www.salampnu.com

آشنایی با فلسفه ریاضی

عنوان : آشنایی با فلسفه ریاضی
مولف کتاب مرجع : محمد حسن بیژن زاده
ویراستار کتاب مرجع : علیرضا مدقالچی
تهیه و تنظیم power point : محمد چایچی
مجری : مدیریت رسانه های دانشگاه پیام نور
تاریخ : شهریور 1385
دانشگاه پیام نور

فهرست مطالب

اهداف آموزشی درس

- بررسی ماهیت فلسفه
- ارائه فلسفه های اصلی ریاضیات
- نقد فلسفه های موجود
- تحلیل فلسفی فلسفه
- تاثیر شناخت فلسفی در آموزش ریاضی
- آشنایی با بحرانهای ریاضی

فصل یک

ماهیت فلسفه

اهداف فصل

- توضیح پیرامون ماهیت فلسفه
- نظریات ریاضیدانان
- مقایسه علم وفلسفه
- سوالات علم وفلسفه ومقایسه آنها

فصل یک
ماهیت فلسفه

تقسیم بندی بر اساس سوالاتی از قبیل :

- ماهیت وجود
- ماهیت حقیقت
- ماهیت معرفت
- ماهیت زیبایی

فصل یک
طبقه بندی

- ایده آلیسم
- واقعگرا
- پراگماتیسم
- مفهوم گرا

فصل یک
طبقه بندی (2)

- فلاسفه پیرورواقیون آن را به فیزیک، اخلاق و منطق تقسیم می کردند.
- برخی فلاسفه آن را به مابعد الطبیعه، معرفت شناسی، منطق وارزش شناسی تقسیم می کنند.

فصل یک
برخی نظرات

- سوزانا لانگر : فلسفه بیشتر توسط تنظیم مسئله های خود مشخص می شود تا راه حل هایش برای آنان.
- نلسون گودمن : شاید روزی فرا رسد که در فلسفه بیشتر
- “ بررسی “ انجام گیرد تا “ مجادله “ و فلاسفه همانند صاحبان علم بیشتر بر حسب عناوینی که بررسی میکنند شناخته می شوند تا نظریاتی که دارند.

فصل یک
فلسفه علم فیزیک و ریاضی

- در فلسفه علم فیزیک از مفا هیم بنیادی چون جرم ، زمان و طول بحث میشود.
- در فلسفه ریاضیات اینکه مبانی ریاضیات بر چه چیزهایی قرار دارد بحث می شود.

فلسفه هر علم نقد آن علم است.

فصل یک
فلاسفه چگونه می اندیشند

- پلوتارک : سقراط نه صندلی برای شاگردانش چیده بودونه برکرسی می نشست، نه ساعاتی رابرای سخنرانیهایش از پیش تعیین می کرد. اوهمیشه درحال فلسفیدن بود. هنگامی که لطیفه می گفت، موقعی که درحال آشامیدن بود درآن حال که درخدمت سربازی بود هرجا شما رادرخیابان ملاقات می کرد، وسرانجام هنگامی که درزندان بود و زهررا می نوشید.

فصل یک
رسالت فلسفه

- یک وظیفه عمده فلسفه تصریح این مطلب است که چه راهنمایی می تواند برای تجربه کردن منطقی به نظر آید، آیا آنجا که چنین صراحتهایی بتواند پیش از تجاربی خاص روشن گردد، انها از نظر نقش مقدم بر آن تجارب خاص می باشند؟

فصل یک
رسالت فلسفه (2)

- فلسفه در پرتو تجربه در حال انجام خود ، قوانین خود را ، که همان فهم از خود فلسفه است تبیین میکند.
- نتیجه فلسفه تعدادی قضیه فلسفی نیست، بلکه روشن ساختن قضیه ها است.

فصل یک
طبقه بندی براساس مقاصد علمی

- فلسفه فیزیک
- فلسفه ریاضی
- فلسفه هنر
- فلسفه تاریخ
- فلسفه آموزش و پرورش
- فلسفه فلسفه

فصل یک
نظرات برخی فلاسفه در ماهیت فلسفه (1)

- برتراند راسل : فلسفه ای مناسب است که با مطالب مورد علاقه مردم تحصیل کرده معمولی سروکار داشته باشد.
- سی.ای. لوییس : ویژگی ممتاز فلسفه این است که فلسفه کارهرکسی است.
- نلسون گودمن : فلسفه به عنوان نقشی است برای روشن ساختن پیچیدگی ودرهمی سطوح اسفل تا سطوح اعلی سطح تفکر.

فصل یک
نظرات برخی فلاسفه در ماهیت فلسفه (2)

- اچ گوردون هولفیش : فلسفه به انسان درتفکر به نتایج اعمال روزانه کمک می کند تا با حکمتی بیشتر نتایجی برگزیند تا تفکراتش را عمیق کند.
- افلاطون : پادشاهان باید فیلسوف باشند!
- وتینگشتاین : فلسفه نظریه نیست بلکه عمل است.

فصل یک
ویژگی ماهیت فلسفه

- بازتابشی
- خود پیروی : روش شناسی ومحدودیتهای از درون تعریف شده واین به معنی خود پیروی است.

فصل یک
اهم امور فلسفه

- معرفت ازحقیقت امور
- دریافت روابط ایده ها یا نظریات
- قضاوتهای ارزشی

فصل یک
علم و فلسفه

- مقصد نهایی علم : اصلاح وگسترش معرفت انسان از حقیقت امور
- مقصد نهایی فلسفه : بهبود کیفیت قضاوتهای ارزشی انسان
- سوالهای علمی : چگونگی وبیان واقعیات
- سوالهای فلسفی : بررسی ماهیت پدیده ها
- مثالی ازکارعلمی درریاضی : اثبات یک قضیه
- مثالی ازکارفلسفی در ریاضی : نقد روش اثبات

فصل یک
تمایزعلم وفلسفه

تمایزدرنحوه سئوالها

سوالهای فلسفی

- عدد چیست ؟
- آیا هندسه تبیین فیزیکی جهان خارج است یا علمی است مجرد وذهنی ؟
- ذوات ریاضی کدامند ؟
- منطق حاکم برقضایا کدامند ؟

فصل یک
تمایزعلم و فلسفه

تمایزدرنحوه سئوالها

سئوالهای علمی

- عدد مختلط چیست ؟
- تعریف مجموعه چیست ؟
- بیان قضیه فیثاغورس درهندسه چگونه است ؟
- نظریه نسبیت انیشتین چه می گوید ؟

فصل یک
نقدی بر برخی نظرات

- بعضی می گویند

“ فلسفه علم ، نگاه است به علم ازبیرون “

بایداذعان کرداین گفته درستی نیست. کسی که ریاضی نمی داند فلسفه ریاضی نیزنخواهد دانست. کسی که تخصص علم فیزیک ندارد ازماهیت این علم چیزی نخواهد فهمید.
فیلسوف ریاضی ریاضیدانی آشنا به روش ریاضی بوده و مبانی کلاسیک ریاضیات را فهمیده وتدریس کرده است.

فصل دو
تمایزعلم و فلسفه

اهداف فصل

- آشنایی با روش جدید ریاضی
- فرمول بندی نظریه های منطقی
- ارایه مثالی ساده ازشاخه ای ازریاضیات
- بیان سه کاربرد شاخه فوق الذکر
- ارایه ویژگیهای مجموعه های بنداشتی

فصل دو
روش جدید ریاضی ادامه

- مبنای روش : قیاس واستنتاج
- منشا روش : هندسه وجبر
- کاربران روش : صاحبان تئوری بنداشتی یا قیاسی
- شناخت سریع روش : بهره برداری ازروشهای جبروهندسه
- بنیانگذاران روش : هیلبرت، لباچفسکی، اقلیدس، پوانکاره، کلاین، گاوس، بویویی

فصل دو
روش جدید ریاضی ادامه

ابزارهای الگوهای منطقی

- گزاره ها
- متغیرها
- توابع گزاره ای
- حدود تعریف نشده
- بنداشتها
- توابع دکترین فرضیه ای

فصل دو
الگوی تئوریهای منطقی

- مشتمل برعبارتهای اولیه یا حدود تعریف نشده
- تعریف کلیه اصطلاحات به کمک عبارتهای اولیه
- مشتمل برمجموعه ای ازاحکام درباب عبارتهای اولیه موسوم به بنداشتها یااحکام اولیه (بدون اثبات)

فصل دو
الگوی تئوریهای منطقی

- نتیجه گیری منطقی احکام جدید ازبنداشتها موسوم به قضایای تئوری (با اثبات)
- الگوی تفکربنداشتی مبتنی برعباراتی متناظر هرقضیه که دراثبات قضیه به همراه اثبات آورده می شود نظیر " این برهان راکامل می کند ".

فصل دو
ریاضیات به عنوان توابع دکترین

- راسل ریاضیات را به عنوان گردایه همه توابع دکترین فرضیه ای می انگارد.

وی می گوید :

" ریاضیات را میتوان موضوعی تلقی کرد که درآن ما هرگز نمی دانیم درباره چه چیزی صحبت می کنیم ونمی دانیم آنچه که می گوییم درست است یا نادرست ".

- این تعبیربا گفته هانری پوانکاره مطابقت دارد که می گوید

" ریاضیات عبارتست ازآنکه به چیزهای مختلف نام یکسان بدهیم "

فصل دو

یک مثال از شاخه ای از ریاضیات

اشیا تعریف نشده :

- مجموعه K متشکل از اشیای تعریف نشده

a, b, c, ...

- رابطه دوتائی

R

که اعضای K را به هم نسبت می دهد، هرگاه a با b رابطه داشته باشد، می نویسیم

a R b

فصل دو
مثال ادامه

بنداشتها:

- P1 : اگر a مخالف b باشد، آنگاه aRb یا bRa.
- P2 : اگر aRb آنگاه b مخالف a است.
- P3 : اگر aRb و bRc آنگاه aRc .
- P4 : K دقیقا چهارعضو دارد.

فصل دو
مثال ادامه

- قضیه 1 : اگر aRb آنگاه bRa .
- قضیه 2 : اگر c مخالف a و همچنین c مخالف b باشد و aRb آنگاه یا aRc یا cRb .
- قضیه 3 : حداقل یک عضودر K هست که باهیچ عضو K نسبت ندارد.

فصل دو
مثال ادامه

- قضیه 4 : فقط یک عضو در K هست که با هیچ عضو K نسبت R ندارد.
- تعریف 1 : هرگاه bRa گوییم aDb
- قضیه 5 : هرگاه aDb ، bDc آنگاه aDc .

فصل دو
مثال ادامه

- تعریف 2 : هرگاه aRb وهیچ عضو c در K موجود نباشد به طوری که aRc و cRb گوییم aFb .

- قضیه 6 : هرگاه aFc و bFc آنگاه a=b

فصل دو
مثال ادامه

- قضیه 7 : هرگاه aFb و bFc آنگاه aFc.
- تعریف 3 : اگر aFb و bFc آنگاه گوییم aGc .

فصل دو
کاربرد در شجره شناسی از مثال

- می توان این شاخه ریاضی را درمجموعه ای متشکل از چهارنفر بکار برد: یک مرد، پدر آن مرد، پدر پدرآن مرد ، پدرپدر پدرآن مرد . R به معنی سلف می باشد. متضاد سلف را خلف می نامند. بااین تفسیریک مدل بدست می آید وقضیه ها وتعاریف فوق دراین مورداحکامی درست هستند بیان قضایا دراین مدل عبارتنداز :

فصل دو
کاربرد در شجره شناسی از مثال ادامه

- قضیه 1 : اگر a سلف b باشد، آنگاه b سلف a نیست .
- قضیه 2 : اگر c فردی متمایز از a و b باشد و a یک سلف b باشد آنگاه یا a سلف c است و یا c سلف b است .
- قضیه 3 : حداقل یک مردد K هست که سلف هیچ فردی در K نیست

فصل دو

کاربرد درشجره شناسی ازمثال ادامه

- قضیه 4 : فقط یک مرد در K هست که سلف هیچ فردی در K نیست
- تعریف 1: اگر b سلف a باشد، گوییم a خلف b است.

فصل دو
کاربرد درشجره شناسی ازمثال ادامه

- تعریف 5 : اگر a خلف b و b خلف c باشد ، آنگاه a خلف c است.
- تعریف 2 : اگر a یک سلف b باشد وهیچ فردی چون c موجودنباشد که a سلف c و c سلف b باشد، گوییم a پدر b است.

فصل دو
کاربرد درشجره شناسی ازمثال ادامه

- قضیه 6 : هرمرد حداکثریک پدردارد.
- قضیه 7 : هرگاه a پدر b و b پدر c باشد، a پدرc نیست.
- تعریف 3 : هرگاه a پدر b و b پدر c باشد گوییم a پدر بزرگ c است.

فصل دو
کاربرد درهندسه ازمثال

- اگر K متشکل ازچهار نقطه متمایزواقع بریک خط باشد و R به معنی " سمت چپ " باشد بازهم بنداشتها برقرار بوده وشاخه دومی از ریاضیات کاربردی حاصل می شود. این یک مدل هندسی است. رابطه D به معنی " سمت راست " ورابطه F به معنی " نقطه بعدی K سمت چپ " ورابطه G به معنی " دومین نقطه K سمت چپ" می باشد.

فصل دو
کاربرد حسابی ازمثال

- K متشکل ازچهارعدد صحیح 1و 2و 3و 4 می باشد. رابطه R به معنی " کوچکتراز " می باشد. این بارنیز بنداشتها برقراروشاخه جدیدی ازریاضیات کاربردی حاصل می شود. در اینجا رابطه D به معنی" بزرگتر از" و رابطه F به معنی " یک واحد کوچکتر از " ورابطه G به معنی " دوواحد کوچکتراز" می باشد.

فصل دو
ویژگیهای مجموعه بنداشتی
1- هم ارزی (1)

- دو سیستم بنداشتی **P1 , P2** راهم ارزمی نامند هرگاه هر کدام دیگری را نتیجه دهد. هرگاه دوسیستم بنداشتی هم ارز باشند، دومطالعه مجردی که ازآن نتیجه گردد، یکی خواهد بود.
- مثال قبل با

" P1, P3, P4 و قضیه 1 "

هم ارز است.

فصل دو
ویژگیهای مجموعه بنداشتی
1- هم ارزی (2)

- اکنون این سئوال پیش می آید که ازمیان دوسیسنم بنداشتی کدامیک بهتراست ؟

شایدهیچ ضابطه ای وجود نداشته باشد.

به نظرمی آید آن سیستمی که تعداد عبارتهای اولیه وبنداشتهای کمتری دارد بهتراست .

اما به آسانی می توان دریافت که کاهش تعداد بنداشتها به یک حد اقل، قدری تصنعی است. حتی می توان همه بنداشتهای یک مجموعه را دریک بنداشت بزرگ اما پیچیده جمع کنیم.

فصل دو
ویژگیهای مجموعه بنداشتی
1- هم ارزی (3)

مثالی از کاهش بنداشتها

حکم ساده

“ یک و فقط یک x هست که در g(x) صدق کند ”

را میتوان با پنج حکم زیر تعویض کرد :

1- تعداد x هایی که در g(x) صدق می کند فرد است

2- تعداد x هایی که در g(x) صدق می کند کمتر از 8 است

3- تعداد x هایی که در g(x) صدق می کند برابر 7 نیست

4- تعداد x هایی که در g(x) صدق می کند برابر 5 نیست

5- تعداد x هایی که در g(x) صدق می کند برابر 3 نیست

فصل دو
ویژگیهای مجموعه بنداشتی
1- هم ارزی (4)

مقایسه دو سیستم بنداشتی

یک مجموعه بنداشتی ممکن است به این دلیل بردیگری رجحان داشته باشد که قضیه های کلیدی آن تئوری را سریعتربتوان نتیجه گیری کرد. دراین راستا ممکن است چنین نتیجه های کلیدی رادرمجموعه بنداشتی قرارداده و بی هیچ اتلاف وقتی بدانها دست یافت.

فصل دو
ویژگیهای مجموعه بنداشتی
2- سازگاری

- یک مجموعه بنداشتی راسازگارمی نامند اگردوگزاره متناقض ازآن نتیجه نشود. مجموعه بنداشتی ناسازگارفاقد ارزش است.
- روش مناسب برای کنترل سازگاری :استفاده ازروش مدل سازی. این کار با معنا دادن به عبارتهای اولیه حاصل می شود (مانند مدلهای هندسی، حسابی وشجره شناسی که به مثال قبل ارائه کردیم)

فصل دو
ویژگیهای مجموعه بنداشتی
2- سازگاری (2)

انواع مدل : ملموس وایده آل.

- مدل ملموس : مدلی که هرگاه معنا یی که به عبارتهای اولیه آن متناظرمی گرددعبارت ازاشیا وروابطی باشدکه ازجهان واقعی اقتباس شده است.

فصل دو
ویژگیهای مجموعه بنداشتی
2- سازگاری (2)

- مدل ایده آل :هرگاه معنایی که به عبارتهای اولیه متناظر می گرددعبارت ازاشیا وروابطی باشد که ازسیستم بنداشتی دیگری اقتباس شده است.

چنین نیست که همیشه بتوان یک مدل ملموس ازیک مجموعه بنداشتی عرضه کرد. خصوصا وقتی مجموعه بنداشتی شامل نامتناهی عنصر اولیه باشد، عرضه مدل ملموس غیر ممکن است، زیرا جهان واقعی شامل نامتناهی ازاشیا نیست.

فصل دو
ویژگیهای مجموعه بنداشتی
2- سازگاری (3)

سازگاری نسبی ابزاری از روی ناچاری

- برای اثبات هندسه مسطحه لباچفسکی ازایده سازگاری نسبی استفاده می شود (هندسه لباچفسکی سازگاراست اگر هندسه اقلیدسی سازگارباشد) بطوریکه مفاهیم خاصی را ازهندسه اقلیدسی به کار گرفته ومدل ایده آلی ازهندسه لباچفسکی را که به مدل پوانکاره مشهوراست به دست می آوریم سپس نشان می دهیم هندسه لباچفسکی سازگاراست اگرهندسه اقلیدسی سازگار باشد.

2- سازگاری (4)

اثبات سازگاری به روش مدلها یک اثبات غیرمستقیم است.

هیلبرت مساله اثبات سازگاری اعداد حقیقی رابه روش مستقیم مورد مطالعه قرار داد، ولی موفقیت چندانی بدست نیاورد. زیرااین روش به قواعد استنتاج منطقی بستگی دارد وهرتغییری دراین قواعد میتواند اثبات سازگاری ازاین نوع رادگرگون سازد.

فصل دو
ویژگیهای مجموعه بنداشتی
3 - استقلال

- یک بنداشت ازیک مجموعه بنداشتی را مستقل می نامند هرگاه نتیجه منطقی ازدیگربنداشتهای آن مجموعه نباشد. یک مجموعه بنداشتی را مستقل نامیم هرگاه هر یک ازبنداشتهای آن مستقل باشد.

فصل دو
ویژگیهای مجموعه بنداشتی
3 - استقلال

- مثال ازیک بنداشت مستقل : بنداشت توازی اقلیدس مستقل است.

- مثال ازیک مجموعه بنداشتی مستقل : مجموعه بنداشتی هندسه اقلیدسی (شامل پنج بنداشت) مستقل است.

فصل دو
ویژگیهای مجموعه بنداشتی
3 – استقلال (2)

کاهش بنداشتها

- استقلال یک مجموعه بنداشتی عموماالزامی نیست یعنی یک مجموعه بنداشتی بدلیل عدم استقلال آن فاقدازش نخواهد بود.

فصل دو
ویژگیهای مجموعه بنداشتی
3 – استقلال (2)

کاهش بنداشتها

- مجموعه های بنداشتی مشهوری بودند که درآغازنا خواسته شامل بنداشتهای غیر مستقل بودند. مثلا مجموعه بنداشتهای هیلبرت چنین بود. بعدا نشان داده شد که این مجموعه شامل دوبنداشت است که ازدیگر بنداشتها نتیجه می شوند . کاهش این بنداشتها ازاعتبارسیستم هیلبرت نمی کاهد.

ویژگیهای مجموعه بنداشتی
3 – استقلال (3)

کاهش بنداشتها

- مجموعه مشهو آر. ال. مور متشکل از هشت بنداشت اساس توپولوژی مدرن رابنا نهاده بود، آر.ال. ویلدر توانست این مجموعه رابه هفت بنداشت تقلیل دهد وبنداشت ششم موررا حذف کرد.
- درواقع هرمجموعه بنداشتی مستل یا نا مستقل را به آسانی می توان با استفاده از رابطهای گزارهای به یک مجموعه مستقل وحتی متشکل ازتنها یک بنداشت تبدیل کرد.

فصل دو
ویژگیهای مجموعه بنداشتی
4 - تمامیت

- یک مجموعه بنداشتی سازگاررا تمام می نامند هرگاه بدون توسعه عبارتهای اولیه نتوانیم بندشت مستقل دیگری رابه آن مجموعه بیفزائیم.
- آزمون تمامیت:استفاده ازمفاهیم “ کاتاگوری” و“یکریختی“.

فصل سه
منطق نمادی

اهداف فصل

- آشنائی با منطق نمادی
- آشنائی با تاریخچه این علم
- آشنائی با منطقهای چند ارزشی

فصل سه
تاریخچه

- 1660 لایپنیتزدرمقاله ای که منتشر کرد
- 1848 و 1854 جرج بول درمقالات منتشره
- 1847 اگوست دمورگان دررساله ای که منتشر کرد
- 1890 و 1895 ارنست شرودردرکتاب

“ پیش درآمدی برجبرمنطق ”

فصل سه
تاریخچه

- 1879 -1903 گوتلب فرگه
- 1894پئانودرکتاب فرمولبندی ریاضیات
- وایتهد و راسل در کتاب اصول ریاضیات
- 1934-1939 دیویدهیلبرت وپاول برنایزدرکتب مبانی ریاضیات
- 1935- --- مجله ادواری منطق نمادی

فصل سه
اصول منطق نمادی

- نشان دادن عبارات اولیه با نمادها و علائم مجردعاری ازسوئ تفاهمات موجود درزبان معمولی
- نمایش روابط بین احکام، مجموعه ها ، رده ها ونظایرآن به وسیله فرمولها

فصل سه
ترکیبات گزارهای

- گزاره : جمله ای بامحتوای درست یا نادرست
- ساخت : ساخت گزاره ها به کمک پنج نمادعطف، فصل، شرط، دوشرط، نقیض
- ساخت گزاره های جدید ازترکیب گزاره ها
- ساخت جدول ارزشی گزاره ها
- بررسی هم ارزی گزاره ها بااستفاده ازجدول ارزشی

فصل سه
برخی قوانین منطقی

- قانون طرد شق وسط
- قانون نقض
- قانون تعدی شرطی
- قانون نفی ثانی
- قانون عکس نقیض

فصل سه

گزاره های هم ارز

pvq $p \rightarrow q$ $p \leftrightarrow q$	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$ $\neg(p \wedge \neg q)$ $\neg(p \wedge \neg q)$
$p \wedge q$ $p \rightarrow q$ $p \leftrightarrow q$	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$ $\neg p \wedge \neg q$ $\neg[(\neg p v q) v (\neg q v p)]$
$p \wedge q$ Pvq $p \leftrightarrow q$	$\neg(p \rightarrow \neg q)$ $\neg p \rightarrow q$ $\neg[(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)]$

فصل سه
حساب گزاره ها

- اجرای روش بنداشتی باشروع ازبنداشتها
- شروع ازمفروضات وختم به نتایج
- عدم توجه به درستی یانا درستی مفروضات
- توجه به درستی استدلال دراثباتها

فصل سه
حساب گزاره ها (2)

- روش ساخت : با تعدادادندکی از اتحادهای منطقی بقیه آنها بر طبق قواعد مشخص قواعد منطقی به دست می آیند . در این روش اتحادها به وسیله محاسبات نمادی بدست می آیند. در این روش اندکی ازمجموعه همه اتحادها به عنوان بنداشت انتخاب شده وسپس برطبق قواعد صوری دیگر اتحادهای منطقی به دست می آیند. این قواعدهمان نقشی رادرگسترش حساب گزاره ها دارندکه نتیجه گیری منطقی درگسترش هر تئوری ریاضی.

فصل سه

عبارتهای اولیه

- مجموعه ای مانند P متشکل از ...,p,q,r که گزاره می نامیم.
- عمل دوتایی که براعضای Pاثرکرده وبا $\vee$ نشان می دهیم.
- عمل دوتایی که براعضای Pاثرکرده وبا $\wedge$ نشان می دهیم.
- سایراعمال به دلیل تعریف پذیری بااعمال فوق نیازبه تعریف ندارند.

فصل سه
بنداشتها وتعاریف

- تعریف 1- $p \to q$ به معنی $\neg p \vee q$ می باشد
- L1 – $(p \vee q) \to p$
- L2 – $q \to (p \vee q)$
- L3 – $(p \vee q) \to (q \vee p)$
- L4 -$(q \to r) \to [(p \vee q) \to (p \vee r)]$

فصل سه
قواعد استنتاج قضایا یا اتحادهای ثانویه

- R1 – قاعده جایگزینی: دریک اتحاد هرجاگزاره q هست آن راباگزاره p میتوانیم جایگزین سازیم
- R2 – قاعده جایگزینی تعریفی :جایگزینی هرعبارتی در یک اتحاد باعبارت معادل آن
- R3 – قاعده استلزام : هرگاه m و mn برقرارباشد، n برقراراست.
- R4 – قاعده عطف : هردو گزاره درست m و n می توان اتحاد ثانویه mn رابدست آورد.

فصل سه
برخی قضایای حساب گزاره ها

- قضیه 1 $(q\rightarrow r)\rightarrow[(p\rightarrow q)\rightarrow(p\rightarrow rR]$
- قضیه 2 $p\rightarrow(pvq)$
- قضیه 3 $p\rightarrow p$
- قضیه 4 $\neg pvq$
- قضیه 5 $pv\neg p$

فصل سه
برخی قضایای حساب گزاره ها

- قضیه 6 : $p \to \neg p \to \neg p$
- قضیه 7 : $p \to \neg(\neg p)$
- قضیه 8: $p \vee \{\neg(\neg p)\}$
- قضیه 9 : $\neg(\neg p) \to p$
- قضیه 10: $p \leftrightarrow \neg(\neg p)$

فصل سه
منطق چند ارزشی یا منطق غیر ارسطویی

- 1921 جی لوکازیویچ : بنا گذاشتن منطق سه ارزشی
- 1930 ای. ال. پست : بنا گذاشتن منطق m ارزشی
- 1932 اچ ریچن باخ : بنا گذاشتن منطق بینهایت ارزشی
- 1932 اف سویسکی : بکار گیری منطق چندارزشی در نظریه کوانتم فیزیک

فصل سه

سقوط مطلق گرایی منطقی

- برای عامه مردم باورکردنی نیست که شق دیگری ازقوانین منطقی، بجزآنچه ارسطو درقرن چهارم قبل ازمیلاد بیان کرده است وجود داشته باشد.
- احساس عمومی براین است که قوانین منطق ارسطو به گونه ای با ساختار جهان و لذا با طبیعت استدلال انسانها در آمیخته اند.
- این منطق گرایی منطقی سرانجام درسال 1921 فروریخت.

فصل سه
سقوط مطلق گرایی منطقی (2)

- آلونزویچ : ماهیچ وجهی از یکتایی یا درستی مطلق را به هیچ یک از سیستمهای منطقی اطلاق نمی کنیم. ذوات منطقهای صوری مجردات هستند که به خاطر استفاده آنها در توصیف و سازماندهی به حقایق تجربی یا مشاهدات اختراع شده اند. ویژگیهای این ذوات به گونه ای بی روح و خشک برای استفاده مورد نظرمشخص می شوند. این ویژگی ها به انتخاب دلخواه مخترع نیز بستگی دارند.

فصل سه

منطق سه ارزشی ادامه

- پذیرش سه نوع ارزش درست، نادرست، نیمه درست
- نوع جدول ارزشی : جدولی چهاردرچهاربرای عطف وجدولی چهاردردو برای نقیض
- تعداد جداول ارزشی ممکن : 256 نوع جدول ارزشی متفاوت

فصل سه
منطق سه ارزشی ادامه

- ساختن جدول ارزش هریک ازرابطهای منطقی باقیمانده بر حسب جدول عطف ونقیض
- ارتباط نزدیک بین منطقهای چند ارزشی ونظریه احتمال

فصل سه
یک جدول عاطف

- یک جدول عاطف درمنطق سه ارزشی

$\wedge$	T	?	F
T	T	?	F
?	?	?	F
F	F	F	F

فصل سه
دو جدول نقیض

- دو جدول ارزشی نقیض در منطق سه ارزشی

P	-P
T	?
?	?
F	T

P	-P
T	?
?	F
F	T

فصـــــــــــــــــــــــــــــــل ســـــــــــــــــــــــــــــــه

شک و تردید مولد علوم جدید

- جورج کانتور: جوهره ریاضیات درآزادی نهفته است.
- منطقهـای غیرارسـطویی در کشـف و پیشـرفت علمـی سـهم بزرگـی دارنـد. وقتـی ازاینشتاین سئوال شد چگونـه تئوری نسـبیت را اختـراع کـردی پاسخ داد : یـک اصل علمـی را مورد سئوال وکاوش قرار دادم.
- هامیلتون وکیلی بنداشت جابجایی ضرب رامورد تردید قرار دادند.

فصل سه
شک و تردید مولد علوم جدید

- خواجه نصیرطوسی، لباچفسکی وبویوئی اصل توازی اقلیدس راموردسئوال قراردادند.
- کپرنیک این اصل را که زمین مرکز منظومه شمسی است مورد تردید قرارداد.
- گالیله سقوط سریع اجسام سنگین را مورد تردید قرارداد.

فصل چهار
بحرانهای تاریخی در مبانی ریاضیات

اهداف فصل

- بررسی سه بحران ریاضی
- بحرانی که هنوزرفع نشده است
- پارادوکسهای نظریه مجموعه ها
- پارادوکسهای راسل وکانتور

فصل چهار
بحران اول

- زمان : قرن پنجم قبل ازمیلاد
- منشا بحران : کمیتهای هندسی نامتناسب
- رفع بحران : 370 سال قبل ازمیلاد توسط ادوکسوس
- تلاشی دیگردرراستای رفع بحران : 1872 ریچارد ددکیند
- نتیجه تاریخی : ابطال نظریه فیثاغورثیان درباب کمیتها

فصل چهار
بحران دوم

- زمان پیدایش بحران : اواخرقرن هفدهم
- منشا بحران : کشف حساب دیفرانسیل وانتگرال توسط نیوتن ولایپ نیتز
- موضوع بحران : تناقض و پارادوکسها درمفاهیم مشتق و نمومتغیرونسبت تغییرنموبه رشد
- مفاهیم مبهم : کمیتهای بینهایت کوچک، سریهای نامتناهی ، توان صفر

فصل چهار
بحران دوم ادامه

تلاش برای رفع بحران

- کارل وایراشتراوس : مقابله با شهودهندسی درآنالیز با ارائه تابعی همه جا پیوسته وهیچ جا مشتق پذیر
- لئونارد اویلر: وضع فرمولگرایی درآنالیز
- دالامبر: وضع قانون مبانی آنالیز
- جوزف لویز لاگرانژ : بسط تابع به سری تیلور

فصل چهار
بحران دوم ادامه

- گاوس : طرح استانداردهای منطقی آنالیزوطرح سریهای ابر هندسی
- آگوست لویوئی : وضع مفاهیم اتصال مشتق وانتگرال معین به شیوه ای نوین
- ریمان: ارائه انتگرال ریمان

فصل چهار
بحران سوم

- زمان پیدایش بحران : 1897 و 1902
- ویژگی : عدم رفع کامل بحران
- زمینه بحران : پارادوکسهای موجود درتئوری عمومی مجموعه های کانتور
- ظهوراولین پارادوکس : 1897 توسط برالی فورتی در تئوری مجموعه ها

فصل چهار
بحران سوم

- ظهوراولین پارادوکس : 1898 توسط کانتور در تئوری مجموعه ها مشابه پارادوکس برالی فورتی
- ظهوردومین پارادوکس : 1902 توسط برتراند راسل در تئوری مجموعه ها در خصوص مفهوم مجموعه

فصل چهار
بحران سوم ادامه

تلاش برای رفع بحران

- 1908 زرملو
- 1918 هرمان وایل
- فرا نکل
- اسکولم
- فن نویمان
- برنانز

فصل چهار
تئوری بنداشتی اعداد حقیقی

- اواخرقرن نوزدهم
- پاسخی برای حل بحران دوم
- قدمی برای فهم حساب دیفرانسیل وانتگرال
- راهی بسوی منطق گرایی

فصل چهار
تئوری بنداشتی اعداد حقیقی

- سابقه تاریخی : بابلیان، هندیان وایرانیان
- بابلیان : معرفی نماد صفر
- هندیان : معرفی نماد صفر
- ایرانیان : توسعه جبر

فصل چهار
اعداد طبیعی

اصول پئانو

- صفر عدد طبیعی است
- تالی طبیعی، طبیعی است
- هیچ دو عدد طبیعی متمایز یک تالی ندارند
- صفر تالی هیچ عدد طبیعی نیست
- اگر خاصیتی در باره صفر صدق کند، واگردرمورد یک عدد طبیعی صدق کند درباره تالی ان هم صدق می کند، درباره همه اعداد طبیعی صدق می کند

فصل چهار
اعداد طبیعی

اصطلاحات تعریف نشده در اصول پئانو:

- صفر
- تالی
- عدد طبیعی

ناتوانی اصول پئانو :

- عدم تعریف انواع بالاتر اعداد
- عدم تعریف جمع و ضرب اعداد طبیعی
- عدم وجود اصطلاحات تعریف نشده " مجموعه" و" زوج مرتب"

فصل چهار
انواع بالاترا عداد

- معرفی تئوری اعدادگویا برپایه تئوری اعداد طبیعی
- روش : یک عدد گویا = زوجی مرتب ازدوعدد طبیعی
- جمع دوعدد گویا : جمع زوجهای مرتب
- ضرب دوعدد گویا : ضرب زوجهای مرتب

فصل چهار
انواع بالاتراعداد

- معرفی تئوری اعداد حقیقی برپایه تئوری اعداد گویا
- روش: استفاده از برش ددکیند ، حد دنباله ای از اعداد گویا
- معرفی تئوری اعداد مختلط برپایه تئوری اعداد حقیقی
- یک بینش براساس پایه شمردن اعداد طبیعی : کرونکرمی گوید " خداوند اعداد طبیعی را ساخت ، بقیه کار بندگان اوست"

فصل پنجم
فلسفه های ریاضی
اهداف فصل

- آشنائی با فلسفه منطق گرائی
- آشنائی با فلسفه شهود گرائی
- آشنائی با فلسفه اشراق
- آشنائی با فلسفه صورت گرائی
- شناخت تئوری طبقات

فصل پنجم
منطق گرائی

- پنداشتن ریاضیات به عنوان شاخه ای ازمنطق
- تبدیل شدن منطق به کل ریاضیات
- بیان تمام مفاهیم ریاضی به کمک منطق
- تمایزنامحسوس ریاضیات ومنطق
- پنداشتن تمام قضایای ریاضی به عنوان قضایائی ازمنطق

فصل پنجم
منطق گرائی ادامه

- اولین پایه گذار : فرگه
- فرگه: فقط قوانین عدد را می توان به قوانین منطق تاویل کرد
- دومین پایه گذار: برتراند راسل
- راسل :همه ریاضیات را می توان به منطق تاویل کرد
- شیوه فهم این استدلال : بیان هندسه به کمک هندسه تحلیلی

فصل پنجم
منطق گرائی ادامه

- ویژگی استدلال :استفاده از"ایده های اولیه" ، "احکام اولیه "
- استفاده ازتئوری طبقات وحساب گزاره ها
- سومین پایه گذار :وایتهد
- وایتهد : همه ریاضیات را می توان به منطق تاویل کرد

فصل پنجم
منطق گرائی ادامه

کتاب " اصول ریاضی " تلاش راسل ووایتهد درراستای منطق گرایی

- استفاده ازتئوری طبقات
- استخراج ریاضیات ازاعداد طبیعی
- بکار گیری "صفر "، " تالی" و"عدد طبیعی"
- استفاده ازاصول پئانو

فصل پنجم
منطق گرائی ادامه

تئوری طبقات

- اصل تئوری طبقات : قراردادن مجموعه ها ، مجموعه مجموعه ها و..... در یک سلسله سطوح یا طبقات
- عدم قبول مجموعه هائی با عضو هائی ازطبقه ای غیراز طبقه بلافاصله پایین ترازطبقه خودآن
- وارد کردن مفهوم " بی معنی " به فلسفه

فصل پنجم
منطق گرائی ادامه

تئوری طبقات

- نفی قانون طرد شق ثالث
- عناد راسل درتقابل با پارادوکسها
- اصل دورباطل ونقض پارادوکسها

فصل پنجم
منطق گرائی ادامه

بررسی عمیق در باب تئوری طبقات

- وجود دونوع پارادوکس : پارادوکس ناشی ازمعانی الفاظ یا تناقض معنوی وپارادوکس ناشی ازتئوری مجموعه ها
- پارادوکس اپیمندیس از نوع معنوی
- عدم پردازش تئوری طبقات به پارادوکسهای معنوی

فصل پنجم
منطق گرائی ادامه

- تئوری طبقات به عنوان وسیله ای در انتظار پیدا شدن وسیله بهتری برای متوقف ساختن پارادوکسها
- نظریه راسل به عنوان راه حلی موقت
- " اصل بیکرانی "راسل و وایتهد راهی برای توجیه شکاف تئوری طبقات و تصدیق وجود تعداد بیشماری ذاتها از نوع پایین ترین طبقه

فصل پنجم
منطق گرائی ادامه

بررسی عمیق تئوری طبقات ادامه

- مطابقت نداشتن اصل بیکرانی با فلسفه واقعگرایی که بنا بر آن فرض بر این است کهریاضیات عدد فقط آنچه را که ما از پیش درباره برخی ذاتهای مجرد می دانیم بیان می کنند
- نقایص دیگر تئوری طبقات : عدم پذیرش " مجموعه مجموعه ها " ، " مجموعه تهی " و" مکمل مجموعه " و اینکه برای هر طبقه در سلسله مراتب طبقات عدد " یک " تازه ای وجود دارد. این وضع برای بقیه اعداد طبیعی نیز در هر طبقه رخ می دهد.
- " اصل تحول پذیری " راسل راهی برای فرار از معضل به وجود آمده برای اعداد طبیعی

فصل پنجم
شهود گرائی

- سابقه تاریخی : زمان کانت
- تزشهود گرایان : ساختن اشیا وبرهانهای ریاضی با گامهای متوالی و متناهی
- قرارداشتن پایه ریاضیات بر شهود اولیه
- درک ما از " قبل و بعد " ودرک یک شیئ مشخص و سپس ادراک های بعدی متوالی وبی پایان
- حصول اعداد طبیعی به روش فوق

فصل پنجم
شهود گرائی

کانت و شهود گرائی

- اعداد وقتی وجود دارند که بتوان آنها راشمرد
- عدم وجود بزرگترین عدد
- عدم وجوداعداداصلی نامتناهی
- عدم وجود حداکثرطول درهندسه

فصل پنجم
شهود گرائی

- ارائه نظریه بیکران بالقوه به جای بیکران بالفعل توسط کانت
- هم خوانی نظریه کانت باارسطو درباب بی کرانی بالقوه
- اصراربرگامهای ساختار گرایانه و طی گامهای متناهی

فصل پنجم
شهود گرائی

شهود گرائی معاصر با نظریه ساختارگرائی

- چهره شاخص : ال. ای. جی بروئور هلندی
- اعمال روش ساختارگرانه تئوری مجموعه ها
- سلب امکان وجود مجموعه های پارادوکس زا
- قویترشدن تدریجی فلسفه بروئوربا گذشت زمان

فصل پنجم
شهود گرائی

شهود گرایان درتقابل با نظریه کانتور

- شهود گرائی درمقابل نظریه کانتور مبنی براینکه تعداد اعداد حقیقی بیشترتعداداداعداد طبیعی است.
- استفاده ازبسط اعشاری نامتناهی یک عدد حقیقی برای اثبات ادعای فوق توسط کانتوروسزنده نبودن این استدلال ازدید شهود گرایان

فصل پنجم
شهود گرائی

شهود گرایان ورد " قانون طرد شق وسط "

- شهود گرائی درتقابل با مواردی درریاضیات که نه برای صحتشان دلیلی پیدا شده ونه برای بطلانشان مانند " آخرین قضیه فرما " و" حدس گلدباخ ".

فصل پنجم
شهود گرائی

- اصرارشهود گرایان براینکه درمواردی مثل دومورد فوق باید به صراحت تصمیم گرفت وچون صحت یا سقم مشخص نیست پس حکم برشق وسط یعنی
“ نه صحیح ونه نادرست “
رابايد پذيرفت.

فصل پنجم
شهود گرائی و قربانیان ریاضی برسر این فلسفه

تئوری های قربانی شده بشرط پذیرش شهود گرائی

- اولین مورد : تئوری اعداد اصلی کانتور
- دومین مورد : هرمجموعه کراندار ازاعداد طبیعی یک کران بالا دارد
- اصل موضوع انتخاب زرملو (تاوانی بسیار سنگین)
- سایر اصول هم ارز اصل موضوع انتخاب نظیر

لم زرن،

اصل خوشترتیبی ،

استقرا

فصل پنجم
شهود گرائی در تقابل با منطق گرائی

- دراصول ریاضیات راسل ووایتهد قانون طرد شق وسط و قانون تناقض هم ارزانگاسته شده ولی برای شهودگرایان این وضع قابل قبول نیست وتلاش برای دستگاه منطقی که درآن ایده های شهودگرایانه قابل تحمل باشد درسال 1930 توسط هیتینگ انجام گرفت ومنطق نمادی شهود گرایانه توسعه ورشد یافت.

فصل پنجم
شهود گرائی و توسعه ریاضیات

چه مقدارازریاضیات را میتوان با محدودیتهای شهود گرایانه بازسازی کرد؟

- بخش زیادی نظیرتئوری مجموعه ها وقضیه پیوستار کانتورتا حدودی بازسازی شده است.
- گرایش شهود گرایانه بسیارکم توان ترازریاضیات کلاسیک است.

فصل پنجم
شهود گرائی و توسعه ریاضیات (2)

چه مقدار از ریاضیات را میتوان با محدودیتهای شهود گرایانه بازسازی کرد؟

- نتیجه : بخش عظیمی ازریاضیات کلاسیک باید قربانی شود
- یکی ازنقاط قوت فلسفه شهود گرائی :عدم بروز تناقض در روشهای شهود گرائی (البته تا امروز)

فصل پنجم
فلسفه اشراق

- شیخ فلسفه اشراق : سهروردی
- فلسفه اشراق بر استدلال و کشف و شهود هر دو تکیه دارد.
- سابقه شهود گرائی ریاضی به درک کانت از عدد برمی گردد، درحالی که فلسفه شهود درمبانی کلی فلسفی که به فلسفه اشراق معروف است به دوره پیش از ارسطو نسبت داده میشود.

فصل پنجم
صورتگرائی

- سابقه تاریخی : 1899 دیوید هیلبرت
- سایرین : برنایز، اکرمان، فن نویمان
- تزصورتگرائی : ریاضیات با سیستمهای نمادی صوری سروکاردارد وبنابراین ریاضیات عبارتست از گردایه ای ازسیستمهای نمادی مجرد که مفاهیم آن صرفا نمادهای بی معنی واحکام آن فرمولهائی هستند که بااین نمادها بیان می شوند.

فصل پنجم
صورتگرائی ادامه

مفاد یک سیستم صوری

- یک زبان رسمی (گردایه ای از نمادها وقواعد)
- گردایه ای ازبنداشتها
- یک سیستم استنتاجی (گردایه ای از قواعد برای نتیجه گیری حکمی ازحکمی دیگر)
- قضیه هائی که باگامهای متناهی از بنداشتها نتیجه میشوند

فصل پنجم
صورتگرائی ادامه

تلاش هیلبرت

- تلاش هیلبرت برای رفع بحرانهای پارادوکسهای تئوری مجموعه ها باارائه تزصورتگرائی
- 1934 و 1939 انتشار دوجلد کتاب مبانی ریاضیات هیلبرت، انجیل صورتگرایان
- موفقیت هیلبرت درگروحل مسئله سازگاری

فصل پنجم
صورتگرائی ادامه

تلاش هیلبرت (2)

- روش مدلها فقط تضمین کننده سازگاری نسبی بود
- کنارگذاشتن روش مدلها توسط هیلبرت
- تلاش هیلبرت با روش مستقیم وجدید بنام " تئوری برهان "
- پایان تراژیک تئوری برهان

فصل پنجم
شکست تئوری برهان

قضیه عدم تمامیت گودل اعجاز تاریخ منطق وریاضیات

(کتاب آشنائی با منطق ریاضی تالیف اندرتون ترجمه خسروشاهی نشردانشگاهی)

- 1931گودل : قبل ازچاپ کتاب مبانی هیلبرت گودل با روشهای قاطع وغیر قابل تردید نشان داد که برای یک سیستم استنتاجی به قدرکافی غنی همچون سیستم کل ریاضیات کلاسیک هیلبرت، غیرممکن است که بتوان سازگاری سیستم رابا روشهای متعلق به آن سیستم اثبات کرد.

فصل پنجم
شکست تئوری برهان

قضیه عدم تمامیت گودل اعجاز تاریخ منطق وریاضیات

(کتاب آشنائی با منطق ریاضی تالیف اندرتون ترجمه خسروشاهی نشردانشگاهی)

- گودل (قضیه عدم کمال) : سیستمهای صوری که مدعی اند برای استخراج ریاضیات کافی هستند قابل اطمینان نیستند یعنی سازگاری آنها را نمی توان با روشهای متناهی فرمولبندی شده درداخل سیستم اثبات کرد، درحالی که هرسیستمی که دراین معنی قابل اطمینان باشد غیرکافی است.
- قضیه عدم کمال گودل شکست تئوری برهان هیلبرت

فصل شش
ذوات ریاضی

- اهداف فصل
- آشنائی باسئوالات ماهوی
- بررسی دیدگاههای مختلف یاضی درباره ماهیت ذوات ریاضی
- پاسخ دگماهای صورتگرایان، افلاطونگرایان، شهود گرایان ونامگرایان درمورد ذوات ریاضی

فصل شش
ذوات ریاضی چه ماهیتی دارند

- دیویدهرش : هرگاه کارروزانه تان ریاضی باشد، به نظرتان طبیعی ترین کاردردنیا می باشد. ه گاه کارتان را لحظه ای متوقف کنید وفکرکنید چه کارمی کنید واین کارها چه معنی دارد، به نظرتان ریاضیات یکی ازاسرارآمیزترین اموراست. چرا هنوزهندسه اقلیدس درست است، درحالیکه فیزیک ارسطویی از سالها پیش مرده است ؟ در ریاضیات چه می دانیم وچگونه به آنها معرفت پیدا می کنیم؟ ذوات ریاضی چگونه ذواتی هستند؟ مجردند یا ملموس؟ فقط در ذهن آدمی هستند یا درجهان خارج نیزوجود دارند؟

فصل شش
افلاطونگرایی

- ذوات ریاضی را ما نمی سازیم بلکه ازقبل یکباروبرای همیشه وبه شکل ایده آل وازلی خلق شده اند. ما آنها را خلق نمی کنیم ، آنها را کشف می کنیم .
- یاضی نظری است که برطبق آن ذوات ریاضی مستقل از وجود انسانها وریاضیدانان وجود دارند، در جایی خارج ازوجود ما.
- برطبق این نظر، ریاضیات همتای نمادی جهان است که به تدریج رشد و گسترش یافته است.
- کاریک نظریه پردازریاضی این است که به نوای جهان گوش دهد و آنچه راکه می شنود ومی بیند ثبت کند.

فصل شش
افلاطونگرایی (2)

- ذوات ریاضی حقیقی بوده ووجود آنها مستقل ازدانش ما در موردآنهاست.
- مجموعه ها، فضاهای برداری، منیفلدها، منحنی های فضا پرکن همگی اعضای باغ وحش ریاضی هستند و ذواتی معین اند.
- یک ریاضیدان، یک دانشمند علوم تجربی ومانند یک زمین شناس است، وی نمی تواننداختراع کند، اوکشف می کندهمه چیزازقبل اختراع شده است.

فصل شش
افلاطون گرایی (3)

- رینه تام : همه چیزازقبل وجوددارد ریاضیدان به قدرکافی باید شهامت داشته باشد که تمایلات عمیق خودرا بروزدهد وتایید کند که صورتهای ریاضی درواقع وجود دارند
- گودل :علیرغم جدایی ذوات ریاضی ازحس تجربی، ما موکدا چیزی شبیه دک ازاین ذوات تئوری مجموعه ها را داراهستیم. زیراملاحظه می کنیم که بنداشتهای این تئوری خودرا به ما به عنوان ذواتی حقیقی تحمیل می کنند.

فصل شش
منتقدین فلسفه افلاطونگرایی

- آلبرت رابینسون : من نمیتوانم تصورکنم به جرگه افلاطون گرایان برگردم. کسانی که جهان درواقع بی نهایت راپیش روی خودگسترده می بینند واعتقاد دارند که میتوانند ذوات غیرقابل فهم را درک کنند.
- ویگنشاین : منطق وریاضیات صرفا ما را به صورتهای استنتاج مجهزمی کنند، درکارریاضی ما فقط عباراتی رابه عباراتی تبدیل می کنیم واین که چنین تبدیلهایی درست است یا نه ازجهت مطابقت با ذوات ریاضی نیستند بلکه فقط با این ضابطه تعیین می شوند که چگونه افراد در واقع از این عبارتها استفاده کرده و چه چیزی را صحیح می نامند.

فصل شش
صورتگرایی

- ریاضیات علم استنتاجهای منطقی است که درآن از بنداشتها شروع وقضیه ها نتیجه گیری میشود. حدوداولیه آن تعریف نمی شود. قضیه و بنداشتها فاقد محتوایند مگر آنکه بدانها تعبیرهایی متناظرکنیم.
- ریاضیات علم برهانهای منطقی است.
- برای هرمطلب یا برهانی وجود دارد یا آنکه اصلا آن مطلب به حساب نمی آید.

فصل شش
صورتگرایی (2)

- برای مثال در هندسه نقطه و خط عبارات تعریف نشده و گزاره " بر هر دو نقطه یک خط می گذرد " یک بنداشت است.
- اهمیت منطقی چنین بنداشتی به تصویر ذهنی که ماازآن داریم بستگی ندارد. می توانیم خط راجاده و نقطه را روستا بنامیم.

" ازهردو روستا یک جاده می گذرد. "

درروند تئوری هیچ تغییری حاصل نمی شود.

فصل شش
صورتگرایی (3)

- بایداستنتاجهای منطقی حاصل ازبنداشتهای برقرار باشد. نتایج حاصل را قضایای تئوری می نامند.
- هیچ کس نمی تواندادعا کند که یک قضیه حقیقت دارد، قضیه ها به عنوان احکامی از ریاضیات محض نه حقیقت دارند ونه کذب، زیرااحکامی درباب عبارتهای تعریف نشده اند.

فصل شش
صورتگرایی (3)

- تنها چیزی که می توان گفت، قضیه ها نتیجه منطقی بنداشتها هستند.
- قضیه ها فاقد محتوایند
- قضیه ها مبری ازخطا وشک هستند زیرا فرآیند برهان و استنتاج منطقی هیچ ابهامی باقی نمی گذارد.

فصل شش
صورتگرایی و هندسه

- ازنظرتاریخی یک دلیل عمده برای ارائه نظرصورتگرایی پاسخی به سرنگونی و رد هندسه اقلیدسی است.
- ازدیدگاه اقلیدس بنداشتهای هندسه فقط فرضیاتی ساده تلقی نمی شوند بلکه " حقایقی خود آشکار " به شمار می آیند.
- ازدیدگاه فیلسوف صورتگرااین تصوررا که می توان با "حقایق خودآشکار" یک نظریه را فرمولبندی کرد قابل قبول نیست.

فصل شش
صورتگرایی و بنداشت توازی

- آیا بنداشت توازی اقلیدس ونقیض آن هردودرست است ؟
- صورتگرایان :هرگاه به عنوان یک ریاضیدان درصدد باشیم که آزادی عمل خود رابرای مطالعه هردو هندسه اقلیدسی وناقلیدسی حفظ کنیم لازم است از این معنی که هر یک ازاین بنداشتها حقیقت داشته باشد صرفنظر کنیم . تنها چیزی که کفایت می کند سازگاری هریک ازاین هندسه ها است.
- این دو هندسه وقتی متضاد هم تلقی می شوند که به یک فضای فیزیکی حقیقی اعتقاد داشته و تاکید کنیم.

فصل شش

هندسه و فیزیک در صورتگرایی

- آیا قضایای هندسه صرفنظر ازتعبیرهای فیزیکی احکامی با معنی هستند ؟
- آیا میتوانیم ازکلمات درست و نادرست درباب هندسه محض استفاده کنیم ؟
- افلاطونگرایان به دوسوال فوق پاسخ مثبت می دهند زیرا اشیا ریاضی را مستقل ازعالم فیزیکی می پندارند.
- اما صورتگرایان پاسخ منفی می دهند و می گویند احکام هندسی نمی توانند درست یا نادرست باشند زیرادرمورد چیزی نبوده وهیچ معنایی دربرندارند.

فصل شش
صورتگرایی و رسالت آموزشی

- یک صورتگرا چه مصداقها یا کاربردهایی برای تئوریی که توسعه می دهد درنظردارد ؟
- پاسخ:این گونه سوالها سوالهایی نامربوط است. وقتی که برای قضیه ای برهانی ارائه میشود کارریاضی انجام یشده است. هرچیزدیگردراین باب مطلب اضافی است.
- مقیاس اینکه چه مقدارریاضی دریک کلاس درس داده ایم این است که چه مقداردراین کلاس مطلب ثابت کرده ایم.
- این سوال که مستمعین ما چه مقدارفهمیده اند به ریاضیات ربطی ندارد.

فصل شش
صورتگرایی فلسفه حاکم درمدارس

- دراواسط قرن بیستم صورتگرایی وضعیت فلسفی حاکم در کتابهای درسی ونوشته های رسمی ریاضی به شمار می رفت درحالیکه افلاطونگرایی که توسط بسیاری از ریاضی دانان مورد قبول بودبه صورت عقیده ای مخفی وخصوصی تلقی می شد وبندرت درمباحث عمومی ذکرمی گردید.

فصل شش
صورتگرایی وپوزیتیویسم علمی

- یک دلیل عمده حاکمیت فلسفه صورتگرایی ارتباط آن با پوزیتیویسم منطقی بود. که گرایش حاکم برفلسفه در **1940-1960** بود. درحوزه علمی وین پوزیتیوسیت های منطقی به علم وحدت داده وآن را دریک حساب منطقی صوری طبقه بندی می کردند.

فصل شش
مثالی ازپوزیتیویسم منطقی

- درموردارائه پوزیتیویسم منطقی یک مثال بارزمکانیک کلاسیک ومکانیک کوانتم بود. در مکانیکهای کلاسیک قواعدی برای اندازه گیری کمیتهای بنیادی وجود دارد. مکانیک کوانتم قواعد خاص خودرادارد برطبق آن اصطلاح "مشاهده پذیری" درتئوری صوری به اندازه گیریهای تجربی مربوط می شود.

فصل شش
ریاضیات به عنوان یک زبان ازدیدگاه پوزیتیویسم منطقی

- خودریاضیات، نه به عنوان یک علم، بلکه به عنوان یک زبان برای سایرعلوم تلقی می گردد.
- ریاضیات یک علم به حساب نمی آید زیراهیچ موضوعی ندارد.
- ریاضیات فاقد داده های تجربی است که بتوان برآن قواعد تفسیری رااعمال کرد.
- ریاضیات فقط یک ساختارصوری تلقی می گردد.

فصل شش
تمارض ازصورتگرایی

- درسالهای اخیرعکس العمل درمقابل صورتگرایی افزایش یافته ودرپژوهشهای ریاضی اخیرچرخش به سوی مسا ئل ملموس و کاربردی فزونی یافته است. درکتابهای درسی و منابع علمی اهمیت بیشتری به مثالها قائل می شوند وبه ارائه صوری مطلب قاطعیت چندانی نمی دهند.

فصل شش
فلسفه های دیگر

- تئوری عدد برخلاف بعضی تئوریهای ریاضی کم استعمال ، درزندگیعادی ودرعلوم همیشه به کارمی رود.
- برخی ریاضیدانان به کارکردن بااعداد طبیعی بدون توجه به اصطلاح عدد اکتفا می کنند. آیا باید وجود چنین ذواتی را باور کنیم؟
- صورتگرایان ومنطق گرایان بااستفاده ازنتایج منطقی فرضهای اولیه به تعبیرپئانوقناعت نموده وهمین که قضیه ها رانتیجه بنداشتهای آن می دانند وظیفه علم را تمام شده می دانند.

فصل شش
تئوری بنداشتی اعداد به عنوان سیستمی نا معبر

- تئوری بنداشتی اعداد را می توان سیستمی نامعبرانگاشت و با روشی مجرد ومنطقی درآن پژوهش کرد اما اگر بخواهیم بااستفاده ازاین فرض بکوشیم که اندیشیدن درباره نوع و وجوداعدادرا منع کنیم ازحد ترخیص خارج می شویم.
- ارسطو و کانت معتقد بودند که عملا وجوداشیا بی شماردر جهان مقدور نیست .

فصل شش
وجود عدد

- آیا عدد وجود دارد ؟
- جوابهای فلاسفه ازچه نوع است ؟
- آیاباقاطعیت میتوان "بله" گفت ؟
- چیزهایی که لایق داشتن عنوان عددهستند به طورقطع وجوددارند.

فصل شش
مسئله کلیات درفلسفه وعدد

- مسئله کلیات درفلسفه مسئله ای بوددرباره وضع خواصی مانند فضیلت، چهارگوشی وسرخی. اینها همه ذوات مجرد هستند یعنی چیزهایی که درفضا وزمان نمی گنجند.
- این کلیات چه نوع حقیقتی دارند؟
- چگونه درفکرما دارای اهمیت واعتبارند؟
- مسئله تلاش برای یافتن یک تعبیر لفظی برای عدد شباهت با مسئله کلیات دارد.

فصل شش
جواب فلاسفه به ماهیت کلیات

- واقعگرایان : کلیات ذوات واقعی مجردی هستند که حقیقت وجودشان ازاشیا مجسم کمتر نیست .
- مفهومگرایان : هرچند کلیات حقایق مجردند، درعالم خارج حقیقتی ندارند وفقط درفکرما موجودند.
- نامگرایان : چیزهایی به نام کلیات وجودندارند واگر وجود داشته باشند ذاتهای مجرد نیستند.

فصل شش
نامگرایی

- نامگرایی نظری است که بنا برآن ذوات مجرد وجود ندارند
- نامگرایان بویژه منکروجودذاتهای مجردبه نام اعدادهستتند.
- آیا نامگرایان راه هایی برای تعبیراعداد دارند؟

فصل شش
نامگرایان و اعداد

- اندیشه هایی درذهن ما
- تصویریا نمودی فکری
- مدتی کوتاه درذهن وسپس هیچ
- فضا رااشغال نمی کند

فصل شش
نامگرایی ازنوع دیگرواعداد

- اعداد به جای ذوات ذهنی ذوات عینی وطبیعی دارند.
- عددورقم یکی است وعدد چیزی بالاترياپايين ترازرقم نیست.
- عدد چیزی معین ومحسوس است.
- بااین تعبیراصول تئوری اعداد درست درنمی آید.

فصل شش
نامگرایی از نوع دیگرواعداد

- اگرارقام وافی به مقصود نباشند فیلسوف نامگرا هرعددطبیعی را می تواند با چیزمعینی ازجهان مادی همانند گیرد.
- آیا این تعبیرمیسراست ؟
- نه هرگز

فصل شش
نامگرایی ازنوع دیگر و اعداد (2)

- درالقائات نامگرایانه فوق اشاره ای نمی شود که اصطلاحات "مجموعه" و"زوجهای مرتب" راچگونه باید تعبیرکرد ؟
- بنظرمی رسداگرمجموعه وجود داشته باشد وجودش مجرد خواهد بود.

فصل شش
نامگرایی وتعبیراعداد

- نمی توان ازقبول این نتیجه تن زد که برای تئوری اعداد تعبیرنامگرایانه ای وجود ندارد که به موجب آن این تئوری صحیح درآید.
- درنظرنامگرای مومن ریاضیات عدد را نمی توان مانند معرفتی قطعی به شمارآورد.
- این نتیجه را غیرنامگرایان

"قیاس خلف نامگرایی"

می دانند.

فصل شش
نامگرایی ومفهوم گرایی

- هردوفرقه درمورد مسائلی که دارای وجود ریاضی هستند خست نشان می دهند.
- واقعگرایان : ذاتهای مورد بحث بنداشتها به نحوی قاطع و جازم وجود دارند.
- مفهوم گرایان : وجود ذوات ریاضی مجرد پذیرفتنی است لیکن ساخته و پرداخته ذهن بشر.

مفهوم گرایی
نقدی براین فلسفه

- جناح افراطی مفهوم گرایان اعداد یا هر ذات ریاضی را مخلوق ذهن می دانند. که در این صورت بنداشتهای مخلوق ریاضیدانان را به مثابه احکام خالق می توان انگاشت.
- وقتی یک ریاضیدان با خود می اندیشد که

" باید اصلی وضع کنم که بر طبق آن اعداد چنین و چنان باشند "

آنها را به وجود می آورد و این آفرینندگی او همانند قدرت کامله الهی است که هرچه را که مشیتش تعلق گیرد ازنیستی به هستی درمی آورد.

- امااین افراط در خوشبینی است که آیا ریاضیدان درفعالیت خود از هرقید وبندی به کلی آزاد است ؟

فصل شش
کانت، مفهوم گرایی واقعی

- کانت معتقد است قوانین عدد همانند قوانین هندسه اقلیدسی هم قبلی هستند و هم ترکیبی.
- درنظرکانت معرفت مااز عدد برمبنای درک زمان ودرک ذهن قراردارد.
- برمبنای درک زمان عدد فقط نوعی شهود مطلق است.
- ذهن با شناخت اعداد فقط درکار داخلی خود بصیرت پیدا می کند نه دریک حقیقت.

فصل شش
مقایسه مفهوم گرایی و شهود گرایی در باب اعداد

- در فلسفه مفهوم گرایی ذوات ریاضی مانند مجموعه ها و اعداد مخلوق ذهن ما هستند.
- فلسفه شهود گرایی مجموعه ها و اعداد متناهی رامخلوق ذهن نمی دانند ولی مجموعه های نامتناهی، اعداد اصلی نامتناهی راذواتی بی معنی تلقی می کنند.
- مفهوم گرایان برای ذهن قدرت آفرینش بی حد وحصر قائلند.

فصل شش
واقعگرایان

- درنظرواقعگرا وظیفه یک ریاضیدان همانند وظیفه کسی است که برای کشف زمینهای دوردست راه سفرپیش می گیرد. نمیتواند چیزی اختراع کند او کشف می کند.
- راسل : هرمعرفتی باید برای شناختن حقیقتی باشد وگرنه فریبی بیش نیست. حساب باید همانگونه کشف شده باشد که هندغربی توسط کریستف کلمب. هرچیزی که درباره اش بتوان اندیشید وجود دارد.

فصل شش
واقعگرایان (2)

- درنظرواقعگرایان طرد براهین "ناسازنده" وتعاریف غیر حملی یا تصوراحکامی که نه درست باشدونه غلط به هیچ روی موجه به نظرنمی رسد.
- اگراعداد وسایرذاتهای ریاضی بی آنکه به وجود ما قائم باشند به طورحقیقی وجود داشته باشند وسواس شهود گرایان به کلی زاید وبی اساس است.

فصل شش
واقعگرایان (2)

- براستدلالهای " نا سازنده " هیچ ایرادی نیست.
- برای واقعگرایان آخرین قضیه فرما یا صحیح است یاغلط حتی اگرما نتوانیم ثابت کنیم.

فصل شش
فرگه واعداد

- فرگه : معرفت ما ازاعداد مبتنی بریک بینش عقلی قبلی است.
- هرگاه ماباچشم عقل درساختمان فارغ اززمان یک حقیقت عددی بنگریم به یک معرفت قبلی می رسیم. معرفتی قبل از تجربه واز طریق تفکر.
- معرفت به اعداد اساسا ربطی به فهمیدن و درک معانی کلمات ندارد.
- اگرکسی بتواند زبان اعداد را دریابد امابری حجاب عقل اوشود به طوری که نتواند خود عدد رادرک کند، نخواهد توانست قوانین اعداد رابفهمد.

فصل شش
فرگه واعداد (2)

قوانین عدد همه تحلیلی اند

- فرگه :در حساب سروکارمابا چیزهایی نیست که آنچنان که دیدیم با خارج بیگانه باشند بلکه باچیزهایی است که مستقیما با قوه عقلی ما ارتباط دارند و برای آن چنان روشن اند که گویی نزدیکترین بسته آنند .

فصل شش
فرگه واعداد (3)

قوانین عدد همه تحلیلی اند

- مراد فرگه ازگفتن آنکه قوانین عددتحلیلی اند فقط اینست که این قوانین

" قابل تحویل"

به قوانین منطقی هستند، نه بیشترونه کمتر. یعنی معرفت ما اساسا مبتنی است بربینش عقلی اما آن بینش عقلی که علم به قوانین منطق برای ما تامین می کند.

فصل شش
غروب واقع گرایی

- واقع گرایان خود راmanند کاشفانی می شناختند که به کشف سطحی ازحقیقت مجرد که تا آن زمان نا شناخته بود نائل آمدند، کاشفانی که دریافتند سرزمین پهناور ریاضی خود جزیره ای است ازیک قاره وسیع به نام حقایق منطقی. تصوری بود پرشور و هیجان انگیزاما مانند بسیاری از رویاهای سپیده دم روشن و فرح بخش، هنوزخوب ظاهر نشده و شکل نگرفته محو گردید و ازمیان رفت.

فصل شش
صورت گرایان و بنداشتها

- به علوم ریاضی باید به صورت سیستمهای بنداشتی و قالب ریزی شده نگریست.
- دراین صورت ازبسیاری ازدردسرها وسئوالات بیجا در امان هستند.
- اگربه پیروان این فرگه بگرویم پرسشهایی ازقبیل

“ قوانین عدد چیستند “

دورشده وبه هوا می روند.

- ریاضیات بازی با علامتها است.

ضمیمه اول
اصل موضوع انتخاب

- S متشکل از $a,b,c,....$ به همراه نسبت دوتایی $>$ را مرتب ساده گوییم اگردرسه بنداشت زیرصدق کند
- م 1 . اگر $a\neq b$ آنگاه یا $a<b$ یا $b<a$.
- م 2 . اگر $a<b$ آنگاه $a\neq b$.
- م 3 . هر گاه $a < b$ و $b < c$ آنگاه $a < c$.
- وقتی $a < b$ گوییم a مقدم بر b است.

ضمیمه اول
اصل موضوع انتخاب

- S را به همراه > خوشترتیب نامیم هر گاه بنداشت چهارم زیر نیز برقرار باشد
- م 4 . هر گاه ´s یک زیر مجموعه غیر خالی باشد آنگاه عضوی چون a از ´s هست که برای هر عضو دیگر b از ´s ، a<b یعنی هر زیر مجموعه غیر خالی s عضو ابتدا داشته باشد.

ضمیمه اول
قضیه خوشترتیبی زرملو

- هرگاه s مجموعه ای دلخواه باشد یک نسبت دو تایی < در s وجود دارد که نسبت به آن s خوشترتیب باشد .
- عکس العمل ها : برخی ریاضیدانان می گفتند یک جایی در برهان زرملو اشکالی باید باشد.
- قضیه به نظر باورکردنی نیست.

ضمیمه اول
اصل موضوع انتخاب

- ای برول دریافت که زرملو برهانش را براصل به ظاهر واضحی قرار داده است که قبلا سالها ریاضیدانان از آن استفاده می کردند بی آنکه به آن اصل استناد کنند.

ضمیمه اول
بنداشت زرملو یا اصل موضوع انتخاب

- هرگاه مجموعه S به زیر مجموعه های غیرخالی دو بدو مجزا **A,B,C,...** افرازشود آنگاه لااقل یک مجموعه چون R وجود دارد که از هر یک از زیرمجموعه های **A,B,C,...** دقیقا یک عضودارد.

- این اصل مدعی است چنین انتخابی ممکن است.

ضمیمه اول
اصل موضوع انتخاب

- برول متذکر شد که نه تنها قضیه زرملو برپایه اصل انتخاب قرار دارد بلکه باآن معادل است .
- امروزه ما شاهد وضعیتی راجع به این اصل هستیم که از پذیرش کامل آن تا رد کامل آن تغییر می کند.
- محققین مدرن توپولوژی بی وقفه آن را می ئذیرند.

ضمیمه اول
اصل موضوع انتخاب

- درجبرگرچه استدلالهایی بدون یاری ازاصل انتخاب پا در هوا می ماند لیکن متخصصین جبر تمایل دارند تا آنجا که می توانند بدون استفاده از آن برهانهای خود را بیان کنند.
- درآنالیز نادیده انگاشتن این اصل غیرممکن است.

ضمیمه اول
اصل موضوع انتخاب و اعتراض ها

- مبتنی دانستن آن بردرک ماازوجود ریاضی
- ساختنی نبودن مجموعه مذکور دراصل
- ایراد شهود گرایان بربرهانهای غیرساختنی

ضمیمه اول
اصل موضوع انتخاب وراسل

- مثال راسل : اگربی شمار جفت کفش داشته باشیم می توانیم مجموعه ای متشکل ازیک لنگه ازآن کفشها رابسازیم،کافی ست لنگه های راست هر جفت راانتخاب کنیم که نیازی به اصل انتخاب نداریم.
- اگربی شمارجفت جوراب داشته باشیم نمی توانیم مجموعه ای متشکل از یک لنگه ازآن جوراب ها رابسازیم، بی آنکه ازاصل انتخاب استفاده کنیم زیرا نمی توانیم بدون بهره گیری ازاصل انتخاب لنگه ای ازهرجفت راانتخاب کنیم .

ضمیمه اول
مثالی دیگربراصل موضوع انتخاب

- اگر s مجموعه اعداد حقیقی بین 0 و 1 باشند s را به زیر مجموعه هایی که اعضایش اختلافشان عددی گویاست تجزیه می کنیم. این زیرمجموعه ها دوبه دوازهم جدا وغیر خالی هستند. بدون یاری ازاصل انتخاب نمی توان مجموعه ای ساخت که ازهریک از زیر مجموعه های فوق دقیقا یک عضو داشته باشد.

ضمیمه اول
پارادوکس باناخ - تارسکی

- در هر فضای n بعدی ($n > 2$) هر دو مجموعه محدود دلخواه که شامل نقاط داخلی باشند با تجزیه متناهی معادل یکدیگرند.
- یک مثال ساده : دوکره توپر p و s که درآن اولی به اندازه یک نخود و دومی به اندازه خورشید است را می توان به زیر مجموعه های دوبدو ازهم جدا تجزیه کرد که به وسیله حرکات صلب معمولی ذرات سازنده نخود، همه کره خورشید راپرکند.

ضمیمه دوم
آشنایی با اعداد اصلی

سابقه تاریخی

- فکروبسط تئوری مجموعه ها وعمل کردن با آن بصورت یک موضوع خاص واصیل ازآن کانتورریاضیدان آلمانی اواخرقرن نوزدهم است.
- برطبق سخن یک ریاضیدان : تئوری مجموعه های کانتور دایره المعارف جوانان است.

ضمیمه دوم
آشنایی باعداد اصلی

تعاریف مقدماتی

- تناظر یک به یک
- هم ارزی
- تساوی
- عضویت
- یک به یک
- پوشا

ضمیمه دوم
آشنایی بااعداد اصلی

مثال

- اعداد طبیعی فرد با اعداد طبیعی زوج هم ارزاست.
- 1,3,5,7,9
- 2,4,6,8,10

مقایسه دومجموعه نامتناهی عینا شبیه مقایسه دومجموعه متناهی است.

ضمیمه دوم
آشنایی بااعداد اصلی

مثال

تعدادکل اعداد طبیعی با تعداد اعداد فرد یکی است

1, 3, 5, 7, 9, 11,…n….

0, 1, 2, 3, 4, 5,…n-1/2

ضمیمه دوم
آشنایی بااعداد اصلی

مثالی دیگر

اعداد گویا با اعداد طبیعی هم ارز است

0\1, 1\1, 1\2, 2\1, 3\1, 1\3, …

0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5, ,……

ضمیمه دوم
آشنایی بااعداد اصلی

چند مثال

- بازه $(-\pi/2 , \pi/2)$ با R هم ارز است.
- اگر s مجموعه همه رشته هایی باشد که ازجملات 0 یا 1 تشکیل یافته اند، با N هم ارز نیست.
- مجموعه مذکور s با R هم ارز است.

ضمیمه دوم
آشنایی بااعداد اصلی

- عده اعضای یک مجموعه را عدد اصلی آن مجموعه می نامند. عدد اصلی مجموعه A را با نماد IAI نشان می دهیم.
- مثال $| \{ 1,5,7 \} | = 3$
- $| \{ x , + \} | = 2$
- $| \{ 1, 5 \} | = | \{ 0 , 1 \} |$

ضمیمه دوم
آشنایی بااعداد اصلی

- عدد اصلی N رابا $\aleph_0$ نشان می دهیم. اگر A مجموعه اعداد طبیعی فرد باشد

$$|A| = |N| = |Q| = \aleph_0$$

- عدد اصلی R رابا c نشان می دهیم.

$$|(0, 1)| = c$$

ضمیمه دوم
آشنایی بااعداد اصلی

- فرض می کنیم A مجموعه ای n عضوی باشد

$$| P(A) | = 2^n$$

- مثال

$$| P(N) | = 2^{\aleph_0} = c$$

ضمیمه دوم
آشنایی بااعداد اصلی

قضیه کانتور

“ هرمجموعه ازمجموعه توان خود کوچکتر است.”

- تبصره . وقتی گفته می شود که A از B کوچکتر است ، بدان معنی است که A با زیر مجموعه ای حقیقی از B هم ارز است ولی با خود B هم ارز نیست.

ضمیمه دوم
آشنایی بااعداد اصلی

فرضیه پیوستار کانتور

- کانتورحدس زد عددی بزرگتر از $\aleph_0$ و کوچکتر از c وجود ندارد. گودل در سال 1937 ثابت کرد که در چار چوب بنداشتهای تئوری مجموعه ها نمی توان این حدس را ثابت کرد. درسال 1964 کوهن ثابت کرد درهمین چارچوب نمی توان این حدس را رد کرد. این حدس معروف به فرضیه پیوستار کانتور یکی ازپارادوکسهای مهم به حساب می آید.

ضمیمه دوم
آشنایی بااعداد اصلی

نقص بنداشتها

- ازدیدگاه افلاطون گرایانه بنداشتهای ما برای توصیف تئوری اعداد حقیقی غیر کامل اند. این بنداشتهاآن قدر قوی نیستند که کل حقیقت را بیان کنند .
- درهرحال فرض پیوستار یا درست است یا نا درست اما ما به اندازه کافی مجموعه اعداد حقیقی را درک نکرده ایم که بتوانیم پاسخ درست را تشخیص دهیم.

ضمیمه
رواقیون

- حوزه درس این گروه دریکی ازرواقهای شهرآتنا منعقد می شده است.
- رواقین حکمت راتنها برای تعیین تکلیف زندگانی و دستور اخلاقی می دانستند.
- سرسلسله آنان زنون معاصر ابیقوربود.
- شاگرد زنون خروسیپوس جانشین وی بود.

مراجع

- ایوز، دیوید آشنایی با تاریخ ریاضیات ، ترجمه دکتر وحیدی اصل
- بارکر استفن ، فلسفه ریاضی ، ترجمه احمد بیرشک
- بیژن زاده محمد حسن مجله رشد آموزش ریاضی سال اول شماره اول
- بیژن زاده محمد حسن ذهنیت فلسفی در مدیریت آموزشی مجله رشد آموزش ریاضی شماره 39
- اسمیت فیلیپ جی ذهنیت فلسفی در آموزش ریاضی ترجمه دکتر محمد رضا برنجی
- مصاحب غلامحسین آنالیز ریاضی جلد اول
- دکتر معین محمد فرهنگ فارسی دوره 6 جلدی

مراجع

- Bisop E, the crisis in Contempory Mtthematics, Historia Mathematica1975
- Davis Martin, Unsolvablr Problems . Joh. Barvis Led.Handbook of mathematical logic1977
- Davis P J The Criterion Markers, Mathematics and Social Policy 1962

مراجع

- Dieudonnee, J, Modern Axiomatic Methods and Foundations of mathematics 1971
- Eves, H, Newsom C.V. An Introduction to the Foundations and Fundamental concepts of mathematics., 1965
- Frank Philipp, The Place of Logic and Metaphysics in advancement of modern Science 1948

مراجع

- Griffiths, H.B. and Hilton, P.J. Classical Mathematics
- Hilbert D. On The Infinite Phylosophy of Mathematics 1969
- Lakatos I. , A Renaissace of Empirism in the Reccent Phylosophy of Mathematics.
- Lakatos I.Problem in Phylosophy of mathematics 1967

مراجع

- Popper karl R, Objective Knoeledge. 1972
- Russel Bertrand. The Principal of Mathematics 1903
- Russel Bertrand. A History of Western Phylosophy 1945
- Russel Bertrand Human Knowledge 1948
- Russel Bertrand , Whitehead A.N. Principal Mathematica 1910
- Wittgenstein L. On Certainly 1969

پایان