بسم الله الرحمن الرحيم

برنامه آموزشی

- نام درس : رياضيات ۲
- تعداد واحد : ۲
- منبع : رياضيات پايه
- مولف : ليدا فرخو
- تهيه كننده : خسرو حجتي

(درس مشترك رشته هاي جغرافي)

اهداف

- پس از فراگيري اين درس دانشجو بايد بتواند:

۱. مشتق را تعريف كند.

۲. با استفاده از قضايا، مشتق توابع را محاسبه كند.

۳.قضاياي مطرح شده را بيان و در صورت لزوم اثبات كند.

۴.تعاريف ماكزيمم،مينيمم، صعودي،نزولي، نقاط بحراني،عطف و جهت تقعررا بداند و در مسايل آنها را محاسبه و تشخيص دهد.

۵.آزمون مشتق اول و دوم را بيان و در حل مسايل بكار برد.

۶.نمودار توابع را رسم كند.

۷.صور مبهم را بشناسد و روشهاي رفع ابهام را در حل مسايل بكار برد.

مشتق

تعریف تغییر مقدار و آهنگ متوسط تغییر:

- فرض کنید تابع f روي فاصله [a,b] تعریف شده باشد

$$\forall x_0, x_1 \in (a,b) : a \ \pi \ x_0, x_1 \ \pi \ b \Rightarrow f(x_1) - f(x_0)$$

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

تغییر مقدار f(x)
هنگامیکه x از x_0 تا x_1 تغییر کند

آهنگ متوسط تغییر f

مثال: فرض کنید f(r) مساحت دایره اي به شعاع r باشد، آهنگ متوسط تغییر مساحت را هنگامیکه شعاع از ۲ تا ۴ تغییر میکند،محاسبه کنید

$$f(r)=\pi r^2 \Rightarrow \frac{f(r_2)-f(r_1)}{r_2-r_1}=\frac{\pi r_2^{\,2}-\pi r_1^{\,2}}{r_2-r_1}=\pi(r_2+r_1)$$

$$r_2=4, r_1=2 \Rightarrow \pi(4+2)=6\pi$$

تعریف مشتق: تابع y=f(x) و نقطه x=a را در نظر مي گيريم، آنگاه مشتق تابع f در نقطه a برابر است با:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

در اینصورت f رادر x=a مشتقپذیر گویند

نکته: اگر f درتمام نقاط قلمروش مشتق داشته باشد، f را مشتقپذیر گویند.

مثال: با استفاده از تعریف، مشتق تابع زیر را در نقطه x=1 بدست آورید:

حل:

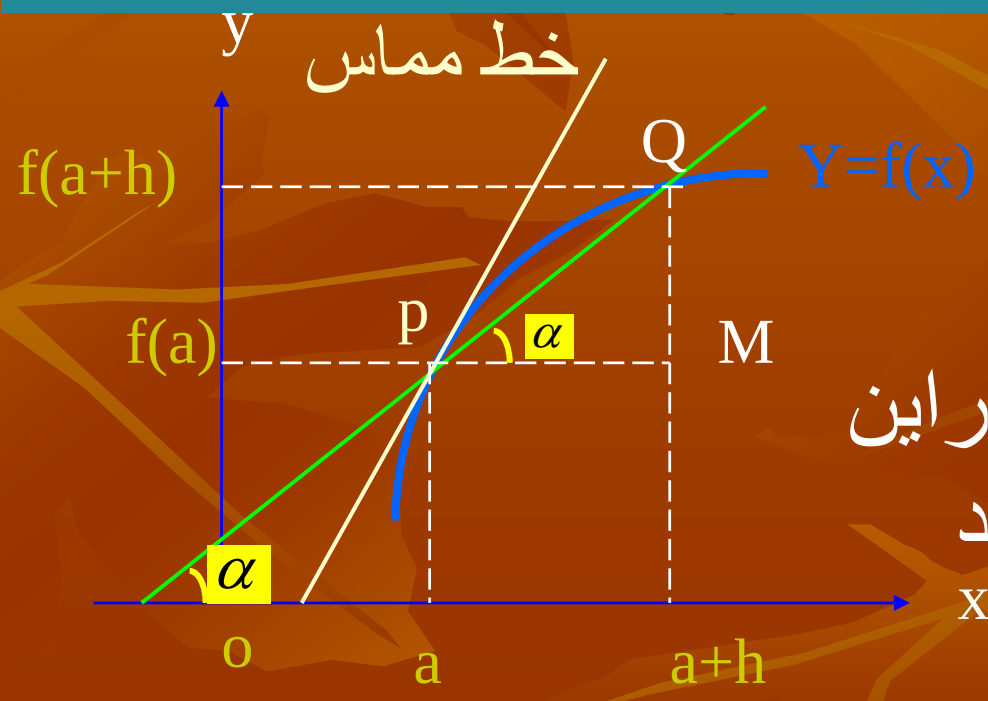
$$f(x)=\frac{x}{x+1}$$

$$f'(x)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{x}{x+1}-\frac{1}{2}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{2x-x-1}{2(x+1)}}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{2(x+1)}=\frac{1}{4}$$

فرمول دیگر مشتق در نقطه a:

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$



تعبير هندسي:

نقاط P(a,f(a)) و Q((a+h),f(a+h))

وخط قاطع منحني رادراين دونقطه درنظر بگيريد

ادامه تعبير هندسي:

آنگاه شيب خط قاطع برابر است با:

$$\tan\alpha = \frac{QM}{PM} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

وشيب خط مماس عبارت است از:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a) = m(a)$$

در نتيجه شيب خط قايم از رابطه زير بدست ميآيد:

$$m'(a) = -\,{}^{1}\!/_{m(a)}$$

مثال: معادلات خطوط مماس و قایم بر منحني زير در نقطه داده شده را پيدا كنيد:

$$f(x)=\frac{2x-1}{2x+1}, x=1$$

حل

$$f'(x)=\frac{4}{(2x+1)^2}\Rightarrow m(1)=\frac{4}{9}, m'(1)=-\frac{9}{4}$$

خط مماس

$$f(1)=-\frac{1}{3}\Rightarrow (y+\frac{1}{3})=\frac{4}{9}(x-1)$$

خط قایم

$$(y+\frac{1}{3})=-\frac{9}{4}(x-1)$$

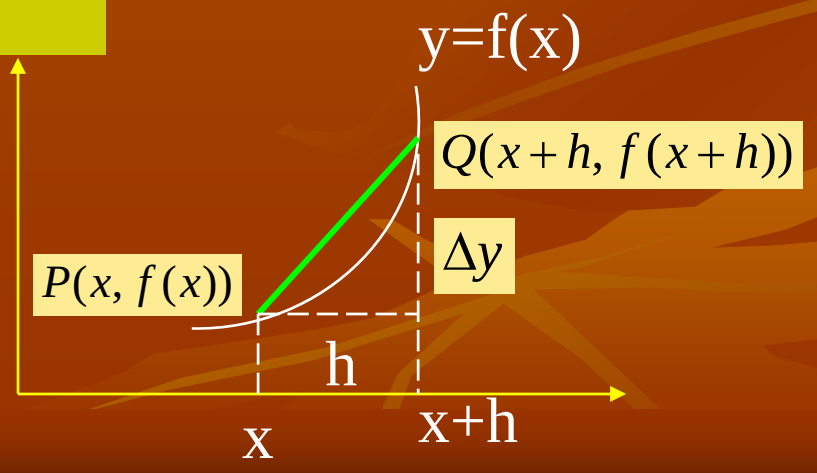
تعریف مشتق تابع درنقطه x

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

در فرمول فوق: صورت کسر را نمو تابع و مخرج کسر را نمو متغیر نامند

نمادهاي مختلف مشتق:

$$y',\ \frac{dy}{dx},\ \frac{df}{dx},\ D_x y,\ f'$$



تعریف سرعت: اگر معادله حرکت جسم p روي محور os با s=s(t) نشان داده شود، آنگاه سرعت متحرك در لحظه t=a برابر است با:

$$v(a) = s'(a) = \lim_{t \to a} \frac{s(t) - s(a)}{t - a}$$

مثال: سرعت متحركي كه معادله حركتش در زير داده شده است را در لحظه t=1 بيابيد:

$$s(t) = t^3 + 2t^2, t = 1$$

حل:

$$v(1) = s'(1) = \lim_{t \to 1} \frac{t^3 + 2t^2 - 3}{t - 1} = \lim_{t \to 1} \frac{(t^2 + 3t + 3)(t - 1)}{t - 1}$$

$$= \lim_{t \to 1} (t^2 + 3t + 3) = 7$$

قضیه:اگر تابع f در نقطه x=a مشتقپذیر باشد، آنگاه در این نقطه پیوسته است.

اثبات: با توجه به فرض قضیه، نشان میدهیم

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

لذا فرض میکنیم $x \neq a$ ، بنابراین داریم:

ادامه اثبات:

$$f(x)-f(a)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(f(x)-f(a))$$

$$\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(f(x)-f(a))$$

$$=f'(a).\lim_{x\to a}(x-a)=0\Rightarrow\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$$

يعني تابع در نقطه x=a پيوسته است.

نکته:

عکس قضیه فوق درست نیست، یعني ممکن است تابعي در نقطه اي پیوسته باشد ولي در آن نقطه مشتقپذیر نباشد.

مثال: تابع $f(x)=|x|$ در نقطه $x=0$ پیوسته است ولي مشتق پذير نيست.زيرا:

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x: x\geq 0 \\ -x: x\,\pi\, 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|-0}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}=\begin{cases} 1: x\,\phi\, 0 \\ -1: x\,\pi\, 0 \end{cases}$$

مشتقهاي يكطرفه

تعریف: فرض کنید y=f(x) و $a \in D_f$.

مشتقهاي راست وچپ تابع f در x=a

را به ترتیب با: $f'_-(a), f'_+(a)$ نشان

داده و با روابط زیر تعریف میکنند:

$$f'_+(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$f'_-(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

مشروط بر وجود این حدها:

مشتقهاي چپ و راست را مشتقهاي یکطرفه گویند.

قضیه: مشتق تابع موجود است اگر و تنها اگر هر دو مشتقهاي يكطرفه موجود و مساوي باشند.

$$\exists f'(a) \Leftrightarrow \exists[f'_+(a), f'_-(a)],\ f'_+(a) = f'_-(a)$$

مثال:

مشتقهاي چپ و راست و وجود مشتق تابع زير را در نقطه داده شده پيدا كنيد:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}:x\geq 4\\ 2x:x\,\pi\,4\end{cases},x=4$$

حل:

$$f'_+(4)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{4+h}-2}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{(\sqrt{4+h}-2)(\sqrt{4+h}+2)}{h(\sqrt{4+h}+2)}=\lim_{h\to 0^+}\frac{(4+h-4)}{h(\sqrt{4+h}+2)}=\frac{1}{4}$$

$$f'_-(4)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{2(4+h)-8}{h}=2$$

$$f'_+(4)\neq f'_-(4)\Rightarrow\neg\exists f'(4)$$

قضاياي مشتق

قضايا و فرمولهاي مشتق:

تابع	مشتق
$1): f(x) = c : c \in R$	$f'(x) = 0$
$2): f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$
$3): f(x) = x^r : r \in R$	$f'(x) = rx^{r-1}$

اثبات قضیه ۱:

$$f(x)=c \Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

مثال: مشتق تابع زیر را بدست آورید:

$$f(x)=\sqrt{x}=x^{1/2}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

بقیه قضایا ي مشتق:

$$[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$$

$$\forall k\in R:[kf(x)]'=kf'(x)$$

$$[f(x)\times g(x)]'=f'(x)\times g(x)+f(x)\times g'(x)$$

ادامه قضاياي مشتق:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \left[\frac{f'(x)\times g(x) - f(x)\times g'(x)}{[g(x)]^2}\right] : g(x) \neq 0$$

$$\left(f^{n}(x)\right)' = nf^{n-1}(x)\, f'(x) : \forall n \in N$$

$$p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

$$p'(x) = na_0 x^{n-1} + (n-1)a_1 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}$$

مثال: مشتق توابع زیر را بدست آورید:

$$f(x)=(3x^4-5x^2+1)(x^3-4),\ g(x)=\frac{3x^5-2x+1}{x^2}$$

$$f'(x)=(12x^3-10x)(x^3-4)+(3x^4-5x^2+1)(3x^2)$$

$$g'(x)=\frac{(15x^4-2)x^2-2x(3x^5-2x+1)}{x^4}$$

قاعده زنجیره اي:اگر توابع

u=g(x),y=f(u)

مشتقپذیر باشند آنگاه تابع مرکب زیر

مشتقپذیر است: y=fog(x)=f(g(x))=f(u)

وداریم:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}fog(x)=\frac{df}{du}.\frac{du}{dx}\,or:y'_x=y'_u\times u'_x$$

مثال۱ : مشتق تابع داده شده f را نسبت به x پیدا کنید:

$$u = 3 + \sqrt{x},\ f(u) = u^3 + 4u - 6$$

حل

:

$$f'(x) = f'(u)u'(x) = (3u^2 + 4)\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3(3+\sqrt{x})^2 + 4}{2\sqrt{x}}$$

مثال ۲:

$$f(x)=\sqrt[3]{x^2+1}+5\sqrt[5]{x^3}=(x^2+1)^{1/3}+5x^{3/5}$$

$$f'(x)=\frac{1}{3}.2x(x^2+1)^{-2/3}+3x^{-2/5}$$

مشتقگيري ضمني: اگر تابع بصورت زير بيان شده باشد $F(x,y)=0$ ونيازي به حل معادله آن نباشد آنرا **ضمني** گويند و مشتق y نسبت به x چنين است:

$$y' = f'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

در اين فرمول:صورت كسر به معني مشتق تابع F نسبت به x و مخرج كسر به معني مشتق تابع F_y نسبت به y است.

نکته: در مشتقگيري ضمني ميتوان بدون استفاده از فرمول وبا مشتقگيري از کل عبارت تابع نسبت به x مشتقگيري نمود

مثال: از تابع داده شده به دو روش ذکر شده مشتق بگیرید:

$$F(x,y) = x^4 + y^4 + 4xy - x^2y^2 = 0$$

حل:

$$1): y' = -\frac{4x^3 + 4y - 2xy^2}{4y^3 + 4x - 2x^2y}$$

$$2): 4x^3 + 4y^3y' + 4y + 4xy' - 2xy^2 - 2x^2yy' = 0$$

$$4y^3y' + 4xy' - 2x^2yy' = -4x^3 - 4y + 2xy^2$$

$$2y'(2y^3 + 2x - x^2y) = -4x^3 - 4y + 2xy^2$$

مشتق توابع مثلثاتي:

تابع	مشتق
$f(x)=\sin x$	$f'(x)=\cos x$
$f(x)=\cos x$	$f'(x)=-\sin x$
$f(x)=\tan x$	$f'(x)=1+\tan^2 x=\sec^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x)=\cot x$	$f'(x)=-(1+\cot^2 x)=-\csc^2 x=-\frac{1}{\sin^2 x}$
$f(x)=\sec x$	$f'(x)=\sec x.\tan x$
$f(x)=\csc x$	$f'(x)=-\csc x.\cot x$

مثال ۱: مشتق تابع داده شده را بیابید:

$$f(x) = (x^{3/4} - 1)\cos(x^{1/2} - x^{4/3})$$

حل:

$$f'(x) = (\frac{3}{4}x^{-1/4})\cos(x^{1/2} - x^{4/3})$$

$$-(x^{3/4} - 1)\sin(x^{1/2} - x^{4/3}).(\frac{1}{2}x^{-1/2} - \frac{4}{3}x^{1/3})$$

مثال۲: مشتق تابع داده شده را بیابید:

$$f(x) = 2\tan^3(1-4x) \Rightarrow$$

حل:

$$f'(x) = 2\times 3\tan^2(1-4x).\sec^2(1-4x).(-4)$$

مثال ۳:

$$f(x)=\frac{1+\sec x}{1+\csc x}$$

حل:

$$f'(x)=\frac{\sec x\tan x(1+\csc x)+\csc x\cot x(1+\sec x)}{(1+\csc x)^2}$$

مشتق توابع لگاريتمي و نمايي:

$$f(x) = Lnx : x \phi 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

مشتق تابع نمايي:از درس رياضي پايه ۱ مدانيد كه تابع نمايي وارون تابع لگاريتمي است.با توجه به رابطه مشتق تابع و مشتق وارون آن داريم:

$$y = e^{x} \Rightarrow x = Lny \ : y \ \phi \ 0$$

$$y' = \frac{d}{dx}(e^{x}) = \frac{1}{(Lny)'} = \frac{1}{1/y} = y = e^{x}$$

مثال: مشتق تابع داده شده رابیابید:

$$y = xLn(3x^2 + \sqrt{x}) + e^{5x^2+4x}$$

$$y' = Ln(3x^2 + \sqrt{x}) + x\frac{6x + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{3x^2 + \sqrt{x}} + (10x+4)e^{5x^2+4x}$$

مشتق تابع a^x :

فرض کنید a>0 و $y = a^x, a \neq 1$

آنگاه با استفاده از روش مشتقگيري لگاريتمي داريم:

$$y' = a^x Lna$$

مثال:

مشتق تابع داده شده را بیابید:

$$y = 3^{\cos x + \sin x} \Rightarrow$$

$$y' = (-\sin x + \cos x)\, 3^{\cos x + \sin x}\, Ln3$$

مشتق تابع لگاريتمي در حالت كلي:

$$\frac{d}{dx}Log_a v(x) = \frac{v'(x)}{v(x)} \cdot \frac{1}{Lna}$$

مثال: مشتق تابع داده شده را بيابيد:

$$y = Log_2(x^3 + 5x^2 + 4) \Rightarrow y' = \frac{3x^2 + 10x}{x^3 + 5x^2 + 4} \cdot \frac{1}{Ln2}$$

مشتق تابع $y = u(x)^{v(x)}$:

فرض کنید u,v توابع مشتقپذیر از x باشندو u(x)>0 براي محاسبه مشتق از روش مشتقگيري لگاريتمي استفاده ميكنيم:

$$Lny = Ln\,u(x)^{v(x)} = v(x)Lnu(x)$$

$$\frac{y'}{y} = v'(x)Lnu(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$y' = u(x)^{v(x)}\left(v'(x)Lnu(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right)$$

مثال: مشتق تابع داده شده را پیدا کنید:

$$y = x^{\sin x}$$

$$Lny = Ln\, x^{\sin x} = \sin x.Lnx \Rightarrow$$

$$\frac{y'}{y} = \cos x.Lnx + \frac{\sin x}{x}$$

$$y' = y\left[\cos x.Lnx + \frac{\sin x}{x}\right] \Rightarrow$$

$$y' = x^{\sin x}\left[\cos x.Lnx + \frac{\sin x}{x}\right]$$

مشتق مراتب بالاتر:

f' رامشتق اول تابع گویند.

مشتق f' در نقطهa را مشتق دومf درآن نقطه گویند وبا $f''(a)$ یا $f^{(2)}(a)$ نشان میدهند.و به همین ترتیب مشتقهاي سوم، چهارم و ...وnام حاصل میشود.

نمادگذاري:

$$f^{(0)} = f, \; f^{(1)} = f' = \frac{df}{dx} = D_x f$$

$$f^{(2)} = f'' = \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)$$

مثال: مشتقهاي اول تا سوم تابع داده شده را پيدا كنيد:

$$f(x)=e^{5x^2+3}+\sin(2x+1)$$

حل:

$$f'(x)=10x.e^{5x^2+3}+2\cos(2x+1)$$

$$f''(x)=10e^{5x^2+3}+100x^2e^{5x^2+3}-4\sin(2x+1)$$

$$f'''(x)=100xe^{5x^2+3}+200xe^{5x^2+3}+1000x^3e^{5x^2+3}-8\cos(2x+1)$$

ديفرانسيل

مقدمه: اگر $|\Delta x|$ به اندازه كافي كوچك باشد آنگاه $f'(x)\Delta x$ تقريب مناسبي براي Δy است لذا داريم:

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x \Rightarrow f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$$

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$$

تعریف:

هرگاه تابع y=f(x) مشتقپذیر باشد، دیفرانسیل y را با dy نشان میدهند و داریم:

$$dy = f'(x)\Delta x$$

نکته:

اگر f(x)=x باشد آنگاه $dx = \Delta x$

.یعني اگرx متغير مستقل باشد،

ديفرانسيلx با نمو x برابر خواهد

بود. در نتيجه:

$$dy = f'(x)dx$$

مثال ۱:

دیفرانسیل تابع داده شده را بیابید:

$$y = Ln(3x+4)$$

حل

$$dy = y'dx = \frac{3}{3x+4}dx$$

مثال۲ : با استفاده از مفهوم دیفرانسیل مقدار تقریبي $\sqrt[4]{18}$ را محاسبه کنید:

حل: تابعي متناسب با سؤال تعریف کرده و با استفاده از دیفرانسیل داریم:

$$f(x)=\sqrt[4]{x},\ f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x$$

$$f'(x)=\left(x^{1/4}\right)'=\frac{1}{4}x^{\frac{-3}{4}}=\frac{1}{4\sqrt[4]{x^{3}}}$$

$$\sqrt[4]{x+\Delta x} \approx \sqrt[4]{x} + \frac{\Delta x}{4\sqrt[4]{x^3}} \Rightarrow$$

$$x = 16, \Delta x = 2$$

$$\sqrt[4]{18} \approx \sqrt[4]{16} + \frac{2}{4\sqrt[4]{16^3}} =$$

$$2 + \frac{1}{2\sqrt[4]{2^{12}}} = 2 + \frac{1}{16} = 2.0625$$

خطا

در اندازه گيريها Δx را خطاي مطلق اندازه گيري نامند.

تعريف خطاي نسبي: اگر du خطاي مطلق باشد آنگاه $\frac{du}{u}$ را خطاي نسبي گويند.

خطاي در صد از فرمول زير محاسبه ميشود:

$$100 \times \frac{du}{u}$$

مثال:

طول شعاع دايره اي با حد اكثر خطاي ۰/۵ سانتيمتر برابر ۵/۲ سانتيمتر اندازه گيري شده است. خطاي نسبي وخطاي درصد در محاسبه مساحت اين دايره را محاسبه كنيد.

حل:فرض کنیدr شعاع و s مساحت دایره باشد. بنا بر فرض مسئله dx=0.05 و r=2.5 لذا داریم:

$$s=\pi r^2 \Rightarrow \frac{ds}{s}=\frac{2\pi r dr}{\pi r^2}=\frac{2dr}{r}=\frac{2\times 0.05}{2.5}=0.04$$

خطاي نسبي

$$100\times\frac{ds}{s}=4$$

خطاي درصد

تعريف توابع اسكالر:

$$F : A \rightarrow B$$

$$A \subseteq R^2$$

$$B \subseteq R$$

مثال تابع دومتغیره اسکالر:

$$F(x,y)=x+y+z \qquad (x,y)\in R^2$$

$$F(1,0)=1+0+2=3$$

مشتق جزئی :

با يكي از نمادهاي زير نمايش داده ميشود و مانند مشتقگيري ضمني محاسبه ميشود

$$f'_x \qquad D_i F(X) \qquad F_{x_i}(X) \qquad \frac{\partial F(X)}{\partial x_i}$$

مثال :

$$F:(x,y)\rightarrow x^2y+y^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^2+3y^2$$

مثال :

$$F(x,y) \rightarrow xy + x^2y^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X) = y + 2xy^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(X) = x + 3x^2y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X) = 2y^3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1 + 6xy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1 + 6xy$$

تساوی وقتی برقرار است که پیوسته باشد .

دیفرانسیل واقعی یا کامل F(x,y) و یا

بعبارت دیگر برای تابع F(x,y)

دیفرانسیل واقعی یا کامل یا کل چنین

تعریف می شود :

$$dF = \frac{\partial}{\partial x} F dx + \frac{\partial}{\partial y} F dy$$

مثال1 :

$$F(x,y) = xy$$

$$dF(x,y) = ydx + xdy$$

مثال ۲:

با فرض $y \neq 0$

$$F(x,y) = \frac{x}{y}$$

$$\Rightarrow dF = \frac{ydx - xdy}{y^2}$$

خلاصه فرمولهاي مشتق وديفرانسيل

مشتق	ديفرانسيل
$\frac{d}{dx}(c)=0$	$d(c)=0$
$\frac{d}{dx}(u^n)=nu^{n-1}u'$	$d(u^n)=nu^{n-1}du$
$\frac{d}{dx}(\sin u)=u'\cos u$	$d(\sin u)=\cos u\,du$

ادامه خلاصه فرمولهاي مشتق وديفرانسيل

مشتق	ديفرانسيل
$\frac{d}{dx}(\cos u) = -u' \sin u$	$d(\cos u) = -\sin u\, du$
$\frac{d}{dx}(\tan u) = u'(1+\tan^2 u)$	$d(\tan u) = (1+\tan^2 u)du$
$\frac{d}{dx}(\cot u) = -u'(1+\cot^2 u)$	$d(\cot u) = -(1+\cot^2 u)du$

ادامه خلاصه فرمولهاي مشتق وديفرانسيل

مشتق	ديفرانسيل
$\frac{d}{dx}(\sec u) = u' \sec u . \tan u$	$d(\sec u) = \sec u . \tan u du$
$\frac{d}{dx}(\csc u) = -u' \csc u . \cot u$	$d(\csc u) = -\csc u . \cot u du$
$\frac{d}{dx}(a^u) = u' a^u Lnu$	$d(a^u) = a^u Lnu du$

ادامه خلاصه فرمولهاي مشتق وديفرانسيل

مشتق	ديفرانسيل
$\frac{d}{dx}(e^{u}) = u' e^{u}$	$d(e^{u}) = e^{u} du$
$\frac{d}{dx}(Log_{a} u) = \frac{u'}{uLna}$	$d(Log_{a} u) = \frac{du}{uLna}$
$\frac{d}{dx}(Lnu) = \frac{u'}{u}$	$d(\cot u) = \frac{du}{u}$

كاربردهاي مشتق

توابع صعودي و نزولي

قضيه (آزمون يكنوايي): فرض كنيد تابع f روي فاصله [a,b] پيوسته و روي فاصله (a,b) مشتقپذير باشد.

f صعودي است $\forall x \in (a,b) \rightarrow f'(x)\ \phi\ 0 \Rightarrow$

f نزولي است $\forall x \in (a,b) \rightarrow f'(x)\ \pi\ 0 \Rightarrow$

مثال:

فواصل صعودي و نزولي تابع داده شده را پيدا كنيد:

حل:

$$f(x) = 2x^3 - 4$$

$$f'(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0 \begin{cases} x \phi 0 \\ x \pi 0 \end{cases}$$

f صعودي است

f نزولي است

تعريف:

فرض كنيد a نقطه اي از قلمرو تابع f باشد. در صورت بر قراري يكي از شرايط زير a را يك **نقطه بحراني** گويند

$$1): f'(a) = 0 \qquad 2): \neg\exists f'(a)$$

نتيجه:

براي تعيين فواصل صعودي و نزولي يك تابع، بايد نقاط بحراني تابع را بدست آورده و علامت مشتق را تعيين نمود.

مثال:

نقاط بحراني و فواصل صعودي و نزولي تابع داده شده را پيدا كنيد:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 12x + 4$$

حل

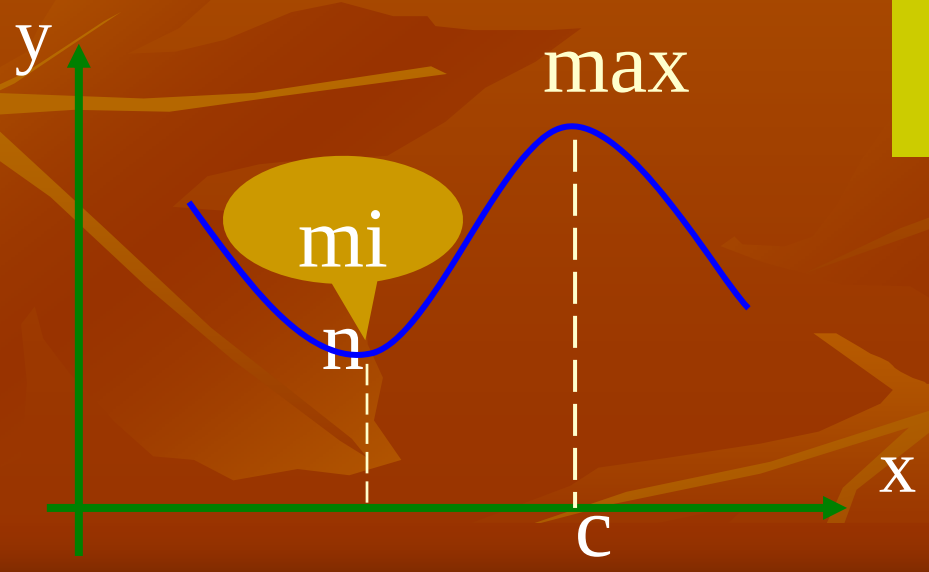
$$f'(x) = 6x^2 - 6x + 12 = 6(x^2 - x + 2) = :0 \Rightarrow$$

$$\Delta = 1 - 8 = -7 \ \pi \ 0 \Rightarrow$$ تابع همواره نزولي است

ماکسیمم و مینیمم تابع

تعریف ماکسیمم نسبي: تابع f در x=c داراي يك ماکسیمم نسبي یا ماکسیمم موضعي است، در صورتي که براي هر x از فاصله اي که شامل c باشد داشته باشیم:

$$f(c) \geq f(x)$$



تعریف مینیمم نسبي:

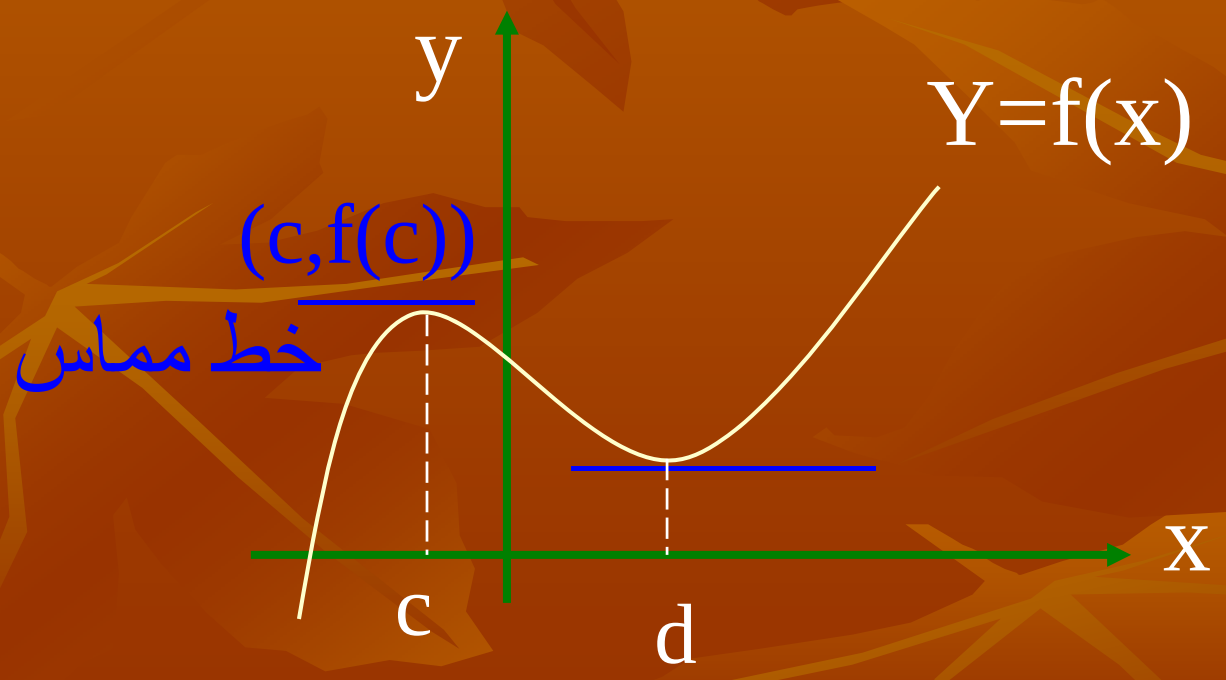
تابع f در x=c داراي يك مینیمم نسبي یا مینیمم موضعي است، در صورتي كه براي هر x از فاصله اي كه شامل c باشد داشته باشیم:

$$f(c) \leq f(x)$$

تعريف اكسترمم نسبي:

هرگاه تابع f در نقطه c ماكسيمم يا مينيمم نسبي داشته باشد، گويند f در c يك اكسترمم نسبي يا اكسترمم موضعي دارد و f(c) را اكسترمم f در c نامند.

تعبير هندسي اكسترمم: اگر f در c مشتقپذير باشد و در اين نقطه يك اكسترمم نسبي داشته باشد، آنگاه نمودار y=f(x) در نقطه (c,f(c)) داراي **خط مماس افقي** است.



نکته ۱:

توابعي وجود دارد كه مشتق در بعضي نقاط آنها صفر ميشود ولي در آن نقاط ماكسيمم يا مينيمم ندارند

مثال:

حل:

$$f(x) = (x-1)^3$$

$$f'(x) = 3(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$\forall x;\ f'(x) = 3(x-1)^2\ \phi\ 0 \Rightarrow$$

درنتیجه f در x=1 نه ماکسیمم دارد نه مینیمم

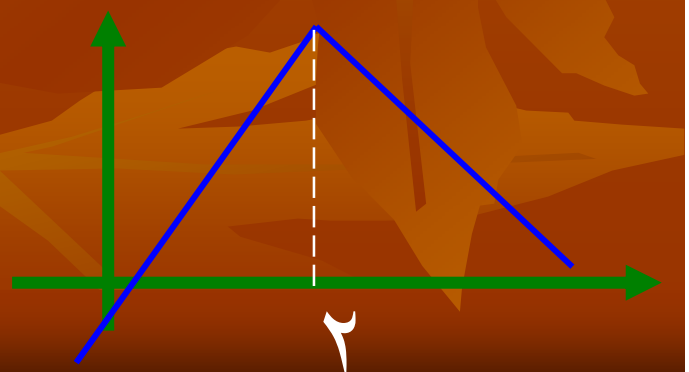
نکته۲:

توابعي وجود دارد که در نقطه اي اکسترمم دارد اما در آن نقطه مشتقپذير نيست.

مثال:

$$f(x)=\begin{cases}3x-2: & x\le 2\\ 6-x: & x>2\end{cases}$$

$$f'_{-}(2)=3,\ f'_{+}(2)=-1\Rightarrow \neg\exists f'(2)$$



تذكر:

اگر تابع f در نقطه c تعريف شده باشد شرط لازم براي اينكه f در نقطه c اكسترمم نسبي داشته باشد اين است كه c يك نقطه بحراني تابع باشد، به عبارت ديگر مشتق در اين نقطه برابر صفر يا موجود نباشد.

قضيه

(آزمون مشتق اول براي اكسترمم نسبي): فرض كنيد تابع f روي فاصله بازي شامل نقطه بحراني c مانند (a,b) پيوسته باشد و در تمام نقاط آن، احتمالا بجز در c مشتقپذير باشد.

شرايط آزمون مشتق اول

۱) اگر $f'(x)$ روي فاصله (a,c) مثبت و روي (c,b) منفي باشد آنگاه f در x=c يك ماكسيمم نسبي دارد.

۲) اگر $f'(x)$ روي فاصله (a,c) منفي و روي (c,b) مثبت باشد آنگاه f در x=c يك مينيمم نسبي دارد.

ادامه شرایط آزمون مشتق اول

۳) اگر هیچیك از ۱ و ۲ برقرار نباشد، f در x=c ماکسیمم یا مینیمم نسبي ندارد.

مثال: با استفاده از آزمون مشتق اول ماکسیمم و مینیمم تابع داده شده را بدست آورده و تعیین کنید در چه فواصلي صعودي و نزولی است:

حل:

$$f(x) = 2x^3 - 8x^2 + 10x$$

$$f'(x) = 6x^2 - 16x + 10 = 2(3x^2 - 8x + 5) = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-15}}{3} = \begin{cases} \frac{5}{3} \\ 1 \end{cases}$$

ادامه حل:

x	$-\infty$	1	$\frac{5}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$		$+$
$f(x)$	صعودي	نزولي		صعودي

max نسبي min

قضيه : آزمون مشتق دوم براي اكسترممهاي نسبي: فرض كنيد c يك نقطه بحراني تابع f و مشتق در اين نقطه صفر باشد،بعلاوه اگر مشتقات اول ودوم در فاصله اي شامل c وجود داشته باشند:

شرایط آزمون مشتق دوم

۱) اگر $f''(x) \pi 0$ ،آنگاه f در c ماکسیمم نسبي دارد.

۲) اگر $f''(x) \pi 0$ ، آنگاه f در c مینیمم نسبي دارد.

مثال: با استفاده از آزمون مشتق دوم، ماکسیمم و مینیمم نسبي تابع داده شده را بیابید.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$$

حل:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 0$$

$$(x-1)(x-3) = 0 \Rightarrow x = 1, x = 3$$

نقاط بحراني

$$f''(x) = 6x - 12 \Rightarrow f''(1) = -6 \ \pi \ 0$$

$$f''(3) = 6 \ \phi \ 0$$

بنابر این درنقطه x=1 ماکسیمم نسبي ودر x=3 مینیمم نسبي دارد

نکته: اگر در مورد تابع f ، داشته باشیم:

$$f'(c) = f''(c) = 0$$

آزمون مشتق دوم در مورد نقاط ماکسیمم و مینیمم نسبي اطلاعي به دست نميدهد.در چنين مواردي بايد از آزمون مشتق اول استفاده کرد.

مثال: ماکسیمم و مینیمم تابع داده شده را بیابید.

$$f(x)=(x-2)^4+1$$

حل:

$$f'(x)=4(x-2)^3 \Rightarrow f''(x)=12(x-2)^2$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow f''(2)=f'(2)=0$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	نزولي	صعودي

min

ماکسیمم و مینیمم مطلق

تعریف: تابع f و نقاط d,c از قلمروش را در نظر بگیرید:

الف) f(c) را ماکسیمم مطلق f روي قلمروش گویند، هر

$$f(c) \geq f(x)$$

ب) f(c) را مینیمم مطلق f روي قلمروش گویند، هرگاه:

$$f(d) \leq f(x)$$

ماکسیمم یا مینیمم مطلق را اکسترمم مطلق گویند

قضيه:

اگر تابع f روي فاصله [a,b] پيوسته باشد، آنگاه f روي اين فاصله داراي ماكسيمم و مينيمم مطلق است.

مثال: ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع داده شده را پیدا کنید:

$$f(x) = -4x^3 - 6x^2 + 9x + 5,\ x \in [-2,1]$$

حل:

$$f'(x) = -12x^2 - 12x + 9$$

$$f''(x) = -24x - 12$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -3(4x^2 + 4x - 3) = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{4}$$

ادامه حل:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow f''(\dfrac{1}{2}) = 0 \\ x = \dfrac{-3}{2} \Rightarrow f''(\dfrac{-3}{2}) = 24 \ \phi \ 0 \end{cases}$$

$$f(-2) = -5,\ f(1) = 4,\ f(\frac{1}{2}) = 7.5,\ f(\frac{-3}{2}) = -8.5$$

مینیمم مطلق

ماکسیمم مطلق

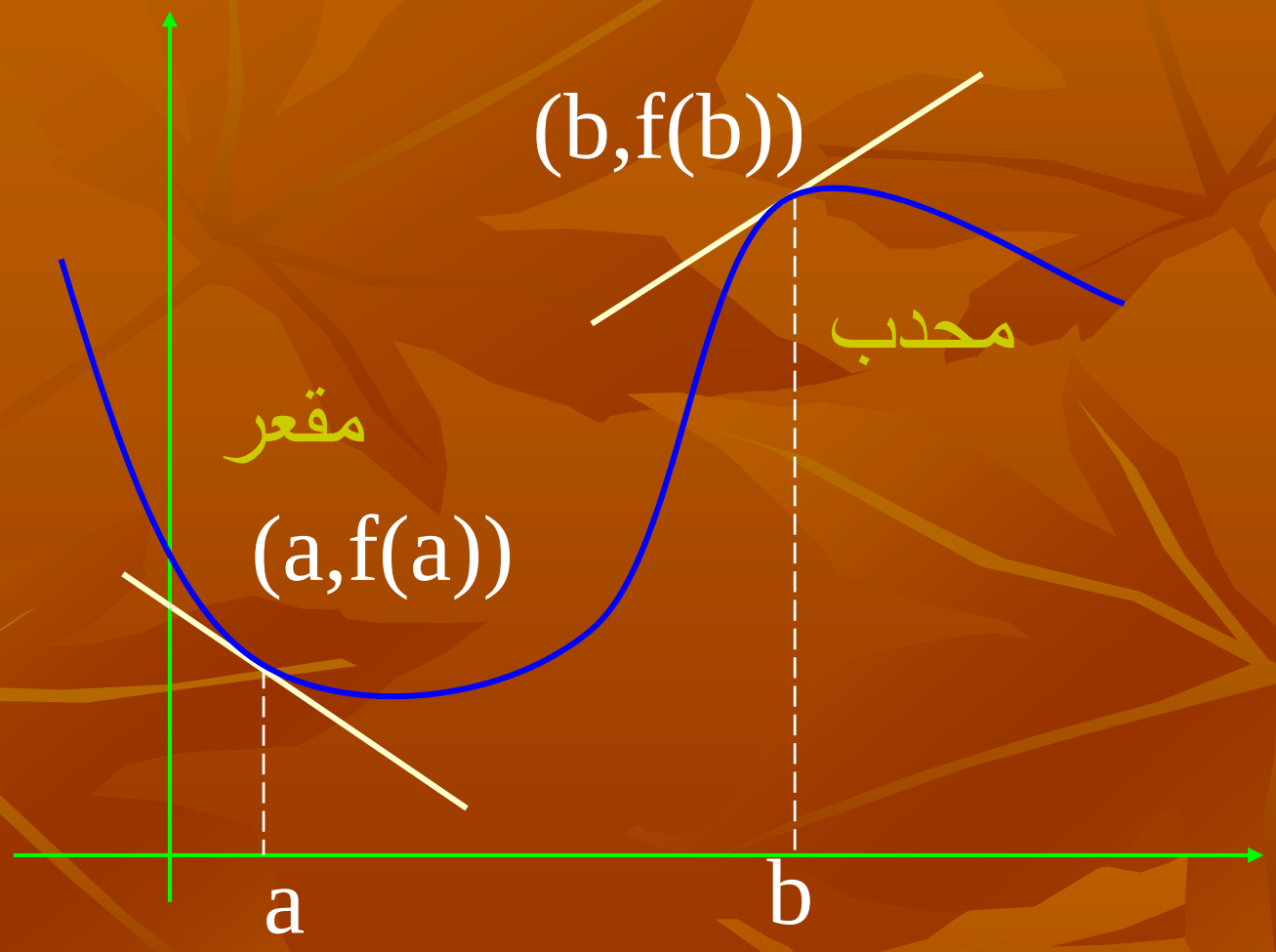
تقعر وتحدب و نقطه عطف

تعریف: نمودار تابع y=f(x) را در نقطه (a,f(a)) مقعر نامند، هرگاه:

- ۱) $f'(a)$ موجود باشد.
- ۲)نمودار f(x) در فاصله کوچکي حول نقطه x=a در بالاي خط مماس بر منحني در اين نقطه قرار گيرد.
- اگر نمودار تابع f در هر نقطه از فاصله I مقعر باشد، گويند نمودار f روي فاصله I مقعر است

تعریف: نمودار تابع $y=f(x)$ را در نقطه $(a,f(a))$ محدب نامند، هرگاه:

- ۱) $f'(a)$ موجود باشد.
- ۲)نمودار $f(x)$ در فاصله کوچکي حول نقطه $x=a$ در پایین خط مماس بر منحني در این نقطه قرار گیرد.
- اگر نمودار تابع f در هر نقطه از فاصله I محدب باشد، گویند نمودار f روي فاصله I محدب است


(b,f(b))
محدب
مقعر
(a,f(a))
a
b

قضيه: فرض كنيد تابع f روي فاصله اي حول نقطه x=c داراي مشتقات اول و دوم باشد.

۱) اگر $f''(c) > 0$ آنگاه منحني f در نقطه (c,f(c)) مقعر است.

۲)اگر $f''(c) < 0$ آنگاه منحني f در نقطه (c,f(c)) محدب است.

مثال: تعیین کنید تابع داده شده در چه فاصله اي محدب و در چه فاصله اي مقعر است:

حل:

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$$

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x \Rightarrow f''(x) = 12x^2 - 12x + 2$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} \dfrac{3-\sqrt{3}}{6} \\ \dfrac{3+\sqrt{3}}{6} \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{6}, x_2 = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	مقعر	محدب	مقعر

بنابراین تابع در فاصله $(-\infty, \frac{3-\sqrt{3}}{6}), (\frac{3+\sqrt{3}}{6}, +\infty)$ مقعر و

در فاصله $(\frac{3-\sqrt{3}}{6}, \frac{3+\sqrt{3}}{6})$ محدب است.

تعریف نقطه عطف:

نقطه (a,f(a)) را **نقطه عطف** نمودار تابع f گویند، هرگاه:

- ۱- $f'(a)$ موجود باشد.
- ۲- فاصله اي حول نقطه a وجود داشته باشد بطوري كه به ازاي هر x از اين فاصله يكي از شرايط زير برقرار باشد:

شرایط نقطه عطف

الف)

$$if : x > a \rightarrow f''(a) > 0 \quad ,$$

$$if : x < a \rightarrow f''(a) < 0$$

یا

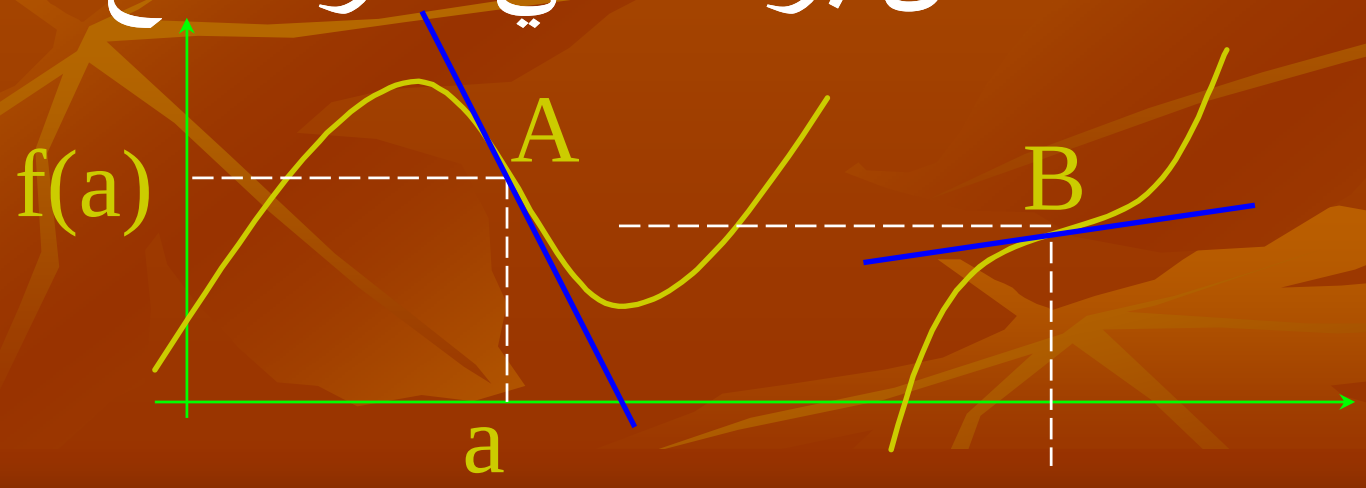
ب)

$$if : x > a \rightarrow f''(a) < 0 \quad ,$$

$$if : x < a \rightarrow f''(a) > 0$$

نکته۱: شرط ۱ تعریف نشان میدهد که در نقطه عطف، خط مماس بر منحني وجود دارد.

نکته۲: شرط۲ تعریف نشان میدهد که در x=a جهت تقعر منحني تغییر میکند.یعني در نقطه عطف خط مماس بر منحني، آنرا قطع میکند



مثال:

در مثال قبل، منحني تابع داراي دو نقطه عطف به ترتيب زير است:

$$x=\frac{3+\sqrt{3}}{6},\ x=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$$

قضيه:

فرض كنيد تابع f در فاصله اي حول نقطه a مشتقپذير و (a,f(a)) يك نقطه عطف نمودار f باشد. اگر $f''(a)$ موجود باشد آنگاه: $f''(a)=0$

اثبات: فرض کنید $g'(x) = f''(x)$ ،پس $g(x)=f'(x)$

چون (a,f(a)) نقطه عطف نمودار f

است، پس f'' در a تغییر علامت میدهد.

یعني تابع g در این نقطه ماکسیمم یا

مینیمم نسبي دارد، پس

و در نتیجه:

$$g'(a) = 0$$

$$f''(a) = 0$$

نکته:

براي تعيين نقاط عطف احتمالي منحني f(x)، بايد xهايي را بررسي كنيم كه به ازاي آنها:

الف) مشتق دوم موجود نباشد

ب) $f''(a)=0$

مثال: تعيين كنيد منحني تابع داده شده در چه فواصلي مقعر يا محدب است.نقاط عطف احتمالي آنرا پيدا كنيد:

$$f(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2$$

حل:

$$f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 48x \Rightarrow$$

$$f''(x) = 12x^2 - 48x + 48$$

ادامه حل:

$$f''(x)=0 \Rightarrow 12(x^2-4x+4)=0 \Rightarrow (x-2)^2=0$$

با وجودي كه مشتق دوم در نقطه x=2صفر ميشود ولي همواره مثبت است و در

نتيجه منحني همواره مقعر است.

رسم نمودار توابع

تعریف مجانب قایم(عمودي): تابع

y=f(x)مفروض است: هرگاه:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty, or \lim_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty, \lim_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty$$

آنگاه خط x=a را مجانب عمودي نمودار fگویند.

مثال:

مجانبهاي عمودي تابع داده شده را بيابيد

$$f(x)=\frac{2x-3}{(x^2+1)(x^2-4)}$$

حل:

$$(x^2+1)(x^2-4)=(x^2+1)(x-2)(x+2)=0$$

$$x=\begin{cases}2\\-2\end{cases}$$

مجانبهاي عمودي

تعریف مجانب افقي:

تابع y=f(x) مفروض است: هرگاه:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b \in R$$

آنگاه خط y=b را مجانب افقي نمودار f گویند.

مثال:

مجانبهاي افقي تابع داده شده را

$$f(x)=\frac{3x^3-4x+1}{x^3+2x^2}$$

حل:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^3-4x+1}{x^3+2x^2}=3\Rightarrow y=3$$

مجانب افقي

تعریف مجانب مایل:

تابع y=f(x) مفروض است. اگر:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

آنگاه نمودار تابع ممکن است داراي مجانب مایلي به معادله y=ax+b باشد.

- روشهاي تعيين مجانب مايل:
- ۱)

$$I)\quad a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$$

$$II)\quad b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-ax)$$

- معادله مجانب مايل ⟸ $y=ax+b$

ادامه روشهاي تعيين مجانب مايل:

- ۲) در مورد توابع گويا، اگر درجه صورت يك واحد از درجه مخرج بيشتر باشد، از تقسيم صورت بر مخرج معادله مجانب چنين حاصل ميشود:

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=ax+b+\frac{r(x)}{q(x)}: \quad \deg r(x)<\deg q(x)$$

- در اينصورت خط y=ax+b معادله مجانب مايل است.

مثال:

معادله مجانب مایل تابع زیر را بدست آورید:

$$f(x)=\frac{2x^2+3x-5}{x-4}$$

حل:

$$f(x)=2x+11+\frac{39}{x-4}\Rightarrow y=2x+11$$

مجانب مایل

تقارن

انواع تقارن: معادله $f(x,y)=0$ مفروض است:

- ۱) اگر با تبدیل y به $-y$ معادله تغییر نکند محور x ها محور تقارن است.
- ۲) اگر با تبدیل x به $-x$ معادله تغییر نکند محور y ها محور تقارن است.

- ۳) اگر با تبدیل y به x و x به y معادله تغییر نکند خط y =x محور تقارن است.
- ۴) اگر با تبدیل x به -x و y به -y معادله تغییر نکند مبدا مختصات مرکز تقارن است.
- ۵) خط x=a محور تقارن است اگر f(2a-x,y)=f(x,y)

ادامه انواع تقارن:

- ۶) خط $y=b$ محور تقارن است اگر $f(x,2b-y)=f(x,y)$
- ۷) نقطه (a,b) مرکز تقارن است اگر $f(2a-x,2b-y)=f(x,y)$

مثال ۱) محور تقارن تابع داده شده را بیابید.

حل:

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

$$f(\frac{-b}{a}-x)=a(\frac{-b}{a}-x)^2+b(\frac{-b}{a}-x)+c=$$

$$=a(\frac{b^2}{a^2}+2\frac{b}{a}x+x^2)-\frac{b^2}{a}-bx+c=ax^2+bx+c$$

بنابراین محور تقارن عبارت است از:

$$x=\frac{-b}{2a}$$

مثال۲) مرکز تقارن تابع داده شده را بیابید.

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$$

حل

$$f\left(\frac{-2d}{c}-x\right)=\frac{a\left(\frac{-2d}{c}-x\right)+b}{c\left(\frac{-2d}{c}-x\right)+d}=$$

$$=\frac{-2ad-acx+bc}{-2cd-c^2x+cd}=\frac{+2ad+acx-bc}{c(cx+d)}=$$

$$= \frac{+2ad + 2acx - acx - bc}{c(cx+d)} =$$

$$= \frac{+2a(cx+d) - c(ax+b)}{c(cx+d)} = \frac{2a}{c} - \frac{ax+b}{cx+d} =$$

$$= \frac{2a}{c} - f(x)$$

درنتیجه مرکز تقارن $\left(\frac{-d}{c}, \frac{a}{c}\right)$ است.

مثال۳) مرکزو محورهاي تقارن تابع داده شده را بيابيد. $x^2 + y^2 = 4$

حل: چون با تبديل x به-x و y به-y معادله تغيير نميکند مبدا مختصات مرکز تقارن است.بديهي است هر کدام از محورهاي مختصات نيز محور تقارن است

رسم نمودار یک تابع :

برای رسم نمودار تابع صریح $y=f(x)$ و یا تابع ضمنی $f(x,y)=0$، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم.

۱) قلمرو تابع را تعیین می‌کنیم.

۲) محـــــورهای تقارن و مرکز تقارن نمودار تابع را در صورت وجود به دست می‌آوریم.

۳) مجانبهای نمودار تابع را در صورت وجود تعیین می‌کنیم.

۴) فاصله‌هایی را که نمـــودار تابع در آنها صعودی و یا نـــزولی است تعیین می‌کنیم.

۵) نقاط اکسترمم (ماکسیمم و مینیمم) نسبی و مطلـــق تـــابع را به دست می‌آوریم.

۶) نقاط عطف نمودار تابع را در صورت وجود پیدا می‌کنیم.

۷) فاصله‌هایی‌را که نمودار تابع در آنها مقعر یا محدب است تعیین می‌کنیم.

۸) اطلاعات‌بدست‌آمده‌رادریک جدول می‌نویسیم.

۹) با اختیار چند نقطه دلخواه از تابع، منحنی همواری از نقاط به دست آمده رسم می‌کنیم.

تمرین :

نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$f(x) = \frac{۳x^{۲} + x + ۱۲}{x}$$

حل:

مجانب قايم

$$Domf = \{x | x \neq 0\}, x = 0, f(x) = 3x + 1 + \frac{12}{x}$$

مجانب مايل

$$y = 3x + 1, f'(x) = \frac{(6x+1)x - (3x^2 + x + 12)}{x^2} =$$

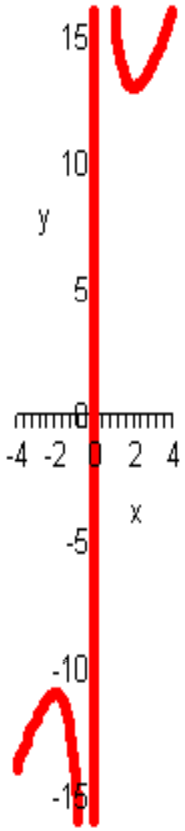
$$= \frac{3x^2 - 12}{x^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$f''(x) = \frac{6x^3 - 2x(3x^2 - 12)}{x^4} = \frac{24}{x^3}$$

ادامه حل:

x	$-\infty$		۲-		۰		۲+		$+\infty$
$f'(x)$		+	۰	−	∞	−	۰	+	
		صعودي		نزولي				صعودي	
$f''(x)$		−		−		+		+	
			محدب				مقعر		

نمودار تابع



صورتهای مبهم :

ممکن است در محاسبه حد بعضی از توابع با صورتهایی مانند :

$$1^{\circ} , \infty^{\circ} , 0^{\circ} , 0\times\infty , \frac{\infty}{\infty} , \frac{0}{0}$$

مواجه شویم. این صورتها را صورتهای مبهم یا نامعین می‌نامیم.

قضیه (قاعده هوپیتال) :

فرض می‌کنیم توابع f و g بر فاصله بازی از نقطه a مانند I، جز احتمالاً در a مشتقپذیر باشند. همچنین، به ازای هر $x \neq a$ در I، $g'(x) \neq 0$ در این صورت، اگر

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

و اگر $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ وجود داشته باشد

آنگاه :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

قضیه در صـــــورتی که همــه حدود، حدهای راست یا همه حـــدهای چپ باشند نیز برقرار است.

نکته :

هرگاه $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ به صورت مبهم $\frac{0}{0}$

باشد می‌توان بار دیگر قاعده هوپیتال را به کار برد، مشروط بر اینکه توابع f' و g' در شرایط قضیه هوپیتال صدق کند، این روند را تا زمانی که حد کسر

حاصل به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ باشد تـــا پایان مرتبه می‌توان تکرار کرد.

تمرین : حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^{۳}-۳x-۲}{۲x^{۲}-۵x+۲}$$

حل:

$$\lim_{x \to ۲} \frac{x^{۳} - ۳x - ۲}{۲x^{۲} - ۵x + ۲} \overset{Hop}{=}$$

$$= \lim_{x \to ۲} \frac{3x^{۲} - ۳}{۴x - ۵} = \frac{9}{4}$$

قاعده هوپیتال در صورتی که x بدون کران افـــزایش یابد ($x \to +\infty$) یا x بدون کران کاهش یابد ($x \to -\infty$) نیز برقرار است.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

تمرین :

حدهای زیــر را در صورت وجود محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۲^{x}}{۳^{x}}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۱-e^{\frac{1}{x}}}{3/x}\overset{Hop}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{x^{2}}e^{\frac{1}{x}}}{-3/x^{2}}=\frac{1}{3}$$

قضیه (قاعده هوپیتال) :

فرض می‌کنیم توابع f و g بر فاصله بازی از نقطه a مانند I، جز احتمالاً در a مشتقپذیر باشند. همچنین، به ازای هر $x \neq a$ در I، $g'(x) \neq 0$ در این صورت، اگر

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$ یا $$-\infty$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$ و نیز $$\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$$ یا $$-\infty$$

وجود داشته باشد. آنگاه :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

قضیه در صورتی که همه حـــــدود، حدهای راست یا همه حدود، حدهای چپ باشند نیز برقرار است.

تمرین :

حد زیر را در صـــــورت وجود محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\sin x)}{\ln(\tan x)} \overset{Hop}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\cot x}{\sec^2 x / \tan x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\cot x.\tan x}{\sec^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sec^2 x} = \lim_{x\to 0^+}\cos^2 x = 1$$

قضیه (قاعده هوپیتال) :

فرض می‌کنیم توابع f و g به ازای هر $x > N$ که N عدد ثابت مثبتی است، مشتقپذیر باشند و به ازای هر $x < N$ ، $g'(x) \neq 0$ در ایـــــن صورت، اگر

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$ یا $-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ یا $-\infty$ و نیز $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

موجود باشد، آنگاه :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

قضیه در صورت تعویض $x \to +\infty$

با $x \to -\infty$ نیز معتبر است.

تمرین :

حد زیر را در صـــــورت وجود محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^{x})}{۲x-۱}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^{x}}{1+e^{x}}}{۲}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{2e^{x}}=\frac{1}{2}$$

اگر در مورد توابع f و g داشته باشیم

$\lim_{x\to a} f(x) = ۰$ ، $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ آنگاه

عبارت $\lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} g(x)$ به صورت

مبهم $۰ \times \infty$ درمی‌آید. برای رفع ابهام

تابع $f(x)g(x)$ را به یکی از دو صورت

$$f(x)g(x)=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$ یا $$f(x)g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

می‌نویسیم. با این عمل حد مورد به یکی‌ازصورتهای مبهم $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ تبدیل می‌شود که در هر دو حالت می‌توانیم قاعده هوپیتال را به کار می‌بریم.

تمرین :

حد زیر را در صـــــورت وجود به دست آورید.

$$\lim_{x\to 0^+} \tan x(\ln x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\cot x} \overset{Hop}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\csc^2 x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-\sin^2 x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\sin x}{x}.\sin x = 0$$

صورت مبهم $\infty - \infty$ با در نظر گرفتن عبارتهایی نظیر $\lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$ بدست می‌آیند که در آن داشته باشیم

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$$

برای رفع ابهام از این صورت مبهم، آن را به یکی از دو صورت مبهم $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ تبدیل می‌کنیم.

تمرین :

حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to ۱}\left(\frac{۱}{\ln x}-\frac{۱}{x-۱}\right)=\lim_{x\to ۱}\frac{x-۱-\ln x}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to ۱}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x-1}=0$$