (چرا)؟ ولی چون در فرایند حدی $x \neq ۱۶$ در نظر گرفته می‌شود لذا می‌نویسیم:

$$\frac{x - ۱۶}{\sqrt{x} - ۴} = \frac{(\sqrt{x} - ۴)(\sqrt{x} + ۴)}{\sqrt{x} - ۴} = \sqrt{x} + ۴$$

در نتیجه داریم:

$$\lim_{x \to ۱۶} \frac{x - ۱۶}{\sqrt{x} - ۴} = \lim_{x \to ۱۶} (\sqrt{x} + ۴) = ۸$$

منوی اصلی

۲.۳ قضایای حدی

یافتن حد توابع با استفاده مستقیم از تعریف حد کاری پردردسر و کسل‌کننده است اما خوشبختانه این کار معمولاً لازم نیست و با استفاده از قواعد توانای یافتن حدود و قضیه‌ها، فرایند محاسبهٔ حد راحت‌تر خواهند شد. البته اثبات این قواعد و قضیه‌ها نیز از

منوی اصلی

تعریف حد امکان‌پذیر خواهد بود ولی پس از اثبات آنها حد بسیاری از توابع را می‌توان بدون ذکری از ε و δ به‌دست آورد. در اینجا برخی از این قضیه‌ها را اثبات می‌کنیم و به‌دلیل محدود بودن حجم کتاب دانشجویان برای اثبات قضیه‌ها می‌توانند به کتابهای دیگر مراجعه کنند.

۱.۲.۳ قضیه. حد یک تابع در یک نقطه، در صورت وجود یکتاست.

منوی اصلی

۲.۲.۳ قضیه. هرگاه $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ و $\lim_{x \to a} g(x) = L_2$ موجود باشند آنگاه

$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)]$ و $\lim_{x \to a} cf(x)$ و $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)]$ و $\lim_{x \to a} [f(x) g(x)]$

وجود دارند و داریم:

منوی اصلی

الف) قاعدهٔ مجموع: $\lim_{x \to a}[f(x)+g(x)]=L_1+L_2$

ب) قاعدهٔ مضرب ثابت: به‌ازای هر ثابت c ؛ $\lim_{x \to a} cf(x)=cL_1$

ج) قاعدهٔ تفاضل: $\lim_{x \to a}[f(x)-g(x)]=L_1-L_2$

د) $\lim_{x \to a}[f(x)\cdot g(x)]=L_1 L_2$

ه) هرگاه $L_2 \neq 0$ آنگاه $\lim_{x \to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ نیز وجود دارد و

$$\lim_{x \to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L_1}{L_2}$$

منوی اصلی

۳.۲.۳ قــضیه. فــرض کـنید بـه‌ازای هـر x ، $f(x) = k$ کـه در آن $k \in \mathbf{R}$ ثـابت است

در این صورت به‌ازای هر a ؛ $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} k = k$

به‌عبارت دیگر حد هر تابع ثابت همان مقدار ثابت تابع است.

اثبات. باید نشان دهیم که برای هر $\varepsilon > 0$ مفروض یک $\delta > 0$ وجود دارد که

$$0<|x-a|<\delta \quad \Rightarrow \quad |f(x)-k|<\varepsilon$$

ولی داریم $|f(x)-k| = |k-k| = 0 < \varepsilon$ لذا هر عدد $\delta > 0$ را انتخاب کنیم در تعریف حد صدق می‌کند و به‌سادگی قضیه اثبات شده است.

منوی اصلی

مثال ۵. الف)

$$\lim_{x \to 0} 0 = 0 \quad , \quad \lim_{x \to 5} 0 = 0 \quad , \quad \lim_{x \to -4} \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

ب) حدود زیر را حساب کنید:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2}{x+3} \quad , \quad \lim_{x \to -1} (\pi x + x^2)$$

منوی اصلی

حل: بنابه قضیهٔ ۳-۲-۲ داریم:

$$\lim_{x \to -۱} \frac{x^۲}{x+۳} = \frac{\lim_{x \to -۱} x^۲}{\lim_{x \to -۱} (x+۳)} = \frac{۱}{۲}$$

زیرا: $\lim_{x \to -۱} x^۲ = (-۱)^۲ = ۱ \quad , \quad \lim_{x \to -۱} (x+۳) = -۱+۳ = ۲$

۱

$$\lim_{x \to -۱} (\pi x + x^۲) = \lim_{x \to -۱} \pi x + \lim_{x \to -۱} x^۲ = -\pi + ۱$$

زیرا: $\lim_{x \to -۱} x^۲ = (-۱)^۲ = ۱ \quad , \quad \lim_{x \to -۱} \pi x = \pi(-۱) = -\pi$

منوی اصلی

همین‌طور مثال زیر نشان می‌دهد که از قواعد حدی برای اثبات عدم وجود حد می‌توان کمک گرفت.

مثال ۶. نشان دهید که $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ موجود نیست.

حل: فرض کنید $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ موجود باشد، و قرار می‌دهیم $L = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$. چون $x\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ در این صورت بنابه قاعدهٔ حاصلضرب داریم:

$$1 = \lim_{x \to 0} 1 = \lim_{x \to 0} \left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = \left(\lim_{x \to 0} x\right)\left(\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\right) = 0 \cdot L = 0$$

منوی اصلی

که آشکارا نادرست است. لذا $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ نمی‌تواند وجود داشته باشد.

۴.۲.۳ قضیه. اگر a , k , m اعدادی حقیقی باشند آنگاه:

$$\lim_{x \to a} (mx+k) = ma+k$$

منوی اصلی

اثبات. اگر $m=0$ آنگاه $mx+k=k$ و حکم قضیه به $\lim_{x\to a} k=k$ تبدیل می شود که قبلاً اثبات شده است. حال فرض کنید $m\neq 0$ فرض کنید $\varepsilon>0$ داده شده است باید $\delta>0$ را طوری بیابیم که اگر $0<|x-a|<\delta$ آنگاه: $|(mx+k)-(ma+k)|<\varepsilon$

ولی نابرابری اخیر با نابرابریهای زیر هم ارز است:

$$|mx-ma|<\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |m||x-a|<\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |x-a|<\frac{\varepsilon}{|m|}$$

اگر قرار دهیم $\delta=\frac{\varepsilon}{|m|}$ (یا $0<\delta<\frac{\varepsilon}{|m|}$) آنگاه، قضیه اثبات شده است و نابرابری اولیه نتیجه می شود.

منوی اصلی

طراح: رحمت سلطانی عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه پیام نور شیراز

مثال ۷. به‌عنوان مثالهایی از قضیهٔ فوق داریم:

$$\lim_{x \to a} x = a \quad , \quad \lim_{x \to ۴} \frac{۱}{۲}(۳x - ۱) = \frac{۱}{۲}(۳ \times ۴ - ۱) = \frac{۱۱}{۲}$$

$$\lim_{x \to \sqrt{۲}} (۱۱x + \sqrt{۲}) = ۱۱\sqrt{۲} + \sqrt{۲} = ۱۲\sqrt{۲}$$

منوی اصلی

با توجه به اینکه معمولاً با مجموع و حاصلضرب بیش از دو تابع مواجه هستیم لذا می‌توان قضیهٔ حاصلضرب و مجموع دو تابع را تعمیم داد یعنی هرگاه:

$\lim_{x \to a} f_1(x)$, $\lim_{x \to a} f_2(x)$,…, $\lim_{x \to a} f_n(x)$ موجود باشند آنگاه:

(۱)

$$\lim_{x \to a} [f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)] = \lim_{x \to a} f_1(x) + \lim_{x \to a} f_2(x) + \cdots + \lim_{x \to a} f_n(x)$$

(۲)

$$\lim_{x \to a} [f_1(x) f_2(x) \cdots f_n(x)] = [\lim_{x \to a} f_1(x)][\lim_{x \to a} f_2(x)] \cdots [\lim_{x \to a} f_n(x)]$$

منوی اصلی

یکی از نتایج (۲) عبارت است از :

$$\lim_{x \to a} x^n = \lim_{x \to a} (\overbrace{x \cdot x \cdot \cdots x}^{\text{عامل } n}) = \overbrace{(\lim_{x \to a} x)(\lim_{x \to a} x)\cdots(\lim_{x \to a} x)}^{\text{عامل } n} = a \cdot a \cdot \cdots a = a^n$$

با استفاده از فرمولهایی که تا به حال به‌دست آمدند می‌توان حد توابع چند جمله‌ای و توابع گویا را وقتی که x به a میل می‌کند با قرار دادن a به جای x به‌دست آورد.

منوی اصلی

۵.۲.۳ قضیه. اگر $f(x)=a_n x^n+\cdots+a_1 x+a_0$ یک تابع چند جمله‌ای باشد آنگاه:

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

اثبات. با توجه به قواعد و قضایای قبل داریم:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}(a_n x^n+\cdots+a_1 x+a_0)$$

$$=(\lim_{x\to a} a_n x^n)+\cdots+(\lim_{x\to a} a_1 x)+\lim_{x\to a} a_0$$

$$=a_n a^n+\cdots+a_1 a+a_0=f(a)$$

منوی اصلی

۶.۲.۳ نتیجه. فرض کنید $q(x)=\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]$ یک تابع گویا باشد یعنی:

$$q(x)=\frac{a_n x^n+\cdots+a_1 x+a_0}{b_m x^m+\cdots+b_1 x+b_0}$$

در این صورت اگر $g(a)\neq 0$ آنگاه:

$$\lim_{x\to a} q(x)=\frac{f(a)}{g(a)}=q(a)$$

به‌خصوص هرگاه $f(x)=1$ و $g(x)=x^n$ آنگاه فرمول زیر به‌دست می آید:

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{x^n}=\frac{1}{a^n} \quad , \quad a\neq 0 \text{ به ازای }$$

منوی اصلی

مثال ۸. $\lim_{x \to -1} \frac{x^3+3x+1}{x^2-3\sqrt{5x}}$ را حساب کنید.

حل: $\lim_{x \to -1} \frac{x^3+3x+1}{x^2-3\sqrt{5x}} = \frac{(-1)^3+3(-1)+1}{(-1)^2-3\sqrt{5}(-1)} = \frac{-3}{1+3\sqrt{5}}$

با آنکه قاعدهٔ خارج قسمت وجود $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ را وقتی که حد $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ تضمین نمی‌کند گاهی هنوز می‌توان این نوع حدود را محاسبه نمود. به مثالهای زیر توجه کنید:

منوی اصلی

مثال ۹. $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-4}$ را پیدا نمایید.

حل: چون $\lim\limits_{x \to -2}(x^2-4)=0$ پس نمی‌توان قاعدهٔ خارج قسمت را بر شکل اصلی این تابع اعمال کرد. ولی چون داریم $(x^2-1)(x+2)=x^3+2x^2-x-2$ و نیز $(x-2)(x+2)=x^2-4$ پس خواهیم داشت:

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-4} = \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(x^2-1)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \to -2} \frac{x^2-1}{x-2} = \frac{-3}{4}$$

منوی اصلی

مثال ۱۰. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$ را پیدا نمایید.

حل: هنگامی که x به ۱ میل می‌کند صورت و مخرج به صفر میل می‌کنند بنابراین ابتدا کسر را ساده می‌کنیم. بدین‌منظور صورت و مخرج را در $(\sqrt{x} + 1)$ ضرب می‌کنیم داریم:

$$\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$$

بنابراین

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}$$

منوی اصلی

۷.۲.۳ قضیه. الف) به‌ازای هر عدد صحیح و مثبت n داریم

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$$

در این رابطه اگر n زوج باشد، $a > 0$ فرض می‌شود.

ب) اگر $r = \frac{m}{n}$ عددی گویا باشد آنگاه

$$\lim_{x \to a} x^r = a^r$$

منوی اصلی

مشروط بر آنکه a^r با معنی (یعنی حقیقی) باشد

پ) به‌طور کلی اگر $\lim_{x \to a} f(x) = L$ آنگاه به‌ازای هر عدد گویای r داریم

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^r = L^r$$

مشروط بر اینکه L^r با معنی (حقیقی) باشد

منوی اصلی

۸.۲.۳ قضیه. اگر $\lim_{x \to a} f(x) = L$ آنگاه $\lim_{x \to a} |f(x)| = |L|$.

مثال ۱۱. مطلوب است محاسبه:

الف) $\lim_{x \to ۹} \frac{x(\sqrt{x} - ۳)}{x - ۹}$

ب) $\lim_{x \to ۲} \frac{۴ - x^۲}{۳ - \sqrt{x^۲ + ۵}}$

حل: الف)

$$\lim_{x \to ۹} \frac{x(\sqrt{x} - ۳)}{x - ۹} = \lim_{x \to ۹} \frac{x(\sqrt{x} - ۳)(\sqrt{x} + ۳)}{(x - ۹)(\sqrt{x} + ۳)} = \lim \frac{x(x - ۹)}{(x - ۹)(\sqrt{x} + ۳)}$$

$$= \lim_{x \to ۹} \frac{x}{\sqrt{x} + ۳} = \frac{۳}{۲}$$

منوی اصلی

ب)

$$\lim_{x \to ۲} \frac{۴-x^۲}{۳-\sqrt{x^۲+۵}} = \lim_{x \to ۲} \frac{(۴-x^۲)(۳+\sqrt{x^۲+۵})}{(۳-\sqrt{x^۲+۵})(۳+\sqrt{x^۲+۵})}$$

$$= \lim_{x \to ۲} \frac{(۴-x^۲)(۳+\sqrt{x^۲+۵})}{۴-x^۲} = \lim_{x \to ۲} (۳+\sqrt{x^۲+۵}) = ۶$$

منوی اصلی

۱۰.۲.۳ **قضیه.** فرض کنید توابع f ، g و h به‌ازای همه مقادیر x در یک بازهٔ باز شامل a ، به جز احتمالاً در a در نابرابریهای زیر صدق کنند.

$$h(x) \le f(x) \le g(x)$$

در این صورت اگر $\lim_{x \to a} g(x) = L = \lim_{x \to a} h(x)$ آنگاه $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

[این قضیه را، قضیه فشار و گاهی اوقات قضیهٔ ساندویچ می‌نامند].

منوی اصلی

مثال ۱۲. $\lim_{x\to 0}(x\sin\frac{1}{x})$ را بیابید:

حل: می‌دانیم که به‌ازای هر مقدار t، $|\sin t| \le 1$، لذا داریم:

$$0 \le |x\sin\frac{1}{x}| \le |x|$$

چون $\lim_{x\to 0}|x| = 0 = \lim_{x\to 0} 0$ لذا بنابر قضیهٔ فشار داریم:

$$\lim_{x\to 0}|x\sin\frac{1}{x}| = 0$$ و لذا $$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$$

منوی اصلی

۱۱.۲.۳ تذکر. توجه کنید که عکس قضیه‌های حد لزوماً درست نیستند به‌عنوان مثال نشان می‌دهیم که عکس قضیهٔ ۸.۲.۳ درست نیست. فرض کنید

$$f(x)=\begin{cases} 1 & ; \quad x \geq 0 \\ -1 & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

مشاهده می‌کنیم که وقتی x با مقادیر بزرگتر از صفر به صفر نزدیک می‌شود $f(x)$ به ۱

منوی اصلی

طراح: رحمت سلطانی عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه پیام نور شیراز

میل می‌کند در حالی که وقتی x با مقادیر کوچکتر از صفر به صفر نزدیک می‌شود $f(x)$ به -1 میل می‌کند لذا با توجه به قضیه یکتایی حد، $\lim_{x \to 0} f(x)$ وجود ندارد. در حالی که $|f(x)| = 1$ و لذا $\lim_{x \to 0} |f(x)| = 1$.

منوی اصلی

با استفاده از قواعد حدی بیان شده و قضیهٔ فشار می‌توان حدود توابع گویا و توابع مثلثاتی را حساب کرد. ولی تا به حال روش مناسبی برای محاسبهٔ حدودی چون $\lim_{x \to ۱} \sqrt{x^۳ - ۴x^۲ + ۳x + ۲}$ به‌دست نیاورده‌ایم واضح است که با استفاده از ε و δ کار مشکلی را در پیش خواهیم داشت لذا روش دیگری را به‌کار خواهیم گرفت.

منوی اصلی

برای محاسبهٔ حد فوق ابتدا قرار می‌دهیم $y = x^{3} - 4x^{2} + 3x + 2$ و می‌بینیم که وقتی x به ۱ نزدیک می‌شود y به $1^{3} - 4(1)^{2} + 3(1) + 2 = 2$ نزدیک می‌گردد لذا نتیجه می‌گیریم که اگر به جای $x^{3} - 4x^{2} + 3x + 2$ قرار دهیم y و به جای $x \to 1$ قرار دهیم $y \to 2$ داریم:

$$\lim_{x \to 1} \sqrt{x^{3} - 4x^{2} + 3x + 2} = \lim_{y \to 2} \sqrt{y} = \sqrt{2}$$

منوی اصلی

به‌طور کلی هرگاه $\lim_{x\to a} f(x)=c$ و $\lim_{y\to c} g(y)$ موجود باشد آنگاه نتیجه زیر را خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to a} g(f(x))=\lim_{y\to c} g(y)$$

این قاعده را قاعدهٔ جانشانی نامند.

منوی اصلی

مثال ۱۳. $\lim_{x \to 2} \sqrt{x + \frac{1}{x}}$ را بیابید.

حل: ابتدا قرار می‌دهیم $y = x + \frac{1}{x}$ سپس می‌بینیم که

$$\lim_{x \to 2} y = \lim_{x \to 2} \left(x + \frac{1}{x}\right) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

لذا از قاعدهٔ جانشانی معلوم می‌شود که

$$\lim_{x \to 2} \sqrt{x + \frac{1}{x}} = \lim_{y \to \frac{5}{2}} \sqrt{y} = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

منوی اصلی

مثال ۱۴. $\lim_{x \to \frac{\pi}{۳}} \cos(x + \frac{\pi}{۶})$ را بیابید.

حل: قرار می‌دهیم: $y = x + \frac{\pi}{۶}$ و توجه داریم که:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{۳}} y = \lim_{x \to \frac{\pi}{۳}} (x + \frac{\pi}{۶}) = \frac{\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶} = \frac{\pi}{۲}$$

بنابر قاعدهٔ جانشانی داریم:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{۳}} \cos(x + \frac{\pi}{۶}) = \lim_{y \to \frac{\pi}{۲}} \cos y = \cos\frac{\pi}{۲} = ۰$$

منوی اصلی

۳.۳ حدود یک‌طرفه

تابع f به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$f(x) = \sqrt{x}$$

می‌بینیم که دامنهٔ f بازهٔ $[0, \infty)$ است. اگر حد این تابع را در نقطهٔ $x = 0$ بخواهیم، آنگاه این حد وجود ندارد زیرا f در هیچ بازهٔ بازی شامل صفر معین نیست یعنی x نمی‌تواند مقادیر منفی را اختیار کند و تنها با مقادیر بزرگتر از صفر به سمت صفر میل می‌کند لذا در این مسئله با حد یک طرفه روبه‌رو هستیم و گوییم x به سمت 0^+ میل می‌کند.

منوی اصلی

در حالت کلی اگر در تابع $f(x)$، x با مقادیر بزرگتر از a به سمت a میل کند حد به‌دست آمده را حد راست می‌نامند و می‌نویسند:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = l_1$$

و اگر x با مقادیر کمتر از a به سمت a میل کند، حد به‌دست آمده را حد چپ می‌نامند و می‌نویسند:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = l_2$$

منوی اصلی

اما با توجه به تعریف حد که x به هر طریقی که به سمت a میل کند، $f(x)$ بایستی به سمت مقداری واحد میل کند، می‌توان نتیجه گرفت که تابع f زمانی در a دارای حد است که حد چپ و راست آن مساوی باشد یعنی:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = l = \lim_{x \to a^-} f(x)$$

منوی اصلی

ممکن است تابع دارای حد چپ و یا راست نباشد و یا این دو حد با هم مساوی نباشند.

با توجه به مطالب فوق می‌توان گفت در تعریف حد راست کافی است نامساوی $0<|x-a|<\delta$ را در تعریف حد با نامساوی $0<x-a<\delta$ عوض کنیم که نشان دهیم x سمت راست a می‌باشد. به‌طور مشابه در تعریف حد چپ کافی است نامساوی $-\delta<x-a<0$ را به جای نامساوی $0<|x-a|<\delta$ در نظر بگیریم.

منوی اصلی

۱.۳.۳ تعریف. الف) اگر تابع f در بازهٔ بازی مانند (a, c) معین باشد آنگاه گوییم حد

$f(x)$ وقتی x از طرف راست به a میل می‌کند برابر با l است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = l$$

منوی اصلی

هرگاه متناظر با هر $\varepsilon > 0$ یک $\delta > 0$ وجود داشته باشد به‌طوری که:

$$0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

ب) اگر تابع f در بازهٔ بازی مانند (c, a) معین باشد می‌گوییم حد $f(x)$ وقتی x از طرف چپ به a میل می‌کند برابر با l است و می نویسیم:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = l$$

منوی اصلی

هرگاه متناظر با هر $\varepsilon > 0$ یک $\delta > 0$ وجود داشته باشد به‌طوری که:

$$-\delta < x - a < 0 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - l| < \varepsilon$$

منوی اصلی

۲.۳.۳ تذکر. نمادگذاری $x \to a^+$ به این معنی نیست که x به $a+$ میل می‌کند بلکه به‌معنی این است که x همواره مقادیر بیشتر از a را اختیار می‌کند همین‌طور در مورد $x \to a^-$ که معنی اینکه x به $a-$ میل می‌کند را ندارد بلکه به معنی این است که x همواره مقادیر کمتر از a را اختیار می‌کند.

منوی اصلی

۳.۳.۴ قضیه. اگر f در بازهٔ بازی شامل a (به جز احتمالاً در خود a) معین باشد آنگاه $\lim_{x \to a} f(x) = l$ اگر و فقط اگر:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = l = \lim_{x \to a^-} f(x)$$

این قضیه بیان می‌کند که حد $f(x)$ وقتی که x به a میل می‌کند وجود دارد اگر و فقط اگر حدهای راست و چپ آن وجود داشته و این حدود با هم برابر باشند.

منوی اصلی

مثال ۱. حدود راست و چپ تابع $f(x)=[x]$ را در $x=۲$ تعیین کنید.

حل:

$$\lim_{x\to ۲^-}[x]=۱$$

منوی اصلی

زیرا برای هر $\varepsilon > 0$ اگر $0 < \delta \le 1$ و $-\delta < x - 2 < 0$ آنگاه $1 < x < 2$ و در نتیجه $[x] = 1$

$$\lim_{x \to 2^+} [x] = 2$$

زیرا به‌طور مشابه برای هر $\varepsilon > 0$ اگر $0 < \delta \le 1$ و $0 < x - 2 < \delta$ آنگاه $2 < x < 3$ و در نتیجه $[x] = 2$ چون حد چپ و راست این تابع با هم برابر نیستند پس این تابع در این نقطه دارای حد نمی‌باشد.

منوی اصلی

مثال ۲. $\lim\limits_{x \to 1^-} \sqrt{1-x^2}$ را بیابید.

حل: فرض کنید y عبارت $1-x^2$ باشد چون وقتی x از چپ به ۱ نزدیک می‌شود $1-x^2$ از راست به صفر نزدیک می‌گردد پس خواهیم داشت:

$$\lim_{x \to 1^-} \sqrt{1-x^2} = \lim_{y \to 0^+} \sqrt{y} = 0$$

منوی اصلی

با آنکه $\lim\limits_{x \to 1^-} \sqrt{1-x^2}$ طبق مثال فوق موجود بود ولی $\lim\limits_{x \to 1^+} \sqrt{1-x^2}$ موجود نیست

و دلیلش این است که وقتی x در سمت راست ۱ واقع باشد، $1-x^2$ منفی است و جذر

یک عدد منفی تعریف نشده است.

منوی اصلی

مثال ۴. فرض کنید تابع f به‌صورت زیر تعریف شده باشد:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x} & x\neq ۰\\ ۱ & x=۰\end{cases}$$

$\lim_{x\to ۰} f(x)$ را بیابید.

حل: اگر $۰ < x$ آنگاه $|x|=x$ و لذا $f(x)=\frac{x}{x}=۱$ در نتیجه:

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim_{x\to ۰^+} ۱=۱$$

به‌همین نحو اگر $x < ۰$ آنگاه $|x|=-x$ و لذا $f(x)=\frac{-x}{x}=-۱$ در نتیجه:

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x)=\lim_{x\to ۰^-} (-۱)=-۱$$

منوی اصلی

طراح: رحمت سلطانی عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه پیام نور شیراز

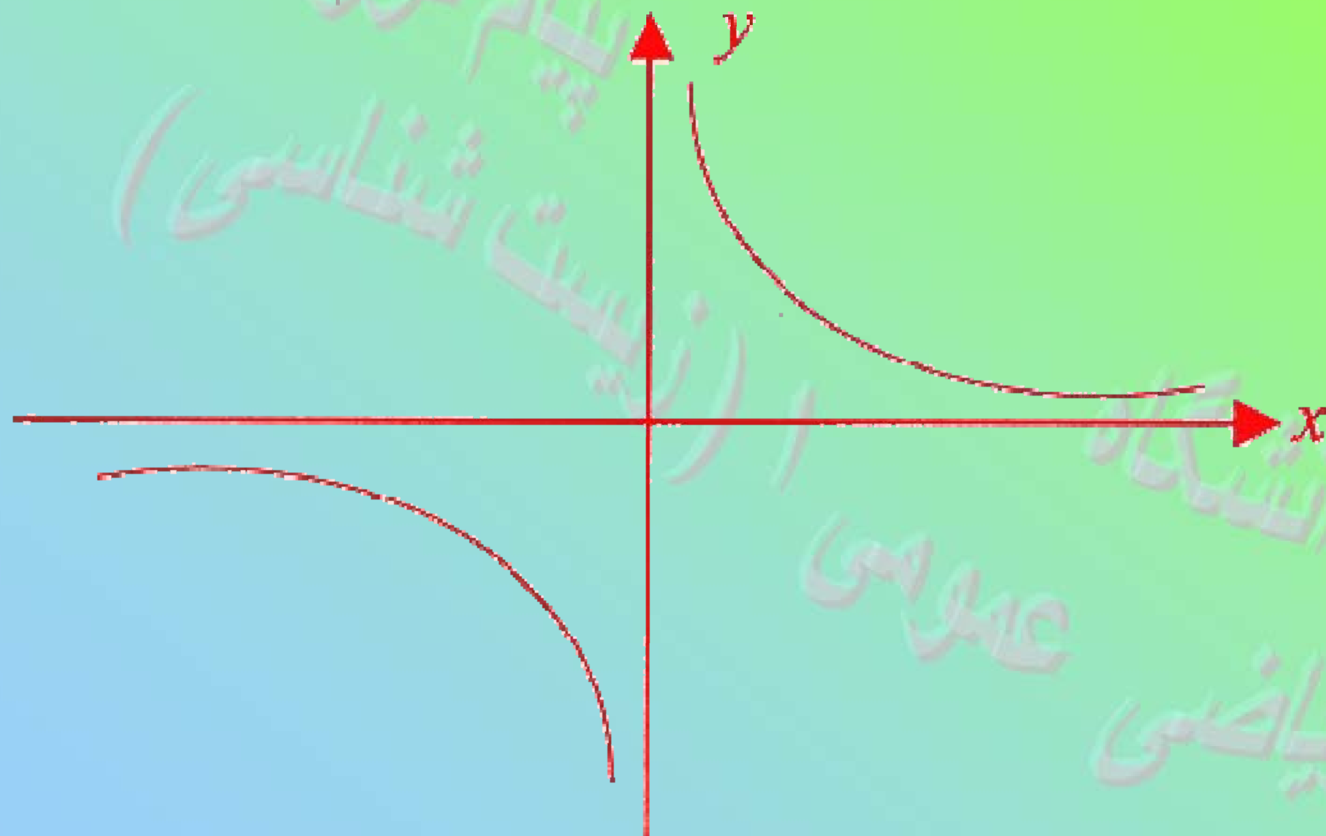
مشاهده می‌کنیم که $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$ و لذا $\lim_{x\to 0} f(x)$ وجود ندارد.

شکل زیر نمودار $f(x)$ را نشان می‌دهد:

منوی اصلی

۴.۳ حد در بی‌نهایت

تابع f را با ضابطهٔ $f(x)=\frac{1}{x}$ در نظر بگیرید. نمودار f در شکل زیر رسم شده است



منوی اصلی

در جدول زیر مقادیر $f(x)$، برای بعضی از مقادیر مثبت x محاسبه شده است.

x	۱	۲	۳	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰
$f(x)$	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۱۰}$	$\frac{۱}{۱۰۰}$	$\frac{۱}{۱۰۰۰}$	$\frac{۱}{۱۰۰۰۰}$

منوی اصلی

همان‌طور که در جدول فوق دیده می‌شود به‌تدریج که مقادیر مثبت x بزرگ و بزرگتر می‌شوند، مقادیر $f(x)$ به صفر نزدیک و نزدیکتر می‌شوند مثلاً وقتی $x = ۱۰۰$ اختلاف ۰ و $\frac{1}{x}$ مساوی $\frac{۱}{۱۰۰}$ می‌شود. $f(۱۰۰) - ۰ = \frac{۱}{۱۰۰} - ۰ = \frac{۱}{۱۰۰}$ به این ترتیب می‌بینیم که اختلاف $f(x)$ و ۰ وقتی که x بی‌اندازه بزرگ شود، به سمت صفر میل می‌کند در نتیجه تعریف دقیق حد در بی‌نهایت را در زیر می‌آوریم:

منوی اصلی

۱.۴.۳ تعریف. اگر f در بازهٔ بازی مانند (a, ∞) معین باشد آنگاه $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ با این معنی است که متناظر با هر $\varepsilon > 0$ یک عدد مثبت M وجود داشته باشد که:

$$x > M \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

منوی اصلی

۲.۴.۳ **تعریف.** اگر f در بازهٔ بازی مانند $(-\infty, a)$ معین باشد آنگاه $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$ به این معنی است که متناظر با هر $\varepsilon > 0$ یک عدد مثبت M وجود دارد که:

$$x < -M \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

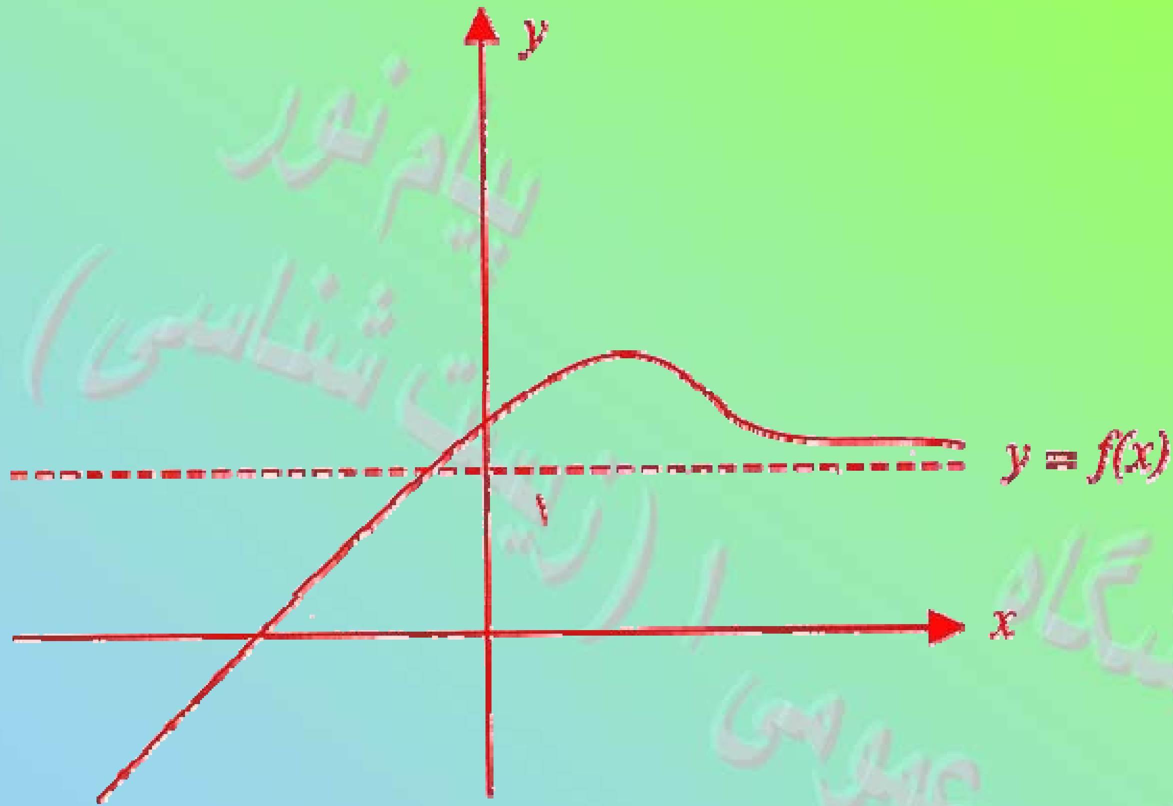
منوی اصلی

به‌عنوان مثال تابع f راکه نمودار آن در شکل زیر رسم شده است را در نظر بگیرید مشاهده می‌کنید که وقتی x بزرگ و بزرگتر می‌شود (یعنی بی‌کران افزایش می‌یابد) مقدار $y=f(x)$ به عدد ۱ نزدیک و نزدیکتر می‌شود در این صورت می‌گوییم که «حد $f(x)$ وقتی x به بی‌نهایت میل می‌کند برابر با ۱ است»

و می‌نویسیم: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = ۱$

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

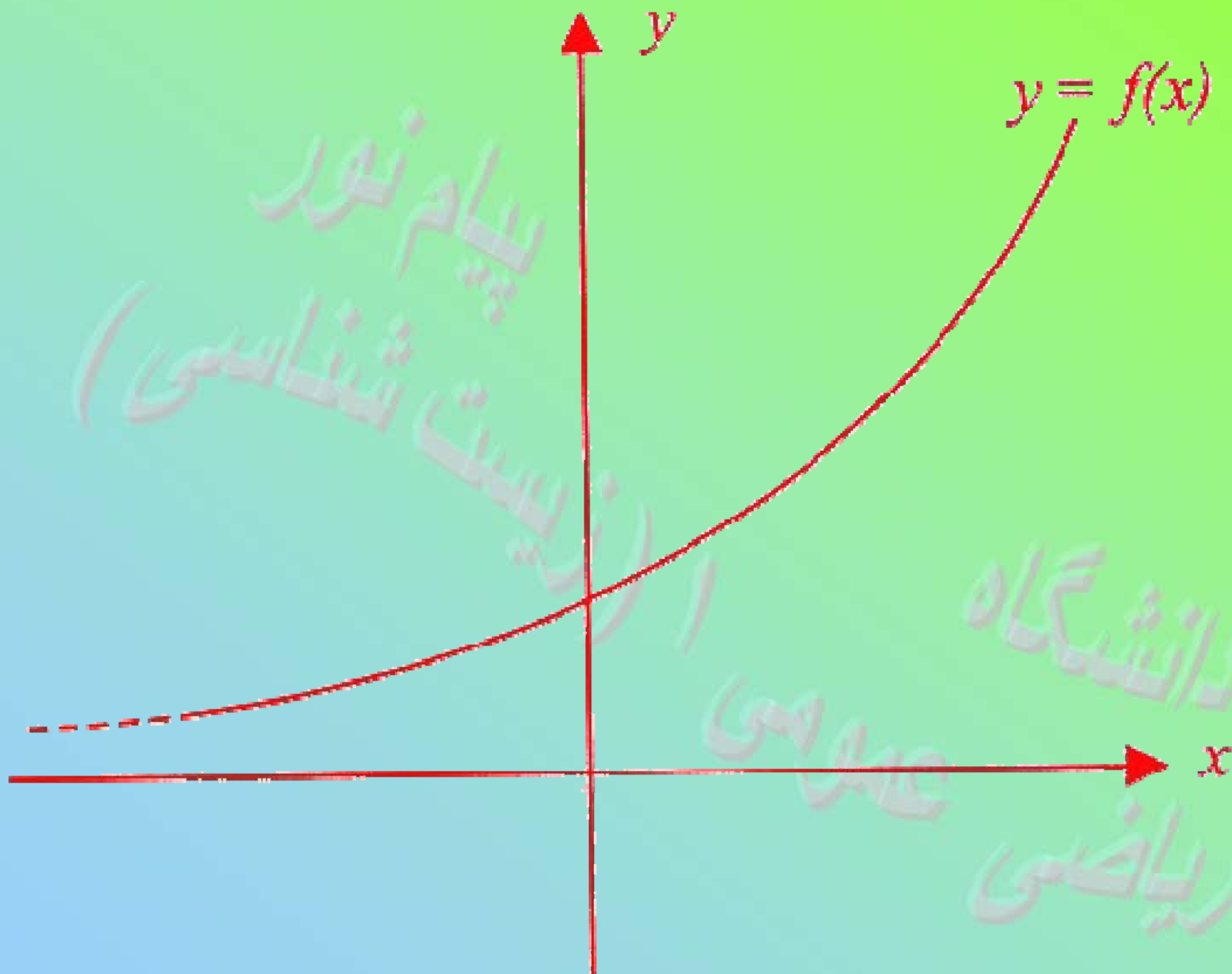


منوی اصلی

به‌همین نحو اگر نمودار شکل زیر را در نظر بگیرید می‌بینیم که وقتی x در جهت منفی افزایش می‌یابد مقدار $f(x)$ به صفر میل می‌کند در این صورت می‌گوییم که «حد $f(x)$ وقتی x به منفی بی‌نهایت میل می‌کند برابر با صفر است»

و می‌نویسیم: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

منوی اصلی



منوی اصلی

مثال ۱. ثابت کنید که

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x} = 1$$

حل: بایدنشان‌دهیم که برای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند $M > 0$ وجوددارد به‌طوری که

$$x > M \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{x+1}{x} - 1 \right| < \varepsilon$$

اما داریم:

$$\left| \frac{x+1}{x} - 1 \right| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |x| > \frac{1}{\varepsilon}$$

فرض کنیم $M = \frac{1}{\varepsilon}$ در این صورت داریم:

$$|x| > \frac{1}{\varepsilon} = N \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{x+1}{x} - 1 \right| < \varepsilon$$

منوی اصلی

براساس این رابطه اگر $\varepsilon = 0.0001$ باشد، $M = 10000$ گردیده و نتیجه می‌شود که اگر $x > 10000$ باشد داریم $\frac{x+1}{x} - 1 < 0.0001$ مثلاً فرض کنید $x = 10010$ باشد، داریم $\left|\frac{x+1}{x} - 1\right| = \frac{1}{10010}$ چنان که ملاحظه می‌شود این مقدار از 0.0001 کمتر است.

۳.۴.۳ قضیه. اگر $k > ۰$ آنگاه:

الف) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{c}{x^k} = ۰$$

ب) $$\lim_{x \to -\infty} \frac{c}{x^k} = ۰$$

منوی اصلی

مثال ۲. $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^{۲}-۱}-x$ را بیابید.

حل:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^{۲}-۱}-x)=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^{۲}-۱}-x)\frac{\sqrt{x^{۲}-۱}+x}{\sqrt{x^{۲}-۱}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{۲}-۱-x^{۲}}{\sqrt{x^{۲}-۱}+x}$$

منوی اصلی

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{-1}{\sqrt{x^{2}-1}+x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{-1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^{2}}}+1} = \frac{0}{2} = 0$$

۴.۴.۲ تعریف. اگر $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ یا $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ آنگاه خط $y = L$ را یک مجانب افقی نمودار تابع f می‌نامیم.

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

مثال ۳. مجانب‌های افقی $f(x)=\dfrac{3x|x|}{x^2+1}$ را بیابید.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x\cdot x}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{1+\frac{1}{x^2}}=3$$

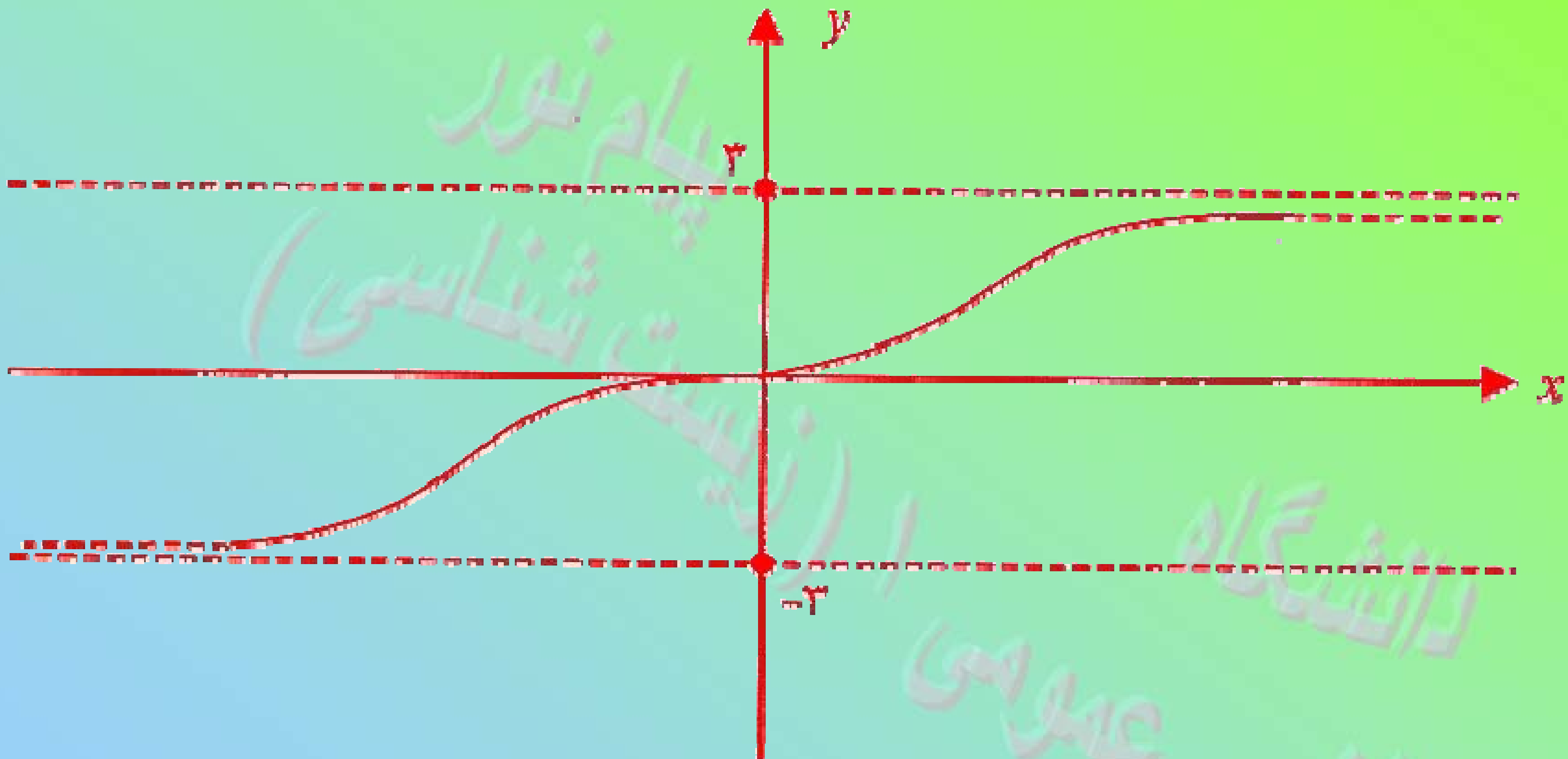
لذا $y=3$ یک مجانب افقی نمودار f است.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x\cdot(-x)}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^2}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3}{1+\frac{1}{x^2}}=-3$$

در نتیجه $y=-3$ نیز یک مجانب افقی نمودار f است.

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور



منوی اصلی

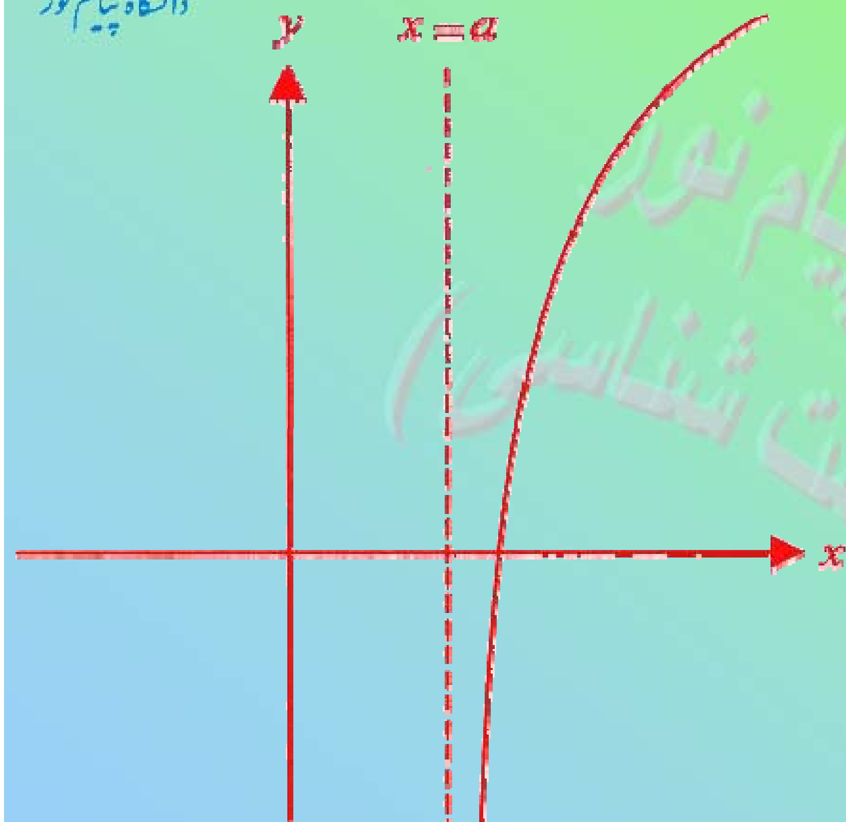
طراح: رحمت سلطانی عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه پیام نور شیراز

۵.۳ حدهای بی‌نهایت

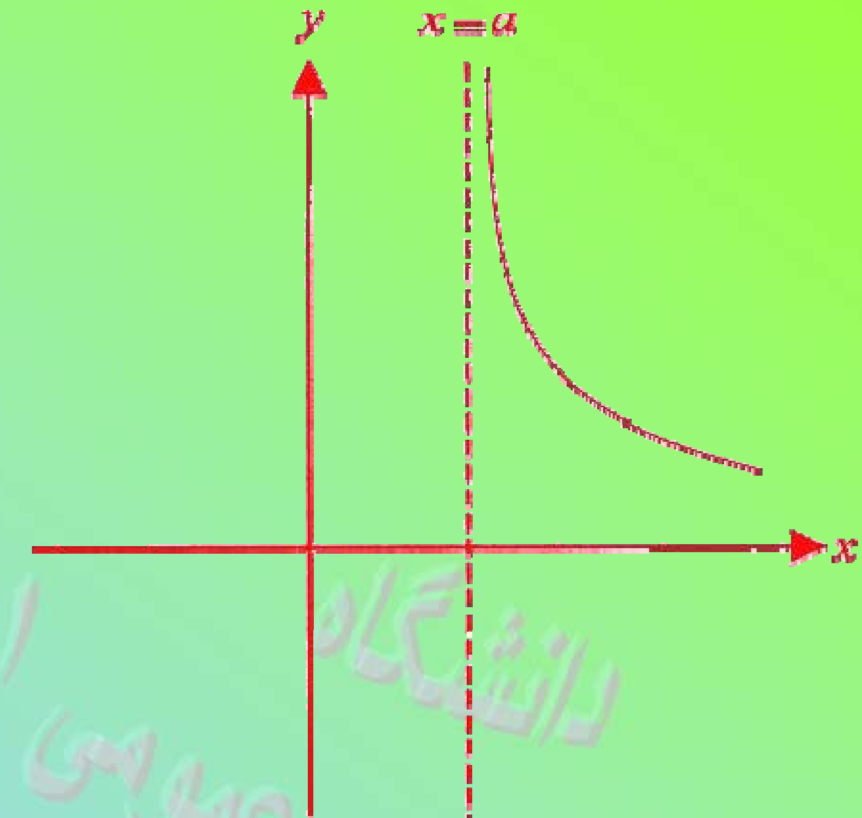
گاهی اگر x به سمت a میل کند y به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌کند مثلاً در تابع $y=\frac{x+1}{x}$ اگر x به سمت 0^+ میل کند، y به سمت $+\infty$ میل می‌کند و یا زمانی که x به سمت 0^- میل کند y به سمت $-\infty$ میل می‌کند

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

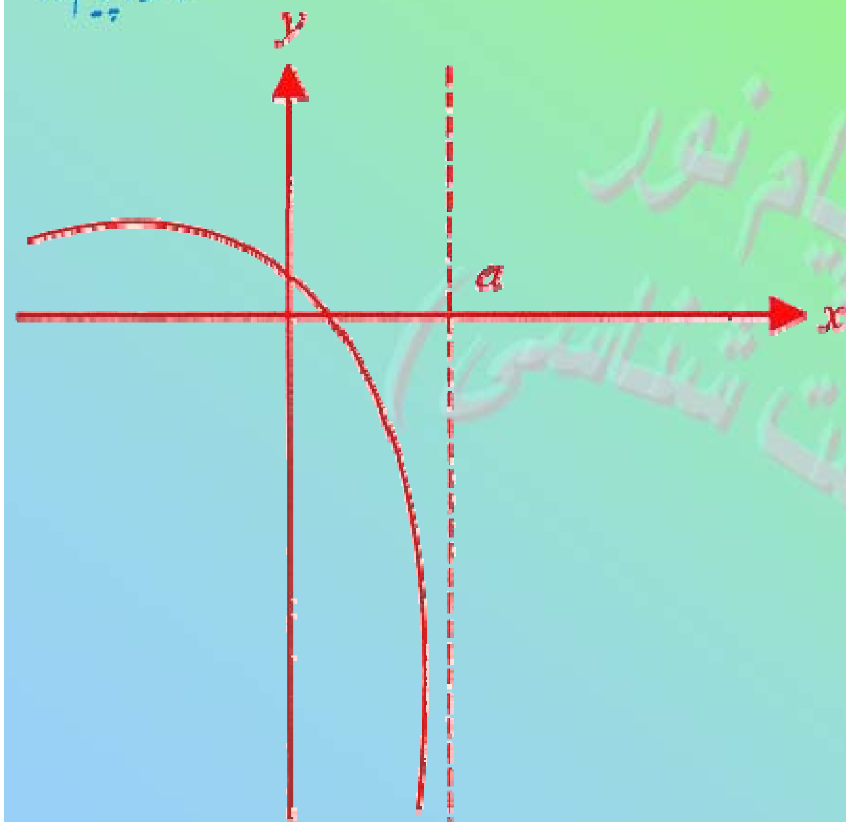


$$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

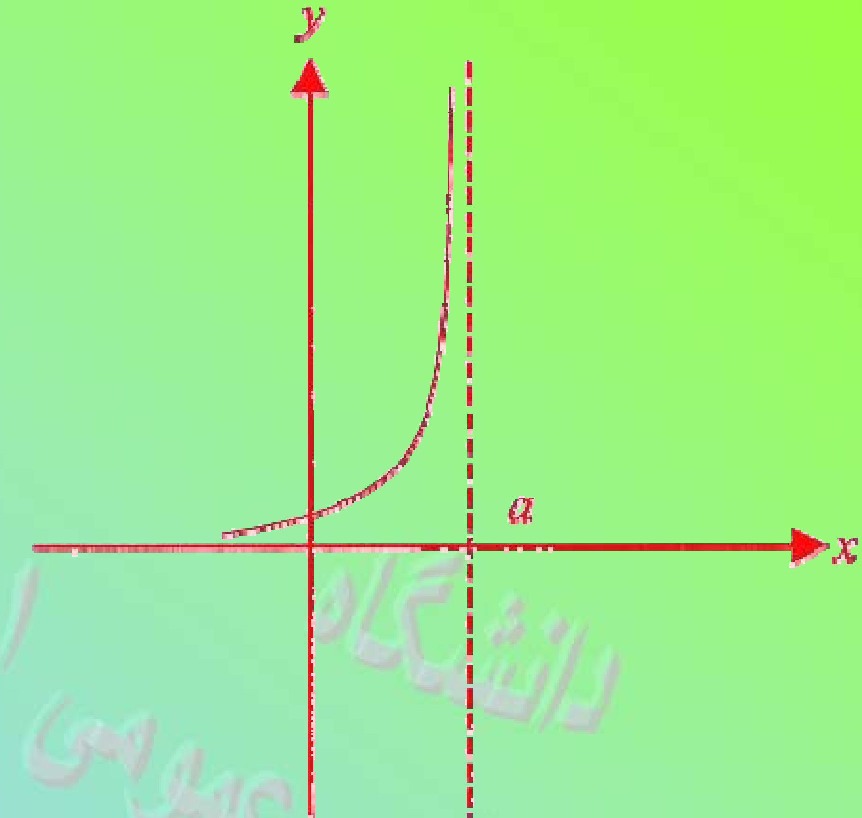


$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$$

منوی اصلی



$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$$

منوی اصلی

طراح: رحمت سلطانی عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه پیام نور شیراز

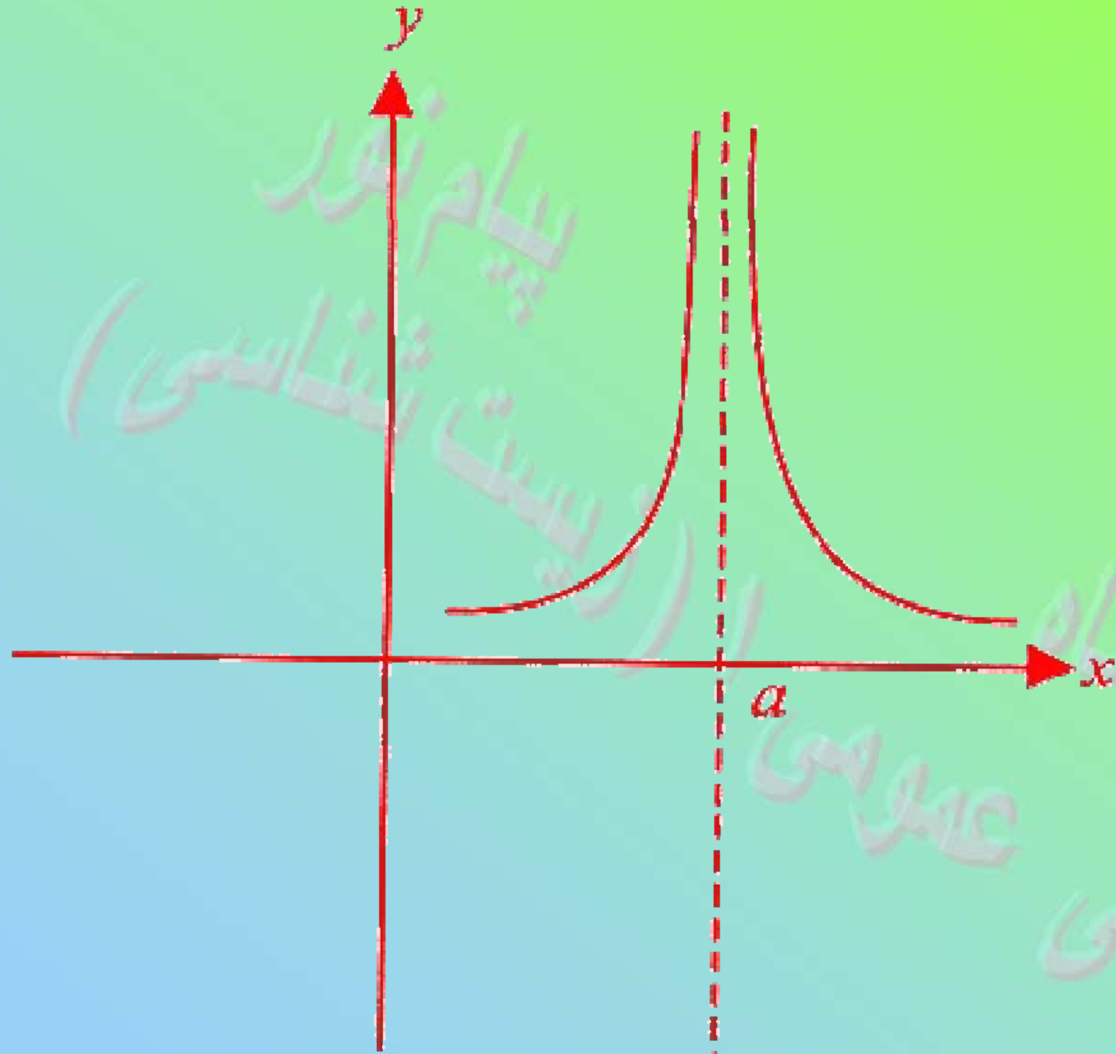
۱.۵.۳ تعریف. فرض کنید $f(x)$ در بازهٔ بازی شامل a (جز احتمالاً در a) معین باشد می‌گوییم هنگامی که x به سمت a میل کند y به سمت بی‌نهایت میل می‌نماید (یا بی‌کران افزایش می‌یابد) اگر متناظر با هر عدد مثبت N یک $\delta > 0$ وجود داشته باشد که:

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > N$$

در این صورت می‌نویسیم:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

منوی اصلی



منوی اصلی

۲.۵.۳ تعریف. فرض کنید $f(x)$ در بازهٔ بازی شامل a (جز احتمالاً در a) معین باشد می‌گوییم هنگامی که x به‌سمت a میل می‌کند y به سمت منفی بی‌نهایت میل می‌نماید (یا بی‌کران کاهش می‌یابد) اگر متناظر باهرعدد مثبت N یک $0 < \delta$ وجود داشته باشد که:

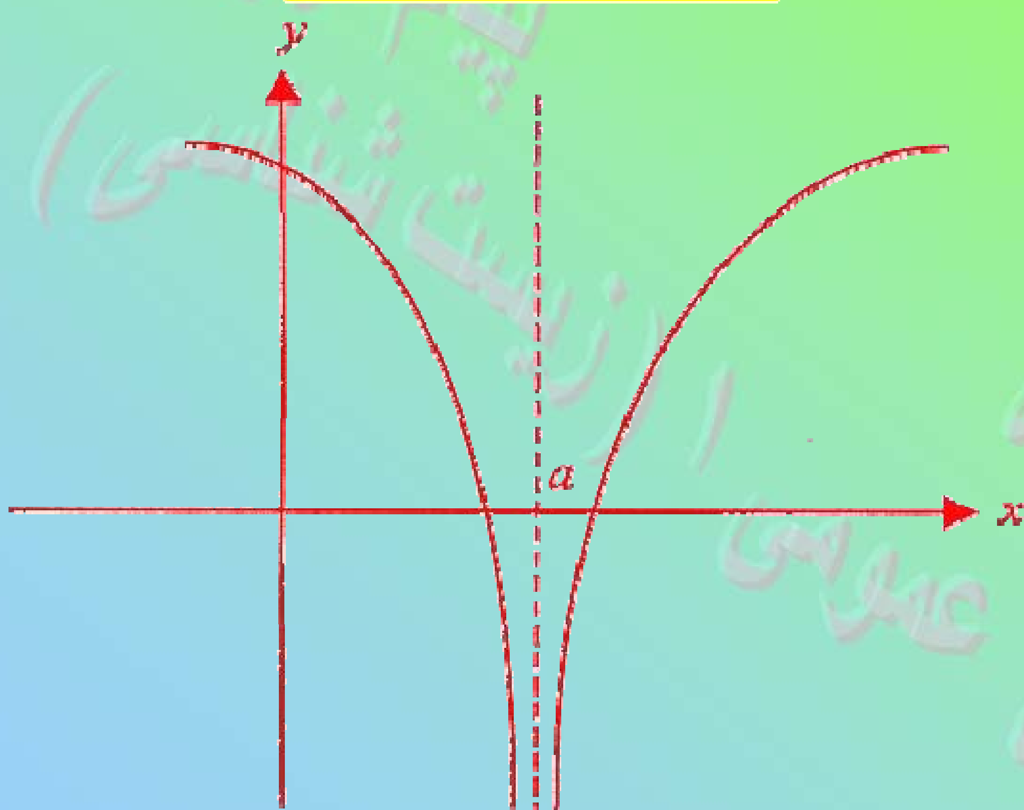
$$0<|x-a|<\delta \ \Rightarrow\ f(x)<-N$$

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

در این صورت می‌نویسیم:

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$



منوی اصلی

مثال ۱. ثابت کنید

$$\lim_{x \to \circ^+} \frac{x+1}{x} = +\infty$$

حل: باید ثابت کنیم به‌ازای هر عدد مثبت N، یک $\delta > \circ$ موجود است به‌طوری که:

$$|x - \circ| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{x+1}{x} \right| > N$$

$$\frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x} > \frac{1}{x}$$

بنابراین اگر $\frac{1}{x} > N$ یا به‌عبارتی $x < \frac{1}{N}$ آنگاه نتیجه مطلوب حاصل خواهد شد پس کافی است $\delta = \frac{1}{N}$ اختیار شود.

منوی اصلی

۳.۵.۳ قضیه. الف) اگر n عددی طبیعی و زوج باشد آنگاه:

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty$$

ب) اگر n عددی طبیعی و فرد باشد آنگاه:

$$\lim_{x \to a^-} \frac{1}{(x-a)^n} = -\infty \quad , \quad \lim_{x \to a^+} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty$$

منوی اصلی

۴.۵.۳ قضیه. هرگاه $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ آنگاه:

الف) اگر با توجه به حد فوق، f با مقادیر مثبت به صفر نزدیک شود

آنگاه $\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

ب) اگر با توجه به حد فوق، f با مقادیر منفی به صفر نزدیک شود

آنگاه $\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = -\infty$

منوی اصلی

مثال ۲. ثابت کنید که داریم:

(الف) $\lim\limits_{x \to ۱} \frac{۱}{(۱-x)^۲} = +\infty$

(ب) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{۱}{(۱-x)^۲} = ۰$

حل: باید ثابت کنیم که به‌ازای هر عدد $N > ۰$ عددی مانند $\delta > ۰$ وجود دارد

منوی اصلی

به‌طوری که

$$|x-1|<\delta \Rightarrow \frac{1}{(1-x)^2}>N$$

اما داریم:

$$\frac{1}{(1-x)^2}>N \Rightarrow (x-1)^2<\frac{1}{N} \Rightarrow |x-1|<\frac{1}{\sqrt{N}}$$

اگر قرار دهیم $\delta=\frac{1}{\sqrt{N}}$ حکم ثابت شده است.

مثلاً اگر فرض کنیم $N=10000$ داریم $\delta=0.01$ یعنی اگر $|x-1|<0.01$

داریم:

$$-0.01<x-1<0.01 \Rightarrow 0.99<x<1.01$$

منوی اصلی

مثلاً فرض کنید $x = ۱٫۰۰۹$ داریم:

$$f(۱٫۰۰۹) = \frac{۱}{(۱-۱٫۰۰۹)^۲} = \frac{۱}{(۰٫۰۰۹)^۲} = \frac{۱۰۰۰۰۰۰}{۸۱} > M = ۱۰۰۰۰$$

برای اثبات (ب) باید ثابت کنیم به‌ازای هر $\varepsilon > ۰$ عددی مانند $M > ۰$ وجود دارد به‌طوری که:

$$x > M \Rightarrow \left|\frac{۱}{(۱-x)^۲} - ۰\right| < \varepsilon$$

$$\frac{۱}{(۱-x)^۲} < \varepsilon \Rightarrow (۱-x)^۲ > \frac{۱}{\varepsilon} \Rightarrow |x-۱| > \frac{۱}{\sqrt{\varepsilon}} \Rightarrow x - ۱ > \frac{۱}{\sqrt{\varepsilon}}$$

$$\Rightarrow x > \frac{۱}{\sqrt{\varepsilon}} + ۱ = M$$

پس داریم: $|x| > \frac{۱}{\sqrt{\varepsilon}} + ۱ = M \Rightarrow \frac{۱}{(۱-x)^۲} < \varepsilon$

منوی اصلی

۵.۵.۳. تعریف. اگر $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ یا $\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$ یا $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$

آنگاه خط $x = a$ را یک مجانب قائم نمودار تابع f می‌نامیم.

مثال ۳. به فرض آنکه $f(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$. جمیع مجانب‌های قائم نمودار f را بیابید.

منوی اصلی

حل: هرگاه a عددی غیر از ۱ و ۱− باشد آنگاه $a^{۲}-۱\neq ۰$ پس داریم:

$$\lim_{x\to a}\frac{x+۲}{x^{۲}-۱}=\frac{a+۲}{a^{۲}-۱}$$

که یک عدد می‌باشد لذا تنها مجانب‌های قائم ممکن عبارت‌اند از: $x=۱$ و $x=-۱$

داریم:

$$\lim_{x\to ۱^{+}}\frac{x+۲}{x^{۲}-۱}=\lim_{x\to ۱^{+}}\frac{x+۲}{x+۱}\cdot\frac{۱}{x-۱}=+\infty$$

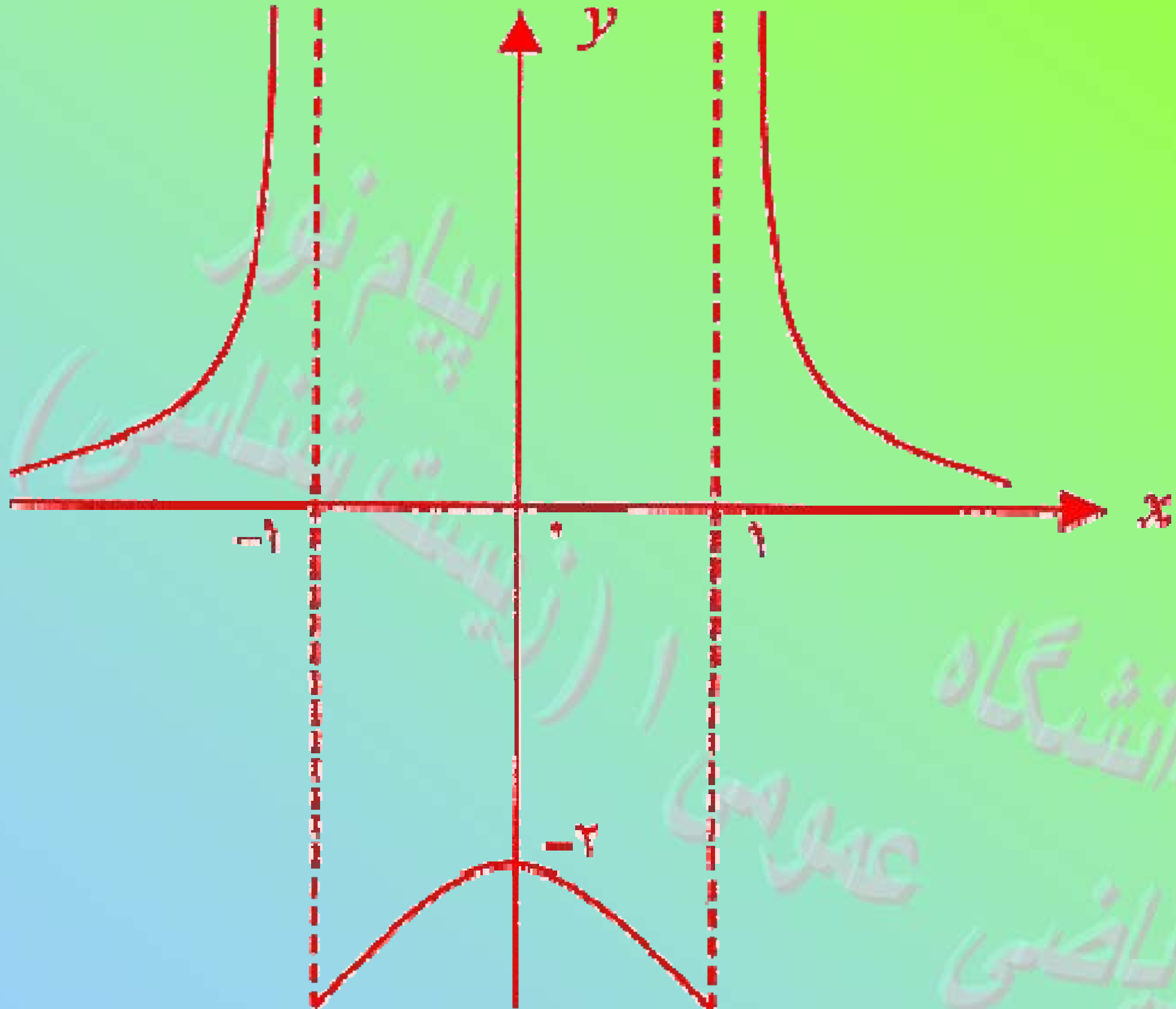
و

$$\lim_{x\to -۱^{-}}\frac{x+۲}{x^{۲}-۱}=\lim_{x\to -۱^{-}}\frac{x+۲}{x+۱}\cdot\frac{۱}{x-۱}=\infty$$

منوی اصلی

لذا $x = 1$ و $x = -1$ مجانب‌های قائم نمودار f هستند. (نمودار f در شکل زیر دیده می‌شود). به‌طور کلی، اگر f یک تابع گویا به شکل $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ باشد (که در آن p، q چند جمله‌ای‌اند) خط $x = a$ در صورتی مجانب قائم نمودار f است که $p(a) \neq 0$ و $q(a) = 0$

منوی اصلی



منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

به‌عنوان مثال اگر

$$f(x)=\frac{(x-2)(x+3)}{x(x-\pi)(x-4)(x+1)^2}$$

نمودار f دارای مجانب‌های قائم $x=0$ و $x=\pi$ و $x=4$ و $x=-1$ می‌باشد.

۶.۵.۳ تذکر. تعیین مجانب‌های قائم نمودار یک تابع گویا همیشه با یافتن صفرهای مخرج ممکن نیست مثلاً اگر:

$$f(x)=\frac{x+1}{x^2-1}$$

منوی اصلی

مخرج به‌ازای $x = 1$ و $x = -1$ صفر می‌شود پس ۱ و ۱- کاندیدای مجانب‌های قائم هستند ولی

$$\lim_{x \to -1} \frac{x+1}{x^2-1} = \lim_{x \to -1} \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \to -1} \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2}$$

یعنی $x = -1$ مجانب قائم نمودار f نیست و تنها مجانب قائم $x = 1$ است زیرا

$$\lim_{x \to 1} \frac{x+1}{x^2-1} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1} = \infty$$

منوی اصلی

۷.۵.۳ قضیه. اگر $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \to a} g(x) = c$ آنگاه

الف) $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \infty$

ب) اگر $c > 0$ آنگاه $\lim_{x \to a} [f(x)g(x)] = \infty$ و $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$

ج) اگر $c < 0$ آنگاه $\lim_{x \to a} [f(x)g(x)] = -\infty$ و $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

د) $\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$

منوی اصلی

در این بخش حالتی را در نظر می‌گیریم که اگر x به سمت بی‌نهایت میل کند. y نیز به سمت بی‌نهایت میل نماید یعنی:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

۸.۵.۳ **تعریف.** حد تابع $f(x)$ هنگامی که x به سمت بی‌نهایت میل می‌کند برابر بی‌نهایت است. اگر به‌ازای هر عدد مثبت N عددی مانند $M > 0$ وجود داشته باشد بـه‌طوری که اگر

منوی اصلی

$$x > M \quad \Rightarrow \quad f(x) > N$$

مثال ۴. ثابت کنید که داریم:

$$\lim_{x \to +\infty} (x^{۲} + ۵) = +\infty$$

حل: باید ثابت کنیم به‌ازای هر عدد مثبت N، عددی مثبت مانند M موجود است به‌طوری که اگر

$$x > M \quad \Rightarrow \quad f(x) > N$$

$$x > M \quad \Rightarrow \quad x^{۲} + ۵ > x^{۲} > N \quad \Rightarrow \quad x > \sqrt{N}$$

پس اگر $M = \sqrt{N}$ اختیار شود آنگاه $x^{۲} + ۵ > N$ برقرار خواهد بود.

منوی اصلی

۶.۳ پیوستگی

فرض کنید تابع f در عدد دلخواه a = x تعریف شده باشد. تابع f در مجاورت a = x سه رفتار متمایز دارد،

۱. $\lim_{x \to a} f(x)$ موجود نیست.

۲. $\lim_{x \to a} f(x)$ وجود دارد ولی $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$

۳. $\lim_{x \to a} f(x)$ وجود دارد و $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

منوی اصلی

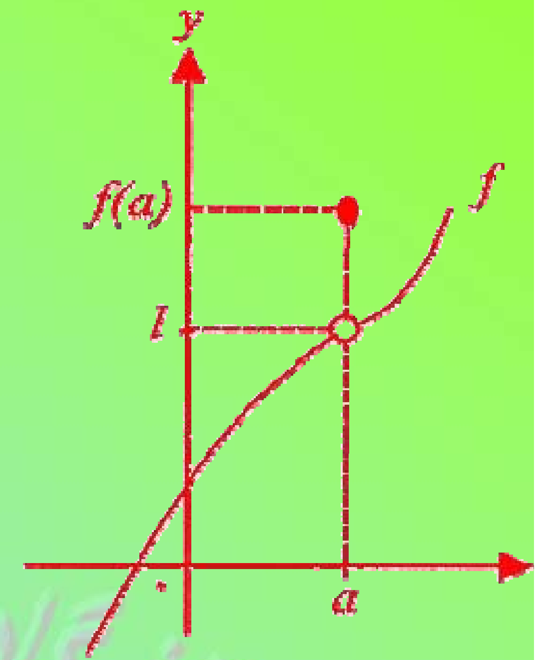
شکل زیر این حالات را نشان می‌دهد توجه کنید که در شکل (الف) و (ب)

نمودارها در $x = a$ شکسته‌اند ولی در شکل (ج) نمودار در $x = a$ شکسته نیست و وقتی

x به a نزدیک می‌شود. $f(x)$ به $f(a)$ نزدیک می‌گردد. رفتار اخیر در حساب دیفرانسیل

و انتگرال از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

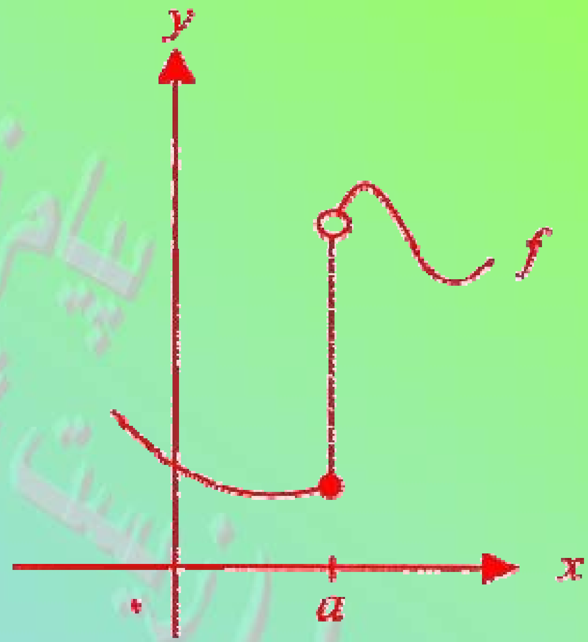
منوی اصلی



$\lim_{x \to a} f(x)$ وجود دارد ولی

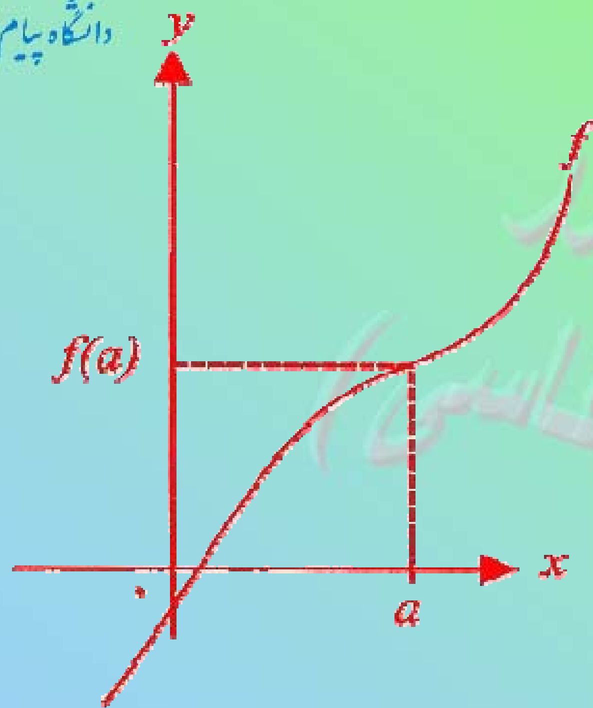
$\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$

الف)



$\lim_{x \to a} f(x)$ وجود ندارد

ب)



$\lim_{x \to a} f(x)$ وجود دارد

$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

ج)

۱.۶.۳ تعریف. تابع f در $x = a$ پیوسته است اگر دارای ویژگیهای زیر باشد:

۱. $f(a)$ معین باشد یعنی a در قلمرو f باشد (تابع در نقطه a تعریف شده باشد).

۲. $\lim_{x \to a} f(x)$ وجود داشته باشد.

۳. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. (یعنی حد تابع برابر مقدار تابع باشد).

تابع f در نقطهٔ $x = a$ از قلمروش ناپیوسته است اگر f در $x = a$ پیوسته نباشد

منوی اصلی

به‌عنوان مثال قبلاً گفتیم اگر $x=a$ در دامنهٔ تابع گویای f باشد آنگاه $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

لذا هر تابع گویا در هر نقطه از قلمروش پیوسته می‌باشد به همین نحو هر یک از توابع

مثلثاتی $\sin x$ و $\cos x$ و $\operatorname{tg} x$ و غیره در هر نقطه از قلمرو خود پیوسته می‌باشند.

منوی اصلی

با توجه به تعریف حد می‌توان گفت که اگر تابع f در نقطهٔ $x = a$ معین باشد آنگاه در صورتی پیوسته است که:

به‌ازای هر $\varepsilon > ۰$ عددی مانند $\delta > ۰$ وجود داشته باشد به‌طوری که:

$$|x-a|<\delta \quad \Rightarrow \quad |f(x)-f(a)<\varepsilon$$

منوی اصلی

طراح: رحمت سلطانی عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه پیام نور شیراز

حال فرض می‌کنیم $x - a = h$ باشد در این صورت رابطهٔ فوق به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$|h| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(a+h) - f(a)| < \varepsilon$$

$x - a = h$ را به Δx نشان می‌دهیم و آن را نمو متغیر و $f(a+h) - f(a)$ را به Δy نشان داده و آن را نمو تابع می‌گوییم پس رابطهٔ فوق به‌صورت زیر می‌باشد:

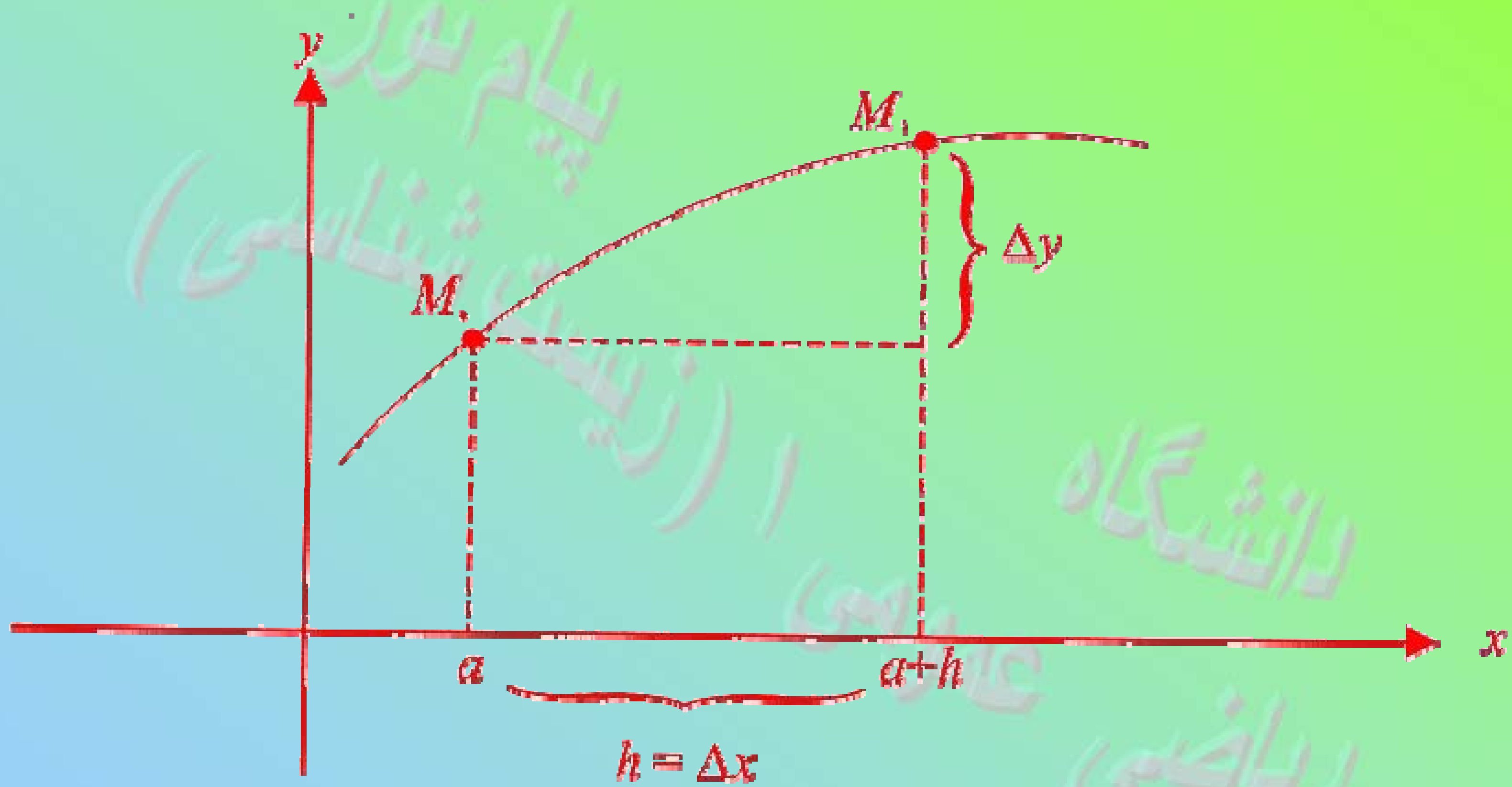
$$|\Delta x| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\Delta y| < \varepsilon$$

منوی اصلی

یعنی در توابع پیوسته Δy و Δx (نمو تابع و نمو متغیر) با هم به سمت صفر میل می‌کنند این نکته در شکل زیر مشهود است یعنی اگر Δx به سمت صفر میل نماید، Δy به سمت صفر میل می‌کند.

$$\lim_{\Delta x \to 0} [f(a+\Delta x)-f(a)] = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

منوی اصلی



منوی اصلی

مثال ۱. به فرض آنکه $f(x)=\dfrac{x^{۲}-۵x+۴}{x^{۲}-۹}$ اعدادی که f در آنها پیوسته است را مشخص کنید.

حل: توجه کنید که f یک تابع گویاست چون مخرج f به‌ازای $x=۳$ و $x=-۳$ مساوی صفر است در این صورت f به‌ازای هر x جز ۳ و ۳- تعریف شده است در

منوی اصلی

نتیجه f در هر عدد جز ۳ و ۳- پیوسته می‌باشد.

مثال ۲. به فرض آنکه $f(x)=\frac{x^{2}}{x^{2}+1}$ اعدادی را که f در آنها پیوسته است مشخص کنید.

حل: مجدداً f گویاست، ولی مخرجش $x^{2}+1$ هرگز صفر نیست لذا، f به‌ازای هر x تعریف شده است و f در هر عدد حقیقی پیوسته است.

منوی اصلی

۲.۶.۳ تذکر. الف) فرض کنید $\lim_{x \to a} f(x)$ وجود داشته باشد ولی $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$
در این صورت تابع f در نقطه $x = a$ ناپیوسته است ولی به آسانی می‌توان این ناپیوستگی را از بین برد تا f پیوسته شود. تابع g با تعریف:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{اگر} \quad x \neq a \\ \lim_{x \to a} f(x) & \text{اگر} \quad x = a \end{cases}$$

منوی اصلی

در $x = a$ پیوسته است. این نوع ناپیوستگی تابع f را ناپیوستگی رفع شدنی می‌نامیم

به‌عنوان مثال تابع f که نمودار آن در شکل ۳ـ۶ (الف) رسم شده است در $x = a$ ناپیوستگی رفع شدنی دارد.

منوی اصلی

ب) اگر $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ وجود داشته باشند ولی برابر نباشند گوییم f در $x = a$ ناپیوستگی اساسی یا (ناپیوستگی پرشی) دارد. روشن است که این نوع

منوی اصلی

ناپیوستگی به‌صورت فوق رفع شدنی نیست به‌عنوان مثال تابع f در نمودار شکل ۳ـ۶ (ب) در $x = a$ ناپیوستگی اساسی دارد.

نتایج مربوط به پیوستگی ترکیبات توابع فوراً از نتایج نظیر راجع به حدود به‌دست می‌آیند.

منوی اصلی

۳.۶.۳ قضیه. فرض کنید f و g در $x = a$ پیوسته بوده و c عدد دلخواهی باشد دراین‌صورت توابع، $f+g$ ، fg ، cf در $x = a$ پیوسته می‌باشند. هرگاه $g(a) \neq 0$ آنگاه $\frac{f}{g}$ نیز در $x = a$ پیوسته است.

مثال ۳. به فرض آنکه $f(x) = x\sin x + 1$ نشان دهید که f در هر عدد پیوسته است.

منوی اصلی

حل: می‌دانیم که توابع $y = x$ و $y = \sin x$ و $y = 1$ به‌ازای هر عدد پیوسته‌اند. چون f از این توابع با تشکیل حاصلضرب $x\sin x$ و سپس مجموع $x\sin + 1$ به‌دست می‌آید

بنابراین از قضیهٔ فوق نتیجه می‌گیریم که f در هر عددی پیوسته است.

نتیجه‌ای شبیه قضیهٔ فوق برای ترکیب دو تابع وجود دارد.

منوی اصلی

۴.۶.۳ قضیه. هرگاه f در a و g در $f(a)$ پیوسته باشد آنگاه تابع مرکب $h = g\circ f$ در a پیوسته می‌باشد.

۵.۶.۳ نتیجه. اگر $\lim_{x\to a} f(x) = b$ و g در b پیوسته باشد آنگاه:

$$\lim_{x\to a} g\circ f(x) = \lim_{x\to a} g(f(x)) = g(\lim_{x\to a} f(x)) = g(b)$$

منوی اصلی

مثال ۴. به فرض آنکه $h(x)=\sqrt{x-۱}$ نشان دهید که h در ۲ پیوسته است.

حل: فرض کنید $f(x)=x-۱$ و $g(y)=\sqrt{y}$ پس $h=g\circ f$ می‌دانیم که f در ۲ پیوسته و g در $۱ = f(۲)$ پیوسته است زیرا تابع ریشهٔ تابع در هر عدد مثبت پیوسته است. لذا h در ۲ پیوسته خواهد شد.

منوی اصلی

۶.۶.۳ پیوستگی یک‌طرفه

دیدیم که به‌ازای $a > ۰$ ، $\lim_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$. یعنی تابع ریشهٔ دوم در هر عدد مثبت پیوسته است ولی $\lim_{x \to ۰} \sqrt{x}$ وجود ندارد زیرا $\lim_{x \to ۰^-} \sqrt{x}$ وجود ندارد بنابراین با توجه به تعریف پیوستگی تابع $f(x) = \sqrt{x}$ در $a = ۰$ پیوسته نیست اما می‌دانیم که در $x = ۰$ دارای حد راست است یعنی $\lim_{x \to ۰} \sqrt{x} = ۰ = f(۰)$ در این صورت می‌گوییم تابع $f(x) = \sqrt{x}$ از سمت راست در صفر پیوسته است.

منوی اصلی

۷.۶.۳ تعریف. تابع f در نقطهٔ $x=a$ از طرف راست پیوسته است اگر:

الف) $f(a)$ وجود داشته باشد

ب) $\lim_{x\to a^+} f(x)$ وجود داشته باشد

ج) $\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$

منوی اصلی

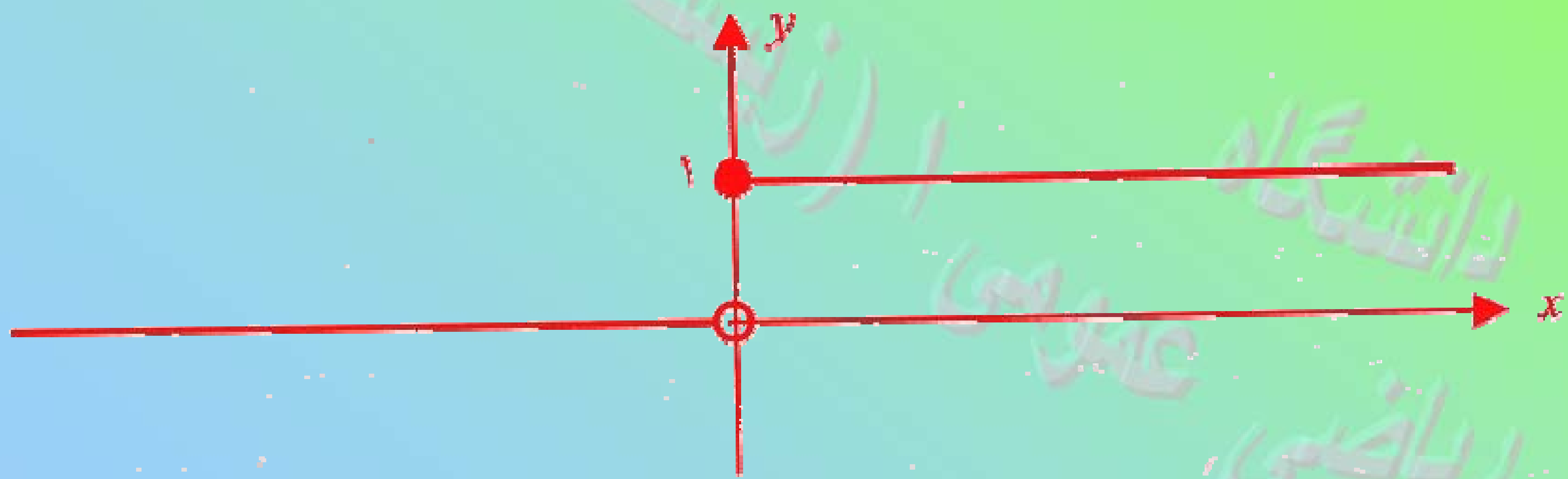
پیوستگی از طرف چپ نیز به همین صورت تعریف می‌شود.

مثال ۵. نشان دهید که تابع زیر از طرف راست در صفر پیوسته است ولی از طرف چپ در صفر پیوسته نیست.

$$f(x)=\begin{cases} \text{۰} & ; \quad x<\text{۰} \\ \text{۱} & ; \quad x\geq \text{۰} \end{cases}$$

منوی اصلی

حل: چون $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 = f(0)$ ، f از طرف راست در صفر پیوسته است و چون: $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 \neq f(0)$ ، f از طرف چپ در صفر پیوسته نخواهد بود. (شکل زیر).



منوی اصلی

۸.۶.۳ تمرین. الف) نشان دهید که تابع زیر در $x = ۱$ پیوسته است.

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲} & ; \quad x \leq ۱ \\ x & ; \quad x > ۱ \end{cases}$$

ب) مقدار a را چنان بیابید که تابع زیر را در $x = ۱$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲}-۱ & ; \quad x < ۱ \\ ۲a+۱ & ; \quad x = ۱ \\ x-۱ & ; \quad x > ۱ \end{cases}$$

در تعریف زیر مفهوم پیوستگی یک تابع را بر بازه‌ها خواهید دید.

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

۹.۶.۳ تعریف. الف) تابع f را بر بازهٔ باز (a, b) پیوسته گوییم اگر در هر نقطه از (a, b) پیوسته باشد.

ب) تابع f را بر بازهٔ بسته $[a, b]$ پیوسته گوییم اگر در هر نقطهٔ از (a, b) پیوسته

منوی اصلی

بوده و از طرف راست در a و از طرف چپ در b پیوسته باشد.

ج) تابع f را بر $[a\,,b)$ پیوسته گوییم، اگر در هر نقطه از $(a\,,b)$ پیوسته بوده و از طرف چپ در a پیوسته باشد.

منوی اصلی

تعریف مشابهی برای پیوستگی تابع f روی بازه‌های $(a, b]$ ، و (a, ∞) ، $[a, \infty)$ ، (∞, a) ، $(-\infty, a]$ و $(-\infty, \infty)$ نیز وجود دارند. مثلاً تابع $f(x)=\sqrt{x}$ روی $[0, \infty)$ پیوسته است. همین‌طور هر تابع چند جمله‌ای روی $(-\infty, \infty)$ پیوسته است.

منوی اصلی

مثال ۶. نشان دهید که تابع $f(x)=\sqrt{۴-x^{۲}}$ روی $[-۲,۲]$ پیوسته است.

حل: داریم:

$$۴-x^{۲}\geq ۰ \quad \Rightarrow \quad -۲\leq x\leq ۲$$

معلوم می‌شود که قلمرو f مساوی $[-۲,۲]$ می‌باشد حال اگر $-۲<a<۲$ داریم:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\sqrt{۴-x^{۲}}=\sqrt{۴-a^{۲}}=f(a)$$

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-}\sqrt{۴-x^{۲}}=\sqrt{۴-۲^{۲}}=۰=f(۲)$$

$$\lim_{x\to -۲^+} f(x)=\lim_{x\to -۲^+}\sqrt{۴-x^{۲}}=\sqrt{۴-(-۲)^{۲}}=۰=f(-۲)$$

در نتیجه f بر $[-۲,۲]$ پیوسته است.

منوی اصلی

مثال ۷. فرض کنید $h(x)=|x|$ ثابت کنید که تابع f به‌ازای هر عدد حقیقی $x=a$ پیوسته است.

حل: $h(x)=|x|=\sqrt{x^{2}}$ قرار می‌دهیم $f(x)=x^{2}$ و $g(x)=\sqrt{x}$ در این صورت $h(x)=\sqrt{x^{2}}=g(f(x))$ بنابه قضیه ترکیب توابع (۳-۶-۴) به آسانی نتیجه می‌شود که تابع $h=g\circ f$ در هر عدد حقیقی $x=a$ پیوسته است

منوی اصلی

$$\lim_{x\to a} h(x)=\lim_{x\to a} g(f(x))=g(\lim_{x\to a} f(x))=g(a^{2})=\sqrt{a^{2}}=|a|=h(a)$$

و لذا h در هر عدد حقیقی $x=a$ پیوسته است.

این فصل را با قضیه مهمی در باب توابع پیوسته به پایان خواهیم برد.

منوی اصلی

۱۰.۶.۳ قضیه مقدار میانی

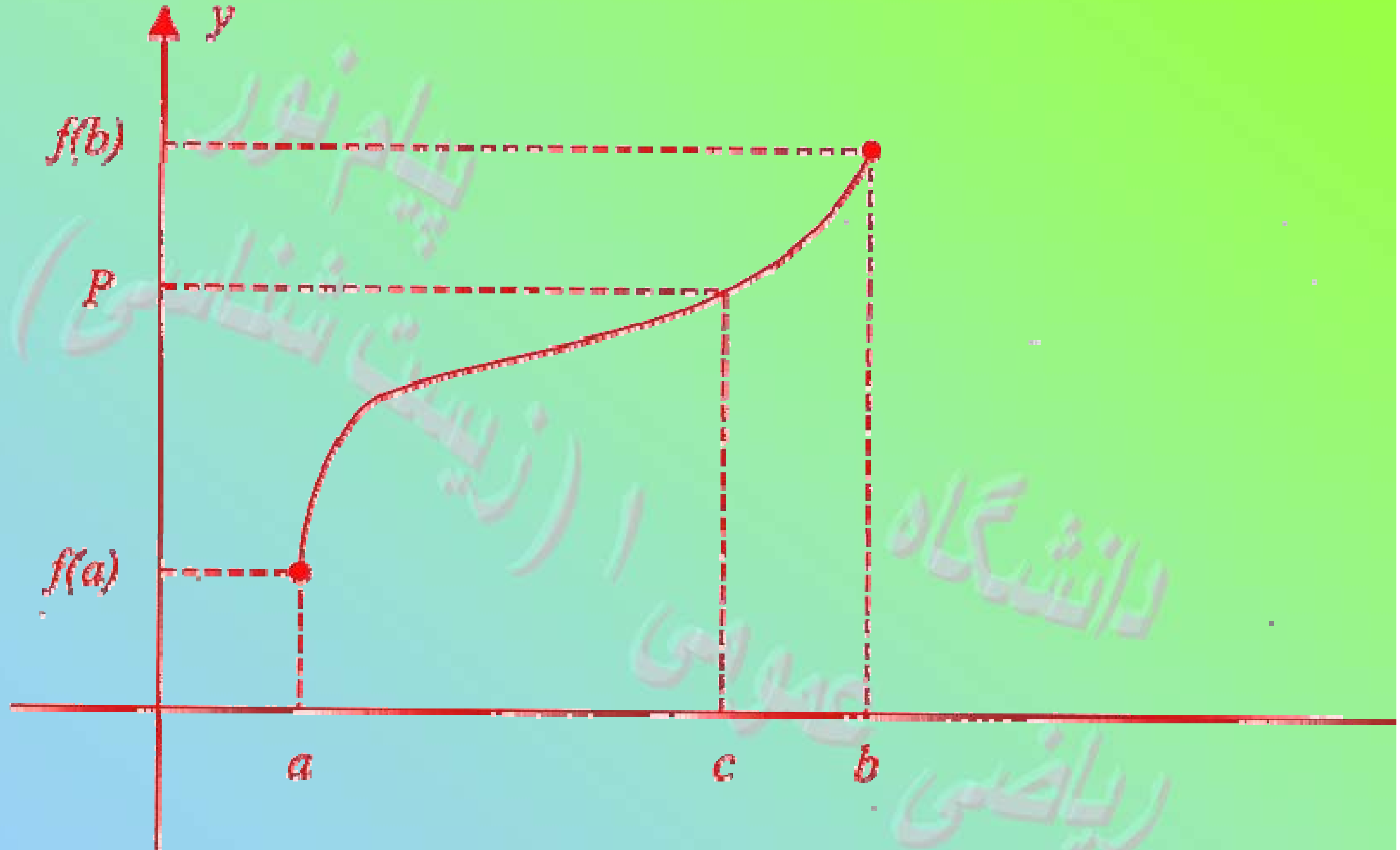
فرض کنید تابع f بر بازهٔ بستهٔ $[a\,,b]$ پیوسته باشد همچنین P عددی بین $f(a)$ و $f(b)$ باشد یعنی $f(a)\leq P\leq f(b)$ یا $f(b)\leq P\leq f(a)$ در این صورت عددی مانند c در بازهٔ $[a\,,b]$ وجود دارد به‌طوری که $f(c)=P$.

منوی اصلی

قضیهٔ مقدار میانی در تعبیر هندسی می‌گوید که اگر تابع f در بازهٔ بسته $[a\,,b]$ پیوسته و P عددی بین $f(a)$ و $f(b)$ باشد آنگاه خط افقی $y = P$ نمودار تابع f را حداقل در یک نقطهٔ به طول c قطع می‌کند (شکل زیر)

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور



منوی اصلی

۱۱.۶.۴ نتیجه. اگر تابع f روی بازهٔ بسته $[a\,,b]$ پیوسته و $f(a)$ و $f(b)$ مختلف العلامه باشند آنگاه عددی چون c در $[a\,,b]$ وجود دارد که $f(c)=0$.

مثال ۸. درستی قضیه مقدار میانی را برای تابع $f(x)=x^{3}+1$ در بازهٔ $[-1\,,2]$ تحقیق کنید.

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

حل: روشن است که تابع f روی بازهٔ $[-1, 2]$ پیوسته است و داریم $f(-1) = 0$ و $f(2) = 9$ فرض $0 \le P \le 9$ می‌خواهیم عددی مانند c که $-1 \le c \le 2$ بیابیم به‌گونه‌ای که $f(c) = c^3 + 1 = P$. با حل این معادله برحسب P داریم $c = \sqrt[3]{P-1}$. حال داریم:

$$0 \le p \le 9 \Rightarrow -1 \le p-1 \le 8 \Rightarrow -1 \le \sqrt[3]{p-1} \le 2$$

لذا $c = \sqrt[3]{P-1}$ در بازهٔ $[-1, 2]$ واقع است.

منوی اصلی

فصل چهارم

مشتق و چند کاربرد آن

منوی اصلی

طراح: رحمت سلطانی عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه پیام نور شیراز

مقدمه

مشتق یکی از مفاهیم اصلی در ریاضیات خصوصاً حساب و دیفرانسیل و انتگرال است که دارای کاربردهای متنوعی از قبیل رسم منحنی، یافتن مقادیر بهینهٔ توابع، تجزیه و تحلیل میزان تغییرات یک تابع و آهنگ تغییر یک کمیت نسبت به کمیت دیگر می‌باشد و کاربردهایی نیز در مسائل عملی و نظری دارد.

در فصل قبل از حدودی به شکل

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

منوی اصلی

برای تعریف خطوط مماس و سرعت یک جسم متحرک استفاده کردیم ولی این حد در بسیاری از موارد دیگر مانند شتاب در فیزیک، واکنش در شیمی، درآمد و حاشیه هزینه‌ای در اقتصاد نیز ظاهر می‌شود. به خاطر تعابیر مختلف حد فوق و اهمیت آن، آن را از بقیهٔ حدود جدا کرده و در این فصل خواص آن را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

منوی اصلی

هدف کلی

۱. آشنایی با مفهوم مشتق و دیفرانسیل و بررسی برخی از کاربردهای آنها

۲. شناخت قاعدهٔ زنجیره‌ای و مشتق‌گیری ضمنی

۳. بررسی و شناخت قضیهٔ رول و میانگین و کاربرد آنها در حل مسائل

منوی اصلی

۴. رسم نمودار توابع

۵. قاعدهٔ هوپیتال و کاربرد آن در حدود مبهم

هدفهای رفتاری

دانشجو پس از مطالعهٔ این فصل باید بتواند:

منوی اصلی

۱. مشتق یک تابع را در یک نقطه تعریف کند.

۲. مشتقات متوالی یک تابع داده شده را به‌دست آورد.

۳. مشتق مجموع، حاصلضرب و خارج‌قسمت دو تابع داده شده را به‌دست آورد.

۴. مشتق ترکیب دو تابع داده شده را به‌دست آورد.

منوی اصلی

۵. دستور مشتق توانهای یک تابع داده شده را به‌دست آورد.

۶. مشتقهای یک‌طرفه یک تابع داده شده را در یک نقطه به‌دست آورد و رابطهٔ بین مشتقهای یک‌طرفه و مشتق یک تابع را در یک نقطه بیان کند.

۷. مشتق‌پذیری یک تابع را روی یک بازهٔ بسته بررسی کند.

۸. قاعدهٔ زنجیره‌ای در مشتق‌گیری را بیان کرده و آن را در محاسبات به‌کار برد.

منوی اصلی

۹. از توابعی که به‌صورت ضمنی بیان شده‌اند، مشتق‌گیری کند.

۱۰. مفهوم دیفرانسیل را بیان کرده و دیفرانسیل یک تابع داده شده را محاسبه کند.

۱۱. با ارائه یک مثال کاربرد دیفرانسیل را در محاسبات تقریبی نشان دهد.

۱۲. برداشت خود را از مفاهیم ماکزیمم و مینیمم نسبی و ماکزیمم و مینیمم مطلق یک تابع داده شده در قلمروش بیان کند.

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

۱۳. قضایای رول و میانگین را بیان کرده و برای یک مسئله داده شده بررسی کند آیا شرایط قضیهٔ رول و میانگین وجود دارد یا نه؟

۱۴. با استفاده از آزمون مشتق اول و دوم ماکزیمم و مینیمم نسبی یک تابع داده شده را به‌دست آورد.

۱۵. برای حدود به شکل $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ و کلاً صورتهای مبهم چاره‌اندیشی کند و قاعدهٔ هوپیتال را نیز به‌کار برد.

منوی اصلی

۱.۴ مشتق

گفتیم که مشتق ابزاری برای تجزیه و تحلیل میزان تغییر و آهنگ تغییر یک کمیت نسبت به کمیت دیگر است برای روشن شدن موضوع به مثال زیر توجه کنید:

منوی اصلی

مثال ۱. فرض کنید معادلهٔ تابع هزینه کل تولید از کالایی به مقدار x، به‌صورت زیر باشد:

$$f(x) = ۲x^{۲} + ۳x + ۸$$

که در آن $f(x)$ هزینهٔ کل است. اگر میزان تولید از مقدار x به $x+h$ تغییر پیدا کند هزینهٔ کل از $f(x)$ به $f_۱(x)$ تغییر پیدا می‌کند و داریم:

$$f_۱(x) = f(x+h) = ۲(x+h)^{۲} + ۳(x+h) + ۸$$

حال تغییر $f(x)$ (یعنی $f_۱(x) - f(x)$) را محاسبه می‌کنیم داریم:

$$f_۱(x) - f(x) = ۴xh + ۲h^{۲} + ۳h \qquad (*)$$

منوی اصلی

این تغییر هزینه کل، به علت تغییری به میزان h در تولید به وجود آمده است. اما می‌توانیم میزان تغییر هزینه را برای تغییر یک واحد نیز تعیین کنیم یعنی:

$$\frac{f_1(x)-f(x)}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{4xh+2h^2+3h}{h}$$

$$=4x+2h+3 \qquad (**)$$

منوی اصلی

این مقدار را می‌توان متوسط تغییرات هزینه (در فاصلهٔ تولید x تا $x+h$) نیز دانست.

همچنین می‌توان این متوسط تغییرات را به‌ازای هر مقدار x نیز به‌دست آورد مثلاً فرض کنید $x = ۵$ در این صورت داریم:

$$f(۵) = ۷۳$$

یعنی هزینهٔ کل ۷۳ واحد پول است. حال مقدار تولید را به‌اندازهٔ h افزایش می‌دهیم، داریم:

$$f_۱(۵) = ۷۳ + ۲۳h + ۲h^۲$$

تغییر هزینه یعنی $f_۱(۵) - f(۵)$ برابر است با:

منوی اصلی

$$f_1(5) - f(5) = 23h + 2h^2$$

این تغییر هزینه کل به‌ازای تغییری به مقدار h در تولید است، باید توجه کرد که اگر h صفر باشد این تغییر نیز برابر صفر است. حال اگر میزان تـغییر یک واحـد در تـولید را بخواهیم با توجه به اینکه این تغییر مربوط به تغییری به مـیزان h مـی‌باشد، خـواهـیم داشت:

$$\frac{f_1(5) - f(5)}{h} = 23 + 2h$$

توجه کنید که اگر در رابطه (**) مقدار ۵ را به x نسبت دهیم به همین رابطه خواهیم رسید

پس $\frac{f_1(5)-f(5)}{h}$ ، تغییر هزینه کل به‌ازای تغییر یک واحد است. که آن را متوسط

تغییرات هزینه در فاصلهٔ $x = 5$ تا $x = 5 + h$ می‌توان دانست. اگر h را کوچک فرض

کنیم $f_1(5) - f(5)$ نیز کوچک می‌شود و $\frac{f_1(5)-f(5)}{h}$ به ۲۳ نزدیک می‌شود مثلاً اگر

$h = 0{,}2$ داریم:

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

$$f_1(۵)-f(۵)=۴٫۶۸$$

$$\frac{f_1(۵)-f(۵)}{h}=۲۳٫۴$$

اگر $h=۰٫۰۱$ داریم:

$$f_1(۵)-f(۵)=۰٫۲۳۰۲$$

$$\frac{f_1(۵)-f(۵)}{h}=۲۳٫۰۲$$

منوی اصلی

اگر h به سمت صفر میل کند داریم:

$$\lim_{h \to ۰} (f_۱(۵) - f(۵)) = \lim_{h \to ۰} (۲۳h + ۲h^۲) = ۰$$

$$\lim_{h \to ۰} \frac{f_۱(۵) - f(۵)}{h} = \lim_{h \to ۰} (۲۳ + ۲h) = ۲۳$$

این مسئله را به جای $x = ۵$ ، به‌ازای هر مقدار x می‌توان بررسی کرد. حالت کلی را در

منوی اصلی

نظر می‌گیریم داریم:

$$f_1(x)-f(x)=4xh+3h+2h^2$$

$$\frac{f_1(x)-f(x)}{h}=4x+3+2h$$

حال h را به سمت صفر میل می‌دهیم داریم:

$$\lim_{h\to 0}(f_1(x)-f(x))=\lim_{h\to 0}(4xh+3h+2h^2)=0$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f_1(x)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}(4x+3+2h)=4x+3$$

منوی اصلی

یعنی اگر h به سمت صفر میل می‌کند تغییرات هزینهٔ کل به سمت صفر میل می‌کند ولی تغییرات هزینهٔ کل به‌ازای یک واحد به سمت ۳ + $4x$ میل مـی‌کند. اگـر ۵ = x باشد

داریم:

$$\boxed{۴(۵)+۳=۲۳}$$

منوی اصلی

که همان مقدار قبلی است. در این صورت $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f_1(x) - f(x)}{h}$ ، به نرخ تغییر هزینه کل مرسوم است. این مطلب در مورد هر تابعی وجود دارد. تابع $y = f(x)$ را در نظر می‌گیریم به x افزایش یا نموی برابر h نسبت می‌دهیم

داریم:

$$y_1 = f(x+h)$$

منوی اصلی

تغییرات y برابر است با:

$$y_1 - y = f(x+h) - f(x)$$

که آن را به Δy نشان داده و نمو y می‌خوانیم داریم:

$$\Delta y = f(x+h) - f(x)$$

متوسط تغییرات تابع $y = f(x)$ در فاصلهٔ x تا $x + h$ برابر است با:

$$\frac{\Delta y}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

که آن را تغییرات تابع به‌ازای یک واحد و همچنین متوسط تغییر تابع در فاصلهٔ x تا $x + h$

منوی اصلی

گویند اگر حد این عبارت را هنگامی که h به سمت صفر میل می‌کند در نظر بگیریم داریم:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

منوی اصلی

این مقدار را نرخ تغییر تابع می‌نامند. لاگرانژ برای اینکه نشان دهد که این حاصل خود یک تابع است، آن را به $f'(x)$ نشان داد. $f'(x)$ را مشتق تابع $f(x)$ می‌نامند.

مثال ۲. فرض کنید جسمی (مانند اتومبیل، سفینه فضایی یا الکترون) بر یک خط مستقیم در حرکت باشد می‌خواهیم سرعت این جسم را در هر لحظهٔ معین و سرعت متوسط این جسم را به‌دست آوریم.

منوی اصلی

سرعت متوسط اتومبیل در یک فاصلهٔ زمانی معین همان نسبت مسافت پیموده شده بر زمان طی شده است اگر جسمی بر محور x در حرکت و $f(t)$ نمایش فاصلهٔ جسم از مبدأ در لحظهٔ t باشد آنگاه سرعت متوسط این جسم در فاصلهٔ زمانی از $a = t_1$ تا $t_2 = a + h$ برابر است با:

$$\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

بدین‌ترتیب می‌توان گفت اگر $f(x)$ مکان یک جسم را در لحظهٔ t بر محور جهت‌دار l تعیین کند آنگاه سرعت لحظه‌ای جسم در لحظهٔ $t = a$ برابر است با:

$$V(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

منوی اصلی

مثلاً اگر $f(t) = t^2 - 6t$ مکان جسم متحرک در لحظهٔ t باشد سرعت جسم در لحظهٔ $t = a$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$V(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[(a+h)^2 - 6(a+h)] - (a^2 - 6a)}{h}$$

$$= 2a - 6$$

به‌ویژه سرعت در لحظهٔ $t = 0$ و $t = 4$ به‌ترتیب برابر با $V(0) = -6$ و $V(4) = 2$ متر بر

منوی اصلی

ثانیه است توجه کنید که $V(0) = -6$ به این معنی است که جسم در لحظهٔ $t = 0$ با سرعت ۶ متر بر ثانیه در جهت منفی محور t حرکت می‌کند.

حال به تعریف کامل مشتق می‌پردازیم:

منوی اصلی

۱.۱.۴ تعریف. فرض کنید a عددی در دامنهٔ تابع f باشد. اگر

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

موجود باشد، این حد را مشتق تابع f در a نامیده و آن را به‌صورت $f'(a)$ می‌نویسیم،

$$f'(a)=\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

اگر حد فوق موجود باشد گوییم f در a مشتق دارد یا f در a مشتق‌پذیر است.

بنابر تعریف مشتق، $f'(a)$ شیب خط مماس بر نمودار f در نقطهٔ $(a,f(a))$ می‌باشد.

تذکر. اگر در رابطهٔ فوق تغییر متغیر $x+h=a$ را در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

مثال ۳. به فرض آنکه $f(x)=\frac{1}{4}x^2+1$ ، $f'(-1)$ و $f'(3)$ را به‌دست آورده و خطوط مماس بر نمودار f در نقاط نظیر را رسم نمایید.

$$f'(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to -1}\frac{\frac{1}{4}x^2+1-\frac{5}{4}}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{\frac{1}{4}(x^2-1)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{\frac{1}{4}(x+1)(x-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{1}{4}(x-1)=\frac{-1}{2}$$

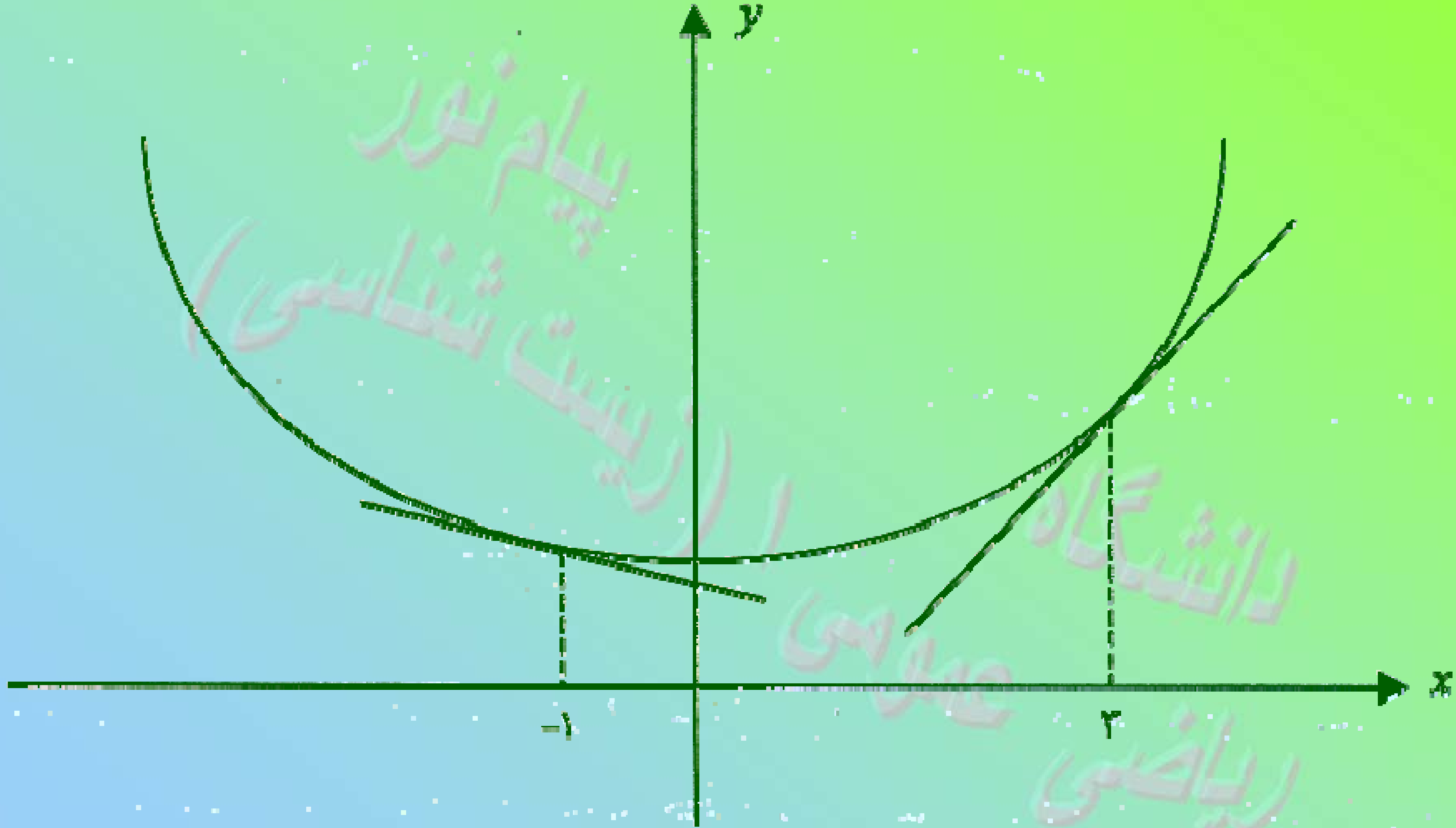
$$f'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{1}{4}x^2+1-\frac{13}{4}}{x-3}=\lim\frac{\frac{1}{4}(x^2-9)}{x-3}$$

منوی اصلی

$$= \lim_{x \to ۳} \frac{\frac{۱}{۴}(x-۳)(x+۳)}{x-۳} = \lim_{x \to ۳} \frac{۱}{۴}(x+۳) = \frac{۳}{۲}$$

در شکل زیر خطوط مماس بر نمودار در نقاط نظیر دیده می‌شوند.

منوی اصلی



منوی اصلی

طراح: رحمت سلطانی عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه پیام نور شیراز

لذا شیب f در -1 مساوی $\frac{-1}{2}$ و شیب در ۳ برابر $\frac{3}{2}$ می‌باشد.

در تابع دلخواه f، اگر $|f'(a)|$ بزرگ باشد، نمودار f در مجاورت نقطهٔ $(a,f(a))$ خیلی شیب دارد ولی اگر $|f'(a)|$ کوچک باشد نمودار f در مجاورت

منوی اصلی

$(a,f(a))$ تقریباً افقی است. اما صرف‌نظر از بزرگی یا کوچکی $|f'(a)|$ اگر $f'(a)>0$ نمودار f از چپ به‌راست بالا می‌رود و اگر $f'(a)<0$ نمودار از چپ به‌راست پایین خواهد آمد لذا مشتق یک تابع اطلاعاتی به ما می‌دهد که در رسم نمودار تابع بسیار مفید می‌باشد.

منوی اصلی

در اینجا ملاحظه می‌کنیم که اگر $f'(a)$ موجود باشد حرف x در تعریف مشتق را می‌توان با سایر حروف عوض کرد به‌عنوان مثال، می‌توان نوشت:

$$f'(a) = \lim_{t \to a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$$

منوی اصلی

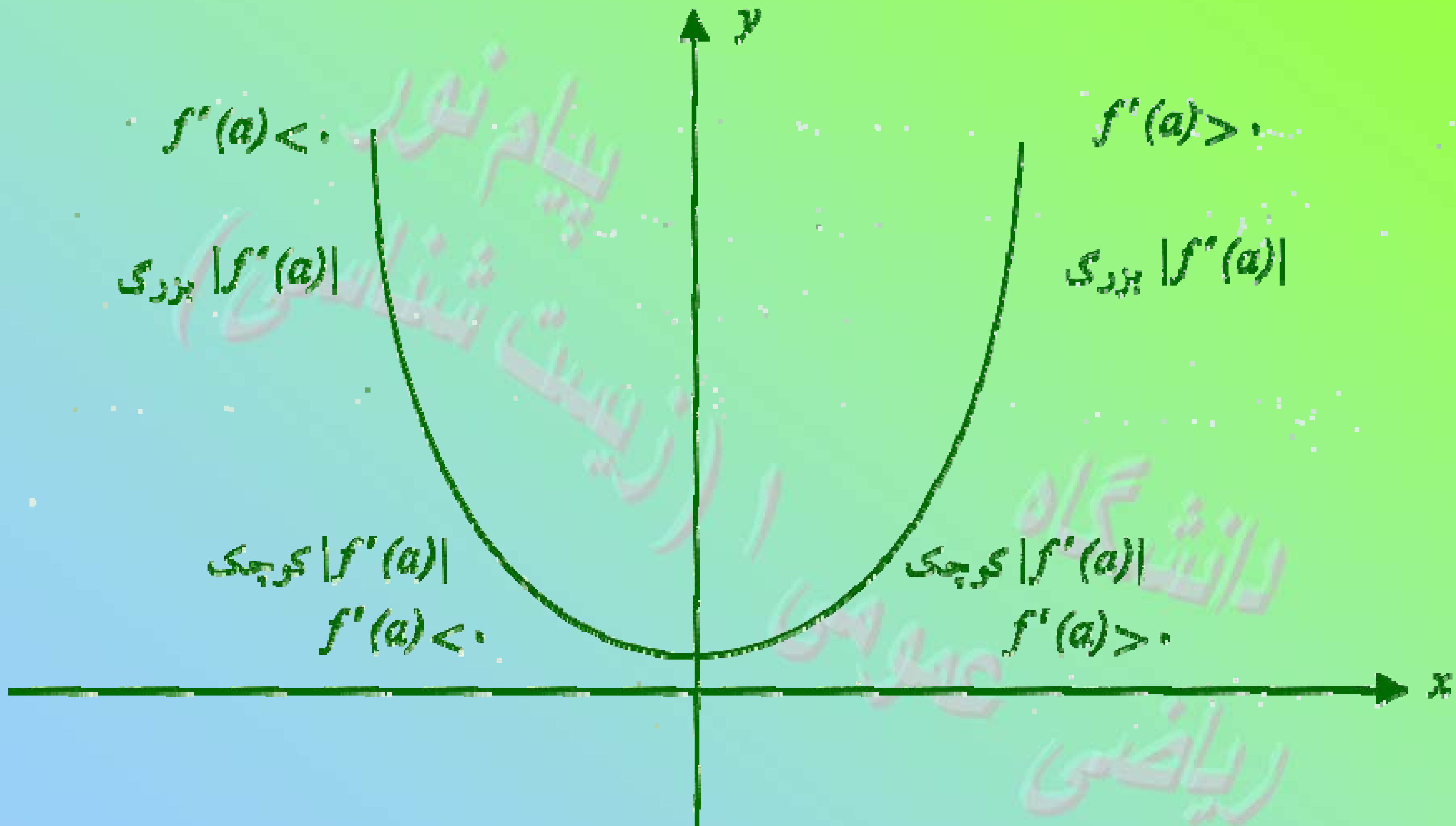
اگر t زمان باشد دراین صورت مفهوم فیزیکی سرعت را که در فصل قبل مطرح شد خواهیم داشت. اگر جسمی روی یک خط مستقیم در حال حرکت باشد و $f(t)$ موضع جسم درلحظهٔ t باشد درفصل قبل دیدیم که سرعت $V(t_\circ)$ جسم درلحظهٔ $t_\circ$ را با فرمول

$$V(t_\circ)=\lim_{t\to t_\circ}\frac{f(t)-f(t_\circ)}{t-t_\circ}$$

تعریف کردیم این تعریف برحسب مشتق به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$V(t_\circ)=f'(t_\circ)$$

منوی اصلی



منوی اصلی

تذکر. نمادگذاری $h \to 0$ به این معنی است که h هم از طرف چپ و هم از طرف راست به صفر نزدیک می‌شود ولی گاه ممکن است نزدیک شدن h به صفر تنها از یک طرف مورد نظر باشد در این صورت تعریفهای زیر را داریم:

منوی اصلی

۲.۱.۴ تعریف. اگر تابع f در بازه‌ای چون $[a, c)$ تعریف شده باشد آنگاه مشتق راست f در $x = a$ را با نماد $f'_+(a)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

به شرطی که این حد وجود داشته باشد.

منوی اصلی

۳.۱.۴ تعریف. اگر تابع f در بازه‌ای چون $(c, a]$ تعریف شده باشد آنگاه مشتق چپ f در $x = a$ را با نماد $f'_-(a)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f'_-(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

به شرطی که این حد وجود داشته باشد.

بنابر قضایای حدی، $f'(a)$ وجود دارد اگر و فقط اگر $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ وجود داشته و $f'_+(a) = f'_-(a)$.

منوی اصلی

۴.۱.۴ تعریف. اگر تابع f در بازهٔ $[a\,,b]$ تعریف شده باشد آنگاه گوییم f در $[a\,,b]$ مشتق‌پذیر است اگر به‌ازای هر x در بازهٔ $(a\,,b)$ ، $f'(x)$ موجود بوده و همچنین $f'_+(a)$ و $f'_-(b)$ وجود داشته باشند.

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

مثال ۴. نشان دهید که اگر $f(x)=|x|$ آنگاه $f'(0)$ وجود ندارد یعنی تابع f در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست.

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|-0}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|-0}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x}=-1$$

بنابراین $f'_-(0)$ و $f'_+(0)$ وجود دارند ولی یکسان نیستند بنابراین $f'(0)$ وجود ندارد.

منوی اصلی

توجه. تقریباً هر تابعی که در این کتاب بررسی می‌کنیم در تمام اعداد (یا احتمالاً به جز تعداد متناهی عدد) در قلمروش مشتق‌پذیر است تابع f' که از مشتق f در این اعداد ناشی می‌شود مشتق f نسبت به x نامیده می‌شود. لذا طبق تعریف، f' تابعی است که قلمروش گردایهٔ اعدادی است که f در آنها مشتق‌پذیر بوده و مقدارش در یک چنین x ای مساوی است با:

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

منوی اصلی

۲.۴ محاسبهٔ مشتق توابع با استفاده از تعریف

با استفاده از تعریف می‌توان مشتق هر تابعی را (در صورت وجود) به‌دست آورد. برای روشن شدن کامل مسئله به مثالهای زیر توجه کنید.

مثال ۱. مشتق تابع ثابت $f(x) = c$ را به‌دست آورید.

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \lim_{t \to x} \frac{c - c}{t - x} = \lim_{t \to x} \circ = \circ$$

منوی اصلی

مثال ۲. مشتق تابع $f(x) = ax + b$ را به‌دست آورید.

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \lim_{t \to x} \frac{at + b - ax - b}{t - x} = \lim_{t \to x} \frac{a(t - x)}{t - x} = a$$

مثال ۳. فرض کنید $f(x) = x^{۲} - ۶x$ تابع $f'(x)$ و قلمرو آن را بیابید.

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \lim_{t \to x} \frac{t^{۲} - ۶t - x^{۲} + ۶x}{t - x} = ۲x - ۶$$

روشن است که دامنه f' مجموعهٔ R است.

منوی اصلی

مثال ۴. فرض کنید $f(x)=\sqrt{x}$ تابع $f'(x)$ و دامنهٔ آن را بیابید.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\times\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

قلمرو تابع $f'(x)$ برابر است با $\{x\in \mathbb{R}\ ;\ x>0\}$ توجه کنید که صفر در دامنهٔ f هست در حالی که در دامنهٔ f' نیست زیرا $f'(0)$ وجود ندارد.

منوی اصلی

مثال ۵. فرض کنید $f(x)=\sin x$ نشان دهید که $f'(x)=\cos x$.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}=\lim_{h\to 0}\left[\sin x\frac{\cos h-1}{h}+\cos x\frac{\sin h}{h}\right]$$

$$=(\sin x)\cdot 0+(\cos x)\cdot 1=\cos x$$

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

۳.۴ قواعد مشتق‌گیری

چون برای مجموع، تفاضل، حاصلضرب و خارج‌قسمت توابع، قواعد حدی وجود دارند طبیعی است سؤال شود که آیا برای مشتقات نیز قواعد نظیر موجودند یا نه. این قواعد

منوی اصلی

وجود دارند و کار مشتق‌گیری را نیز بسیار راحت می‌کنند زیرا مشتق‌گیری با استفاده از تعریف کار پردردسری است البته مشتق برخی توابع صرفاً با استفاده مستقیم از تعریف به‌دست می‌آیند. قبل از بیان این قواعد قضیهٔ مهم زیر را که رابطهٔ بین مشتق‌گیری و پیوستگی تابع را در یک نقطه بیان می‌کند ثابت می‌کنیم.

منوی اصلی

۱.۳.۴ قضیه. هرگاه تابع f در a مشتق‌پذیر باشد آنگاه f در a پیوسته است

اثبات. برای اثبات پیوسته بودن f در a کافی است نشان دهیم که:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \quad \text{یا} \quad \lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] = 0$$

منوی اصلی

توجه کنید که $f'(a)$ طبق فرض وجود دارد. لذا داریم:

$$\lim_{x \to a}[f(x)-f(a)] = \lim_{x \to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a)$$

$$= \lim_{x \to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\lim_{x \to a}(x-a)$$

$$= f'(a)\cdot ۰ = ۰$$

منوی اصلی

تذکر. عکس قضیه فوق درست نیست. یعنی پیوسته بودن تابع در $x = a$ شرط لازم برای مشتق‌پذیر بودن آن در $x = a$ است ولی شرط کافی نیست. به‌عبارت دیگر تابعهای پیوسته‌ای وجود دارند که مشتق‌پذیر نیستند به‌عنوان مثال تابع $f(x) = |x|$ در $x = ۰$ پیوسته است ولی $f'(۰)$ وجود ندارد.

منوی اصلی

۲.۳.۴ قضیه. اگر $f(x)=x^n$ که $n\in \mathbb{N}$ آنگاه $f'(x)=nx^{n-1}$.

اثبات. داریم،

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}.$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^n+nx^{n-1}h+\cdots+h^n-x^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(nx^{n-1}+n(n-1)x^{n-2}h+\cdots+h^{n-1})}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(nx^{n-1}+n(n-1)x^{n-2}h+\cdots+h^{n-1})=nx^{n-1}$$

منوی اصلی

بعداً خواهیم دید که قاعدهٔ فوق به‌ازای هر عدد گویای r نیز درست است یعنی اگر r عددی گویا باشد و $f(x)=x^r$ آنگاه به‌ازای هر x در قلمرو f داریم $f'(x)=rx^{r-1}$.

۴.۳.۳ قضیه. اگر $g(x)=cf(x)$ که در آن $c\in\mathbf{R}$ آنگاه به‌ازای هر مقدار x از دامنهٔ f' داریم $g'(x)=cf'(x)$

اثبات. داریم

$$g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h}$$

$$=c\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=cf'(x)$$

احکام زیر را بدون اثبات می‌آوریم

منوی اصلی

۴.۳.۴ قضیه. الف) $[f(x)+g(x)]'=f'(x)+g'(x)$

ب) $[f_1(x)+\cdots+f_n(x)]'=f_1'(x)+\cdots+f_n'(x)$

ج) $[f(x)\,g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

د) $$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

مشروط بر اینکه این مشتقها در x وجود داشته باشند.

منوی اصلی

مثال ۱. مشتق تابعهای زیر را با استفاده از قضایای فوق به‌دست آورید.

الف) $f(x)=(x^{۲}+۳x+۵)\sin x$

ب) $f(x)=\dfrac{۸x^{۵}+۳}{x^{۲}+۱}$

ج) $f(x)=\mathrm{tg}\,x$

د) $f(x)=\mathrm{cotg}\,x$

هـ) $f(x)=\mathrm{scec}\,x$

و) $k(x)=x+\sin x$

منوی اصلی

حل: الف) فرض کنید $g(x) = \sin x$ و $h(x) = x^{۲} + ۳x + ۵$ در این صورت با توجه
به قضیهٔ حدی حاصلضرب داریم:

$$f'(x) = h'(x)g(x) + h(x)g'(x)$$

$$= (۲x + ۳)\sin x + (x^{۲} + ۳x + ۵)\cos x$$

منوی اصلی

ب) فرض کنید $g(x)=8x^5+3$ و $h(x)=x^3+1$ در این صورت داریم:

$$f'(x)=\frac{g'(x)h(x)+g(x)h'(x)}{[h(x)]^2}=\frac{40x^4(x^2+1)-(8x^5+3)2x}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{24x^6+40x^4-6x}{(x^2+1)^2}$$

منوی اصلی

ج) چون $f(x)=\frac{\sin x}{\cos x}$ لذا قضیهٔ مشتق خارج قسمت را خواهیم داشت یعنی:

$$f'(x)=\frac{\cos x\cdot\cos x-\sin(-\sin x)}{\cos^{2}x}=\frac{\cos^{2}x+\sin^{2}x}{\cos^{2}x}=\frac{1}{\cos^{2}x}=\sec^{2}x$$

د) مانند قسمت (ج) عمل می‌کنیم در این صورت $f'(x)=-\operatorname{cosec}^{2}x$

هـ) چون $\sec x=\frac{1}{\cos x}$ داریم: $f'(x)=-\sec x\,\mathrm{tg}\,x$

و) فرض کنید $f(x)=x$ و $g(x)=\sin x$ در این صورت داریم:

$$k'(x)=f'(x)+g'(x)=1+\cos x$$

منوی اصلی

۵.۳.۴ نمادهای دیگر برای مشتق

اگر $y = f(x)$ آنگاه نمادهای زیر نیز برای مشتق به‌کار می‌روند:

$$y' \;,\; \frac{dy}{dx} \;,\; \frac{df}{dx} \;,\; D_x f \;,\; D_x y$$

لازم به ذکر است که نمادهای $\frac{dy}{dx}$ و $\frac{df}{dx}$ صرفاً برای نمایش مشتق y یا f نسبت به متغیر x است و گرچه به‌صورت کسر نوشته می‌شوند ولی این نمادها ماهیتی یکپارچه دارند و نبایستی با کسر اشتباه شوند

منوی اصلی

۶.۳.۴ قاعدهٔ زنجیره‌ای

در بسیاری از موارد مقدار یک کمیت به‌صورت تابعی از یک متغیر داده می‌شود، که آن متغیر را نیز می‌توان تابعی از یک متغیر ثانوی پنداشت. در این گونه موارد، میزان تغییر کمیت اولیه نسبت به متغیر ثانوی مطرح است.

منوی اصلی

مثلاً فرض کنید هزینهٔ کل تولید در کارخانه خاصی، تابعی از تعداد واحدهای تولید شده، که خود نیز تابعی از تعداد ساعات کار کارخانه است، باشد. اگر c و q و t به‌ترتیب هزینه، تعداد واحدهای تولید شده و تعداد ساعات کار باشد، آنگاه:

$$\frac{dc}{dq} = \text{میزان تغییر هزینه نسبت به سطح تولید}$$

منوی اصلی

$$\text{میزان تغییر سطح تولید نسبت به زمان} = \frac{dq}{dt}$$

و حاصلضرب این دو میزان تغییر برابر با میزان تغییر هزینه نسبت به زمان است به‌عبارت دیگر:

$$\text{میزان تغییر هزینه نسبت به زمان} = \frac{dc}{dq} \cdot \frac{dq}{dt}$$

چون میزان تغییر هزینه نسبت به زمان همان $\frac{dc}{dt}$ است در نتیجه:

$$\frac{dc}{dt} = \frac{dc}{dq} \cdot \frac{dq}{dt}$$

منوی اصلی

این فرمول مورد خاصی از قاعدهٔ مهمی به‌نام قاعدهٔ زنجیره‌ای است بنابراین می‌توان گفت: اگر y تابع مشتق‌پذیری از u و u تابع مشتق‌پذیری از x باشد آنگاه y را می‌توان به‌صورت تابعی از x در نظر گرفت و نوشت.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

منوی اصلی

طراح: رحمت سلطانی عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه پیام نور شیراز

توجه کنید که یک روش برای به خاطر سپردن قاعدهٔ زنجیره‌ای این است که مشتقهای $\frac{dy}{du}$ و $\frac{du}{dx}$ را همانند کسر تصور کنید تا عبارت $\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$ به $\frac{dy}{dx}$ ساده شود.

مثال ۱. اگر $y=u^{3}-3u^{2}+1$ و $u=x^{2}+2$، $\frac{dy}{dx}$ را بیابید.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \quad , \quad \frac{dy}{du}=3u^{2}-6u \quad , \quad \frac{du}{dx}=2x$$

منوی اصلی

در نتیجه داریم:

$$\frac{dy}{dx}=(۳u^{۲}-۶u)(۲x)=[۳(x^{۲}+۲)^{۲}-۶(x^{۲}+۲)](۲x)$$

$$=۶x^{۳}(x^{۲}+۲)$$

به عنوان تمرین، درستی جواب فوق را با جایگزین $u=x^{۲}+۲$ در عبارت y و سپس با مشتق‌گیری y نسبت به x بررسی کنید.

منوی اصلی

مثال ۲. اگر $y=\frac{u}{u+1}$ و $u=3x^{2}-1$ مقدار $\frac{dy}{dx}$ را به‌ازای $x=1$ به‌دست آورید.

$$\frac{dy}{du}=\frac{(u+1)-(u\cdot 1)}{(u+1)^{2}}=\frac{1}{(u+1)^{2}}\quad,\quad \frac{du}{dx}=6x$$

$$\frac{dy}{dx}=\left[\frac{1}{(u+1)^{2}}\right](6x)=\frac{6x}{(u+1)^{2}}$$

حال اگر $x = ۱$ آنگاه داریم:

$$u = ۳(۱)^۲ - ۱ = ۲$$

حال در عبارت $\frac{dy}{dx}$ مقادیر $x = ۱$ و $u = ۲$ را قرار می‌دهیم:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=۱} = \frac{۶(۱)}{(۲+۱)^۲} = \frac{۶}{۹} = \frac{۲}{۳}$$

بسیاری از توابع ظاهر شده در ریاضیات و کاربردهایش، تابعهای مرکب هستند که از ترکیب دو تابع به‌وجود آمده‌اند (به‌طور مثال تابع $g \circ f$ از ترکیب g و f ساخته شده است و قبلاً در فصل دوم دیده‌ایم که $(g \circ f)(x) = g(f(x))$).

منوی اصلی

قاعدهٔ زنجیره‌ای در واقع قاعده‌ای برای مشتق‌گیری از توابع مرکب است که با استفاده از نماد تابعی آن را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{d}{dx}g(f(x))=g'(f(x))f'(x)$$

برای اینکه ببینید فرمول فوق، بازنویسی قاعدهٔ زنجیره‌ای با استفاده از نماد تابعی می‌باشد فرض کنید: $y=g(f(x))$ آنگاه:

$$y=g(u) \quad \text{که در آن} \quad u=f(x)$$

منوی اصلی

با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای داریم:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=g'(u)f'(x)=g'(f(x))f'(x)$$

در مثال زیر چگونگی استفاده از این صورت قاعدهٔ زنجیره‌ای نشان داده شده است:

مثال ۳. مشتق تابع $f(x)=\sqrt{x^{۲}+۳x+۲}$ را محاسبه کنید.

منوی اصلی

حل: تابع $f(x)$ را به‌صورت تابع مرکب $g(h(x))$ در نظر بگیرید که در آن:

$$h(x) = x^{۲} + ۳x + ۲ \quad , \quad g(u) = \sqrt{u} = u^{\frac{۱}{۲}}$$

$$h'(x) = ۲x + ۳ \quad , \quad g'(u) = \frac{۱}{۲} = u^{\frac{-۱}{۲}}$$

$$f'(x) = g'(h(x))h'(x) = \frac{۱}{۲}(h(x))^{\frac{-۱}{۲}}(۲x + ۳) = \frac{۲x + ۳}{۲\sqrt{x^{۲} + ۳x + ۲}}$$

منوی اصلی

۷.۳.۴ قاعدهٔ زنجیره‌ای در مسائل کاربردی

بسیاری از مسائل کاربردی با قاعدهٔ زنجیره‌ای قابل حل‌اند به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱. مطالعهٔ زیست محیطی ناحیهٔ حومه‌ای خاص روشن ساخت که مقدار متوسط

منوی اصلی

روزانهٔ منواکسید کربن موجود در هوا، هنگامی که جمعیت ناحیه p هزار نفر باشد معادل $C(p)=\sqrt{0/5p^{2}+17}$ واحد است. برآورد شده است که t سال آینده جمعیت ناحیه معادل $p(t)=3/1+0/1t^{2}$ هزار نفر خواهد بود. ۳ سال آینده مقدار منواکسید کربن با چه میزانی نسبت به زمان در حال تغییر خواهد بود؟

منوی اصلی

حل: هدف یافتن $\frac{dc}{dt}$ به‌ازای $t=۳$ می‌باشد.

$$\frac{dc}{dp}=\frac{۱}{۲}(۰٫۵p^{۲}+۱۷)^{\frac{-۱}{۲}}(p)=\frac{۱}{۲}p(۰٫۵p^{۲}+۱۷)^{\frac{-۱}{۲}}$$

$$\frac{dp}{dt}=۰٫۲t$$

منوی اصلی

در نتیجه با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای داریم:

$$\frac{dc}{dt}=\frac{dc}{dp}\cdot\frac{dp}{dt}=\frac{۱}{۲}p(۰٫۵p^{۲}+۱۷)^{\frac{-۱}{۲}}(۰٫۲t)=\frac{۰٫۱pt}{\sqrt{۰٫۵p^{۲}+۱۷}}$$

به‌ازای $t=۳$ داریم:

$$p=p(۳)=۳٫۱+۰٫۱(۳)^{۲}=۴$$

$$\frac{dc}{dt}=\frac{۰٫۱(۴)(۳)}{\sqrt{۰٫۵(۴)^{۲}+۱۷}}=\frac{۱٫۲}{۵}=۰٫۲۴$$

منوی اصلی

قاعدهٔ مشتق‌گیری برای توابع مرکب را در زیر به‌عنوان یک قضیه می‌بینید.

۹.۳.۴ قضیه. فرض کنید f در $x=a$ و g در $f(a)$ مشتق‌پذیر باشد. در این صورت تابع مرکب $g\circ f$ در a مشتق‌پذیر است و $(g\circ f)'(a)=g'(f(a))f'(a)$

این قضیه اغلب به این شکل نوشته می‌شود که:

$$\frac{d}{dx}g(f(x))=g'(f(x))f'(x)$$

یکی از کاربردهای قاعدهٔ زنجیره‌ای قضیهٔ زیر است:

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

۱۰.۳.۴ قضیه. اگر $y=[f(x)]^r$ که در آن r عددی گویاست، آنگاه

$$y'=r[f(x)]^{r-1}\cdot f'(x)$$

۱۱.۳.۴ نتیجه. اگر $y=x^r$ که در آن r گویاست آنگاه: $y'=rx^{r-1}$

مثال ۱. مشتق توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $k(x)=\sin ۳x$

ب) $f(x)=(۳x^{۴}+۲x+۵)^{۱۰}$

ج) $y=\sin^{۵}x$

د) $y=\sqrt{۱+x^{۴}}$

حل: الف) $k(x)=g\circ f(x) \quad \rightarrow \quad g(x)=\sin x \quad , \quad f(x)=۳x$

$$k'(x)=g'(f(x))f'(x)=(\cos ۳x)\cdot ۳=۳\cos ۳x$$

منوی اصلی

ب) مثل قسمت (الف) $g(x)=x^{۱۰}$ و $h(x)=۳x^{۴}+۲x+۵$ در ایـن صـورت

$$f(x)=g\circ h(x)$$

$$f'(x)=۱۰(۳x^{۴}+۲x+۵)^{۹}(۱۲x^{۳}+۲)$$

منوی اصلی

ج) دوبـــاره از تـــابع مـــرکب اســـتفاده مـــی‌کنیم، $g(x)=x^{5}$ و $h(x)=\sin x$

در این صورت

$$y=f(x)=g\circ h(x)$$

$$y'=5[\sin x]^{4}\cdot(\sin x)'=5\sin^{4}x\cdot\cos x$$

د) $f(x)=1+x^{4}\quad,\quad g(x)=\sqrt{x}\quad\Rightarrow\quad g\circ f(x)=\sqrt{1+x^{4}}=y$

$$g'=g'(f(x))f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{f(x)}}\cdot(4x^{3})=\frac{2x^{3}}{\sqrt{1+x^{4}}}$$

منوی اصلی

۱۳.۳.۴ خلاصهٔ قواعد مشتق‌گیری

تقریباً همهٔ قواعد مشتق‌گیری بیان شده است با استفاده از آنها می‌توان از هر نوع تابعی حتی توابع بسیار پیچیده مشتق گرفت درعین حال برای در دسترس بودن این قواعد آنها را به‌طور یک‌جا می‌آوریم:

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

۱. $(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$

۲. $(cf(x))'=cf'(x)$

۳. $(fg)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

۴. $$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^{2}}$$

۵. $$(g\circ f)'(x)=\frac{d}{dx}g(f(x)=g'(f(x))f'(x)$$

۶. $([f(x)]^{r})'=r[f(x)]^{r-1}f'(x)$

منوی اصلی

طراح: رحمت سلطانی عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه پیام نور شیراز

با توجه به قواعد فوق هنوز توابعی وجود دارند که مشتقشان را نمی‌توان با این قواعد حساب کرد ولی مشتق چنین توابعی را گاهی می‌توان مستقیماً از تعریف محاسبه نمود.

به‌عنوان مثال اگر $f(x) = x|x|$ ، $f'(0)$ را با هیچ قاعده‌ای نمی‌توان به‌دست آورد زیرا

منوی اصلی

$|x|$ در صفر مشتق‌پذیر نیست لذا با استفاده از تعریف مشتق معلوم می‌شود که:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x|x|-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}|x|=0$$

لازم به ذکر است که اغلب توابع مشتق‌پذیری را که با آنها سر و کار داریم می‌توان با استفاده از قواعد بیان شده مشتق‌گیری کرد

منوی اصلی

۴.۴ مشتقات مراتب بالاتر

اگر تابع $y=f(x)$ مشتق‌پذیر باشد. مشتق آن، تابعي مانند $y'=f'(x)$ است که این تابع (يعني مشتق f') خود تابعی از x است و می‌توانیم فرایند مشتق را یک گام پیشتر برد و

منوی اصلی

دوباره از f' نسبت به x مشتق بگیریم و تابعی از x به‌دست می‌آید. که آن مشتق مرتبهٔ دوم تابع $y = f(x)$ نامیده و به‌صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$y'' = (y')' = f''(x) = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

مشتق دوم $y = f(x)$ را با نماد $\frac{d^2 f}{dx^2}$ یا $\frac{d^2 y}{dx^2}$ یا $D_x^2 y$ نیز نمایش می‌دهیم.

منوی اصلی

به‌عنوان مثال اگر تابع $y=\frac{1}{x}$ را در نظر بگیریم $y'=-\frac{1}{x^2}$ بوده و مشتق مرتبهٔ دوم آن $y''=\frac{2}{x^3}$ است یعنی:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{2}{x^3}$$

مشتق مشتق مرتبهٔ دوم، مشتق مرتبهٔ سوم نام دارد که آن را به‌صورت زیر نشان می دهیم:

$$y'''=(y'')'=f'''(x)=\frac{dy''}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

مشتق مرتبهٔ سوم $y=f(x)$ را با نماد $\frac{d^3y}{dx^3}$ یا $\frac{d^3f}{dx^3}$ یا D_x^3y نیز نمایش می‌دهیم. و به‌طور

منوی اصلی

کلی اگر عمل مشتق‌گیری را به همین صورت ادامه دهیم به‌طوری که از مشتق مرتبهٔ $(n-1)$ام مجدداً مشتق بگیریم، مشتق مرتبهٔ nام تابع $y=f(x)$ به‌دست می‌آید که آن را به‌صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$y^{(n)}=f^{(n)}(x)$$

توجه شود که توان داخل پرانتز به مفهوم تعداد دفعات مشتق‌گیری متوالی از f می‌باشد.

منوی اصلی

مثال ۱. مشتق مرتبهٔ nام توابع $y=3x^3$ و $y=\frac{1}{x}$ را به‌دست آورید.

$$y=3x^3\ ,y'=9x^2\ ,y''=18x\ ,y'''=18\ ,y^{(4)}=0\ ,\ \cdots$$

$$y^{(n)}=0\ ,n\in\mathbb{N}\ \ ,n>3$$

$$y=\frac{1}{x}=x^{-1},y'=(-1)x^{-2},y''=(-1)^2 2x^{-3},y'''=(-1)^3 3\times2x^{-4}=(-1)$$

$$=(-1)^3 3!\,x^{-4},\cdots,y^{(n)}=(-1)^n n!\,x^{-(n+1)}$$

منوی اصلی

اگر توجه شود، در محاسبهٔ مشتق مرتبهٔ nام، مشتقات متوالی تابع محاسبه شده است. و اگر روندی خاص بین مشتقات اولیه وجود داشته باشد، از روی این روند رابطهٔ مشتق مرتبه nام را می‌توان نوشت.

۵.۴ مشتق‌گیری ضمنی

توابع مشتق‌پذیری را که تاکنون بررسی کردیم قابل تبدیل به معادلاتی بودند که در آنها y برحسب x بیان شده است. مانند:

$$y=\sqrt{1-x^{2}} \quad , \quad y=\operatorname{tg}x^{2} \quad , \quad y=\frac{x^{2}}{x^{3}-1}$$

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

یعنی با توابعی مانند $y = f(x)$ سروکار داشتیم که در آنها y به‌طور صریح برحسب x بیان شده است. حال اگر y تابع مشتق‌پذیری از x بوده و نتوانیم به‌طور مستقیم y را برحسب x پیدا کنیم یعنی به جای داشتن فرمولی برای y برحسب x فقط بدانیم که x و y با معادله‌ای

منوی اصلی

مثلاً مانند $x^2+xy+y^5=3$ داده شده باشد که در این صورت گوییم y به‌طور ضمنی برحسب x تعریف شده است یا معادله y را به‌طور ضمنی به‌صورت تابعی از x تعریف می‌کند. حال چگونه می‌توان مشتق y را نسبت به x پیدا کرد؟

منوی اصلی

چون y تابع مشتق‌پذیری از x فرض شده است تابع $x^{2}+xy+y^{5}$ نیز تابع مشتق‌پذیری از x است لذا هر دو طرف معادله توابع مشتق‌پذیری از x هستند و چون دو طرف مساویند، باید مشتقاتشان نیز مساوی باشد لذا می‌توان مشتقات دو طرف را براساس قاعدهٔ زنجیره‌ای به‌دست آورده و آنها را مساوی گرفت و سپس معادلهٔ حاصل

منوی اصلی

طراح: رحمت سلطانی عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه پیام نور شیراز

را نسبت به مشتق y حل کرد. این نوع مشتق‌گیری را مشتق‌گیری ضمنی می‌نامند. مثلاً در مورد معادلهٔ فوق داریم:

$$۲x+y+xy'+۵y^{۴}y'=۰ \Rightarrow y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{۲x+y}{x+۵y^{۴}}$$

منوی اصلی

مثال ۱. در معادلهٔ $x^۳+y^۳=۲xy$ ، $y'=\frac{dy}{dx}$ را بیابید.

حل: $۳x^۲+۳y^۲y'=۲y+۲xy' \rightarrow y'=\frac{۲y-۳x^۲}{۳y^۲-۲x}$

به‌شرطی که مخرج صفر نشود چونکه y' به‌صورت یک کسر است.

منوی اصلی

مثال ۲. فرض کنید y تابع مشتق‌پذیری از x بوده و در معادلهٔ $x^{3}=y^{4}+x^{2}\sin y+1$ صدق کند فرض کنید به‌ازای $x=1$، داشته باشیم $y=0$ در این صورت ابتدا $\frac{dy}{dx}=y'$ را به‌دست آورده و سپس مقدار آن را در $x=1$ به‌دست آورید یعنی $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=1}=?$

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

حل:

$$3x^2 = 4y^3y' + 2x\sin y + x^2\cos y\, y' \rightarrow 4y^3y' + x^2\cos y\, y' = 3x^2 - 2x\sin y$$

$$\Rightarrow y' = \frac{3x^2 - 2x\sin y}{4y^3 + x^2\cos y}$$

البته مشروط بر اینکه مخرج کسر صفر نباشد.

$$\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=1,\ y=0} = \frac{3-0}{0+1} = 3$$

منوی اصلی

۶.۴ آهنگهای وابسته

در مشتق‌گیری ضمنی با در نظر گرفتن y به‌عنوان تابعی از x، از معادله‌ای شامل x و y مشتق می‌گیریم ولی در برخی موارد x و y تابعی از یک متغیر سوم چون t هستند که

منوی اصلی

غالباً فرمولهایی برای x و y به‌عنوان تابعی از t موجود نیست. وقتی از این معادله نسبت به t مشتق می‌گیریم رابطه‌ای بین آهنگهای تغییر $\frac{dy}{dt}$ و $\frac{dx}{dt}$ به‌دست می‌آوریم. در این صورت می‌گوییم این آهنگها وابسته‌اند. با استفاده از معادلهٔ آهنگهای وابسته می‌توان یکی از آنها را با معلوم بودن دیگری پیدا کرد.

منوی اصلی

مثال ۱. فرض کنید یک بالون کروی به‌میزان ۱۰ اینچ مکعب بر دقیقه باد شود. سرعت افزایش شعاع بالون وقتی شعاع ۵ اینچ است چقدر می‌باشد؟

حل:

$$V=\frac{۴}{۳}\pi r^{۳} \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{dt}=۴\pi r^{۲}\frac{dr}{dt}$$

...

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

چون حجم بالون به‌میزان ۱۰ اینچ مکعب بر دقیقه افزایش می‌یابد داریم $\frac{dV}{dt} = ۱۰$
می‌خواهیم $\left.\frac{dr}{dt}\right|_{t=t_\circ}$ ، که در آن $t_\circ$ لحظه‌ای است که در آن $r = ۵$ می‌باشد را حساب کنیم. با گذاردن ۱۰ به جای $\frac{dV}{dt}$ و ۵ به جای r در معادلهٔ فوق داریم:

$$۱۰ = ۴\pi(۵)^۲ \left.\frac{dr}{dt}\right|_{t=t_\circ} \rightarrow \left.\frac{dr}{dt}\right|_{t=t_\circ} = \frac{۱۰}{۴\pi(۵)^۲} = \frac{۱}{۱۰\pi}$$

لذا وقتی که شعاع ۵ اینچ است شعاع به‌میزان $\frac{۱}{۱۰\pi}$ اینچ بر دقیقه افزایش خواهد یافت.

منوی اصلی

۷.۴ دیفرانسیل و تقریب مقادیر توابع

در این قسمت می‌خواهیم هر یک از نمادهای dy و dx را به‌طور جداگانه تعریف کنیم

به‌طوری که خارج‌قسمت آنها برابر با $f'(x)$ باشد.

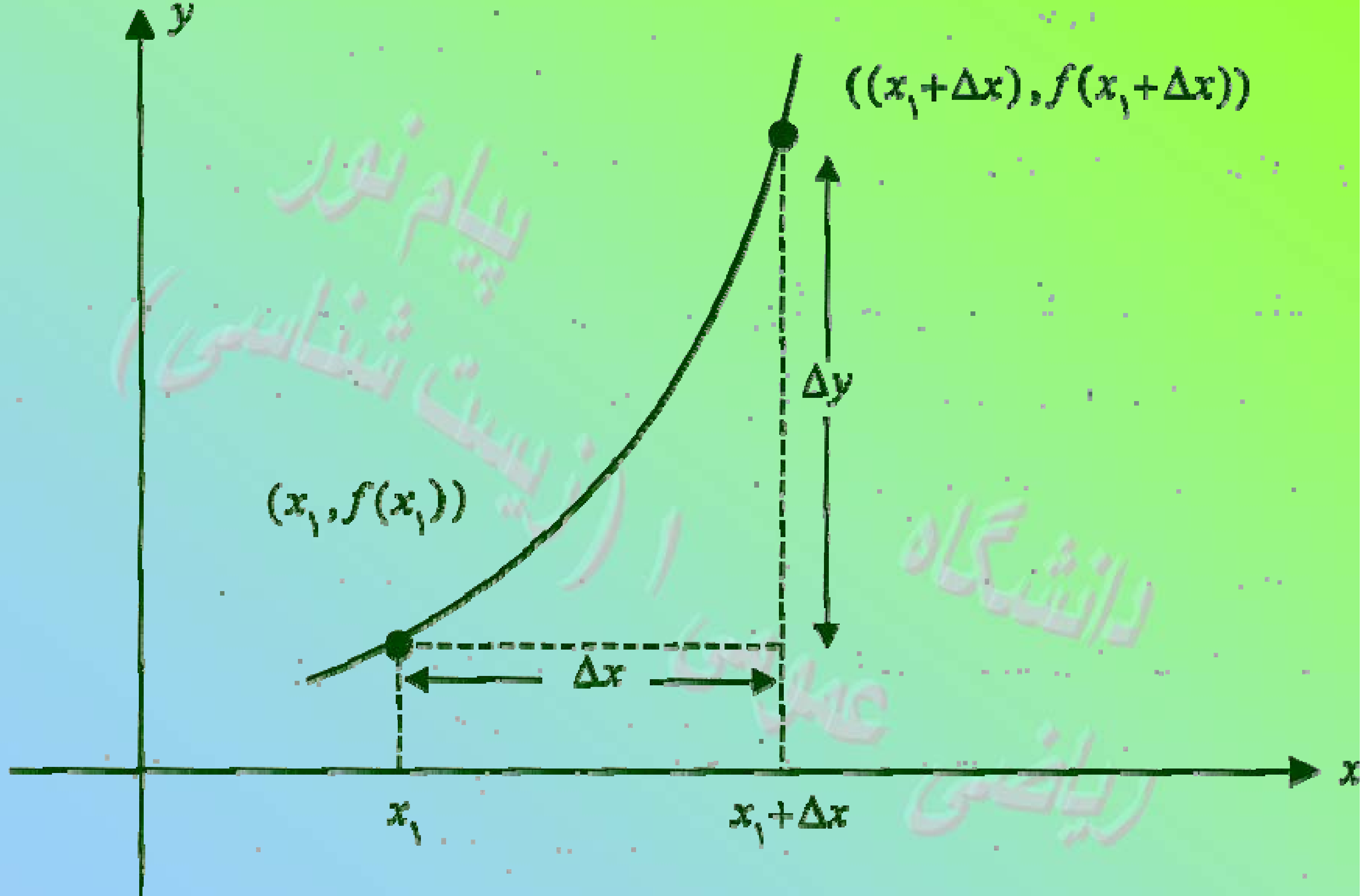
منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

فرض کنید مقدار x از x_1 به x_2 تغییر کند در این صورت $x_2 - x_1$ را با نماد Δx (بخوانید دلتای x) نمایش می‌دهیم $(\Delta x = x_2 - x_1)$ و آن را نمو x می نامیم. بدیهی است که وقتی مقدار x از x_1 به x_2 تغییر می‌کند مقدار متغیر وابسته $y = f(x)$ نیز از $y_1 = f(x_1)$ به $y_2 = f(x_2)$ تغییر می‌کند. این مقدار تغییر را با Δy نمایش داده و نمو y می نامیم (شکل زیر را ببینید).

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور



منوی اصلی

طراح: رحمت سلطانی عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه پیام نور شیراز

در این صورت داریم:

$$\Delta y = y_{2} - y_{1} = f(x_{2}) - f(x_{1}) = f(x_{1} + \Delta x) - f(x_{1})$$

توجه کنید که مقادیر Δx و Δy می‌توانند مثبت یا منفی یا صفر باشند.

بنابراین اگر در تعریف مشتق تابع $y = f(x)$ توجه کنید، در این صورت داریم:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

منوی اصلی

(توجه کنید که به جای h از نماد Δx استفاده کرده‌ایم)

در این صورت داریم:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

یعنی مشتق $f(x)$ برابر است با حد نمو y بر نمو x وقتی که Δx به صفر میل می‌کند

دراین‌صورت با توجه به تعریف حد می‌دانیم که به‌ازای Δxهای به قدر کافی نزدیک به صفر، $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ نزدیک مقدار $f'(x)$ می‌باشد. لذا اگر f در x مشتق‌پذیر بوده و Δx به قدر کافی نزدیک صفر باشد، $f'(x)$ تقریباً مساوی $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ می‌باشد

منوی اصلی

یعنی:

$$f'(x) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

یا

$$\Delta y \approx f'(x)\,\Delta x$$

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

۱.۷.۴ تعریف (دیفرانسیل یک تابع)

فرض کنید $y = f(x)$ یک تابع مشتق‌پذیر باشد در این صورت برای مقادیر کوچک Δx داریم:

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x$$

الف) Δx را دیفرانسیل x می‌نامیم و با dx نمایش می‌دهیم یعنی $dx = \Delta x$.

منوی اصلی

ب) عبارت $f'(x)\Delta x$ را دیفرانسیل y می‌نامیم و آن را با dy نمایش می‌دهیم یعنی:

$$dy = f'(x)\Delta x = f'(x)\,dx$$

یعنی دیفرانسیل یک تابع، بنابر تعریف، برابر است با حاصلضرب مشتق تابع در دیفرانسیل متغیر (یا نمو متغیر) بنابراین بدیهی است که:

الف) اگر $dx = 0$ باشد، $dy = 0$ است.

منوی اصلی

ب) اگر $dx \neq 0$ باشد در این صورت داریم:

$$dy = f'(x)dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)\cdot dx}{dx} = f'(x)$$

منوی اصلی

که همان مشتق تابع f است. یعنی مشتق تابع f برابر است با خارج‌قسمت دیفرانسیل y به دیفرانسیل x با استفاده از رابطهٔ فوق می‌توان دیفرانسیل توابع مختلف را محاسبه کرد.

مثال ۱. الف) دیفرانسیل $y = \sin x$ را محاسبه کنید.

$$dy = \cos x \, dx$$

منوی اصلی

که بر جای dx هر مقدار دلخواه را می‌توان قرار داد. مثلاً اگر $dx = ٠/٠١$ باشد داریم

$$dy = ٠/٠١ \cos x$$

ب) فرض کنید $y = x^2 - 2$ دیفرانسیل y را به‌دست آورده و مقدار آن را به‌ازای $x = 2$ و $dx = \Delta x = ٠/٠١$ محاسبه کنید سپس آن را با مقدار دقیق Δy وقتی که x از ۲ به ۲/۰۱ تغییر می‌کند مقایسه کنید.

منوی اصلی

حل:

$$y=f(x)=x^{۲}-۲ \quad \rightarrow \quad dy=f'(x)dx=۲x\,dx$$

$$dy=۲\times۲\times۰٫۱=۰٫۴$$

$$\Delta y=f(x_{۱}+\Delta x)-f(x_{۱})=f(۲٫۱)-f(۲)=[(۲٫۱)^{۲}-۲]-(۴-۲)=۰٫۴۱$$

$$\Delta y-dy=۰٫۴۱-۰٫۴=۰٫۰۱$$

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

۲.۷.۴ تقریب مقادیر توابع

همان‌طور که قبلاً دیدیم مشتقات و خطوط مماس ارتباطی نزدیک با هم دارند. در این قسمت با استفاده از این ارتباط مقادیر توابعی که به‌دست آوردن آنها مشکل یا ناممکن است را تخمین می‌زنیم.

منوی اصلی

همان‌طور که قبلاً بیان کردیم به‌ازای مقادیر به‌اندازهٔ کافی کوچک Δx داریم:

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x$$

یعنی $\Delta y \approx dy$ لذا اگر x از x_1 به x_2 $(x_2 = x_1 + \Delta x)$ نمو پیدا کند آنگاه نمو y برابر است با

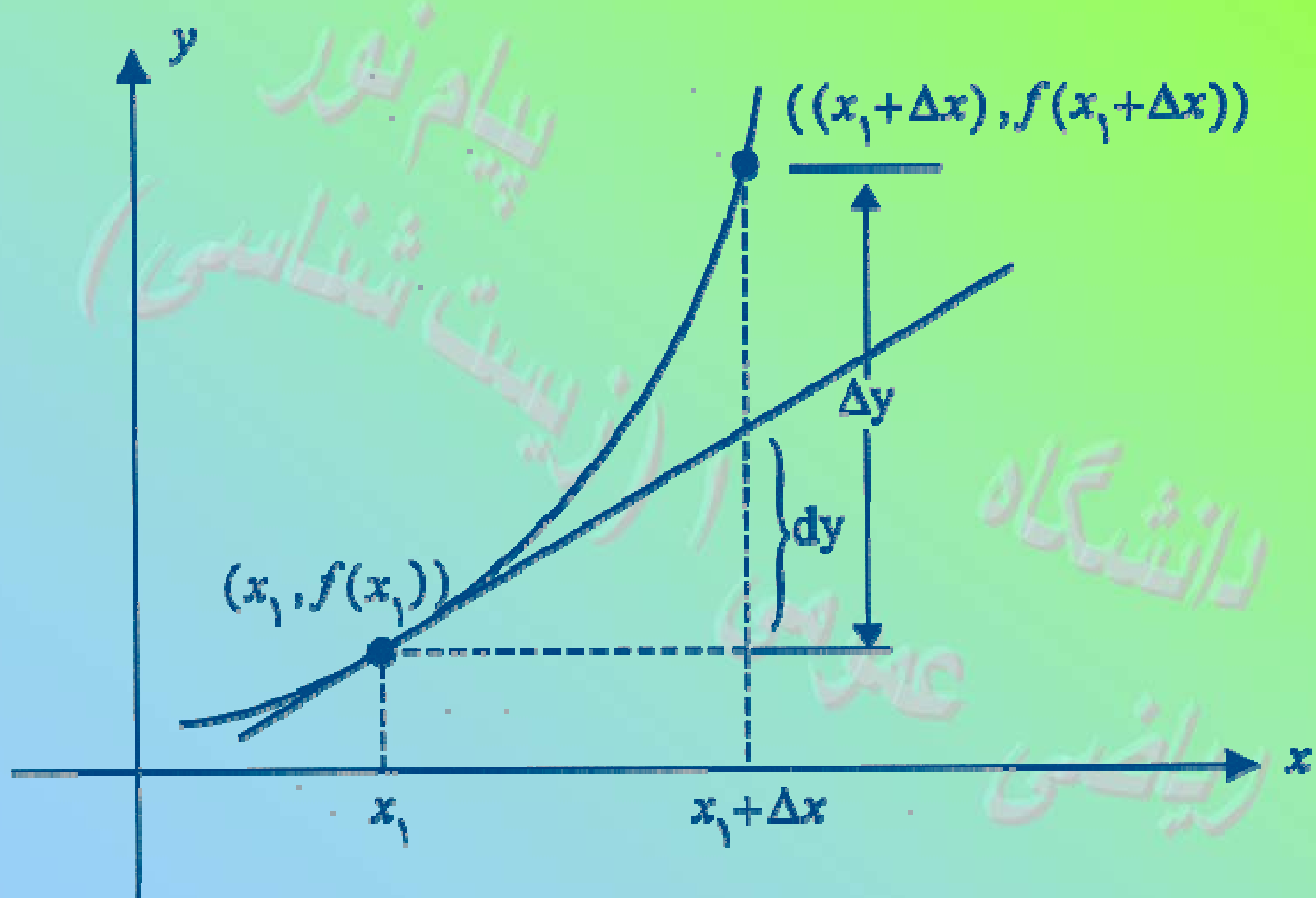
$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1) = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) \approx f'(x_1)\Delta x$$

$$\Rightarrow f(x_2) = f(x_1 + \Delta x) \approx f(x_1) + f'(x_1)\Delta x$$

منوی اصلی

چون طرف راست عبارت فوق یعنی $f(x_1)+f'(x_1)\Delta x$ معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع $y=f(x)$ در نقطهٔ $(x_1,f(x_1))$ است این مقدار تقریبی یعنی $f(x_2)$ را تقریب مقدار تابع به کمک خط مماس می‌نامیم (شکل زیر را ببینید).

منوی اصلی



منوی اصلی

مثال ۱. شعاع یک توپ ۱۲ سانتیمتر است. اگر در اثر باد کردن توپ، ۰٫۰۵ سانتیمتر بر شعاع آن افزوده شود چه مقدار بر حجم آن افزوده شده است. همچنین مقدار تقریبی افزایش حجم توپ را با استفاده از دیفرانسیل بیابید.

حل:

$$\Delta V = \frac{۴}{۳}\pi(۱۲٫۰۵)^{۳} - \frac{۴}{۳}\pi(۱۲)^{۳} \approx ۹۰٫۸$$

منوی اصلی

$$V=\frac{۴}{۳}\pi x^{۳} \quad , \quad dV=V'dx=۴\pi x^{۲}dx$$

به‌ازای $x = ۱۲$ و $dx = ۰٫۰۵$ داریم:

$$dV=۴\pi(۱۲)^{۲}(۰٫۰۵)\approx ۹۰٫۴$$

می‌بینیم که این مقدار افزایش به مقدار واقعی نزدیک است.

منوی اصلی

مثال ۲. Δy و dy را برای تابع $y=\frac{-۱}{x+۱}$ در نقطهٔ $x=۰$ با فرض $\Delta x=۰٫۱$ محاسبه کنید.

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \frac{-۱}{x+\Delta x+۱} - \frac{-۱}{x+۱}$$

در نقطهٔ $x=۰$ به‌ازای $\Delta x=۰٫۱$ داریم:

$$\Delta y = ۱ - \frac{۱}{۱+۰٫۱} = ۱ - \frac{۱۰}{۱۱} = \frac{۱}{۱۱}$$

$$dy = f'(x)\,dx = \frac{۱}{(۱+x)^{۲}}\,dx$$

مقدار dy به‌ازای $x=۰$ و $dx=\Delta x=۰٫۱$ برابر است با:

$$dy = ۰٫۱$$

منوی اصلی

مثال ۳. مقدار تقریبی $\sqrt[3]{۱٫۱}$ را به کمک دیفرانسیل محاسبه کنید این مقدار تقریبی را با مقداری که با ماشین حساب به‌دست می آورید مقایسه کنید.

حل: قرار می‌دهیم $f(x) = \sqrt[3]{x}$ و $x_۱ = ۱$ و $\Delta x = dx = ۰٫۱$ لذا

$$dy = f'(x_۱)dx = \frac{dx}{۳\sqrt[۳]{x_۱^۲}}$$

در نتیجه به‌ازای $x_۱ = ۱$ و $dx = ۰٫۱$ داریم:

$$dy = \frac{۰٫۱}{۳\sqrt[۳]{۱}} = \frac{۱}{۳۰}$$

منوی اصلی

بنابراین مقدار تقریبی $\sqrt[3]{1.1}$ برابر است با:

$$\sqrt[3]{1.1} = f(1.1) = f(x_1 + \Delta x) \approx f(x_1) + f'(x_1)\,dx$$

$$= 1 + \frac{1}{30} = \frac{31}{30}$$

منوی اصلی

مقدار تقریبی $\sqrt[3]{۱٫۱}$ با ماشین حساب تا شش رقم گرد شده عبارت است از ۱٫۰۳۲۲۸
لذا مقدار خطای مطلق حاصل برابر است با:

$$\frac{۳۱}{۳۰} - ۱٫۰۳۲۲۸ \approx ۱٫۰۳۳۳۳ - ۱٫۰۳۲۲۸ = ۰٫۰۰۱۰۵$$

که درجهٔ دقت بسیار معقولی است.

مثال ۴. مقدار تقریبی $\sin\frac{۷\pi}{۳۶}$ را با استفاده از دیفرانسیل تخمین بزنید و با مقدار واقعی آن مقایسه کنید.

منوی اصلی

حل: قرار دهید $f(x)=\sin x$ و $x_1=\frac{\pi}{۶}$ و $dx=\frac{\pi}{۳۶}$ در اینصورت:

$$dy=f'(x)\,dx=\cos x\,dx$$

$$dy=(\cos\frac{\pi}{۶})\frac{\pi}{۳۶}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\cdot\frac{\pi}{۳۶}\approx ۰٫۰۷۵۵۷۵$$

$$\sin\frac{۷\pi}{۳۶}=f(\frac{۷\pi}{۳۶})=f(x_۱+\Delta x)\approx f(x_۱)+f'(x_۱)\,dx$$

$$=۰٫۵+۰٫۰۷۵۵۷۵=۰٫۵۷۵۵۷۵$$

منوی اصلی

باز تخمین خوبی به‌دست آوردیم در واقع مقدار واقعی آن تا شش رقم گرد شده ۵۷۳۵۷۶ر۰ می‌باشد پس خطای مطلق ناشی از تقریب از ۲۰۰ر۰ کمتر می‌باشد.

از مفهوم دیفرانسیل در محاسبات تقریبی نیز می‌توان استفاده کرد. مثلاً یک بادکنک کروی محتوی گاز هیدروژن که قطر آن در سطح دریا برابر ۴ متر است را در نظر

منوی اصلی

بگیرید اگر این بادکنک رها شود صعود می‌کند و چون هرچه بالاتر رود فشار هوا کمتر می‌شود حجم آن افزایش می‌یابد. فرض کنید که پس از صعود به ارتفاع معینی قطر آن به ۴ متر و ۲۰ سانتیمتر برسد. V حجم کره‌ای به شعاع r برابر $\frac{۴}{۳}\pi r^{۳}$ است بنابراین dV برابر است با:

منوی اصلی

$$dV = ۴\pi r^{۲} dr$$

مقدار dV به‌ازای $r = ۴$ و $dr = \frac{۲۰}{۱۰۰}$ به‌دست می‌آید.

$$dV = ۴\pi(۴^{۲})\frac{۲۰}{۱۰۰} = ۱۲٫۸\pi$$ متر مکعب

منوی اصلی

این عدد اندازهٔ تقریبی اضافه حجم بادکنک است. مقدار واقعی اضافه حجم بادکنک برابر است با:

$$\Delta V = \frac{۴}{۳}\pi\,(۴٫۲)^{۳} - \frac{۴}{۳}\pi\,(۴)^{۳} = \frac{۴}{۳}\pi\,(۱۰٫۰۸۸)$$ متر مکعب

قواعد مشتق‌گیری را می‌توان با نماد دیفرانسیل بیان کرد قضیهٔ زیر را بدون اثبات می‌آوریم:

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

۳.۷.۴ قضیه. اگر c عددی ثابت و $u(x)$ و $v(x)$ توابعی مشتق‌پذیر باشند داریم:

الف) $dc = 0$

ب) $r \in Q$ و $dx^r = rx^{r-1}dx$

پ) $d(cu) = c\,du$

ت $d(u+v) = du + dv$

ث) $d(\frac{u}{v}) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$

ج) $d(uv) = u\,dv + v\,du$

چ) $r \in Q$ و $d(u^r) = ru^{r-1}du$

منوی اصلی

۸.۴ چند کاربرد مشتق

در این قسمت به مطالعهٔ بیشتری روی توابع پیوسته و مشتق‌پذیر می‌پردازیم و پس از بحث روی قضایای رول و میانگین برخی از کاربردهای این قضایا را ذکر می‌کنیم و بالاخره، در پایان به کمک چند مثال متنوع بعضی از کاربردهای مسائل مربوط به ماکزیمم و مینیمم را بیان کرده و همچنین قاعدهٔ هوپیتال را شرح خواهیم داد.

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

۱.۸.۴ تعریف. تابع حقیقی f مفروض است:

الف) f را ناکاهشی می‌نامیم هرگاه برای همهٔ مقادیر $x_۱$ و $x_۲$ متعلق به قلمرو f داشته باشیم:

$$x_۱ < x_۲ \Rightarrow f(x_۱) \leq f(x_۲)$$

ب) f را افزایشی می‌نامیم هرگاه برای همهٔ مقادیر $x_۱$ و $x_۲$ متعلق به قلمرو f داشته باشیم:

$$x_۱ < x_۲ \Rightarrow f(x_۱) < f(x_۲)$$

طبق تعریف بالا هر تابع افزایشی، ناکاهشی نیز هست ولی عکس این موضوع لزوماً برقرار نیست.

منوی اصلی

مثال ۱. تابع $g(x)=x^{۲}$ را روی مجموعهٔ $\{x, x>۰\}$ در نظر بگیرید. اگر $x_{۱}<x_{۲}$ دو عنصر دلخواه در قلمرو g باشند، $x_{۱}^{۲}<x_{۲}^{۲}$ است یعنی

$$x_{۱}<x_{۲} \Rightarrow g(x_{۱})<g(x_{۲})$$

منوی اصلی

بنابراین اگر x افزایش یابد $g(x)$ نیز افزایش خواهد یافت یعنی g افزایشی است.

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

مثال ۲. تابع زیر مفروض است:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x \le 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$$

منوی اصلی

بنابراین برحسب علامت x_1 و x_2 داریم:

الف) $x_1 < x_2 \leq 0 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

ب) $x_1 \leq 0 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

ج) $0 < x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

در نتیجه اگر $x_1 < x_2$ باشد، $f(x_1) \leq f(x_2)$ خواهد بود یعنی اگر x افزایش یابد $f(x)$ یا ثابت می‌ماند یا افزایش خواهد یافت. ازاین‌رو f ناکاهشی است.

مشابه تعریف ۴ـ۸ـ۱، تعریف زیر را خواهیم داشت:

منوی اصلی

۲.۸.۴ تعریف. تابع حقیقی f مفروض است:

الف) f را ناافزایشی می‌نامیم اگر برای همهٔ مقادیر x_1 و x_2 متعلق به قلمرو f داشته باشیم:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

منوی اصلی

ب) f را کاهشی می‌نامیم اگر برای همهٔ مقادیر x_1 و x_2 متعلق به قلمرو f داشته باشیم:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

طبق تعریف بالا هر تابع کاهشی، ناافزایشی نیز هست ولی عکس این موضوع لزوماً برقرار نیست.

منوی اصلی

مثال ۱. تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x)=\begin{cases} -x & x\le 0 \\ -\sqrt{x} & x>0 \end{cases}$$

این تابع کاهشی است. (بررسی کنید).

مثال ۲. تابع g را طبق تعریف زیر در نظر بگیرید.

منوی اصلی

$$g(x)=\begin{cases} x^{۲} & x\leq ۰ \\ ۰ & x>۰ \end{cases}$$

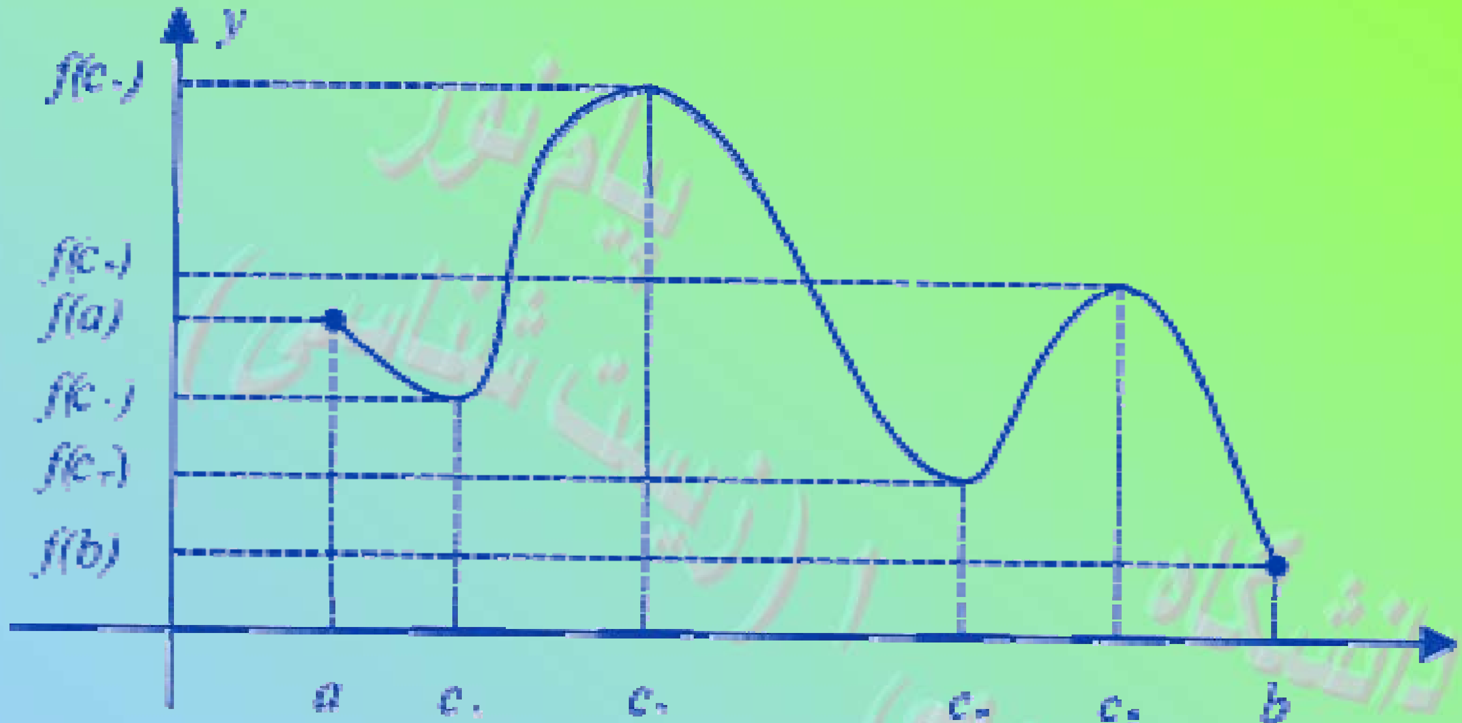
g تابعی ناافزایشی است (بررسی کنید).

۴.۸.۴ تعریف (تابع یکنوا). هر تابعی که یکی از چهار ویژگی افزایشی، کاهشی، ناافزایشی و یا ناکاهشی را داشته باشد یکنوا نامیده می‌شود. اینک مفهوم ماکزیمم و مینیمم یک تابع را بررسی خواهیم کرد.

۵.۸.۴ ماکزیمم و مینیمم نسبی و مطلق

فرض‌کنید تابع $f(x)$ درفاصلهٔ $[a,b]$ تعریف شده و نمایش هندسی آن به‌شکل زیر باشد:

منوی اصلی



با توجه به شکل مشاهده می‌کنیم که این تابع بیشترین مقدار خود را در نقطهٔ $x = c_2$ و کمترین مقدار را در نقطهٔ $x = b$ اختیار کرده است. بنابراین «ماکزیمم» این تابع

منوی اصلی

$x = c_2$ و کمترین مقدار را در نقطهٔ $x = b$ اختیار کرده است. بنابراین «ماکزیمم» این تابع برابر $f(c_2)$ و «مینیمم» این تابع برابر $f(b)$ خواهد بود. از طرفی اگر یک بازهٔ باز شامل c_1 را در نظر بگیرید (پاره‌خط شامل c_1 را در شکل ببینید). می‌بینیم که تابع f در این بازه

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

کمترین مقدار خود را در $x = c_1$ داراست به‌عبارت دیگر برای هر x از این بازه داریم:

$$f(c_1) < f(x)$$

در این صورت می‌گوییم که تابع f در c_1 دارای یک مینیمم نسبی است.

منوی اصلی

همچنین اگر یک بازهٔ باز شامل $x = c_4$ را در نظر بگیرید (پاره‌خط شامل c_4 را در شکل ببینید). می‌بینیم که تابع f در این بازه بیشترین مقدار خود را در $x = c_4$ دارد یا به‌عبارت دیگر برای هر x از این بازه داریم:

$$f(c_4) > f(x)$$

در این صورت می‌گوییم که تابع f در c_4 دارای یک ماکزیمم نسبی است.

منوی اصلی

۶.۸.۴ **تعریف.** فرض کنید عدد c در قلمرو تابع f باشد در این صورت:

الف) اگر بازه‌ای باز مانند $(a\,,b)$ در قلمرو شامل c وجود داشته باشد که به‌ازای هر x در $(a\,,b)$ ، $f(x)\leq f(c)$ آنگاه $f(c)$ را یک ماکزیمم نسبی f می‌نامیم.

ب) اگر بازهٔ بازی مانند $(a\,,b)$ در قلمرو شامل c وجود داشته باشد که به‌ازای هر x در $(a\,,b)$ ، $f(x)\geq f(c)$ آنگاه $f(c)$ را یک مینیمم نسبی f می‌نامیم.

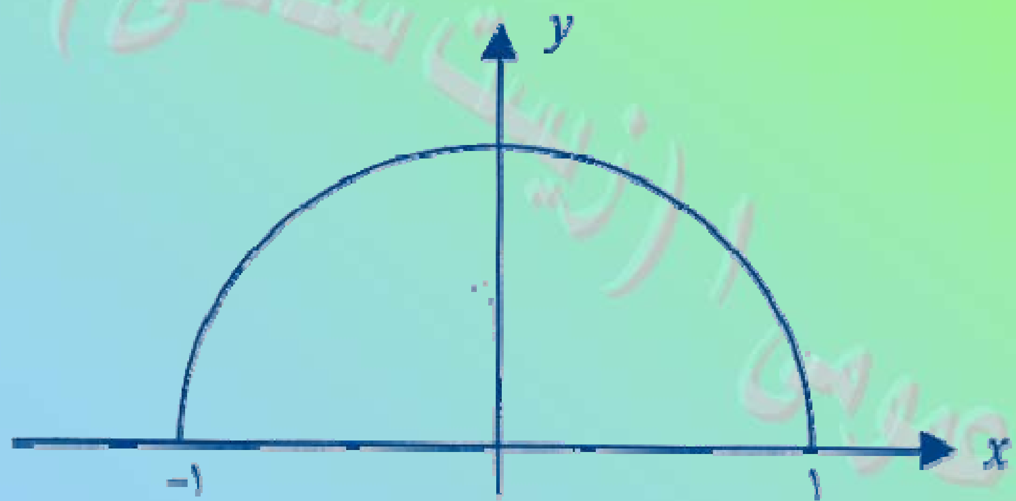
منوی اصلی

توجه. اگر تابعی در نقطهٔ $x = c$ دارای ماکزیمم یا مینیمم نسبی باشد گوییم f در $x = c$ یک اکستریمم نسبی دارد و دراین‌صورت $f(c)$ را مقدار اکستریمم نسبی تابع f می‌نامیم.

منوی اصلی

مثال ۱. تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x) = ۱ - x^{۲}\ ,\quad -۱ \leq x \leq ۱$$



منوی اصلی

طراح: رحمت سلطانی عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه پیام نور شیراز

همان‌طور که از شکل نیز ملاحظه می‌شود f در نقطهٔ $x = 0$ ماکزیمم نسبی دارد زیرا داریم:

$$x \in (-1,1) \Rightarrow 0 < x^2 < 1 \Rightarrow 1 - x^2 \leq 1 = f(0)$$

اما همان‌طوری که می‌بینید مقدار $f(0) = 1$ از جمیع مقادیر f در بازهٔ بسته $[-1, 1]$ بیشتر است برحسب تعریف گویند $f(0)$ ماکزیمم مطلق تابع f در این بازهٔ بسته است.

منوی اصلی

۷.۸.۴ تعریف. فرض کنید c و d دو عدد در قلمرو تابع f باشند. در این صورت $f(c) = M$ را ماکزیمم مطلق تابع f روی قلمروش گوییم هرگاه برای هر x در قلمرو تابع f داشته باشیم:

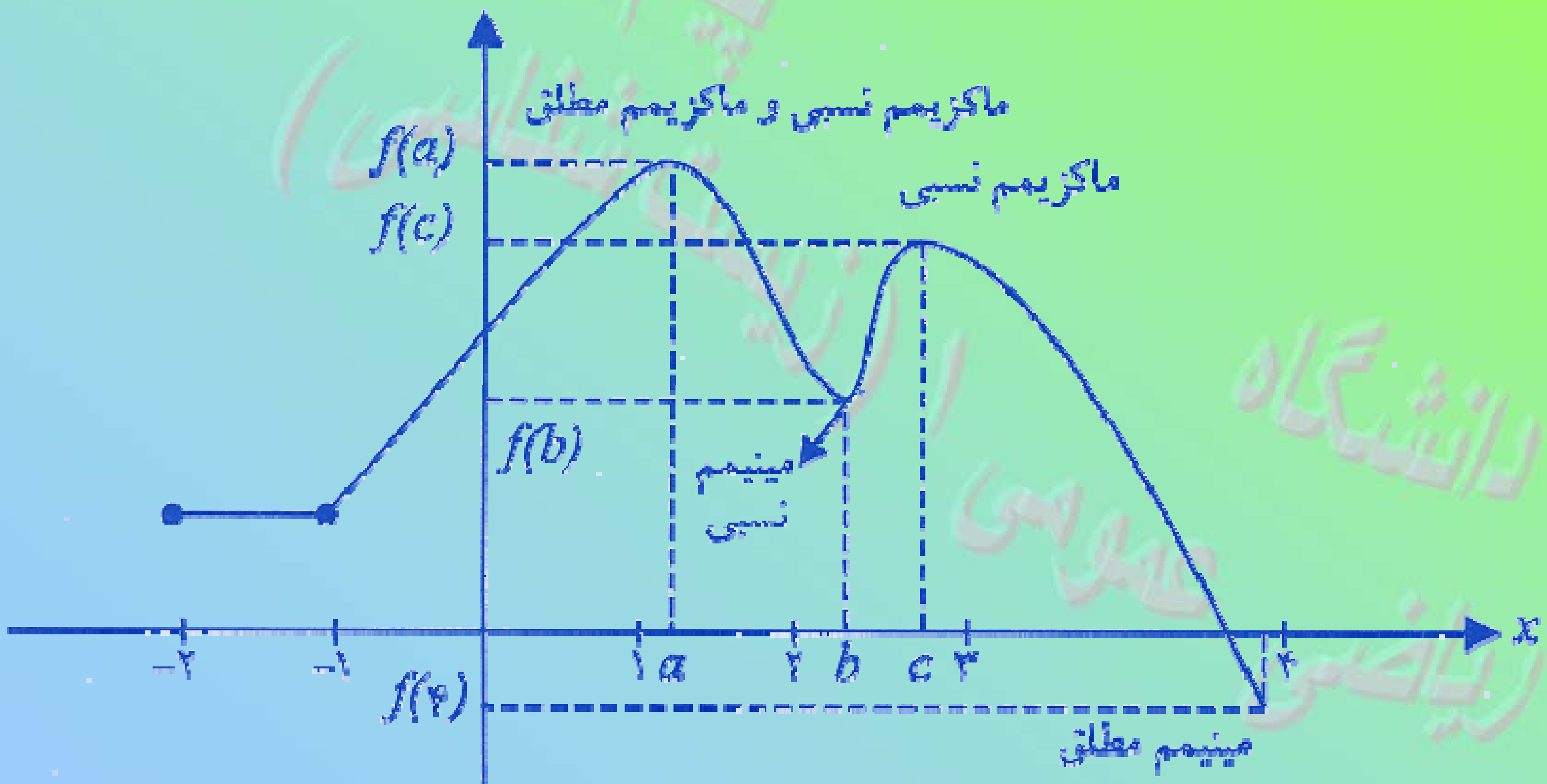
$$f(c) \geq f(x)$$

همین‌طور $f(d) = m$ را مینیمم مطلق تابع f روی قلمروش گوییم هرگاه برای هر x در قلمرو تابع f داشته باشیم:

$$f(d) \leq f(x)$$

منوی اصلی

مثال ۱. در شکل زیر تابع f روی فاصلهٔ $[-۲ , ۴]$ تعریف شده است.



منوی اصلی

با توجه به شکل می‌توان گفت:

$f(a)$ ماکزیمم نسبی و نیز ماکزیمم مطلق است. $f(b)$ مینیمم نسبی است ولی مطلق نیست. $f(c)$ ماکزیمم نسبی است ولی مطلق نیست. $f(۴)$ مینیمم مطلق است ولی نسبی نیست. برای هر t در بازهٔ $(-۲, -۱)$ مقدار $f(t)$ هم ماکزیمم نسبی و هم مینیمم نسبی است (چرا)؟

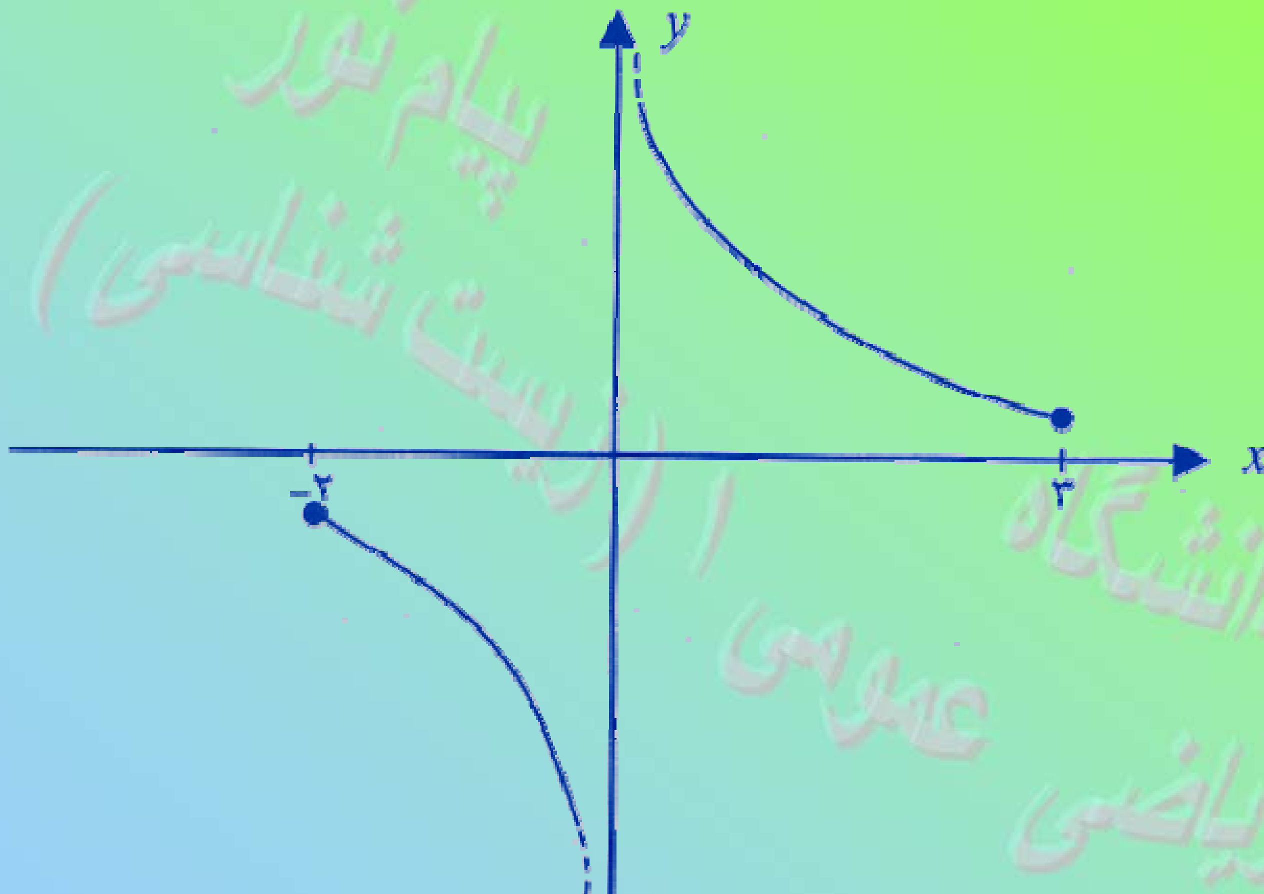
منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

تذکر. ممکن است تابعی روی مجموعه‌ای ماکزیمم یا مینیمم مطلق نداشته باشد (شکل زیر) ولی می‌توان نشان داد که اگر تابع f روی بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه در این بازه هم ماکزیمم مطلق و هم مینیمم مطلق خواهد داشت.

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور



f در [۳ و ۲-] ماکزیمم یا مینیمم مطلق ندارد.

منوی اصلی

۹.۴ رابطهٔ مشتق اول و ماکزیمم و مینیمم نسبی

تحت عنوان یک قضیهٔ نشان می‌دهیم که مشتق در نقاطی که تابع در آنها ماکزیمم یا مینیمم نسبی دارد صفر است.

۱.۹.۴ قضیه. اگر تابع f در $x = c$ که c متعلق به قلمرو f است، ماکزیمم یا مینیمم نسبی داشته باشد آنگاه $f'(c) = 0$ یا $f'(c)$ وجود ندارد.

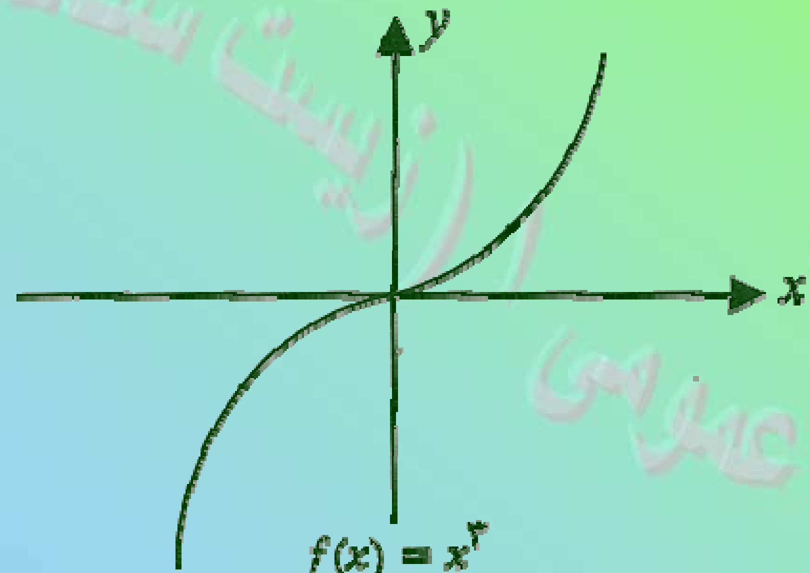
منوی اصلی

۲.۹.۴ نتیجه. اگر f در $x = c$ که c متعلق به قلمرو f است مشتق‌پذیر باشد و $f'(c) \neq 0$ آنگاه $f(c)$ یک اکستریمم نسبی f نیست. به‌عبارت دیگر ریشه‌های $f'(x) = 0$ نامزدهایی برای نقطهٔ اکستریمم نسبی هستند البته نامزدهای دیگری نیز وجود دارند.

توجه کنید که ممکن است مشتق f در نقطه‌ای صفر باشد ولی f در آن نقطه اکستریمم نسبی نداشته باشد به‌عبارت دیگر عکس قضیهٔ فوق همیشه درست نیست

منوی اصلی

مثلاً تابع $f(x)=x^3$ در $x=0$ مشتق دارد و $f'(0)=0$ ولی f در این نقطه نه ماکزیمم نسبی دارد و نه مینیمم نسبی.



$f(x)=x^3$

منوی اصلی

همچنین ممکن است تابعی در نقطه‌ای از قلمروش ماکزیمم نسبی یا مینیمم نسبی داشته باشد بدون اینکه در آن نقطه مشتق داشته باشد. مثلاً تابع $f(x) = |x|$ در $x = 0$ مینیمم نسبی دارد ولی مشتق ندارد.

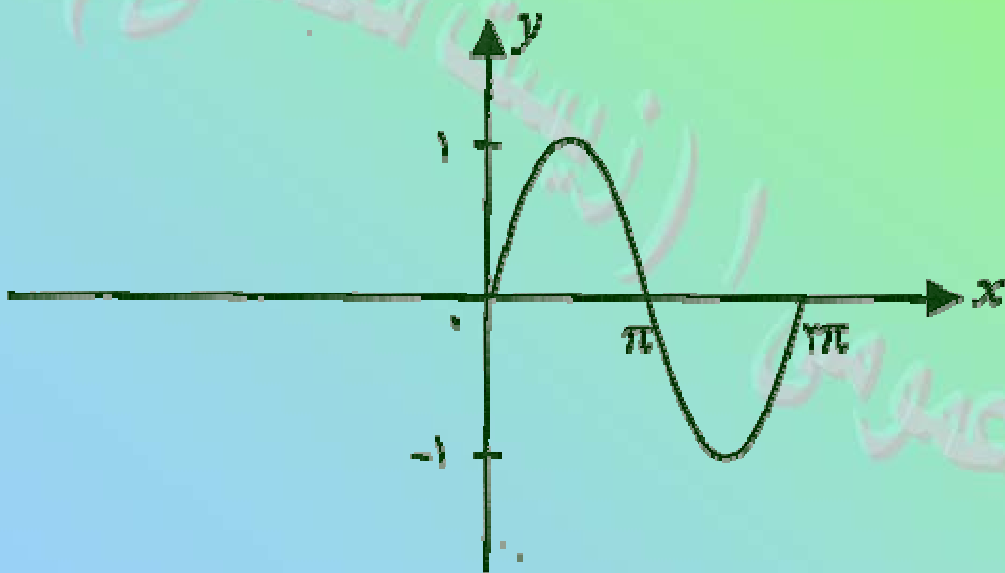
$f(x) = |x|$

منوی اصلی

۱۰.۴ وجود اکستریممهای مطلق و یافتن آنها

تابع پیوسته زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x) = \sin x \ , \quad 0 \le x \le 2\pi$$



منوی اصلی

f در $x = \frac{\pi}{۲}$ ماکزیمم مطلق و در $x = \frac{۳\pi}{۲}$ مینیمم مطلق دارد بنابراین تابع پیوسته f که قلمروش فاصله‌ای بسته است روی آن فاصله ماکزیمم و مینیمم مطلق دارد.

منوی اصلی

۱.۱۰.۴ قضیه. اگر f روی $[a, b]$ پیوسته باشد نقاطی مانند c, d در این فاصله وجود دارند به‌طوری که $f(c)$ مینیمم مطلق و $f(d)$ ماکزیمم مطلق f روی $[a, b]$ است. یعنی هر تابع که روی فاصلهٔ بسته‌ای پیوسته باشد روی آن فاصله ماکزیمم و مینیمم مطلق خواهد داشت.

منوی اصلی

بنابراین اگر $f(c)$ یک اکستریمم مطلق تابع پیوسته f در بازهٔ بسته $[a\ ,b]$ باشد در این صورت یکی از حالتهای زیر اتفاق می‌افتد:

الف) $c=a$ ب) $c=b$ ج) $c\in(a,b)$ و $f'(c)=0$ یا $f'(c)$ وجود ندارد.

با توجه به قضیهٔ فوق نقطه‌هایی از قلمرو f که مشتق آنها وجود ندارد یا مشتق در این نقاط صفر است از اهمیت فوق‌العاده‌ای برخوردارند. این نقاط را نقاط بحرانی f می‌نامیم.

منوی اصلی

مثال ۱. نقاط بحرانی توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=\sqrt{x^{۲}-۱۶}$

ب) $f(x)=|x|$

ج) $f(x)=۲$

منوی اصلی

حل: الف) $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-16}}$, $f'(x)=0 \Rightarrow x=0$

$f'(x)$ به‌ازای $x=\pm 4$ نامعین است صفر در قلمرو f نیست (چرا؟) ولی ± 4 در قلمرو f هستند. پس ± 4 تنها نقاط بحرانی f هستند.

منوی اصلی

ب) $f'(0)$ وجود ندارد پس صفر تنها نقطهٔ بحرانی f است.

ج) برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم $f'(x) = 0$ بنابراین هر عدد حقیقی یک نقطهٔ بحرانی این تابع است.

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

۱۱.۴ اکستریممهای نسبی

در این قسمت قضایای مهم رول و میانگین را بیان کرده و به کمک آنها روش عملی برای محاسبهٔ اکستریممهای نسبی یک تابع به‌دست می‌آوریم.

منوی اصلی

قضایای رول و میانگین. دیدیم که مقادیر اکستریممهای مطلق تابع f در بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ تنها می‌تواند به‌ازای نقاط ابتدایی یا انتهایی $[a,b]$ و یا نقطه‌های بحرانی f که متعلق به بازهٔ (a,b) هستند به‌دست آید. اما گاهی تضمین برای وجود نقاط بحرانی وجود ندارد. قضیهٔ زیر تحت عنوان قضیهٔ رول شرطهای کافی برای وجود نقطهٔ بحرانی را فراهم می‌کند.

منوی اصلی

۱.۱۱.۴ قضیهٔ رول

اگر تابع f در بازهٔ بسته $[a,b]$ پیوسته و در بازهٔ باز (a,b) مشتق‌پذیر و $f(a)=f(b)$ باشد

آنگاه عددی مانند c، $c\in(a,b)$ وجود دارد به‌طوری که: $f'(c)=0$.

منوی اصلی

این قضیه بیان می‌کند که بین هر دو نقطه که در آنها نمودار تابع $y = f(x)$ محور xها را قطع می‌کند باید لااقل یک نقطه باشد به‌طوری که مماس بر منحنی در آن نقطه افقی باشد. اما ممکن است که منحنی دارای گوشه‌ای تیز باشد که در آن مشتق وجود ندارد که در این صورت چنین نخواهد بود.

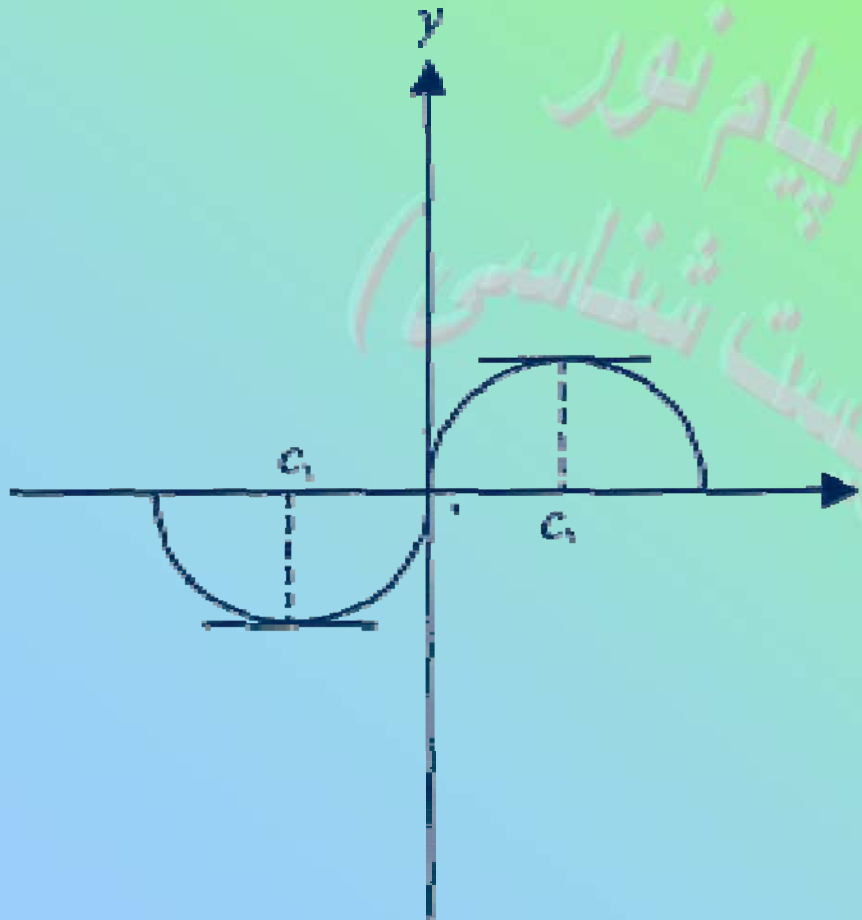
منوی اصلی

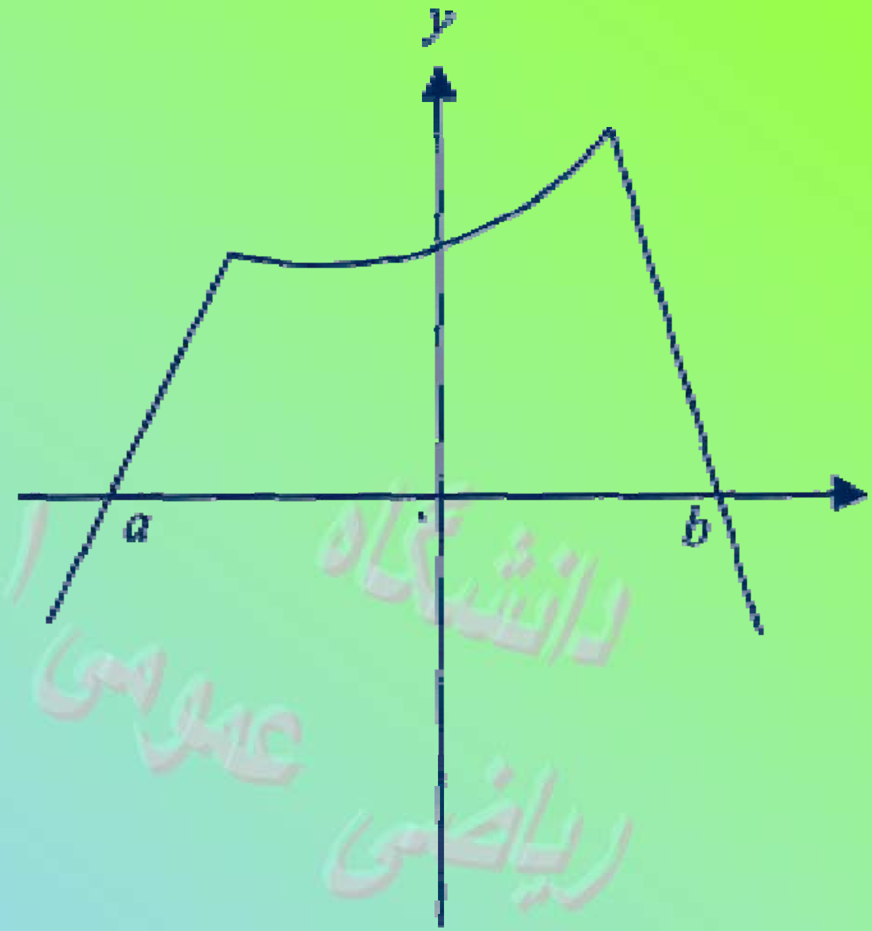
۲.۱۱.۴ نتیجه. اگر f در بازهٔ بسته $[a\,,b]$ پیوسته باشد و $f(a)=f(b)$ آنگاه f دست‌کم یک نقطهٔ بحرانی در بازهٔ باز $(a\,,b)$ دارد.

اثبات: بدیهی است اگر f در بازهٔ $(a\,,b)$ مشتق‌پذیر باشد بنابر قضیهٔ رول نقطهٔ بحرانی c در بازهٔ $(a\,,b)$ وجود دارد. از طرفی اگر f به‌ازای عددی مانند c در بازهٔ $(a\,,b)$ مشتق‌پذیر نباشد آنگاه بنابه تعریف c خود یک نقطهٔ بحرانی است.

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور





منوی اصلی

مثال ۱. نقاطی از منحنی $f(x)=x^{۳}-۴x$ و $x\in[-۲,۲]$ را تعیین کنید که مماس در آن نقاط موازی محور xهاست.

منوی اصلی

حل: $f(x)$ به‌ازای تمام مقادیر $x \in \mathbf{R}$ پیوسته و مشتق‌پذیر است پس با توجه به اینکه $f(۲) = f(-۲) = ۰$ فرضهای قضیهٔ رول برقرار است بنابراین عددی مانند c بین ۲ و ۲− وجود دارد که $f'(c) = ۰$ برای به‌دست آوردن c چنین عمل می‌کنیم:

$$f'(x) = ۳x^۲ - ۴ = ۰$$

$$\Rightarrow x = \pm \frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$$

پس نقاطی به طول $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ و $-\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ نقاطی‌اند که مماس بر منحنی در آنها موازی محور xهاست.

منوی اصلی

مثال ۲. فرض کنید $f(x)=x^{۲}-۲x-۸$ و $[a,b]=[-۲,۴]$ نشان دهید که f در شرطهای قضیهٔ رول صدق می‌کند و درستی قضیه را بررسی کنید.

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

حل: هر تابع چند جمله‌ای به‌ازای تمام مقادیر $x \in \mathbf{R}$ پیوسته و مشتق‌پذیر است و f نیز چنین است همچنین $f(-۲) = f(۴) = ۰$ پس شرایط قضیهٔ رول برقرار است برای یافتن c قرار می‌دهیم:

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow ۲x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = c = ۱$$

چون $۱ \in (-۲ , ۴)$ و $f'(۱) = ۰$ پس قضیهٔ رول برای f در بازهٔ $[-۲ , ۴]$ صادق است.

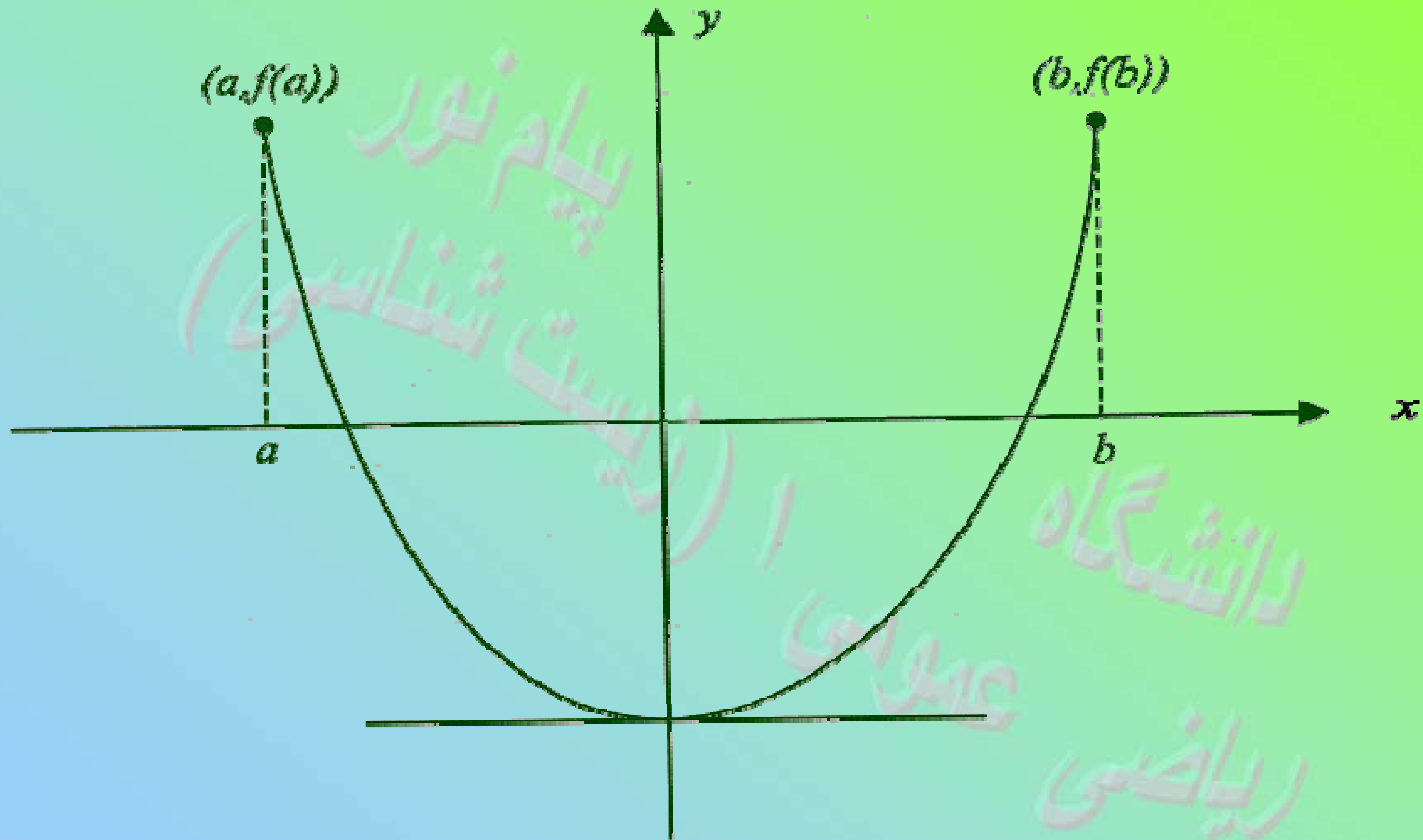
منوی اصلی

طراح: رحمت سلطانی عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه پیام نور شیراز

۳.۱۱.۴ قضیه مقدار میانگین

در قضیهٔ رول دیدیم که شیب خط مماس بر نمودار f در نقطهٔ $(c, f(c))$ برابر صفر بود زیرا $f(a)=f(b)$ لذا هر خط دیگر که از نقاط $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$ می‌گذرد نیز دارای شیب صفر است.

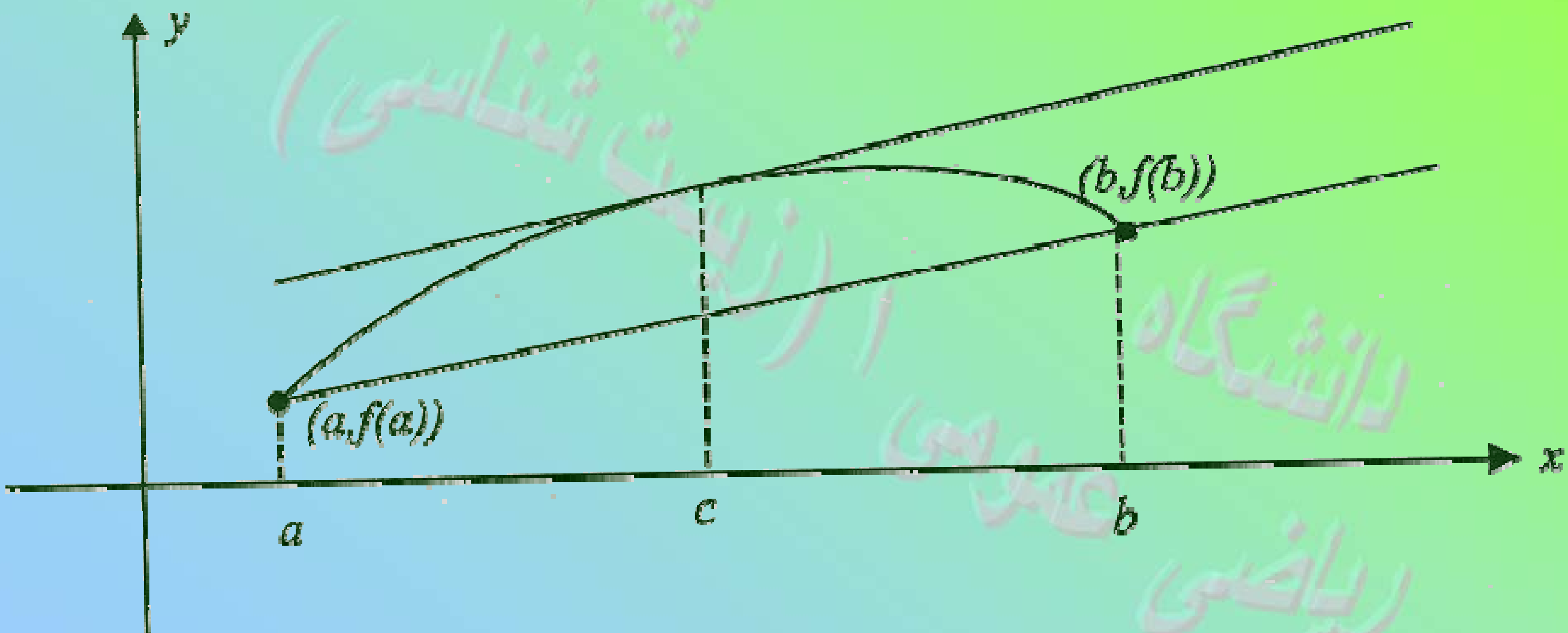
منوی اصلی



منوی اصلی

حال قضیه‌ای مشابه قضیهٔ رول موجود است که در آن $f(a) \neq f(b)$ یعنی عدد c در بازهٔ باز (a, b) موجود است که مماس بر نمودار f در نقطهٔ $(c, f(c))$ موازی خط گذرا از نقاط $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$ است. (شکل زیر را ببینید).

منوی اصلی



منوی اصلی

چون دو خط موازی‌اند اگر و فقط اگر دارای شیب یکسان باشند پس می‌خواهیم ببینیم که آیا عددی مانند c در بازهٔ (a, b) موجود است که:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

و این همان قضیهٔ مقدار میانگین است که اکنون آن را بیان می‌کنیم.

منوی اصلی

۴.۱۱.۴ قضیه. فرض کنید f در بازهٔ بستهٔ $[a\,,b]$ پیوسته و در بازهٔ باز $(a\,,b)$ مشتق‌پذیر باشد در این صورت عددی مانند c در بازهٔ باز $(a\,,b)$ موجود است به‌طوری که:

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

منوی اصلی

۵.۱۱.۴ نتیجه. الف) فرض کنید f در بازهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد اگر به‌ازای هر x در بازهٔ (a,b) ، $f'(x)=0$ آنگاه مقدار f در $[a,b]$ ثابت است.

ب) فرض کنید f و g در بازهٔ $[a,b]$ پیوسته باشند اگر به‌ازای هر x در بازهٔ (a,b) ، $f'(x)=g'(x)$ آنگاه مقدار $f(x)-g(x)$ در بازهٔ $[a,b]$ ثابت است (به‌عبارت دیگر بر $[a,b]$ ، $f=g$ می‌باشد).

منوی اصلی

۶.۱۱.۴ چند کاربرد قضیهٔ مقدار میانگین

این قضیهٔ کاربردهای نظری و کاربردی فراوانی دارد که به چند مورد آنها اشاره می‌کنیم:

الف) نشان دهید که به‌ازای هر x در $[0, 2\pi]$، $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

$$f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$$

f در بازهٔ بسته $[0, 2\pi]$ پیوسته و به‌ازای هر $x \in [0, 2\pi]$ داریم:

$$f'(x) = 2\sin x \cos x - 2\cos x \sin x = 0$$

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

پس تابع f در بازهٔ بستهٔ $[0\,,\,2\pi]$ ثابت است چون $f(0)=1$ پس مقدار ثابت f در بازهٔ $[0\,,\,2\pi]$ برابر با یک است یعنی به‌ازای هر $x\in[0\,,\,2\pi]$ داریم $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x=1$

منوی اصلی

ب) اگر $f(x)=x^{2}+5x$. نقطه‌ای را بر روی منحنی این تابع تعیین کنید که مماس بر آن موازی با وتری باشد که از نقاطی به طولهای $x=2$ و $x=0$ می‌گذرد.

حل: با استفاده از قضیهٔ مقدار میانگین داریم:

$$f(2)-f(0)=(2-0)f'(c)$$ (حداقل برای یک c ، $c\in(0,2)$)

$$14-0=2(2c+5)\Rightarrow c=4$$

نقطهٔ موردنظر $(4,36)$ است که مماس در این نقطه موازی وتر گذرنده از نقاط به طول $x=0$ و $x=2$ است.

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

۱۲.۴ تعیین ماکزیمم و مینیمم نسبی

۱.۱۲.۴ قضیه (آزمون یکنوایی)

فرض کنید تابع f در فاصلهٔ بستهٔ $[a\,,b]$ پیوسته و در فاصلهٔ $(a\,,b)$ مشتق داشته باشد.

آنگاه:

۱. اگر برای جمیع مقادیر $x \in (a\,,b)$ ، $f'(x) > 0$ باشد f افزایشی خواهد بود.

۲. اگر برای جمیع مقادیر $x \in (a\,,b)$ ، $f'(x) < 0$ باشد f کاهشی خواهد بود.

منوی اصلی

مثال ۱. فرض کنید $f(x)=x^{۲}+۵x+۲$ بازه‌هایی را که f در آنها افزایشی و بازه‌هایی را که f در آنها کاهشی است تعیین کنید.

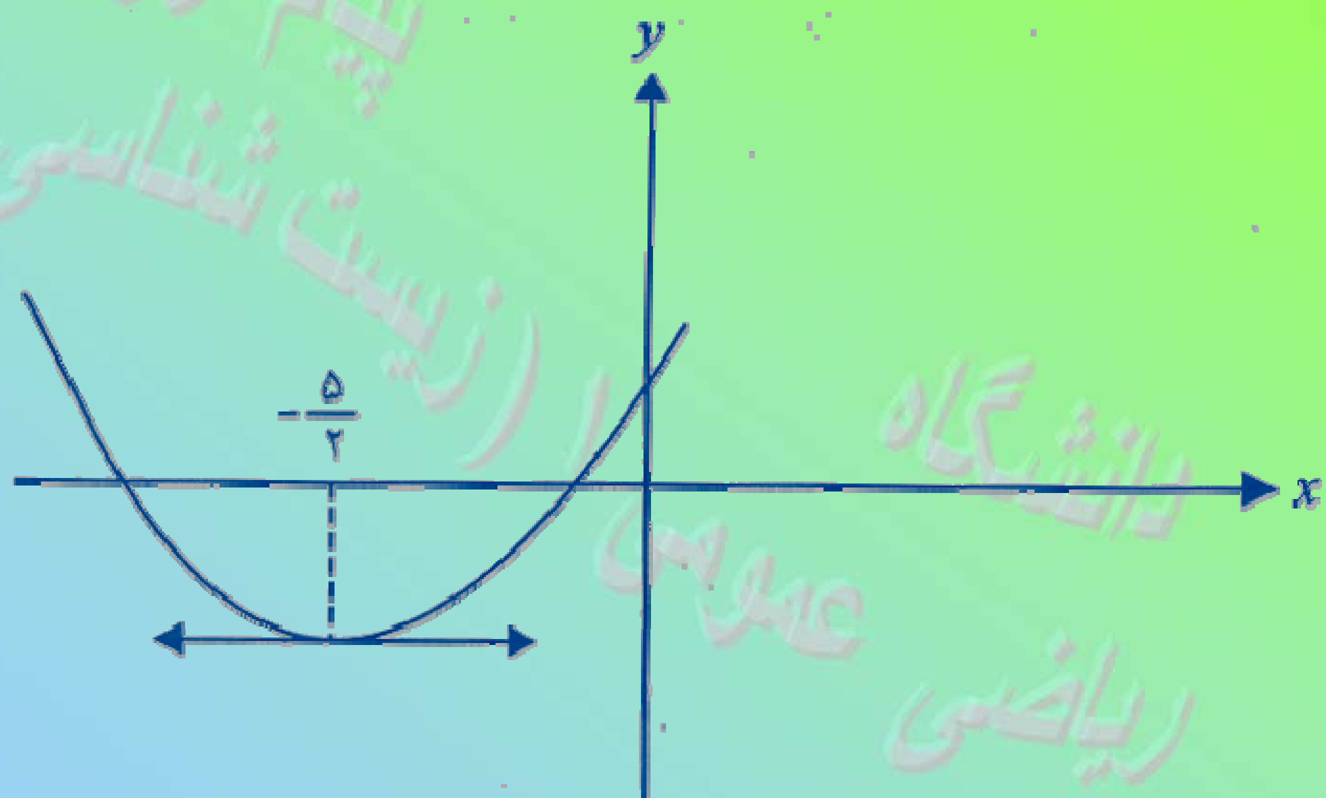
حل: $f'(x)=۰ \Rightarrow ۲x+۵=۰ \Rightarrow x=-\frac{۵}{۲}$

x	$-\infty$	$\frac{-۵}{۲}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	۰	$+$
$f(x)$	کاهش		افزایش

پس تابع f در بازهٔ $(-\infty, \frac{-۵}{۲}]$ کاهشی و در بازهٔ $[\frac{-۵}{۲}, +\infty)$ افزایشی است.

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور



منوی اصلی

۳.۱۲.۴ قضیه (آزمون مشتق اول). فرض کنید f بر $[a,b]$ پیوسته و c یک نقطهٔ بحرانی تابع f دربازهٔ باز (a,b) باشد،

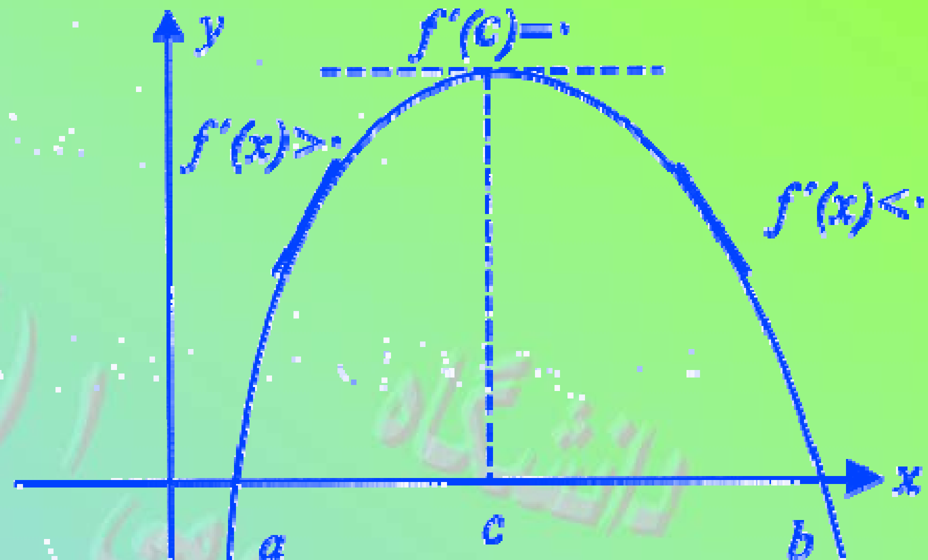
الف) اگر روی (a,c)، $f'(x)>0$ و روی (c,b)، $f'(x)<0$ و آنگاه $f(c)$ یک ماکزیمم نسبی f است

ب) اگر روی (a,c)، $f'(x)<0$ و روی (c,b)، $f'(x)>0$ آنگاه $f(c)$ یک مینیمم نسبی f است.

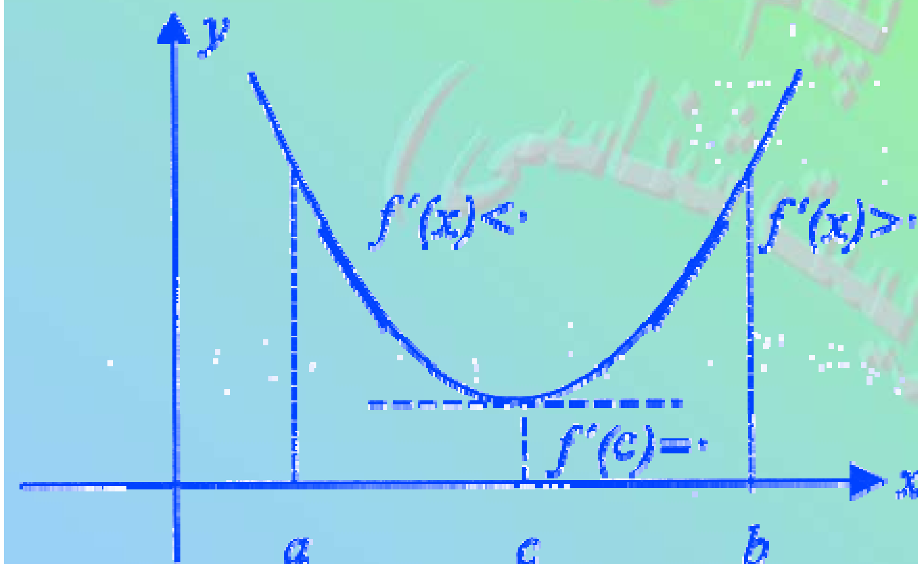
ج) اگر (الف) و (ب) برقرار نباشند f در $x=c$ ماکزیمم نسبی یا مینیمم نسبی ندارد. به شکلهای زیر توجه کنید:

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

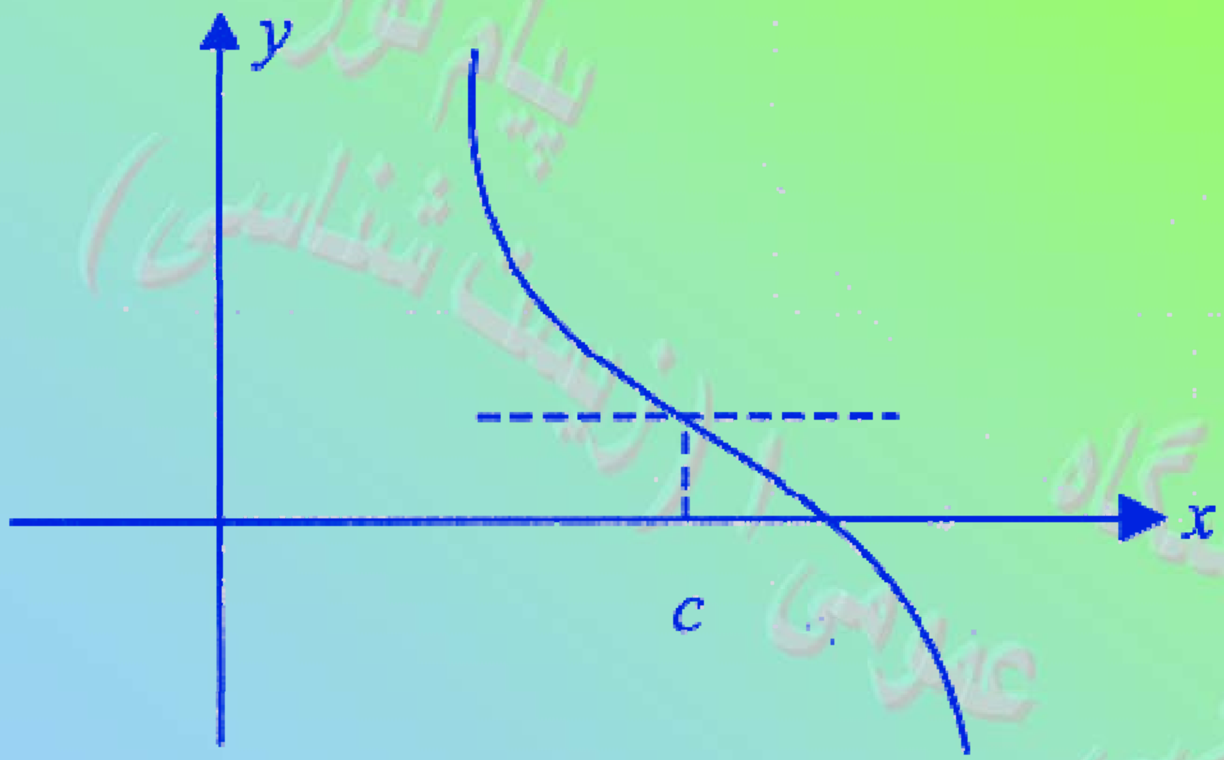


(الف)



(ب)

منوی اصلی



ج)

منوی اصلی

در شکل (ج)، c یک نقطهٔ بحرانی f است و $f'(x)$ تغییر علامت نداده همیشه منفی است f در c اکستریمم نسبی ندارد.

به‌طور خلاصه آزمون مشتق اول بیان می‌کند که اگر $f'(x)$ در نقطهٔ بحرانی $x = c$ از مثبت به منفی تغییر علامت دهد $f(c)$ ماکزیمم نسبی f و اگر $f'(x)$ در نقطهٔ بحرانی $x = c$ از منفی به مثبت تغییر علامت دهد $f(c)$ مینیمم نسبی f است.

منوی اصلی

x	$-\infty$		۱		۳		∞
$f'(x)$		+	۰	−	۰	+	
$f(x)$		افزایشی		کاهشی		افزایشی	

۱ = مینیمم نسبی   ۶ = ماکزیمم نسبی

منوی اصلی

مثال ۱. ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع $f(x)=x^{3}-6x^{2}+9x+2$ را با استفاده از آزمون مشتق اول به‌دست آورید.

$$f'(x)=3x^{2}-12x+9$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow x=1\ ,\ x=3$$ ؛ نقاط بحرانی

منوی اصلی

۵.۱۲.۴ قضیه (آزمون مشتق دوم). فرض کنید c یک نقطهٔ بحرانی تابع f بوده و $f'(c) = ۰$ باشد همچنین f' و f'' در یک بازهٔ باز شامل c وجود داشته باشند در این صورت:

الف) اگر $f''(c) < ۰$ آنگاه f در c ماکزیمم نسبی دارد.

منوی اصلی

ب) اگر $f''(c) > 0$ آنگاه f در c مینیمم نسبی دارد.

ج) اگر $f''(c) = 0$ آزمون مشتق دوم برای تعیین نوع نقطهٔ بحرانی به کار نمی‌رود.

منوی اصلی

مثال ۱. آزمون مشتق دوم را برای تابع $f(x)=x^{۲}+\frac{۳}{x}$ به کار ببرید.

$$f'(x)=۳x^{۲}-\frac{۳}{x^{۲}}=۰ \Rightarrow x^{۴}-۱=۰ \Rightarrow x=\pm ۱$$

نقاط بحرانی عبارت‌اند از $(۱,۴)$ و $(-۱,-۴)$.

منوی اصلی

برای تعیین نوع نقطه، مشتق دوم را حساب می‌کنیم:

$$f''(x) = ۶x + \frac{۶}{x^{۳}}$$

پس تابع در نقطهٔ $x = ۱$ مینیمم نسبی دارد. $f''(۱) = ۶ + ۶ = ۱۲ > ۰$

تابع در نقطهٔ $x = -۱$ ماکزیمم نسبی دارد. $f''(-۱) = -۶ - ۶ = -۱۲ < ۰$

منوی اصلی

طراح: رحمت سلطانی عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه پیام نور شیراز

از آنچه تاکنون دربارهٔ ماکزیمم و مینیمم یک تابع دیده‌ایم می‌توانیم بگوییم که ماکزیمم و مینیمم‌های نسبی یک تابع روی فاصلهٔ $[a\,,b]$ فقط در نقاط بحرانی تابع که در $(a\,,b)$ قرار دارند اتفاق می‌افتد به‌عبارت دیگر اگر $f(c)$ ماکزیمم یا مینیمم نسبی تابع f باشد

منوی اصلی

حتماً c یک نقطهٔ بحرانی f است پس برای پیداکردن نقاطی که تابع در آنها ماکزیمم یا مینیمم نسبی دارد ابتدا نقاط بحرانی را پیداکرده و سپس با استفاده از آزمون مشتق اول یا دوم تعیین می‌کنیم که تابع در کدام یک از این نقاط ماکزیمم نسبی و در کدام یک مینیمم نسبی دارد. و در کدام یک، نه ماکزیمم نسبی و نه مینیمم نسبی. برای پیداکردن ماکزیمم

منوی اصلی

و مینیمم مطلق تابع در فاصلهٔ $[a , b]$ ابتدا ماکزیمم و مینیمم‌های نسبی تابع را در این فاصله پیدا می‌کنیم سپس مقدار تابع را در نقاط انتهایی $x = a$ و $x = b$ محاسبه و با ماکزیمم و مینیمم‌های نسبی مقایسه می‌کنیم در این میان آنکه از همه بزرگتر است ماکزیمم مطلق و آنکه از همه کوچکتر است مینیمم مطلق خواهد بود.

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

۱۳.۴ تقعر و تحدب یک منحنی و نقطهٔ عطف

از مشتق اول یک تابع برای افزایشی و کاهشی بودن آن استفاده نمودیم در این قسمت ملاحظه خواهد شد که از مشتق دوم تابع برای تحدب و تقعر و نقطهٔ عطف منحنی استفاده می‌کنیم. ابتدا به تعریف تقعر و تحدب می‌پردازیم.

منوی اصلی

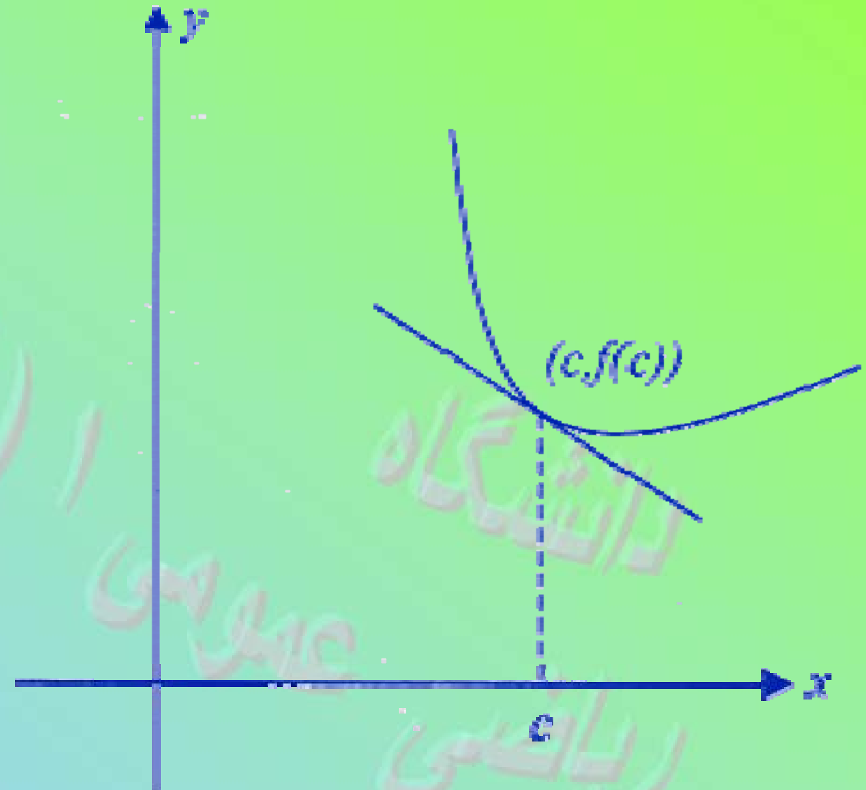
۱.۱۳.۴ تحدب و تقعر یک منحنی

منحنی تابع f را دارای تقعر به طرف بالا (تحدب به طرف پایین) در نقطهٔ $x = c$ می‌خوانند هرگاه در نقطهٔ $(c, f(c))$ اولاً مشتق داشته باشد ($f'(c)$ موجود باشد) و ثانیاً بازهٔ بازی مانند (a, b) شامل c موجود باشد به‌طوری که به‌ازای هر x در (a, b) به جز $x = c$ نقاط $(x, f(x))$ بالای خط مماس بر منحنی f در نقطهٔ $(c, f(c))$ قرار داشته باشد.

منوی اصلی

تقعر به طرف پایین (تحدب به طرف بالا) نیز به نحو مشابه تعریف می‌شود. به شکلهای زیر توجه کنید.

ب) تقعر به طرف پائین



الف) تقعر به طرف بالا

منوی اصلی

اگر منحنی $y=f(x)$ در نقطهٔ $x=c$ مماس داشته باشد معادلهٔ آن عبارت است از:

$$y-f(c)=f'(c)(x-c)$$

برای تعیین تقعر یا تحدب یک منحنی باید تغییرات شیب مماس بر آن را بررسی کرد یعنی باید علامت $f''(x)$ را بررسی کرد. قضیهٔ زیر آزمونی برای تعیین تقعر یا تحدب است.

منوی اصلی

۲.۱۳.۴ قضیه. اگر $f''(x)$ در بازهٔ باز (a, b) که شامل c است موجود باشد آنگاه:

الف) اگر $f''(c) > 0$ آنگاه تقعر نمودار f در c به طرف بالاست.

ب) اگر $f''(c) < 0$ آنگاه تقعر نمودار f در c به طرف پایین است.

مثال ۱. به فرض آنکه $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ بازه‌هایی را بیابید که نمودار f بر آنها به طرف بالا و پایین تقعر داشته باشد.

منوی اصلی

حل:

$$f'(x)=۱۲x^۳-۱۲x^۲=۱۲x^۲(x-۱)=۰ \Rightarrow x=۰ , x=۱$$

$$f''(x)=۳۶x^۲-۲۴x=۳۶x\left(x-\frac{۲}{۳}\right)$$

$f''(۱)=۱۲>۰ \Rightarrow f(۱)=-۱$ مینیمم نسبی

$f''(۰)=۰ \Rightarrow$ آزمون مشتق دوم نمی‌تواند اعمال شود

منوی اصلی

x	$-\infty$	$\circ$		$\frac{۲}{۳}$	∞
x	$-$	$\circ$	$+$		$+$
$x-\frac{۲}{۳}$	$-$		$-$	$\circ$	$+$
$f''(x)$	$+$		$-$		$+$

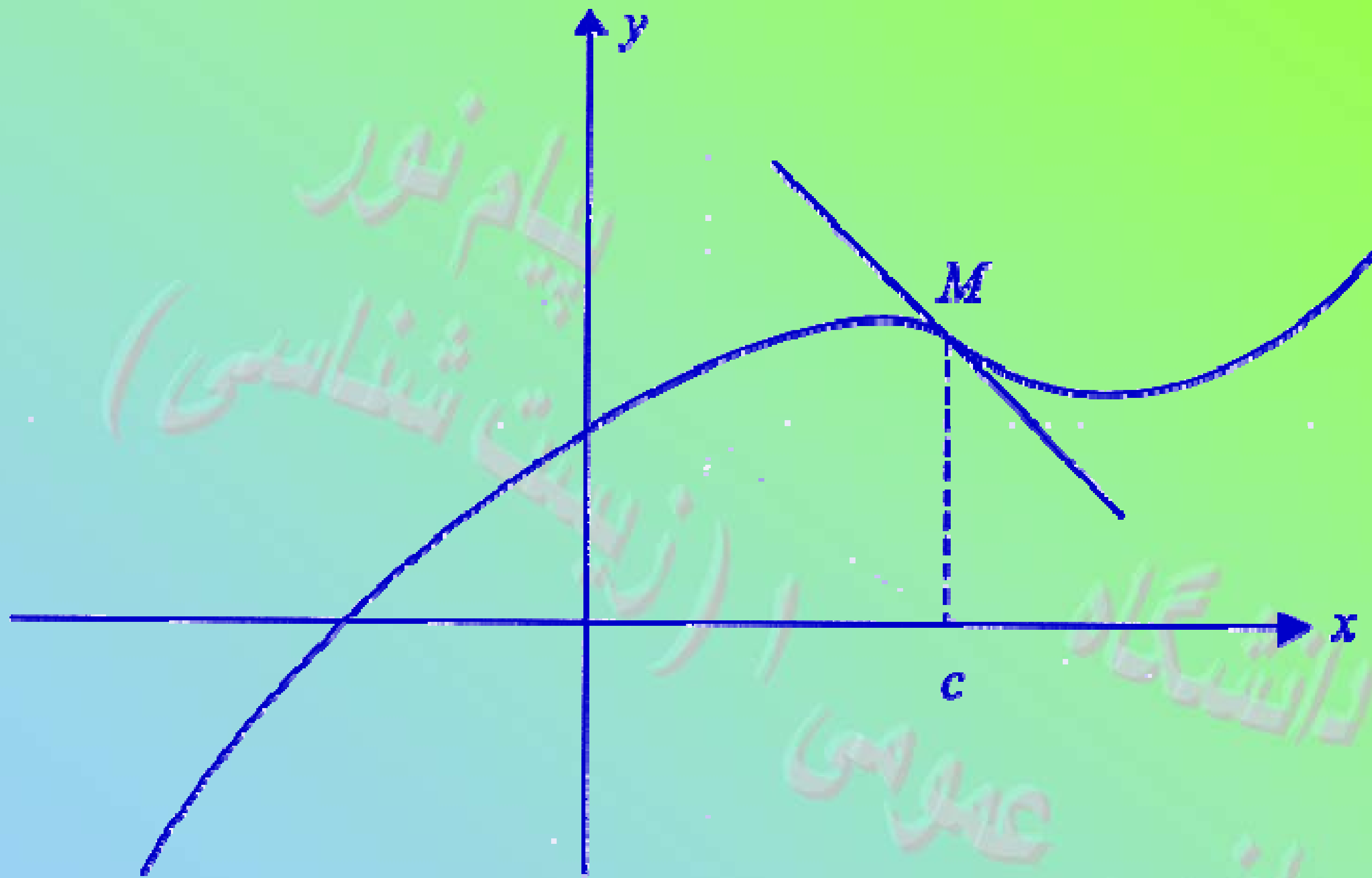
بنابراین با توجه به قضیه نمودار f بر $(-\infty,\circ)$ و $(\frac{۲}{۳},\infty)$ به طرف بالا مقعر و بر $(\circ,\frac{۲}{۳})$ به طرف پایین مقعر است.

منوی اصلی

۱۴.۴ نقطهٔ عطف

نقطهٔ خاصی را در نظر می‌گیریم که واقع بر منحنی باشد و مماس بر منحنی، نمودار را به‌صورت شکل زیر قطع کند.

منوی اصلی



یعنی تقعر نمودار در نقطهٔ M تغییر کرده است چنین نقاطی را نقاط عطف گویند.

منوی اصلی

۱.۱۴.۴ تعریف. نقطهٔ $M(c, f(c))$ از نمودار تابع f را نقطهٔ عطف می‌نامیم اگر بازهٔ بازی مانند (a, b) که شامل c است وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر x در فاصلهٔ (a, c) ، $f''(x) > 0$ و برای هر x در فاصلهٔ (c, b) $f''(x) < 0$ باشد و یا برعکس.

می‌توان نشان داد که اگر $(c, f(c))$ نقطهٔ عطف نمودار f باشد و $f''(c)$ وجود داشته باشد در این صورت لازم است که $f''(c) = 0$. البته عکس این مطلب برقرار نیست

منوی اصلی

مثلاً تابع $f(x)=x^4$ را در نظر بگیرید. در این صورت برای این تابع $f''(x)=12x^2$ و به‌ازای جمیع مقادیر $x \neq 0$ داریم $f''(x)>0$ و این منحنی همه جا مقعر است در حالی که داریم $f''(0)=0$.

همچنین نقطهٔ $(c, f(c))$ ممکن است نقطهٔ عطف یک منحنی باشد بدون اینکه

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

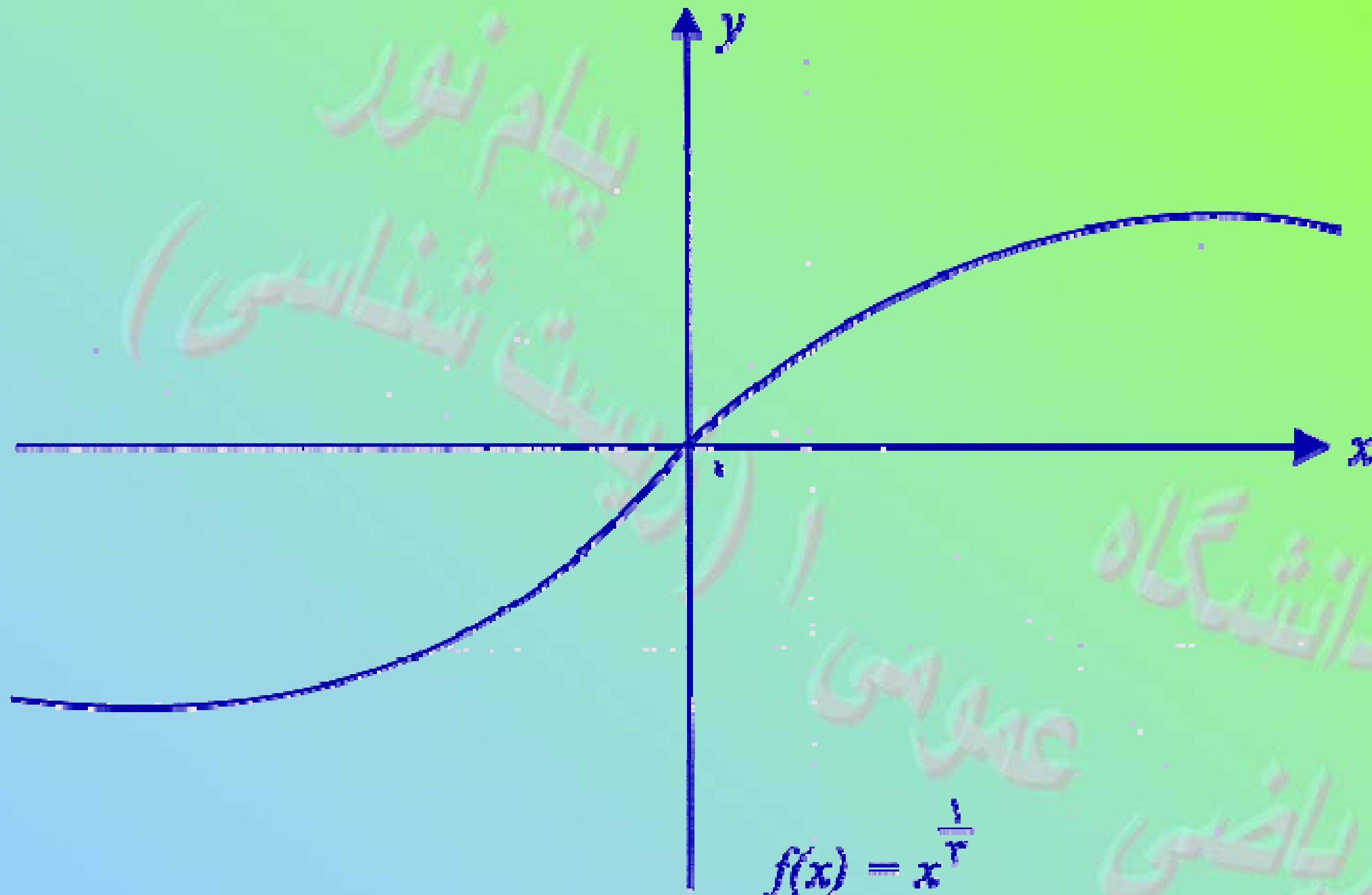
مشتق دوم f در آن نقطه وجود داشته باشد مثلاً تابع $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ را در نظر بگیرید.

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}} \quad , \quad f''(x) = \frac{-2}{9}x^{\frac{-5}{3}}$$

اگر $x < 0$ آنگاه $f''(x) > 0$ و اگر $x > 0$ آنگاه $f''(x) < 0$ پس $(0 , 0)$ یک نقطهٔ عطف است در حالی که $f''(0)$ وجود ندارد. (به شکل زیر توجه کنید).

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور



منوی اصلی

طراح: رحمت سلطانی عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه پیام نور شیراز

مثال ۱. ماکزیمم و مینیمم نسبی و نقطهٔ عطف تابع $f(x)=x^{۳}-۳x^{۲}$ را پیدا کنید.

حل:

$$f'(x)=۳x^{۲}-۶x=۰ \Rightarrow x=۰ \quad , \quad x=۲$$

نقاط بحرانی $(۰,۰)$, $(۲,-۴)$

$$f''(x)=۰ \Rightarrow ۶x-۶=۰ \Rightarrow x=۱$$

منوی اصلی

برای تعیین نوع نقاط بحرانی از علامت مشتق دوم استفاده می‌کنیم:

$f''(۰) = -۶ < ۰$ پس نقطه $(۰\,,\,۰)$ ماکزیمم نسبی است

$f''(۲) = ۶ > ۰$ یعنی نقطه $(۲\,,\,-۴)$ مینیمم نسبی است

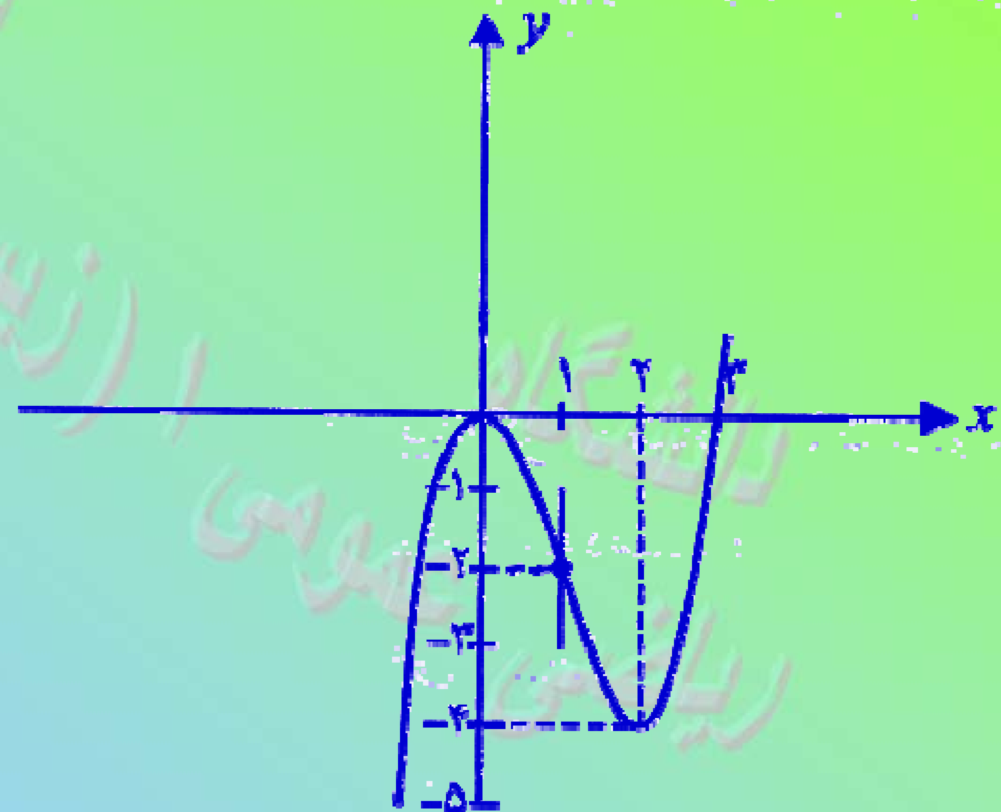
منوی اصلی

برای اینکه، ببینیم آیا نقطهٔ $(1, -2)$ عطف است یا نه می‌توان نشان داد که مشتق دوم در نقطهٔ $(1, -2)$ تغییر علامت می‌دهد یا نه؟ اگر $x < 1$ باشد داریم $f''(x) < 0$ و اگر $x > 1$ باشد در این صورت $f''(x) > 0$ یعنی $f''(x)$ در $x = 1$ تغییر علامت

منوی اصلی

می‌دهد و بنابراین نقطهٔ (۲− , ۱) نقطهٔ عطف منحنی تابع است.

	$-\infty$	۱	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	۰	$+$



منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

بنابراین یکی از روشهای تعیین نوع نقطهٔ بحرانی $x = a$ استفاده از مشتق دوم یعنی $f''(a)$ است.

الف) اگر $f''(a) < 0$ باشد نقطهٔ بحرانی ماکزیمم نسبی است.

ب) اگر $f''(a) > 0$ باشد نقطهٔ بحرانی مینیمم نسبی است.

ج) اگر $f''(a) = 0$ آنگاه باید به موارد زیر توجه کنیم:

منوی اصلی

۱. اگر در یک بازهٔ باز شامل a ، برای هر $x \neq a$، همواره $f''(x) < 0$ ، آنگاه نقطهٔ بحرانی ماکزیمم نسبی است

۲. اگر در این بازهٔ باز، برای هر $x \neq a$، $f''(x) > 0$ ، آنگاه نقطهٔ بحرانی مینیمم نسبی است.

۳. اما اگر در بازهٔ بازی شامل a علامت $f''(x)$ در دو طرف $x = a$ متفاوت باشد نقطهٔ بحرانی نه ماکزیمم است نه مینیمم، بلکه نقطهٔ عطف است.

منوی اصلی

۱۵.۴ چند کاربرد ماکزیمم و مینیمم

ماکزیمم و مینیمم توابع در اکثر علوم کاربردهای فراوانی دارد که چند مورد آن را در زیر می آوریم.

منوی اصلی

۱.۱۵.۴ رسم نمودار یا منحنی یک تابع

به‌دست آوردن مشتقهای اول و دوم (در صورت وجود) و پیدا کردن مقادیر ماکزیمم و مینیمم یک تابع، اطلاعات مفیدی را برای رسم نمودار توابع به‌دست می‌دهند. در جدول زیر مهمترین عوامل لازم را برای رسم نمودار توابع می‌آوریم:

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

ویژگی

آزمون

۱. نمودار f در نقطهٔ c محور x را قطع می‌کند ⟵ .... ⟶ $f(c)=0$

۲. نمودار f در نقطهٔ c محور y را قطع می‌کند ⟵ .... ⟶ $f(0)=c$

منوی اصلی

۳. نمودار f نسبت به محور y متقارن است $\rightarrow$ .... $\leftarrow f(x)=f(-x)$

۴. نمودار f نسبت به مبدأ متقارن است $\rightarrow$ .... $\leftarrow f(x)=-f(-x)$

۵. $x=c$ مجانب قائم است $\rightarrow$ .... $\leftarrow \lim_{x\to c^-} f(x)=\pm\infty$ یا $\lim_{x\to c^+} f(x)=\pm\infty$

۶. $y=d$ مجانب افقی است $\rightarrow$ .... $\leftarrow \lim_{x\to -\infty} f(x)=d$ یا $\lim_{x\to +\infty} f(x)=d$

منوی اصلی

۷. f در c ماکزیمم نسبی دارد $\rightarrow$ .... $\leftarrow f'(c)=0$ یا $f'(c)$ وجود ندارد و علامت f' از مثبت به منفی تغییر می‌کند

۸. f در c مینیمم نسبی دارد $\rightarrow$ .... $\leftarrow f'(c)=0$ یا $f'(c)$ وجود ندارد و علامت f' از منفی به مثبت تغییر می‌کند

۹. f در c ماکزیمم نسبی دارد $\rightarrow$ .... $\leftarrow$ $f'(c)=0$ و $f''(c)<0$

منوی اصلی

۱۰. f در c مینیمم نسبی دارد ← .... → $f'(c)=0$ و $f''(c)>0$

۱۱. f در بازهٔ (a,b) افزایشی است ← .... → $\forall x\in(a,b)\ ;f'(x)>0$

۱۲. f در بازهٔ (a,b) کاهشی است ← .... → $\forall x\in(a,b)\ ;f'(x)<0$

۱۳. تقعر در بازهٔ (a,b) به طرف بالاست ← .... → $\forall x\in(a,b)\ ;f''(x)>0$

۱۴. تقعر در بازهٔ (a,b) به طرف پایین است ← .... → $\forall x\in(a,b)\ ;f''(x)<0$

۱۵. $(c,f(x))$ نقطهٔ عطف است ⟷ علامت f'' قبل و بعد از c با هم متفاوت است

منوی اصلی

مثال ۱. نمودار $f(x)=x^5-5x^3$ را رسم کنید.

حل:

$$f(x)=x^5-5x^3=0 \Rightarrow x=0 \quad \text{یا} \quad x=\pm\sqrt{5}$$

$(0,0)$, $(\sqrt{5},0)$, $(-\sqrt{5},0)$ محل تلاقی نمودار f با محور xها.

$(0,0)$ محل تلاقی نمودار f با مبدأ می‌باشد $\Leftarrow f(0)=0$

منوی اصلی

$$f(-x)=(-x)^5-5(-x)^3=-(x^5-5x^3)=-f(x) \Rightarrow$$

نمودار نسبت به محور y متقارن نیست ولی با توجه به مورد ۴ در جدول نمودار نسبت به مبدأ متقارن است.

همچنین می‌بینیم که نمودار مجانب قائم ندارد.

منوی اصلی

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty \Rightarrow$$ نمودار مجانب افقی هم ندارد

$$f'(x) = 5x^4 - 15x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$ یا $$x = \pm\sqrt{3}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		افزایشی		کاهشی		کاهشی		افزایشی	

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

لذا f در نقطهٔ $(-\sqrt{3}\,,\,6\sqrt{3})$ ماکزیمم نسبی دارد. و در نقطهٔ $(\sqrt{3}\,,\,-6\sqrt{3})$ مینیمم نسبی دارد. f در بازه‌های $(-\infty\,,-\sqrt{3})$ و $(\sqrt{3}\,,+\infty)$ افزایشی است و در بازهٔ $[-\sqrt{3}\,,\sqrt{3}]$ کاهشی است.

$$f''(x) = 20x^3 - 40x = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{یا} \quad x = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$$

منوی اصلی

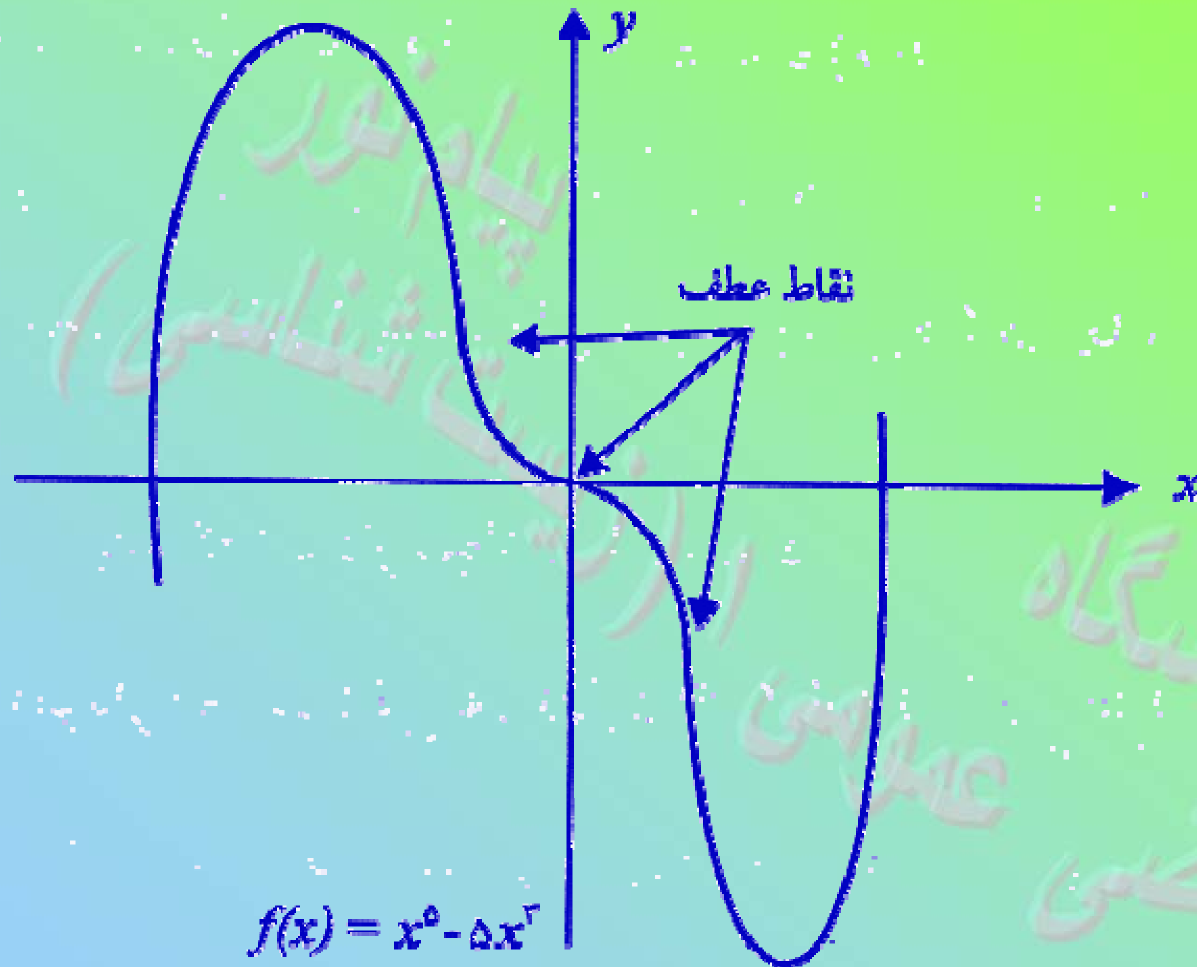
دانشگاه پیام نور

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{6}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{6}}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
		تقعربه‌طرف پایین		تقعربه‌طرف بالا		تقعربه‌طرف پایین		تقعربه‌طرف بالا	

بنابراین نقاط $\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{21\sqrt{6}}{8}\right)$ و $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{21\sqrt{6}}{8}\right)$ نقاط عطف‌اند.

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور



منوی اصلی

۳.۱۵.۴ کاربرد ماکزیمم و مینیمم در مسائل نظری و عملی

در مسائل نظری و عملی نیز ماکزیمم و مینیمم کاربردهای فراوانی دارند.

مثال ۱. بین مستطیلهایی که پیرامونشان (محیط آنها) مقدار ثابت a است، کدام یک بزرگترین مساحت را دارد؟

حل: مساحت مستطیلی به ابعاد x و y عبارت است از $A = xy$

از طرفی داریم $\quad 2x + 2y = a$

منوی اصلی

$$\Rightarrow y = \frac{a - ۲x}{۲} \Rightarrow A = xy = \frac{۱}{۲} x \left(a - ۲x \right)$$

برای اینکه $A > ۰$ بایستی $۰ < x < \frac{a}{۲}$ باشد.

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

تابع $A(x)=\frac{1}{2}x(a-2x)$ را در فاصلهٔ $(0,\frac{a}{2})$ در نظر بگیرید

$$A'(x)=\frac{1}{2}a-2x=0 \Rightarrow x=\frac{a}{4}$$

x	0		$\frac{a}{4}$		$\frac{a}{2}$
$A'(x)$		$+$		$-$	
$A(x)$		افزایشی		کاهشی	
			ماکزیمم نسبی		

می‌بینیم که تابع $A(x)$ در $x=\frac{a}{4}$، ماکزیمم نسبی دارد و ماکزیمم مطلق آن نیز در همین نقطه اتفاق می‌افتد یعنی مستطیل مطلوب در واقع یک مربع به ضلع $\frac{a}{4}$ است.

منوی اصلی

مثال ۲. مخروط قائمی را در داخل کره‌ای به شعاع R محاط می‌کنیم. ابعاد مخروط را طوری تعیین کنید که حجمش ماکزیمم شود.

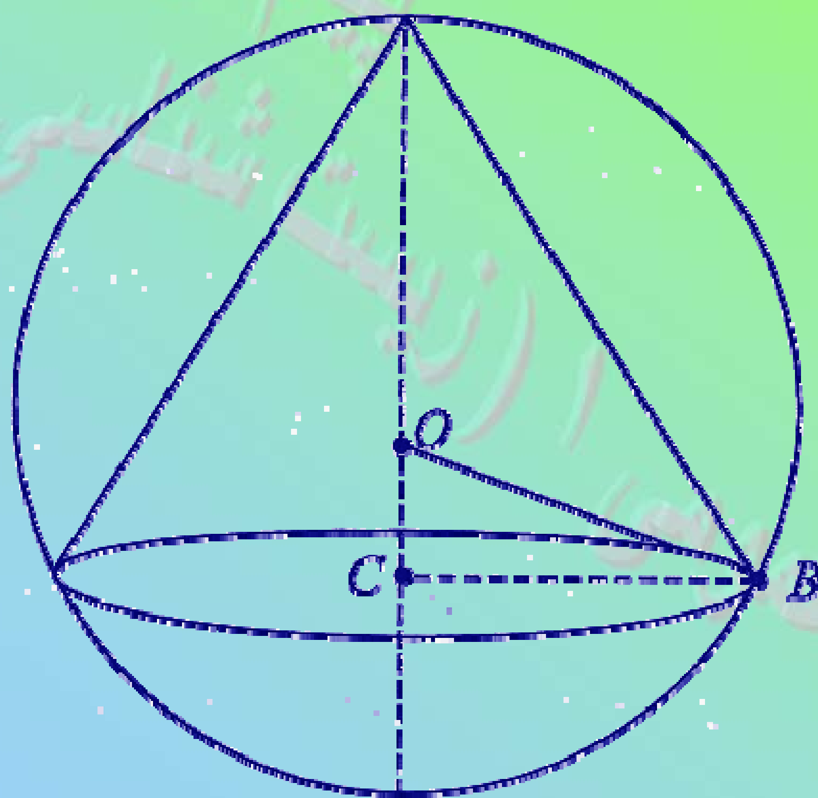
حل: فرض کنید r شعاع قاعده و h ارتفاع مخروط و V حجم مخروط باشد می‌دانیم که $v=\frac{1}{3}\pi r^{2}h$ (شکل زیر)

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

بنابه قضیهٔ فیثاغورث در مثلث $\overset{\Delta}{OBC}$ داریم:

$$(h-R)^2+r^2=R^2$$



منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

در نتیجه داریم:

$$r^2 = R^2 - (h-R)^2$$

$$V = V(h) = \frac{1}{3}\pi h\,[R^2 - (h-R)^2] = \frac{1}{3}\pi(2Rh^2 - h^3)$$

h بایستی در شرط $0 < h < 2R$ صدق کند.

$$V'(h) = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}\pi(4Rh - 3h^2) = 0 \Rightarrow h = 0 \text{ یا } h = \frac{4R}{3}$$

$h = 0$ در شرط $0 < h < 2R$ صدق نمی‌کند. اما $2R > \frac{4R}{3} > 0$ و

h	0	$\frac{4R}{3}$	$2R$
$V'(h)$	$+$	0	$-$
$V(h)$	افزایشی		کاهشی

ماکزیمم نسبی

منوی اصلی

پس به‌ازای $h=\frac{۴R}{۳}$ ، V بیشترین مقدار ممکن را دارد. که در این صورت خواهیم داشت.

$$V=\frac{۳۲}{۸۱}\pi R^{۳}$$

توجه کنید که این مقدار h ، ماکزیمم مطلق نیز هست (چرا؟).

منوی اصلی

۴.۱۵.۴ تعریف. کسر $\frac{f}{g}$ را در نظر می‌گیریم که در آن f و g توابعی از x هستند این کسر را در نقطهٔ $x=c$ مبهم می‌گویند. اگر:

۱. $\lim_{x \to c} g(x) = 0$ و $\lim_{x \to c} f(x) = 0$

۲. $\lim_{x \to c} g(x) = \pm\infty$ و $\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$

اگر $\frac{f}{g}$ در c مبهم باشد در این صورت نمی‌توانیم حد زیر یعنی:

منوی اصلی

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$$

را با استفاده از قضایای حد تعیین کنیم هر چند ممکن است این حد وجود داشته باشد.

مثلاً توابع $f(x) = \sin x$ و $g(x) = x$ را در نظر بگیرید می‌دانیم که $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ هر چند $\lim_{x \to 0} \sin x = 0$ و $\lim_{x \to 0} x = 0$ برای محاسبه بعضی از حدود مبهم می‌توانیم قضیهٔ زیر را به کار ببریم:

منوی اصلی

۵.۱۵.۴ قضیه (قاعدهٔ هوپیتال)

فرض می‌کنیم توابع f و g در هر نقطه از فاصلهٔ I شامل نقطهٔ c (به جز احتمالاً در c) مشتق‌پذیر بوده و برای هر $x\neq c$، $g'(x)\neq 0$ باشد. اگر

۱. $\lim_{x\to c} f(x)=\lim_{x\to c} g(x)=0$ یا $\pm\infty$

۲. $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$ ($A\in\mathbb{R}$ یا $A=\pm\infty$)

آنگاه:

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

منوی اصلی

لازم به ذکر است که دستور هوپیتال برای حالتی که x به سمت ∞ میل می‌کند نیز برقرار است یعنی هرگاه:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0 \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to\infty} g(x) = \pm\infty$$

و توابع f و g در فاصله‌ای چون $(a, +\infty)$ ، (در حالتی که $x \to +\infty$) یا در فاصله‌ای چون $(-\infty, a)$ ، (در حالتی که $x \to -\infty$)، مشتق‌پذیر باشند و همچنین بر فاصلهٔ اشاره شده همواره $g'(x) \neq 0$ باشد در این صورت نیز داریم:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

منوی اصلی

طراح: رحمت سلطانی عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه پیام نور شیراز

دانشگاه پیام نور

مثال ۱. مطلوب است محاسبهٔ حدود زیر:

الف) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{\sin 3x}$

ب) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x}$

منوی اصلی

حل: الف) ابتدا توجه می‌کنیم $\lim_{x \to ۰} \sin ۳x = ۰ = \lim_{x \to ۰} \sin ۴x$ لذا می‌توان قاعدهٔ هوپیتال را به‌کار برد:

$$\lim_{x \to ۰} \frac{\sin ۴x}{\sin ۳x} = \lim_{x \to ۰} \frac{۴\cos ۴x}{۳\cos ۳x} = \frac{۴ \times ۱}{۳ \times ۱} = \frac{۴}{۳}$$

ب) این حد به‌صورت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ است قاعدهٔ هوپیتال را به‌کار می‌بریم:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{۱}{x}}{۱} = ۰$$

منوی اصلی

تذکر: علاوه بر حالتهای مبهم $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ صورتهای متعارف مبهم دیگری نیز وجود دارند مثلاً اگر $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ و $\lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

در این صورت حد عبارت $f(x)\cdot g(x)$ به‌صورت $\pm\infty \times 0$ و مبهم است زیرا می‌توان آن را به‌صورت $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ به شکل زیر درآورد:

$$\lim_{x \to a} (f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

که در این صورت با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال آن را حل می‌کنیم.

بنابراین صورتهای مبهم دیگر مانند $\infty-\infty$ ، 0^0 ، ∞^0 و 1^∞ قابل تبدیل به‌صورت مبهم $\frac{0}{0}$ هستند که می‌توان با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال آنها را محاسبه کرد.

منوی اصلی

مثال ۲. مطلوب است محاسبهٔ $\lim_{x \to +\infty} x e^{-x}$

حل: چون $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ و $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$ پس چنین عمل می‌کنیم:

$$\lim_{x \to +\infty} x e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

حال قاعدهٔ هوپیتال را به‌کار می‌بریم:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

منوی اصلی

دانشگاه پیام نور

پایان

منوی اصلی

طراح: رحمت سلطانی عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه پیام نور شیراز